JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY. SER. A, VOL. 17, NO. 3, MAR., 1954

Über die Einteilung von Primäridealen im Unendlichen Algebraischen Zahlkörper

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Oktober 1953)

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper kann ein Primideal $\mathfrak{p}$[1] idempotent sein. Vor kurzem habe ich bewiesen,[2] dass ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges und von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primärideal $\mathfrak{q}$ keinesweg idempotent ist, wenn $\mathfrak{p}$ auch noch idempotent ist. In dieser Arbeit zeigen wir, dass immer $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}^2$ ist und dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ beide entstehen können, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist. Ferner ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ebenso wie $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ möglich, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist. Andererseits können wir beweisen, dass $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und auch $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann so, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist.

Danach teilen wir in § 1 dieser Arbeit Primärideale aus unendlichen algebraischem Zahlkörper in folgende vier Arten ein:

$$\text{\textit{Falls} } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2; \quad \text{\textit{erste Art nennen wir} } \mathfrak{q}, \text{\textit{ wenn} } \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q},\ \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \text{\textit{ sind,}}$$

$$\text{\textit{Falls} } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2; \quad \begin{cases} \text{\textit{zweite Art nennen wir} } \mathfrak{q}, \text{\textit{ wenn} } \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q},\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \text{\textit{ sind,}} \\ \text{\textit{dritte Art nennen wir} } \mathfrak{q}, \text{\textit{ wenn} } \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q},\ \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \text{\textit{ sind,}} \\ \text{\textit{vierte Art nennen wir} } \mathfrak{q}, \text{\textit{ wenn} } \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q},\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \text{\textit{ sind,}} \end{cases}$$

und am Anfang von § 2, 3, 4 und 5 dieser Arbeit werden wir Beispiele von jeder Art geben.

In seiner Arbeit[3] hat Herr W. Krull den Begriff der Werte von Primäridealen eingeführt und den Zusammenhang zwischen Primärideal und seinem Wert untergesucht, und dann Primärideale nach ihren Werten in vier Arten eingeteilt. Hier wollen wir beweisen, dass unsere vier verschieden Arten beziehungsweise mit den Krullschen vier Arten übereinstimmen. Damit können wir an die Krullsche ***bewertungstheoretische*** Einteilung von Primäridealen eine ***idealtheoretische*** Bedeutung anknüpfend erklären.

In § 2, 3, 4, und 5 dieser Arbeit wollen wir die Eigenschaften von Primäridealen von jeder Art und den Zusammenhang zwischen Primärideal von einer Art und der anderen untersuchen. Zunächst erhalten wir:

---

1) Im folgenden verstehen wir unter Primideal $\mathfrak{p}$ stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

2) N. Nakano; „Über idempotente Ideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 1, 1953, (s. 16, Satz 6), zitiert mit „Nakano (1)".

3) W. Krull; „Idealtheorie im unendlichen algebraischen Zahlkörper," Math. Zeit. Vol. 29, 1929 (s. 49), zitiert mit „Krull".

Wenn $\mathfrak{q}$ von 1ter Art ist, so sind $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^m$ für alle m, k,
wenn $\mathfrak{q}$ von 2ter Art ist, so sind $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^m$ für alle m, k,
wenn $\mathfrak{q}$ von 3ter Art ist, so sind $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k\neq\mathfrak{q}^m$ für alle m, k,
wenn $\mathfrak{q}$ von 4ter Art ist, so sind $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$ und auch $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ $(n\geqq 2)$ möglich.
Dabei stossen wir noch auf folgende wichtige Tatsache:

Ist $\mathfrak{q}$ ***von 4ter Art und*** $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$ *für alle* m, *so ist der wert von* $\mathfrak{q}$ *eine irrationale Zahl.*

Ist $\mathfrak{q}$ ***von 4ter Art und*** $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ *für mindestens eine* $n(n\geqq 2)$, *so ist der Wert von* $\mathfrak{q}$ *eine rationale Zahl.*

Wir können also Primärideale von der vierten Art in eben erwähnte zwei Arten einteilen. Es ist dabei noch bemerkenswert, dass, wenn $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ für eine $n(n\geqq 2)$ ist, so erhalten wir $\mathfrak{q}^{tn}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{tn}$ für jede natürliche Zahl t und $\mathfrak{q}^{n+k}:\mathfrak{q}^k\neq\mathfrak{q}^n$ für alle k.

