

Sur la stabilité exponentielle des systèmes hyperboliques du premier ordre à coefficients L^∞ : Application aux échangeurs thermiques couplés.

Boumediène Chentouf Cheng-Zhong Xu Gauthier Sallet

Résumé

Cet article traite le problème de la stabilité exponentielle d'un système composé de deux échangeurs thermiques à contre-courant. Celui-ci sera formulé sous une forme abstraite de système hyperbolique à coefficients variables (d'espace), bornés mais discontinus. En utilisant la méthode classique de régularisation et la méthode des caractéristiques, on montre dans un cadre assez large la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Ce résultat est ensuite appliqué à notre système d'échangeurs thermiques pour établir sa stabilité exponentielle.

Abstract

This paper deals with exponential stability for a large class of first order symmetric hyperbolic linear systems with L^∞ space variable coefficients. By using the classical method of regularization and the method of characteristics, we prove that such systems are exponentially stable without any smoothness assumption on the coefficients. Since our motivation comes from a coupled heat exchangers system, we give an interesting application to this physical system met in chemical engineering.

Received by the editors June 2001.

Communicated by V. Blondel.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 35L50, 47D60, 65M25, 93B07, 93D20.

Key words and phrases : Echangeur thermique, système hyperbolique symétrique à coefficients discontinus, régularisation, caractéristiques, stabilité exponentielle.

1 Introduction

La motivation principale de ce travail est l'étude de la stabilité exponentielle d'un couplage de deux échangeurs thermiques à contre-courant. Ce problème, posé dans [7], a un intérêt dans l'industrie de transformation (chimie, génie des procédés,...). L'échangeur thermique **simple** a d'ores et déjà fait l'objet de nombreuses recherches et études [6], [11], [17], [18]. Le système, qu'on considère dans cet article, est décrit par une série d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique. En formulant ces équations sous une forme abstraite, on obtient un système symétrique hyperbolique à coefficients variables (d'espace), bornés mais **discontinus**. Notons qu'il existe une littérature riche sur l'étude de la stabilité et la contrôlabilité des systèmes linéaires hyperboliques à coefficients constants ou variables (voir [12], [13], [14], [15], [4],...). Néanmoins, ces résultats font appel à des conditions (non satisfaites dans notre cas) telle que la différentiabilité des coefficients du système. En effet, dans [12], les auteurs ont montré la stabilité exponentielle pour des systèmes hyperboliques dissipatifs à $n + 1$ variables indépendantes : n variables d'espace x_1, x_2, \dots, x_n et une variable du temps t . Les coefficients sont supposés indépendants de t et suffisamment différentiables par rapport à chaque variable x_i , $i = 1, \dots, n$. Par ailleurs, Russel a considéré des systèmes hyperboliques à deux variables indépendantes et à coefficients continûment différentiables en x (voir [13], [14] et [15]). Il démontre grâce à la méthode des caractéristiques que le système considéré est exponentiellement stable. Dans le cas où les coefficients du système sont dépendants du temps t et non réguliers, la situation est différente dans la mesure où le système est vu comme un système bilinéaire (voir [16]). L'auteur montre alors un résultat d'observabilité exacte et de stabilité exponentielle.

La contribution principale de ce travail est la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes symétriques hyperboliques linéaires à coefficients L^∞ sans supposer aucune hypothèse de régularité sur les coefficients. Plus précisément, les coefficients de notre système étant discontinus, nous avons saisi l'occasion, plutôt que de nous limiter au cadre restreint de l'échangeur, de mener une étude générale de la stabilité d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients L^∞ . Nous développerons alors dans la ligne du travail de [16] des outils pouvant s'adapter à notre classe de systèmes. Cette approche consiste à considérer dans un premier temps le système à coefficients régularisés [1]. On vérifie que ce dernier est bien posé au sens des semi-groupes d'opérateurs linéaires puis on montre qu'il est exponentiellement stable. La preuve, inspirée par les travaux de Russell (voir [13] et [14]), est basée sur la méthode des caractéristiques souvent utilisés pour les systèmes hyperboliques linéaires et même non linéaires [3]. On établit enfin un certain résultat de convergence qui permet d'étendre le résultat de stabilité au système d'origine à coefficients dans L^∞ . Finalement, nous appliquerons sur l'échangeur les résultats théoriques obtenus pour conclure la stabilité exponentielle du système physique. L'intérêt des résultats de ce travail est double : primo, étendre les résultats bien connus sur la stabilité des systèmes linéaires hyperboliques à coefficients réguliers à des systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ seulement. Secundo, donner une réponse positive à la question posée dans [7].

Ce papier est organisé comme suit : la section 2 est consacrée à la description du système physique et la formulation de la dynamique des températures des fluides des

échangeurs sous la forme standard de système hyperbolique à coefficients discontinus. On montre dans la section 3 la stabilité exponentielle du système, à coefficients régularisés, correspondant au système initial. Ensuite, un résultat de convergence est démontré permettant d'établir la stabilité exponentielle du système initial. Enfin, on applique dans la dernière section les résultats de cette étude théorique aux échangeurs.

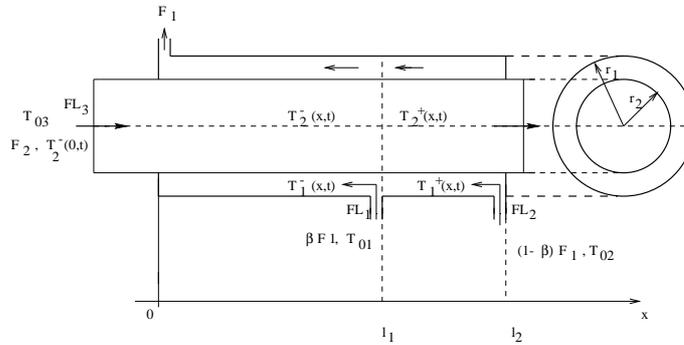


FIG. 1 – Deux échangeurs thermiques couplés.

2 Formulation du problème

Nous allons consacrer notre étude à un système de deux échangeurs thermiques couplés, à contre-courant. Ce système, illustré par la figure 1, fonctionne avec trois fluides d'entrée FL_1 , FL_2 et FL_3 . Le fluide FL_1 est éjecté dans l'échangeur en $x = l_1$ où il sera mélangé avec le fluide FL_2 parvenant de l'extrémité $x = l_2$. Le but du processus est de chauffer le fluide FL_3 en mélangeant les fluides FL_1 et FL_2 . Les caractéristiques physiques et thermiques du système sont regroupées dans le tableau suivant :

Désignation	Fluides		
	FL_1	FL_2	FL_3
Masse volumique	ρ_1	ρ_1	ρ_2
Chaleur massique	C_{p1}	C_{p1}	C_{p2}
Section	s_1	s_1	s_2
Températures			
$0 \leq x \leq l_1$	$T_1^-(x,t)$	$T_1^-(x,t)$	$T_2^-(x,t)$
$l_1 \leq x \leq l_2$		$T_1^+(x,t)$	$T_2^+(x,t)$
Coefficient de transmission de chaleur	k	k	k
Vitesse du fluide	βF_1	$(1-\beta)F_1$	F_2
Température d'entrée	T_{01}	T_{02}	T_{03}

Table 1 : Paramètres et caractéristiques du système.

