Construction d'une fonction f continue de $[0, 1]$ dans certains espaces de Banach et non mesurable de $[0, 1]$ dans un autre, de topologie légèrement plus forte

Alexandre Dutrifoy*

Abstract

The purpose of this note is to construct a non-measurable function f defined on $[0, 1]$ with values in the Hölder space $C^r(\mathbb{R})$ ($r \in]0, 1[$) which, as a function with values in any space $C^{r'}(\mathbb{R})$ ($r' < r$), is continuous.

1 Motivation

Dans la littérature consacrée à l'équation d'Euler de la mécanique des fluides, la notation $L^\infty([0, T]; C^r(\mathbb{R}^d))$ est fréquemment utilisée pour désigner l'espace fonctionnel comprenant la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

lorsque la donnée initiale v_0 appartient à l'espace de Hölder $C^r(\mathbb{R}^d)$, d étant la dimension (généralement 2 ou 3).

*Boursier F.R.I.A.

Received by the editors January 1999.

Communicated by J. Mawhin.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 28A20, 40A30, 35Q30.

Key words and phrases : espaces de Hölder, mesurabilité, convergence.

Cette solution $v(t, x)$ est généralement obtenue comme la limite de solutions $v_n(t, x)$ continues de $[0, T]$ dans $C^{r'}(\mathbb{R}^d) \forall r' < r$ et bornées (uniformément en n) de $[0, T]$ dans $C^r(\mathbb{R}^d)$, qui correspondent à des régularisées de la donnée initiale. La suite v_n converge précisément de la façon suivante :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v_n(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{r'} \rightarrow 0 \quad \forall r' < r.$$

On en déduit facilement que v est continue de $[0, T]$ dans $C^{r'}(\mathbb{R}^d) \forall r' < r$ et bornée de $[0, T]$ dans $C^r(\mathbb{R}^d)$; en fait,

$$\|v(t, \cdot)\|_r \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|v_n(t, \cdot)\|_r \quad \forall t \in [0, T].$$

Nous avons voulu régler la question — purement académique — de savoir si ce type de convergence impliquait la *mesurabilité* de v , regardée comme fonction de $[0, T]$ dans l'espace de Banach $C^r(\mathbb{R}^d)$, au sens de Bourbaki (cf. fascicule de théorie de la mesure). L'exemple qui suit montre clairement que la réponse est négative.

2 Construction de f

Lemme 2.1. Soit $(a_q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ une suite bornée de réels non négatifs, et soit $r \in]0, 1[$. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-qr} a_q \sin^2 2^q x \end{aligned}$$

appartient à $C^r(\mathbb{R})$ et on a l'estimation

$$C' \sup_{q \geq 0} a_q \leq \|f\|_r \leq C \sup_{q \geq 0} a_q$$

pour des constantes C et $C' > 0$ indépendantes des a_q .

Démonstration. Par définition,

$$\|f\|_r = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x \neq y \\ |x - y| \leq 1}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r}.$$

Commençons par majorer $\|f\|_r$. D'abord

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &\leq \sup_{q \geq 0} a_q \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-qr} \\ &= \frac{1}{1 - 2^{-r}} \sup_{q \geq 0} a_q. \end{aligned}$$

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $|x - y| \leq 1$. Notons Q le nombre naturel pour

lequel $1 < 2^{Q+1}|x - y| \leq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
 & \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r} \\
 &= \frac{1}{|x - y|^r} \left| \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-qr} a_q (\sin^2 2^q x - \sin^2 2^q y) \right| \\
 &\leq \frac{2}{|x - y|^r} \sup_{q \geq 0} a_q \left(\sum_{q=0}^Q 2^{-qr} 2^q |x - y| + \sum_{q=Q+1}^{\infty} 2^{-qr} \right) \\
 &= 2 \sup_{q \geq 0} a_q \left(|x - y|^{1-r} \frac{1 - 2^{(Q+1)(1-r)}}{1 - 2^{1-r}} + |x - y|^{-r} 2^{-(Q+1)r} \frac{1}{1 - 2^{-r}} \right) \\
 &\leq C \sup_{q \geq 0} a_q,
 \end{aligned}$$