Vom bewertungstheoretishen Standpukte aus hat Herr W. Krull ein Primärideal $\mathfrak{q}$ „*endlich*" oder „*unendlich*" genannt, je nachdem $\mathfrak{q}$ in unserem Sinne mit $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ oder mit $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ vereinbar ist, und dann die folgenden Regeln eingeführt: endlich × endlich = endlich, endlich × unendlich = unendlich × unendlich = unendlich.[4] Nun können wir diese Regeln noch folgendermassen erweitern: *2te Art × 2te Art = 2te Art; 3te Art × 2te Art = 3te Art, 3te Art × 3te Art = 3te Art; 4te Art × 2te Art = 4te Art, 4te Art × 3te Art = 4te Art, 4te Art × 4te Art = 3te oder 4te Art.*[5]

Ausserdem erhalten wir noch folgende Ergebnisse:

Ist $\mathfrak{q}$ von 2ter Art, so ist $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ von 3ter Art, und ist $\mathfrak{q}$ von 3ter Art, so ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ von 2ter Art.

Wenn $\mathfrak{q}$ von 2ter Art ist, so ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, aber $\mathfrak{q}\neq(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$, und wenn $\mathfrak{q}$ von 3ter Art ist, so ist $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, aber $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$. Ferner wenn $\mathfrak{q}$ von 1ter Art oder 4ter Art ist, so ist immer $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$.

§ 1. Die Einteilung von Primäridealen

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots$ definiert wird, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper und $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ enthalten ist. Wir bezeichnen diesen Körper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{O}$ die Gesamtheit der ganzen algebraischen Zahlen des unendlichen Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{O}_\nu$ die Gesamtheit der ganzen Zahlen aus $\mathfrak{K}_\nu$, so ist offenbar: $\mathfrak{O}=\{\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_\nu, \cdots\}=\{\mathfrak{O}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{O}$ und bezeichnen wir $\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, so ist $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primideal in $\mathfrak{O}_\nu$. Ferner ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so können wir $\mathfrak{q}\wedge\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle ν

4) „Krull" s. 50~51.

5) Ist $\mathfrak{q}$ von 4ter Art und der Wert von $\mathfrak{q}$ eine rationale Zahl, so gelten $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ für mindestens eine $n(n\geqq 2)$ und weiter $\mathfrak{q}^n\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^n$, folglich ist $\mathfrak{q}^n$ von 3ter Art. Also kommt es wirklich vor, dass 4te Art × 4te Art = 3te Art ist.

setzen. Andererseits setzen wir nacheinander

$$\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}\mathfrak{a}_{\nu+1}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{a}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1}, \quad \mathfrak{p}_{\nu+1}=\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{O}_{\nu+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{a}_\lambda, \quad (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda, \quad \mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{O}_\lambda,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dann gilt der einfache aber wichtige

HILFSSATZ 1.[6] *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und setzen wir* $\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}\wedge\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{a}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, *so ist*

$$(e_\nu-1)h_{\nu+1}\, h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda \leqq e_\nu\, h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda \text{ für alle } \lambda > \nu.$$

Da zunächst $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}\neq\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ ist, gibt es ein Element α in $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Es sei $\alpha=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}\mathfrak{b}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, dann wird

$$\alpha\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{b}_\lambda, \ (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda>\nu). \tag{1}$$

Andererseits ist $\alpha\notin\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, folglich $\alpha\notin\mathfrak{q}$, so ist

$$\alpha\notin\mathfrak{q}\wedge\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \quad \text{für alle } \lambda \quad (\lambda>\nu). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\supset\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, d.h.

$$(e_\nu-1)h_{\nu+1}\, h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda \quad \text{für alle } \lambda \quad (\lambda>\nu). \tag{3}$$

Ist zweitens $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda\subseteqq\mathfrak{q}\wedge\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, so erhalten wir leicht

$$e_\lambda\leqq e_\nu h_{\nu+1}\, h_{\nu+2}\cdots h_\lambda \quad \text{für alle } \lambda \quad (\lambda>\nu). \tag{4}$$

Nach (3) und (4) ist unsere Behauptung einleuchtend.