Par application du premier principe de la thermodynamique et le bilan énergétique, on obtient deux systèmes d'équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique

des températures des fluides (voir [7]) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^-(x,t)}{\partial t} &= \frac{F_1}{\rho_1 s_1} \frac{\partial T_1^-(x,t)}{\partial x} - \frac{kl}{C_{p1}\rho_1 s_1} [T_1^-(x,t) - T_2^-(x,t)] \\ \frac{\partial T_2^-(x,t)}{\partial t} &= -\frac{F_2}{\rho_2 s_2} \frac{\partial T_2^-(x,t)}{\partial x} + \frac{kl}{C_{p2}\rho_2 s_2} [T_1^-(x,t) - T_2^-(x,t)] \end{aligned} \right\}, x \in (0, l_1)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^+(x,t)}{\partial t} &= (1-\beta) \frac{F_1}{\rho_1 s_1} \frac{\partial T_1^+(x,t)}{\partial x} - \frac{kl}{C_{p1}\rho_1 s_1} [T_1^+(x,t) - T_2^+(x,t)] \\ \frac{\partial T_2^+(x,t)}{\partial t} &= -\frac{F_2}{\rho_2 s_2} \frac{\partial T_2^+(x,t)}{\partial x} + \frac{kl}{C_{p2}\rho_2 s_2} [T_1^+(x,t) - T_2^+(x,t)] \end{aligned} \right\}, x \in (l_1, l_2)$$

avec $0 < \beta < 1$. Les conditions aux bords sont données par

$$\begin{cases} T_1^-(l_1, t) = (1-\beta)T_1^+(l_1, t) + \beta T_{01}, \\ T_2^-(l_1, t) = T_2^+(l_1, t), \\ T_1^+(l_2, t) = T_{02}, \\ T_2^-(0, t) = T_{03}, \end{cases}$$

où T_{01} , T_{02} et T_{03} sont les températures d'entrée . On a de plus les conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} T_1^-(x, 0) &= \phi_1^-(x), \\ T_2^-(x, 0) &= \phi_2^-(x), \end{aligned} \right\}, x \in (0, l_1) \quad \& \quad \left. \begin{aligned} T_1^+(x, 0) &= \phi_1^+(x), \\ T_2^+(x, 0) &= \phi_2^+(x), \end{aligned} \right\}, x \in (l_1, l_2).$$

Posons $m_i = \frac{F_i}{\rho_i s_i}$ et $K_i = \frac{kl}{C_{pi}\rho_i s_i}$, $i = 1, 2$. Dans [7], il a été démontré que le système ci-dessus s'écrit après un changement de variables comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1(x,t)}{\partial t} = m_1 \frac{\partial R_1(x,t)}{\partial x} - K_1(R_1(x,t) - R_2(x,t)), \\ \frac{\partial R_2(x,t)}{\partial t} = -m_2 \frac{\partial R_2(x,t)}{\partial x} + K_2(R_1(x,t) - R_2(x,t)), \end{cases} \quad x \in (0, l_1) \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = (1-\beta)m_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} - K_1(T_1(x,t) - T_2(x,t)), \\ \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = -m_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} + K_2(T_1(x,t) - T_2(x,t)), \end{cases} \quad x \in (l_1, l_2) \quad (2.2)$$

avec les conditions aux bords

$$T_1(l_2, t) = R_2(0, t) = 0 \quad \& \quad R_2(l_1, t) = T_2(l_1, t), \quad R_1(l_1, t) = (1-\beta)T_1(l_1, t). \quad (2.3)$$

Nous allons désormais nous intéresser au système (2.1)-(2.3) qui sera formulé sous la forme standard d'équation d'évolution. Pour cela, soit Π , η_1 et η_2 les fonctions suivantes :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1; & x \in (0, l_1) \\ 1-\beta; & x \in (l_1, l_2) \end{cases}, \quad \eta_1(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} R_1(x, t); & x \in (0, l_1) \\ (1-\beta)\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} T_1(x, t); & x \in (l_1, l_2) \end{cases},$$

$$\eta_2(x, t) = \begin{cases} R_2(x, t); & x \in (0, l_1) \\ T_2(x, t); & x \in (l_1, l_2). \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que le système (2.1)-(2.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial t} = m_1 \Pi(x) \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial x} - K_1 \eta_1(x, t) + \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \eta_2(x, t), \\ \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial t} = -m_2 \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} \eta_1(x, t) - K_2 \eta_2(x, t), \end{cases} \quad (2.4)$$

pour $(x, t) \in (0, l_2) \times (0, +\infty)$. Les conditions aux bords et les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} \eta_1(l_2, t) = \eta_2(0, t) = 0, \\ \eta_1(x, 0) = \phi_1(x), \quad \eta_2(x, 0) = \phi_2(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont composées de fonctions connues. Comme nous l'avons déjà signalé, le système (2.4)-(2.5) est un système linéaire hyperbolique à deux variables indépendantes x et t (voir [5], [8]). De plus, il est aisé de voir que ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \left(F \frac{\partial}{\partial x} + B \right) \eta(t), \\ \eta(0) = \phi, \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\eta(t) = (\eta_1(\cdot, t), \eta_2(\cdot, t))$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et

$$F(x) = \begin{bmatrix} m_1 \Pi(x) & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} -K_1 & \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \\ \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} & -K_2 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

De plus, l'opérateur $F \frac{\partial}{\partial x} + B$ a pour domaine

$$D = \{(\eta_1, \eta_2) \in H^1(0, l_2) \times H^1(0, l_2); \eta_1(l_2) = \eta_2(0) = 0\}.$$

Néanmoins, la particularité de notre système est la discontinuité de certains coefficients tels que $m_1 \Pi(x)$ et $\sqrt{K_1 K_2} \Pi(x)$... Dès lors, on est amené à étudier la stabilité d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients discontinus.