C étant bien fonction de r uniquement. D'autre part, pour minorer $\|f\|_r$, il suffit de remarquer que, $\forall p \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{|f(2^{-p}) - f(0)|}{|2^{-p} - 0|^r} &= \left| \sum_{q=0}^{\infty} 2^{(p-q)r} a_q \sin^2 2^{q-p} \right| \\
 &\geq a_p \sin^2 1
 \end{aligned}$$

puisque les a_q sont non négatifs. On peut donc prendre $C' = \sin^2 1$. ■

Lemme 2.2. *Il existe une suite $(a_q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, quels que soient $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ($t_1 \neq t_2$), il existe une valeur de q pour laquelle $|a_q(t_1) - a_q(t_2)| = 1$.*

Démonstration. Définissons, $\forall m \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, la fonction $b_{m,n} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en posant

$$b_{m,n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } m - 1/n \leq t \leq m + 1/n, \\ 2 + mn - nt & \text{si } m + 1/n \leq t \leq m + 2/n, \\ 2 - mn + nt & \text{si } m - 2/n \leq t \leq m - 1/n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Supposons par exemple $t_1 < t_2$. Il existe alors un naturel non nul n tel que $t_1 + 3/n < t_2$. Ce n étant fixé, on prend maintenant un rationnel m dans $]t_1, t_2[$ tel que $m - t_1 < 1/n$. On peut vérifier que $b_{m,n}(t_1) = 1$ et $b_{m,n}(t_2) = 0$.

On obtient une suite de a_q satisfaisante en dénombrant dans un ordre quelconque l'ensemble de tous les $b_{m,n}$.¹ ■

Considérons les fonctions

$$\begin{aligned}
 f &: [0, 1] \rightarrow C^r(\mathbb{R}) \\
 t &\mapsto \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-qr} a_q(t) \sin^2 2^q x,
 \end{aligned}$$

avec a_q comme ci-dessus, et

$$\begin{aligned}
 f_Q &: [0, 1] \rightarrow C^r(\mathbb{R}) \\
 t &\mapsto \sum_{q=0}^Q 2^{-qr} a_q(t) \sin^2 2^q x
 \end{aligned}$$

¹Cela peut se faire sans l'aide de l'axiome du choix.

($Q = 1, 2, \dots$). En utilisant les deux lemmes, on met facilement en évidence un phénomène curieux. Pour commencer, chaque f_Q est continue de $[0, 1]$ dans $C^r(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \|f_Q(t) - f_Q(s)\|_r &\leq C \sup_{0 \leq q \leq Q} |a_q(t) - a_q(s)| \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow s, \end{aligned}$$

les fonctions a_q étant continues. On a

$$\begin{aligned} \|f_Q(t)\|_r &\leq C \sup_{0 \leq q \leq Q} a_q(t) \\ &= C \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_r &\leq C \sup_{q \geq 0} a_q(t) \\ &= C \\ &= \sup_{q \geq 0} \|f_Q(t)\|_r, \end{aligned}$$

ce qui est normal. De plus, (f_Q) converge vers f dans $C^{r'}(\mathbb{R})$, $\forall r' < r$ et uniformément en t :

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_Q(t)\|_{r'} &= \left\| \sum_{q=Q+1}^{\infty} 2^{-qr} a_q(t) \sin^2(2^q \cdot) \right\|_{r'} \\ &= \left\| \sum_{q=Q+1}^{\infty} 2^{-qr'} 2^{-q(r-r')} a_q(t) \sin^2(2^q \cdot) \right\|_{r'} \\ &\leq C \sup_{q \geq Q+1} 2^{-q(r-r')} a_q(t) \\ &\leq C 2^{-(Q+1)(r-r')} \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } Q \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, en particulier, f est continue de $[0, 1]$ dans $C^{r'}(\mathbb{R}) \forall r' < r$. Regardons finalement la “même” fonction, mais à valeurs dans $C^r(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(s)\|_r &\geq C' \sup_{q \geq 0} |a_q(t) - a_q(s)| \\ &= C' \end{aligned}$$

quels que soient t et s distincts. Donc la restriction de f à un compact de mesure non nulle inclus dans $[0, 1]$ n'est jamais continue, et par conséquent f n'est pas mesurable.²

ULB, Math., Campus Plaine CP 214
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles

²On peut aussi remarquer que $f([0, 1])$ n'est pas séparable pour la topologie induite par $C^r(\mathbb{R})$.