Nach Hilfssatz 1 ist klar, dass $(e_\nu-1)h_{\nu+1}\, h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\leqq e_\lambda-1$ ist. Da erhebt sich die Frage: Welche idealtheoretische Bedeutung die Tatsache hat, dass $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist? Betreffs dieser Frage können wir folgenden Satz beweisen.

SATZ 1. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so ist der Idealquotient* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *dann und nur dann ein echter Teiler von* $\mathfrak{q}$, *wenn für hinreichend grosses* N *immer* $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1$ *ist, falls* $\lambda>\nu\geqq N$ *ist.*

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ der echte Teiler von $\mathfrak{q}$ ist. Dann existiert ein Element α, derart, dass $\alpha\notin\mathfrak{q}$, $\alpha\in\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ist. Wenn wir den Index N hinreichend gross wählen, dann ist $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$ für ν $(\nu\geqq N)$. Aus $\alpha\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}$ folgt $\alpha\in\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist. Wegen $\alpha\in\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$ können wir $\alpha=\mathfrak{p}_\nu^a\mathfrak{b}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$

6) Vgl. E. Stiemke; "Über unendliche algebraische Zahlkörper," Math. Zeit. 25 (1926), s. 33, zitiert mit „Stiemke". Und auch vgl. „Krull", s. 48. In diesen Arbeiten sehen wir nur auf die Tatsache, dass $(e_\nu-1)h_{\nu+1}<e_\lambda\leqq e_\nu h_{\nu+1}$ ist.

Im folgenden ist ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ stets von $\mathfrak{p}$ verschieden.

setzen, wobei $a=e_\nu-1$ ist. Denn aus $\alpha\mathfrak{p}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a+1}\mathfrak{b}_\nu\leqq\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ folgt $a+1\geqq e_\nu$, und andererseits folgt aus $\alpha\notin\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ ohne weiteres $a<e_\nu$, damit erhalten wir $e_\nu-1\leqq a<e_\nu$, d.h. $a=e_\nu-1$. Nach $\alpha=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}\mathfrak{b}_\nu$ und $\alpha\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{q}$ ist offenbar

$$\alpha\mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda+1}\mathfrak{b}_\lambda\leqq\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\quad\text{für alle }\lambda\quad(\lambda>\nu)\,.$$

Also ist $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda-1$. Da aber nach Hilfssatz 1 $e_\lambda>(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ ist, so erhalten wir $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1$ für alle λ $(\lambda>\nu)$.

Sei umgekehrt für hinreichend grosses N immer $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1$, falls $\lambda>\nu\geqq N$, so gibt es ein Element β in $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Setzen wir $\beta=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, so ist

$$\beta\mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda+1}\mathfrak{c}_\lambda,\qquad(\mathfrak{p}_\lambda,\mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda\,.$$

Da nach unserer Annahme $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda+1=e_\lambda$ ist, so erhalten wir

$$\beta\mathfrak{p}_\lambda\leqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\leqq\mathfrak{q}\qquad\text{für alle }\lambda\qquad(\lambda>\nu\geqq N)\,.$$

Daher muss $\beta\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{q}$ sein, und wegen $\beta\notin\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ der echte Teiler von $\mathfrak{q}$.

SATZ 2. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so ist der Idealquotient* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *dann und nur dann gleich* $\mathfrak{q}$, *wenn wir für hinreichend grosses* N *einen Index* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ *so wählen können, dass* $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-1$ *ist.*

Nehmen wir jetzt an, dass $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist. Dann ist nach Satz 1 $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{+2}\cdots\cdots h_\lambda\neq e_\lambda-1$ für einen geeigneten Index λ, $(\lambda>\nu\geqq N)$. Wäre zunächst $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda-1$, so würde nach Hilfssatz 1 $e_\lambda-1<(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda$ sein, was unmöglich ist. Damit muss $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-1$ sein. Wenn umgekehrt $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-1$ ist, so ist nach Satz 1 offenbar $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$.

Ferner ist nach Hilfssatz 1 $e_\lambda\leqq e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$. Da erhebt sich die Frage: Welche idealtheoretische Bedeutung die Tatsache hat, dass $e_\lambda=e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist? Zur Antwort auf diese Frage werden wir zunächst folgenden Hilfssatz 2 und Satz 3 beweisen.