3 Stabilité d'une classe de systèmes linéaires hyperboliques à coefficients L^∞

Motivés par la forme du système (2.6)-(2.7), nous nous intéressons dans ce paragraphe à la stabilité exponentielle du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x) \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial x} \\ -F_2(x) \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(x, t) \\ R_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$R_1(l, t) = 0 \quad \& \quad R_2(0, t) = 0 \quad (\text{conditions frontières}), \quad (3.2)$$

$$R_1(x, 0) = \phi_1(x) \quad \& \quad R_2(x, 0) = \phi_2(x) \quad (\text{conditions initiales}), \quad (3.3)$$

où l est une constante strictement positive et $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$. Posons

$$F(\cdot) = \begin{bmatrix} F_1(\cdot) & 0 \\ 0 & -F_2(\cdot) \end{bmatrix}, B(\cdot) = \begin{bmatrix} B_{11}(\cdot) & B_{12}(\cdot) \\ B_{21}(\cdot) & B_{22}(\cdot) \end{bmatrix}, N(\cdot) = \begin{bmatrix} N_1(\cdot) & 0 \\ 0 & N_2(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

On suppose que le système (3.1)-(3.3) satisfait les hypothèses suivantes :

H.I : Les fonctions $F_i, B_{ij} \in L^\infty(0, l)$ pour $i, j = 1, 2$.

H.II : Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $F_i(x) \geq \alpha$ p.p. $x \in (0, l)$, $i = 1, 2$.

H.III : Il existe des fonctions de pondération $N_1, N_2 \in L^\infty(0, l)$ avec $N_i(x) \geq \alpha > 0$, $i = 1, 2$ telles que

H.IIIa : pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, $y^\top N(x)B(x)y \leq 0$ p.p. $x \in (0, l)$.

H.IIIb : la fonction $N_1(x)F_1(x)$ est p.p. monotone non-décroissante, i.e., pour chaque $h > 0$, $N_1(x+h)F_1(x+h) - N_1(x)F_1(x) \geq 0$ p.p. $x \in (0, l)$ et $N_2(x)F_2(x)$ est p.p. monotone non-croissante.

Prenons pour espace d'état du système l'espace de Hilbert réel

$$\mathcal{H} = L^2(0, l) \times L^2(0, l)$$

muni du produit scalaire usuel. Le système (3.1)-(3.3) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = AR(t), \\ R(0) = \phi \end{cases} \quad (3.5)$$

où $R(t) = (R_1(\cdot, t), R_2(\cdot, t))$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et A est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{D}(A) = \{(f_1, f_2) \in H^1(0, l) \times H^1(0, l); f_1(l) = f_2(0) = 0\},$$

et

$$A = F \frac{\partial}{\partial x} + B.$$

Soit $Q_T = \{(x, t); x \in (0, l), t \in (0, T)\}$ pour chaque $T > 0$.

Définition 1. Une fonction $R(x, t)$ est dite solution régulière du système (3.1)-(3.3) si $R_i(\cdot, \cdot) \in H^1(Q_T)$, $i = 1, 2$ et satisfait les équations (3.1) dans $L^2(Q_T)$ ainsi que les conditions aux bords (3.2) dans $L^2(0, T)$ et les conditions initiales dans $L^2(0, l)$.

3.1 Régularisation du système initial (3.1)-(3.3)

En utilisant la méthode de régularisation, il paraît plausible que les techniques citées dans [1] (voir aussi [9]) peuvent être adaptées à notre cas. Nous exposerons tout d'abord des résultats préliminaires qui nous seront utiles par la suite. La preuve du lemme suivant est immédiate.

Lemme 1. Soit $f \in L^\infty(0, l)$ telle que $0 < \alpha < f(x)$ p.p. $x \in (0, l)$. Il existe alors un prolongement de f sur \mathbb{R} , noté \hat{f} , tel que $\alpha \leq \hat{f}(x) \leq \|f\|_\infty$. De plus, si f est monotone sur $(0, l)$ alors il est de même pour \hat{f} sur \mathbb{R} .

Dans la suite de ce paragraphe, on notera par f^h ($h > 0$) la fonction régularisée de f définie par

$$f^h(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \omega_h(y - x) dy,$$

où $\omega_h(x)$ est la fonction régularisante [1]. Posons $\tilde{B}(x) = N(x)B(x)$, $\tilde{F}_1(x) = N_1(x)F_1(x)$ et $\tilde{F}_2(x) = N_2(x)F_2(x)$. Considérons ensuite le système régularisé associé à (3.1)-(3.3) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^h(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2^h(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{F}_1^h(x)}{N_1^h(x)} \frac{\partial R_1^h(x, t)}{\partial x} \\ -\frac{\tilde{F}_2^h(x)}{N_2^h(x)} \frac{\partial R_2^h(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{N_1^h(x)} & \frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{N_1^h(x)} \\ \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{N_2^h(x)} & \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{N_2^h(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^h(x, t) \\ R_2^h(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$R_1^h(l, t) = 0 \ \& \ R_2^h(0, t) = 0, \quad (3.7)$$

$$R_1^h(x, 0) = \phi_1(x) \ \& \ R_2^h(x, 0) = \phi_2(x), \quad (3.8)$$

pour tout $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Il est important de préciser que les variables d'état R_1^h et R_2^h représentent les solutions correspondantes au système à coefficients régularisés et non pas les solutions régularisées du problème d'origine (3.1)-(3.3). Les propriétés des fonctions régularisées du système (3.6)-(3.8) sont résumées dans le lemme suivant :

Lemme 2. 1) Les coefficients du système (3.6)-(3.8) sont C^∞ et vérifient les hypothèses H.I-H.III avec les fonctions de pondération N_1^h et N_2^h .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i, j = 1, 2$, on a :

$$\frac{\alpha^2}{\|N_i\|_\infty} \leq \frac{\tilde{F}_i^h(x)}{N_i^h(x)} \leq \|N_i\|_\infty \frac{\|F_i\|_\infty}{\alpha}, \quad \|\frac{\tilde{B}_{ij}^h(x)}{N_i^h(x)}\|_\infty \leq \|N_i\|_\infty \frac{\|B_{ij}\|_\infty}{\alpha}.$$

3) Pour tout entier $1 \leq p < +\infty$ et pour toute constante $b > a$,

$$\left\| \frac{\tilde{F}_i^h}{N_i^h} - \hat{F}_i \right\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \quad \left\| \frac{\tilde{B}_{ij}^h}{N_i^h} - \hat{B}_{ij} \right\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \quad i, j = 1, 2.$$

4) Pour tout entier $i, j = 1, 2$ et pour toute constante $b > a$, on a

$$\frac{\tilde{F}_i^h}{N_i^h} \xrightarrow{*} F_i, \quad \frac{\tilde{B}_{ij}^h}{N_i^h} \xrightarrow{*} B_{ij},$$

dans $L^\infty(a, b)$ pour $h \rightarrow 0^+$.

Preuve du Lemme 2. Les trois premières assertions résultent immédiatement des définitions des fonctions régularisées, du lemme 1 et des résultats classiques des fonctions régularisées [9]. D'autre part, pour tout $g \in L^2(a, b)$, l'inégalité de Hölder implique

$$\left| \int_a^b \left[\frac{\tilde{F}_i^h}{N_i^h} - \hat{F}_i \right] (x) g(x) dx \right| \leq \left\| \frac{\tilde{F}_i^h}{N_i^h} - \hat{F}_i \right\|_{L^2(a,b)} \|g\|_{L^2(a,b)}.$$

Comme $L^2(a, b)$ est dense dans $L^1(a, b)$, ceci entraîne grâce à l'assertion 3) que $\frac{\tilde{F}_i^h}{N_i^h}$ converge faiblement* vers F_i dans $L^\infty(a, b)$ pour $h \rightarrow 0^+$. De la même manière, on démontre que $\frac{\tilde{B}_{ij}^h}{N_i^h} \xrightarrow{*} B_{ij}$, dans $L^\infty(a, b)$. L'assertion 4) est alors démontrée. Ce qui achève la preuve du lemme. \blacksquare

Ecrivons maintenant le système (3.6)-(3.8) sous la forme d'équation d'évolution. Pour cela, nous ferons les notations suivantes :

$$F_h = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^h/N_1^h & 0 \\ 0 & -\tilde{F}_2^h/N_2^h \end{bmatrix}, \quad B_h = [\tilde{B}_{ij}^h/N_i^h], \quad i, j = 1, 2.$$

Soit $\mathcal{H} = L^2(0, l) \times L^2(0, l)$ l'espace d'état muni du produit scalaire suivant :

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle_h = \int_0^l [f_1 g_1 N_1^h + f_2 g_2 N_2^h] dx, \quad \text{pour tout } h > 0.$$

Il est alors naturel de définir l'opérateur linéaire A_h par

$$\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{D}(A) = \{(R_1, R_2) \in H^1(0, l) \times H^1(0, l); R_1(l) = R_2(0) = 0\}, \quad (3.9)$$

et

$$A_h = F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h. \quad (3.10)$$

En utilisant les notations ci-dessus, le système (3.6)-(3.8) devient :

$$\begin{cases} \dot{R}^h(t) = A_h R^h(t), \\ R^h(0) = \phi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Remarque 1. La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ sur \mathcal{H} est notée $\| \cdot \|_h$. En utilisant le Lemme 2, on montre facilement que la norme $\| \cdot \|_h$ est équivalente à la norme usuelle de \mathcal{H} et ceci **indépendamment** du paramètre h .

Lemme 3. L'opérateur $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ de domaine $\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{D}(A)$ est générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions $W_{F_h}(t)$ dans \mathcal{H} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$.

Preuve du Lemme 3.

• $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est dissipatif : Soit $R^h = (R_1^h, R_2^h) \in \mathcal{D}(A_h)$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} 2 \left\langle F_h \frac{\partial R^h}{\partial x}, R^h \right\rangle_h &= -\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0))^2 - \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l))^2 \\ &\quad + \int_0^l \left[-\tilde{F}_{1x}^h(x) (R_1^h(x))^2 + \tilde{F}_{2x}^h(x) (R_2^h(x))^2 \right] dx, \end{aligned}$$

où F_x désigne la dérivée de F . En utilisant la monotonie de F_i^h , $i = 1, 2$ (voir l'assertion 1) du Lemme 2), la dernière égalité implique

$$\left\langle F_h \frac{\partial R^h}{\partial x}, R^h \right\rangle_h \leq -\frac{1}{2} \left(\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0))^2 + \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l))^2 \right) \leq 0.$$

D'où la dissipativité de $F_h \frac{\partial}{\partial x}$.

• $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est maximal : Soit $f^h = (f_1^h, f_2^h) \in \mathcal{H}$. Il s'agit de trouver $R^h = (R_1^h, R_2^h) \in \mathcal{D}(A_h)$ tel que $(I - F_h \frac{\partial}{\partial x})R^h = f^h$. Cette dernière équation s'écrit :

$$\begin{cases} R_1^h(x) - (\tilde{F}_1^h/N_1^h)(x) R_{1x}^h(x) = f_1^h(x), \\ R_2^h(x) - (\tilde{F}_2^h/N_2^h)(x) R_{2x}^h(x) = f_2^h(x), \\ R_1^h(l) = R_2^h(0) = 0, \\ R_1, R_2 \in H^1(0, l). \end{cases}$$

On vérifie facilement que les équations différentielles ci-dessus admettent deux solutions uniques. Ce qui prouve la maximalité de $F_h \frac{\partial}{\partial x}$. Par conséquent, $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est m -dissipatif. Ceci implique que le domaine $\mathcal{D}(A_h)$ est dense dans \mathcal{H} [2]. Dès lors, notre lemme découle du théorème de Lumer-Phillips [10]. ■

Nous avons aussi le résultat suivant :

Lemme 4. *L'opérateur A_h défini par (3.9)-(3.10) est m -dissipatif.*

Preuve du Lemme 4. Soit $R^h \in \mathcal{D}(A_h)$. L'hypothèse H.IIIa et le lemme 3 donnent,

$$\langle A_h R^h, R^h \rangle_h = \left\langle \left(F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h \right) R^h, R^h \right\rangle_h \leq \frac{1}{2} \left[\tilde{F}_1^h(0) \left(R_1^h(0) \right)^2 - \tilde{F}_2^h(l) \left(R_2^h(l) \right)^2 \right] \leq 0.$$

La dissipativité de A_h est donc prouvée. Il reste à montrer que A_h est maximal. Or, on sait que $A_h = F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h$. De plus, l'opérateur B_h étant dissipatif et borné dans \mathcal{H} , la maximalité de A_h est une conséquence immédiate du corollaire 3.3, pp. 82 [10]. ■

En utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires (voir [2] et [10]), on obtient la proposition :

Proposition 1. *1) L'opérateur A_h défini par (3.9)-(3.10) est générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ sur \mathcal{H} . De plus, la relation entre $U_{F_h, B_h}(t)$ et $W_{F_h}(t)$ est donnée par la formule de la variation de la constante suivante*

$$U_{F_h, B_h}(t)\phi = W_{F_h}(t)\phi + \int_0^t W_{F_h}(t - \tau) B_h U_{F_h, B_h}(\tau)\phi \, d\tau,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{H}$ et $0 \leq \tau \leq t$.

2) Pour tout $\phi \in D_\infty = \cap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}(A_h^n)$, la solution $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) appartient à D_∞ et $R^h(x, t) = (U_{F_h, B_h}(t)\phi)(x)$ est dans $C^\infty([0, T] \times [0, l])$.