HILFSSATZ 2. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und setzen wir* $\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, *so ist die Vereinigungsmenge* $\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1},\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1},\cdots\}=\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}$ *gleich* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.[7]

Aus $\mathfrak{p}_\nu\leqq\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\leqq\mathfrak{q}$ ergibt sich $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\leqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Also ist offenbar $\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}\leqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Umgekehrt ist α eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, so ist α in der Form darstellbar $\alpha=\sum_{i=1}^{n}q_ip_i$, wo $q_i\in\mathfrak{q}$ und $p_i\in\mathfrak{p}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ sind. Wir können N so gross wählen, dass alle q_i, p_i in $\mathfrak{O}_\nu$ für $\nu\geqq N$ sind. Dann ist die obige Summe für ν $(\nu\geqq N)$ durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}$ teilbar. Also ist $\alpha\in\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}$, folglich $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\leqq\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}$. Damit ergibt sich $\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

SATZ 3 *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so ist* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ *dann und nur dann gelich* $\mathfrak{q}$, *wenn wir für hinreiched grosses* N *einen Index* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ *so wählen können, dass* $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda$ *ist.*

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist. Dann ist nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}\cdots\}$. Es sei nun α ein genau durch $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbares Element, so ist $\alpha\in\mathfrak{q}$. Daher ist

$$\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1} \quad \text{für hinreichend grosses } \lambda \quad (\lambda>\nu). \tag{5}$$

Da aber können wir $\alpha=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$ festlegen, und erhalten sofort $\alpha=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, nämlich α ist genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}$ teilbar. Also ist infolge von (5) $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\leqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}$, d.h. $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda+1>e_\lambda$.

Sei umgekehrt β ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}$, so ist $\beta\in\mathfrak{O}_\nu$, falls $\nu\geqq N$ für hinreichend grosses N. Dann ist $\beta\in\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu}$, damit können wir $\beta=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+a}\mathfrak{b}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, $a\geqq 0$ festlegen. Wenn wir für N einen Index λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ so wählen können, dass $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda$ ist, erhalten wir

$$(e_\nu+a)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda+1.$$

Daher folgt $\beta=\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu+a)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{b}_\nu\leqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}$. Da aber nach Hilfssatz 2 die Vereinigungsmenge $\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}\}$ gleich $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ist, so erhalten wir $\beta\in\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, folglich $\mathfrak{q}\leqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Damit muss $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ sein.

Aus Hilfssatz 2 und Satz 3 ergibt sich der folgende Satz, welcher die obige Frage beantwort.

SATZ 4. *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist $\mathfrak{q}$ dann und nur dann ein echter Teiler von $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, wenn für hinreichend grosses N immer $e_\lambda=e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ ist, falls $\lambda>\nu\geqq N$ ist.*

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}$ der echte Teiler von $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ist. Dann ist nach Satz 3 für hinreichend grosses N immer

$$e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\leqq e_\lambda, \quad \text{falls} \quad \lambda>\nu\geqq N.$$

Da aber nach Hilfssatz 1 $e_\lambda\leqq e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so erhalten wir sofort $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda$. Wenn umgekehrt $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda$ ist, dann ist nach Satz 3 $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, nämlich $\mathfrak{q}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Wir wollen nun den Wert eines Primärideals $\mathfrak{q}$ in Bezug auf Primideal $\mathfrak{p}$ folgendermassen definieren: Wenn die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl p genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{n_\nu}$ teilbar ist und wenn $\mathfrak{p}_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,\nu;\ \mathfrak{p}_0=p)$ innerhalb $\mathfrak{O}_i$ in die Potenz $\mathfrak{p}_i^{h_i}$ zerfällt, so erhalten wir $p\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{h_1h_2\cdots h_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, und $n_\nu=h_1h_2\cdots h_\nu$. Bezeichnen wir $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, so ist nach Hilfssatz 1 die Folge $\cdots, \dfrac{e_\nu}{n_\nu}, \dfrac{e_{\nu+1}}{n_{\nu+1}}, \cdots, \dfrac{e_\lambda}{n_\lambda}, \cdots$ abnehmend und nach unten beschränkt, und muss daher einen endlichen Grenzwert $w(\mathfrak{q})$ besitzen. Dann heisst $w(\mathfrak{q})$ *der wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$.*[8] Zusammenfassend unsere

7) Vgl. „Nakano (1)", Hilfssatz 5, s. 16.