3.2 Stabilité du système à coefficients régularisés (3.6)-(3.8)

Le but est de démontrer la stabilité exponentielle du système à coefficients régularisés (3.6)-(3.8) ; plus précisément, nous allons établir une inégalité d'observabilité du type

$$\int_0^{T_0} \left[\tilde{F}_1^h(0) \left(R_1^h(0, t) \right)^2 + \tilde{F}_2^h(l) \left(R_2^h(l, t) \right)^2 \right] dt \geq K \|\phi\|_h^2,$$

avec T_0 et K deux constantes positives indépendantes de h . La méthode utilisée, introduite par Russell [13], est basée sur la technique des courbes caractéristiques du système. Cette technique a été adaptée aux systèmes bilinéaires [16] et non linéaires [3].

Considérons les deux courbes caractéristiques C_1 et C_2 du système (3.6)-(3.8) (voir figure 2). Ces deux courbes sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$C_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{\tilde{F}_1^h}{N_1^h}(x_1), \\ x_1(0) = l, \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \frac{\tilde{F}_2^h}{N_2^h}(x_2), \\ x_2(t_1) = 0, \end{cases}$$

avec t_1 vérifiant $x_1(t_1) = 0$. D'autre part, on choisit t_2 tel que $x_2(t_2) = l$ (voir fig. 2). Etant donné que $F_i, N_i \geq \alpha > 0, i = 1, 2$, il est clair que les fonctions $x_i(t)$,

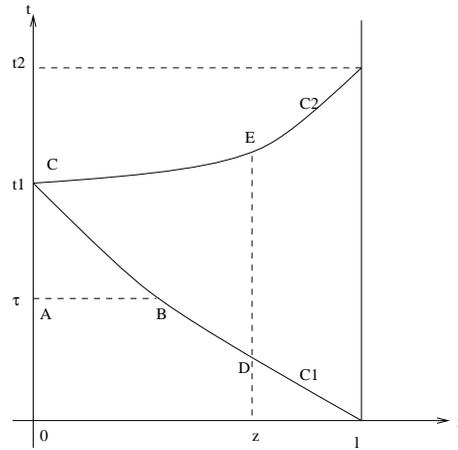


FIG. 2 – Les caractéristiques du système (3.6)-(3.8).

$i = 1, 2$, sont respectivement des fonctions C_1 -difféomorphismes sur $(0, t_i)$, $i = 1, 2$. Notons alors par x_i^{-1} l'inverse de x_i . Un calcul direct montre que

$$t_1 \leq t_2 \leq \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}.$$

Dans la suite, $\Delta(IJK)$ représente la surface limitée par les courbes joignant les points I, J et K . On note aussi par $\partial(IJK)$ le bord de la surface $\Delta(IJK)$. D'après la Proposition 1, pour chaque $\phi \in D_\infty$ la solution correspondante appartient à $C^\infty(\Delta(IJK))$. L'application de la formule de Green est donc justifiée.

Lemme 5. *La solution régulière $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) issue de la condition initiale $\phi \in D_\infty$ satisfait l'inégalité suivante :*

$$\int_0^l \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) \phi_1^2(x) + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) \phi_2^2(x) \right] dx \leq e^{\gamma t_1} \int_0^{t_1} \left[(R_1^h(0, t))^2 + \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 \right] dt, \quad (3.12)$$

où $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha} \max \left\{ \|N_1\|_\infty \left(2\|B_{11}\|_\infty + \|B_{12}\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} \|B_{21}\|_\infty \|N_2\|_\infty \|F_1\|_\infty \right); \|N_1\|_\infty \left(2\|B_{22}\|_\infty + \|B_{21}\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} \|B_{12}\|_\infty \|N_1\|_\infty \|F_2\|_\infty \right) \right\}$.

Preuve du Lemme 5. On vérifie facilement que les deux équations du système (3.6)-(3.8) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} (R_1^h(x, t))^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(R_1^h(x, t))^2 \right] + 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h} (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} R_1^h(x, t) R_2^h(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h} (R_2^h(x, t))^2 \right] &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[(R_2^h(x, t))^2 \right] + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h} (R_2^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} R_1^h(x, t) R_2^h(x, t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En additionnant membre à membre les équations de (3.13) et en intégrant la somme sur le domaine $\Delta(ABC)$ (voir fig. 2), on déduit que

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R_1^h(x, t))^2 - (R_2^h(x, t))^2 \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right] \right\} dx dt \\ &= \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned}$$

L'application de la formule de Green au membre gauche de la dernière égalité permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial(ABC)} \left[(R_1^h(x, t))^2 - (R_2^h(x, t))^2 \right] dt + \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right] dx \\ &= \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, en intégrant le long des trois chemins de $\partial(ABC)$ et en utilisant la condition au bord $R_2^h(0, t) = 0$, (3.14) devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1(\tau)} \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right] dx \\ & - \int_\tau^{t_1} \left[\left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 + (R_1^h(0, t))^2 \right] dt \\ &= \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Posons

$$M(\tau) = \int_0^{x_1(\tau)} \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right] dx.$$

En dérivant alors (3.15) par rapport à τ , il suit que :

$$\begin{aligned} \dot{M}(\tau) = & - \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(\tau)) \right) (R_2^h(x_1(\tau), \tau))^2 - (R_1^h(0, \tau))^2 \\ & + \int_0^{x_1(\tau)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, \tau))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, \tau))^2 \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, \tau) R_2^h(x, \tau) \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'autre part, on sait d'après le Lemme 2 que le système (3.6)-(3.8) satisfait les hypothèses H.II et H.III. Dès lors, on peut démontrer l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, \tau))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, \tau))^2 + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, \tau) R_2^h(x, \tau) \\ & \geq -\gamma_1 \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right], \end{aligned}$$

où γ_1 a été définie dans l'énoncé du Lemme 5. En combinant cette dernière inégalité avec (3.16), on obtient :

$$\dot{M}(\tau) \geq - \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(\tau)) \right) (R_2^h(x_1(\tau), \tau))^2 - (R_1^h(0, \tau))^2 - \gamma_1 M(\tau).$$

Enfin, en résolvant cette inéquation différentielle on déduit l'inégalité voulue. \blacksquare

Lemme 6. *La solution régulière $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) issue de la condition initiale $\phi \in D_\infty$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \\ & \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^l e^{\gamma_2 z} \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) \left[(R_1^h(z, x_2^{-1}(z)))^2 + (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 \right] dz, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où

$$\gamma_2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\|N_2\|_\infty \|B_{21}\|_\infty + \|N_1\|_\infty \|B_{12}\|_\infty + 2 \max\{\|N_1\|_\infty \|B_{11}\|_\infty, \|N_2\|_\infty \|B_{22}\|_\infty\} \right).$$

Preuve du Lemme 6. La soustraction membre à membre des équations de (3.13) nous donne :

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 - \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(R_1^h(x, t))^2 + (R_2^h(x, t))^2 \right] \\ & = - \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 + \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} - \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De façon analogue à la preuve du lemme précédent, on intègre l'équation (3.18) sur le domaine $\Delta(CDE)$ (voir fig. 2) puis on applique la formule de Green. On obtient :

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^z \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) \left[(R_1^h(x, x_2^{-1}(x)))^2 + (R_2^h(x, x_1^{-1}(x)))^2 \right] dx \\ &= 2 \iint_{\Delta(CDE)} \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right] dt dx \end{aligned}$$

où

$$G(z) = \int_{x_1^{-1}(z)}^{x_2^{-1}(z)} \left[(R_1^h(z, t))^2 + (R_2^h(z, t))^2 \right] dt.$$

Ceci entraîne après dérivation par rapport à z :

$$\begin{aligned} \dot{G}(z) &= \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) \left[(R_1^h(z, x_2^{-1}(z)))^2 + (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 \right] \\ &= 2 \int_{x_1^{-1}(z)}^{x_2^{-1}(z)} \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) (R_2^h(z, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) (R_1^h(z, t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} \right) (z) R_1^h(z, t) R_2^h(z, t) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Compte tenu du Lemme 2 1), on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &2 \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) (R_2^h(z, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) (R_1^h(z, t))^2 + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} \right) (z) R_1^h(z, t) R_2^h(z, t) \right] \\ &\geq -\gamma_2 \left[(R_1^h(z, t))^2 + (R_2^h(z, t))^2 \right], \end{aligned}$$

où γ_2 a été introduit dans l'énoncé du Lemme 6. En reportant enfin l'inégalité ci-dessus dans (3.19) et en résolvant l'inéquation différentielle obtenue, on aboutit à l'inégalité (3.17). \blacksquare

Avant d'énoncer notre premier résultat principal, récrivons l'inégalité (3.17). Tout d'abord, il est clair que (3.17) entraîne que

$$\int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^l \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 dz.$$

Ce qui implique grâce au changement de variables $t = x_1^{-1}(z)$ que

$$\int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^{t_1} \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h} (x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 dt. \quad (3.20)$$

Le premier résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 1. Soit $T_0 = \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, on a :

- 1) Le système (3.6)-(3.8) est T_0 -observable.
- 2) Le système (3.6)-(3.8) est exponentiellement stable.

Preuve du Théorème 1. Par un argument standard de continuité et de densité de D_∞ dans \mathcal{H} , il suffit de démontrer le théorème pour tout $\phi \in D_\infty$. Soit $\phi \in D_\infty$ et soit $R^h(t)$ la solution du système (3.6)-(3.8) issue de ϕ . En combinant les inégalités (3.12) et (3.20) et en utilisant le fait que $t_1 \leq t_2 \leq T_0 = \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}$, il en découle

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) \phi_1^2(x) + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) \phi_2^2(x) \right] dx &\leq e^{\gamma_1 T_0} \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + e^{\gamma_2 l} (R_2^h(l, t))^2 \right] dt \\ &\leq e^{\gamma_1 T_0 + \gamma_2 l} \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + (R_2^h(l, t))^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Ce qui implique d'après le Lemme 2 que :

$$\|\phi\|_h^2 = \int_0^l \left[N_1^h \phi_1^2(x) + N_2^h \phi_2^2(x) \right] dx \leq C \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + (R_2^h(l, t))^2 \right] dt, \quad (3.21)$$

où C est une constante positive **indépendante** du paramètre h définie par :

$$C = \frac{e^{\gamma_1 T_0 + \gamma_2 l}}{\min \left\{ \frac{1}{\|F_1\|_\infty \|N_1\|_\infty}, \frac{1}{\|F_2\|_\infty \|N_2\|_\infty} \right\}}.$$

Le système (3.6)-(3.8) est donc T_0 -observable. Il est important de remarquer que l'hypothèse H.I implique que $\|F_i\|_\infty \|N_i\|_\infty \geq \alpha^2$, $i = 1, 2$. Dès lors, $C > \alpha^2$.

La preuve de l'assertion 2) est basée sur l'inégalité d'observabilité (3.21). On rappelle d'abord qu'en vertu du Lemme 4, on a pour tout $t > 0$,

$$\frac{d}{dt} \|R^h(t)\|_h^2 = 2 \langle A_h R^h(t), R^h(t) \rangle_h \leq -\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0, t))^2 - \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l, t))^2.$$

Comme $\tilde{F}_i^h \geq \alpha^2$, $i = 1, 2$ (voir Lemme 2, 1)), on obtient après integration

$$\|R^h(t)\|_h^2 - \|\phi\|_h^2 \leq -\alpha^2 \int_0^t \left[(R_1^h(0, \tau))^2 + (R_2^h(l, \tau))^2 \right] d\tau.$$

En combinant cette inégalité avec (3.21) et en utilisant le fait que $C > \alpha^2$ et la contraction du semi-groupe, on déduit que pour tout $t \geq T_0$,

$$\|R^h(t)\|_h \leq M e^{-\omega t} \|\phi\|_h,$$

où M et ω sont deux constantes positives **indépendantes** du paramètre h telles que :

$$M = \left(1 - \frac{\alpha^2}{C} \right)^{-1/2} > 0 \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{\ln \left(1 - \frac{\alpha^2}{C} \right)}{2T_0} > 0.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 1. ■

3.3 Stabilité du système initial (3.1)-(3.3)

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la stabilité exponentielle du système (3.1)-(3.3). Dans ce qui suit, on notera par

$$S_{a,b}^\infty(0, l) = \{f \in L^\infty(0, l); a \leq f(x) \leq b \text{ p.p}\}$$

et

$$C^\infty \cap S_{a,b}^\infty(0, l) = \left\{ f \in S_{a,b}^\infty(0, l); f \text{ est continûment différentiable} \right\}.$$

On va maintenant énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite [2].

Lemme 7. 1) Toute partie bornée de $L^\infty(0, l)$ est précompacte pour la topologie faible $*$. En particulier, $S_{a,b}^\infty(0, l)$ est précompacte pour la topologie faible $*$.
 2) L'ensemble $C^\infty \cap S_{a,b}^\infty(0, l)$ est dense dans $S_{a,b}^\infty(0, l)$ pour la topologie faible $*$.

Pour une raison de clarté, on notera $E = (E_1, E_2) \in L^\infty(0, l) \times L^\infty(0, l)$ et on écrira $E \in S_{a,b}^\infty(0, l)$ au lieu de $E \in S_{a,b}^\infty(0, l) \times S_{a,b}^\infty(0, l)$.

Proposition 2. Soit $T > 0$. Etant donnés N et F dans $S_{a,b}^\infty(0, l)$ vérifiant H.II et H.III, il existe un C_0 -semi-groupe de contractions $W_F(t)$ dans \mathcal{H} engendré par l'opérateur $F \frac{\partial}{\partial x}$. De plus, pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, l'application $F \rightarrow W_F(\cdot)\phi$ est continue pour la topologie faible $*$ de $S_{a,b}^\infty(0, l)$ et pour la topologie forte de $C((0, T); \mathcal{H})$.

Preuve de la Proposition 2. Soit N et F dans $S_{a,b}^\infty(0, l)$ vérifiant H.II et H.III. Il découle du Lemme 7 l'existence de suites de fonctions $L^n, N^n \in C^\infty \cap S_{a,b}^\infty(0, l)$ telles que pour tout $i = 1, 2, L_i^n \xrightarrow{*} F_i$ dans $L^\infty(a, b)$ pour $n \rightarrow +\infty$. En d'autres termes

$$F_i^n = \tilde{F}_i^n / N_i^n \xrightarrow{*} F_i \text{ dans } L^\infty(a, b) \text{ pour } n \rightarrow +\infty,$$

où $\tilde{F}_i^n = N_i^n L_i^n$. Compte tenu du lemme 3, il existe un C_0 semi-groupe de contractions $W_{F^n}(t)$, sur \mathcal{H} , engendré par l'opérateur $F^n \frac{\partial}{\partial x}$. Prenons maintenant $\phi \in D_\infty$. En s'inspirant des techniques de calcul utilisées par Xu [16], on peut montrer que la suite $W_{F^n}(\cdot)\phi$ est une suite de Cauchy dans $C((0, T); \mathcal{H})$, i.e, pour tout $\phi \in D_\infty$,

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sup_{t \in (0, T)} \|W_{F^n}(t)\phi - W_{F^m}(t)\phi\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Comme D_∞ est dense dans \mathcal{H} , on déduit alors que $W_{F^n}(t)$ converge fortement dans \mathcal{H} uniformément sur $(0, T)$ vers $W_F(t)$. La suite de la preuve de notre proposition est identique à celle dans [16]. ■

Remarque 2. Pour tout $F, B, N \in S_{a,b}^\infty(0, l)$ vérifiant H.I-H.III, on peut définir un C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F,B}(t)$ dans \mathcal{H} engendré par $F \frac{\partial}{\partial x} + B$ tel que

$$U_{F,B}(t)\phi = W_F(t)\phi + \int_0^t W_F(t - \tau) B U_{F,B}(\tau)\phi \, d\tau.$$

De plus, on peut construire à partir de F, B et N les fonctions F_h, B_h et N_h vérifiant le Lemme 2, à lesquelles on associe le semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ (voir Proposition 1).

Vu cette remarque, on a le résultat suivant

Lemme 8. Soit $T > 0$. Pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, le C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ converge fortement vers $U_{F,B}(t)$ dans $C((0, T); \mathcal{H})$.

Preuve du Lemme 8. Soit $0 \leq t \leq T$ et $\phi \in D_\infty$. On sait que

$$\begin{cases} U_{F_h, B_h}(t)\phi = W_{F_h}(t)\phi + \int_0^t W_{F_h}(t-s)B_h U_{F_h, B_h}(s)\phi \, ds, \\ U_{F, B}(t)\phi = W_F(t)\phi + \int_0^t W_F(t-s)B U_{F, B}(s)\phi \, ds. \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U_{F_h, B_h}(t)\phi - U_{F, B}(t)\phi &= \int_0^t W_{F_h}(t-s)B_h [U_{F_h, B_h}(s)\phi - U_{F, B}(s)\phi] \, ds \\ &+ \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F, B}(s)\phi \, ds \\ &+ \int_0^t W_{F_h}(t-s)(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi \, ds \\ &+ W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Posons $\psi_h(t) = \|U_{F_h, B_h}(t)\phi - U_{F, B}(t)\phi\|$. Ceci entraîne grâce à (3.22) et la contraction du semi-groupe $W_{F_h}(t)$ que

$$\begin{aligned} \psi_h(t) &\leq \int_0^t \|B_h\| \psi_h(s) \, ds + \int_0^t \|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| \, ds \\ &+ \left\| \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F, B}(s)\phi \, ds \right\| \\ &+ \|W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi\|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant le lemme de Gronwall et la densité de D_∞ dans \mathcal{H} , il est clair que pour conclure le Lemme 8 il nous suffit de montrer que les trois derniers termes de (3.23) tendent vers zéro quand $h \rightarrow 0^+$.

- Convergence de $\int_0^t \|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| \, ds$:

Comme $\|\tilde{B}_{ij}^h/N_i^h - \hat{B}_{ij}\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$, $i, j = 1, 2$ (voir Lemme 2), on établit grâce à

l'inégalité de Hölder que pour tout $t > 0$, $\|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$. On obtient alors en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue le résultat désiré.

- Convergence de $\left\| \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F, B}(s)\phi \, ds \right\|$:

Soit

$$w_h(t, s) = [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F, B}(s)\phi.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, considérons une subdivision $(t_1 = 0, t_2, \dots, t_N = T)$ de l'intervalle $[0, T]$ en $N - 1$ sous-intervalles telle que :

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} w_h(t, s) \, ds \right\| \leq 2(t_{i+1} - t_i) \|B\| \|\phi\| < \epsilon. \quad (3.24)$$

Par ailleurs, la fonction $U_{F, B}(t)\phi$ étant continue de $[0, T]$ dans \mathcal{H} , elle y est uniformément continue. Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall s \in [t_k, t_{k+1}], |t_{k+1} - t_k| < \delta \implies \|U_{F, B}(s)\phi - U_{F, B}(t_k)\phi\| \leq \epsilon. \quad (3.25)$$

Il découle alors des propriétés (3.24)-(3.25)

$$\begin{aligned}
 \int_0^t w_h(t, s) ds &= \int_0^{t_k} w_h(t, s) ds + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B[U_{F,B}(s) - U_{F,B}(t_i)] \phi ds \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F,B}(t_i) \phi ds + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds \\
 &\leq \sum_{i=1}^{k-1} 2\epsilon (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) \chi_h + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds,
 \end{aligned}$$

avec

$$\chi_h = \sup_{[0, T]} \|[W_{F_h}(s) - W_F(s)] B U_{F,B}(t_i) \phi\|$$

est telle que $\chi_h \leq \epsilon$, $i = 1, 2, \dots, N$ pour h suffisamment petit. Un calcul direct montre que pour tout $\epsilon > 0$, $\int_0^t w_h(t, s) ds \leq \epsilon$, pour h assez petit.

• Convergence de $\|W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi\|$:

C'est une conséquence directe de la Proposition 2. D'où la preuve du Lemme 8. ■

Maintenant on peut énoncer notre deuxième résultat principal.

Théorème 2. *Sous les hypothèses H.I-H.III, le système (3.1)-(3.3) est exponentiellement stable dans \mathcal{H} .*

Preuve du Théorème 2. Nous allons montrer le théorème pour tout $\phi \in D_\infty$. Soit F , B et N les matrices définies par (3.4) et qui vérifient les hypothèses H.I-H.III. Il découle du Lemme 2 et du Théorème 1 qu'on peut construire des matrices F_h , B_h et N_h telles que le semi-groupe associé $U_{F_h, B_h}(t)$ vérifie $\|U_{F_h, B_h}(t)\phi\|_h \leq M e^{-\omega t} \|\phi\|_h$, pour tout $\phi \in D_\infty$. Il est important de rappeler que M et ω sont deux constantes positives **indépendantes** du paramètre h (voir Preuve du Théorème 1). En utilisant ensuite la Remarque 1 et le Lemme 8, on obtient après passage à la limite $h \rightarrow 0^+$,

$$\|U_{F,B}(t)\phi\| \leq M e^{-\omega t} \|\phi\|.$$

Enfin, par un argument standard de densité, le résultat s'étend pour tout $\phi \in \mathcal{H}$. La preuve du Théorème 2 est complète. ■

4 Application aux échangeurs thermiques couplés

Ce paragraphe est consacré à l'application du Théorème 2 à notre modèle physique régi par les équations par l'équation (2.6). On a le résultat suivant :

Proposition 3. *Le système (2.6) est exponentiellement stable dans \mathcal{H} .*

Preuve de la Proposition 3. Il suffit de vérifier que les hypothèses H.I-H.III sont satisfaites. Clairement, pour tout $i, j = 1, 2$, les coefficients F_i et B_{ij} définis par (2.7) vérifient l'hypothèse H.I. De plus, il est facile de voir que pour tout $i = 1, 2$,

$F_i(x) \geq \alpha$ p.p. $x \in (0, l_2)$ avec $\alpha = \min\{(1 - \beta)m_1, m_2\} > 0$. L'hypothèse H.II est alors satisfaite. Concernant l'hypothèse H.IIIa, nous allons définir les fonctions de pondérations N_1 et N_2 comme suit :

$$N_1(x) = \frac{\alpha}{\Pi(x)(1 - \beta)} \ \& \ N_2(x) = \frac{\alpha\Pi(x)}{(1 - \beta)} \quad \text{où} \quad \Pi(x) = \begin{cases} 1; & x \in (0, l_1) \\ 1 - \beta; & x \in (l_1, l_2) \end{cases} .$$

Il est évident que $N_i \in L^\infty(0, l_2)$ pour $i = 1, 2$. D'autre part, la matrice NB est :

$$NB(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\Pi(x)(1 - \beta)}K_1 & \frac{\alpha}{1 - \beta}\sqrt{K_1K_2} \\ \frac{\alpha}{1 - \beta}\sqrt{K_1K_2} & -\frac{\alpha\Pi(x)}{(1 - \beta)}K_2 \end{bmatrix} .$$

Dès lors, un calcul direct montre que pour tout $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$y^\top N(x)B(x)y = -\frac{\alpha}{1 - \beta} \left(\sqrt{\frac{K_1}{\Pi(x)}} y_1 - \sqrt{K_2\Pi(x)} y_2 \right)^2 \leq 0 \text{ p.p. } x \in (0, l_2).$$

L'hypothèse H.IIIb est manifestement vérifiée puisque F_i et B_{ij} , $i = 1, 2$ sont des fonctions constantes par morceau. D'après le Théorème 2 le système (2.6) est exponentiellement stable. ■

Remarque 3. *Il est intéressant de noter que le résultat de stabilité exponentielle obtenu pour un système couplé de deux échangeurs thermiques reste valable pour tout système composé d'un nombre fini d'échangeurs thermiques.*

Références

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Presse, 1978.
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Paris : Masson, 1992.
- [3] B. Chentouf, Stability of a nonlinear first order hyperbolic system : application to a flexible torque arm, *Proceedings of ACC 2000*, pp. 3788-3792.
- [4] B. M. N. Clarke, Boundary controllability of linear symmetric hyperbolic systems, *J. Inst. Maths Applics*, 20, pp. 283-298, 1977.
- [5] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2. Inter-science Publishers, New York, 1962.
- [6] J.C. Friedly, *Dynamic behavior of processes*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [7] J.P. Gauthier & C.Z. Xu, H^∞ -control of a distributed parameter system with non-minimum phase, *Inter. Journal of Control*, vol.53, no.1, pp. 45-79, 1991.
- [8] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [9] V. Mikhaïlov, *Equations aux dérivées partielles*, Mir, 1980.
- [10] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

- [11] S. Pohjolainen & I. Latti, Robust controller for boundary control systems, *Int. J. Control*, vol. 38, no. 6, pp. 1189-1197, 1983.
- [12] J. Rauch & M. Taylor, Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain, *Indiana University Mathematics Journal*, vol.24, no. 1, pp. 79-86, 1974.
- [13] D. L. Russell, Control theory of hyperbolic equations related to certain questions in harmonic analysis and spectral theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 40, pp.336-368, 1972.
- [14] D. L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open questions, *Siam Review*, Vol.20, no.4, pp. 639-739, 1978.
- [15] D. L. Russell, Quadratic performance criteria in boundary control of linear symmetric hyperbolic systems, *SIAM J. Control*, vol. 11, no.3, pp. 475-509, 1973.
- [16] C. Z. Xu, Exact observability and exponential stability of infinite dimensional bilinear systems, *MCSS*, vol. 9, no. 1, pp. 73-93, 1996.
- [17] C. Z. Xu & J. P. Gauthier, *Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant*, *RAIRO APPII*, 25, pp. 377-396, 1991.
- [18] C. Z. Xu, J.P. Gauthier & I. Kupka, Exponential stability of the heat exchanger equation, *Proceedings of the European Control Conference*, pp. 303-307, 1993.

B. Chentouf

Department of Mathematics and Statistics,
Sultan Qaboos University,
P.O. Box 36, Al-Khod 123,
Sultanate of Oman.
E-mail : chentouf@squ.edu.om.

Cheng-Zhong Xu, Gauthier Sallet
INRIA-Lorraine & UPRES A 7035. ISGMP,
Bât. A, Université de Metz,
Ile de Saulcy
57045 Metz cedex 01 (France).
E-mail : xu, sallet@loria.fr