8) M. Moriya; „Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades," Jour. of Sci. Hokkaido Imp. Univ. Series I. Vol. 3. s. 169, zitiert mit „Moriya". Vgl. „Krull", s. 48.

Ergebnisse, erhalten wir danach folgenden

SATZ 5. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und N ein hinreichend grosser Index, so gilt:*

$$\text{(i)}\quad \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \;\textit{ und }\; \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows \frac{e_\nu}{n_\nu} = \frac{e_{\nu+1}}{n_{\nu+1}} = \cdots = \frac{e_\lambda}{n_\lambda} = \cdots = w(\mathfrak{q}) > \cdots = \frac{e_\lambda - 1}{n_\lambda} = \cdots = \frac{e_{\nu+1}-1}{n_{\nu+1}} = \frac{e_\nu - 1}{n_\nu},$$

$$\text{(ii)}\quad \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \;\textit{ und }\; \mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows \frac{e_\nu}{n_\nu} = \frac{e_{\nu+1}}{n_{\nu+1}} = \cdots = \frac{e_\lambda}{n_\lambda} = \cdots = w(\mathfrak{q}) > \frac{e_\lambda - 1}{n_\lambda} > \frac{e_\nu - 1}{n_\nu},$$

$$\text{(iii)}\quad \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \;\textit{ und }\; \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows \frac{e_\nu}{n_\nu} > \frac{e_\lambda}{n_\lambda} > w(\mathfrak{q}) = \cdots = \frac{e_\lambda - 1}{n_\lambda} = \cdots\cdots \frac{e_{\nu+1}-1}{n_{\nu+1}} = \frac{e_\nu - 1}{n_\nu},$$

$$\text{(iv)}\quad \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \;\textit{ und }\; \mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows \frac{e_\nu}{n_\nu} > \frac{e_\lambda}{n_\lambda} > w(\mathfrak{q}) > \frac{e_\lambda - 1}{n_\lambda} > \frac{e_\nu - 1}{n_\nu}$$

für einen geeigneten Index λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

Nach den Sätzen 1, 2, 3, 4 und der Definition des Wertes ist klar, dass diese ausser Fall (iii) gelten. Ferner können wir den Fall (iii) wie folgt beweisen; aus $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ergibt sich nach Satz 1

$$(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1, \text{ folglich } \frac{e_\lambda}{n_\lambda} = \frac{e_\nu - 1}{n_\nu} + \frac{1}{n_\lambda} \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

daher erhalten wir ohne weiteres

$$w(\mathfrak{q}) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e_\lambda}{n_\lambda} = \frac{e_\nu - 1}{n_\nu}.$$

In seiner Arbeit[9] hat Herr W. Krull den Begriff der Werte von Primäridealen eingeführt und dann das Problem des Zusammenhangs zwischen Wert und Primärideal untersucht und folgende vier verschiedene Fälle unterschieden.

(I) $w(\mathfrak{q}) = \dfrac{e_\nu}{n_\nu}$ für alle $\nu \geqq N$ und $e_\nu = e_{\nu+1} = \cdots = e_\lambda = \cdots$, $n_\nu = n_{\nu+1} = \cdots = n_\lambda = \cdots$,

(II) $w(\mathfrak{q}) = \dfrac{e_\nu}{n_\nu}$ für alle $\nu \geqq N$ aber $\overline{\lim}\, e_\nu > 1$, $\lim n_\nu = +\infty$,

(III) $w(\mathfrak{q}) < \dfrac{e_\nu}{n_\nu}$ für alle $\nu \geqq N$ und $w(\mathfrak{q})$ ist einen rationale Zahl, deren Nenner bei gekürzter Darstellung in einem n_λ $(\lambda > \nu)$ aufgeht.

(VI) $w(\mathfrak{q}) < \dfrac{e_\nu}{n_\nu}$ für alle $\nu \geqq N$ und $w(\mathfrak{q})$ ist eine irrationale Zahl oder eine rationale Zahl, deren Nenner bei gekürzter Darstellung in keinem n_λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ aufgeht.

Diese vier verschiedenen Fälle stimmen beziehungsweise mit unseren eben erwähnten vier Fällen überein.[10] Daher hat Satz 5 die Aufgabe, die Krullsche bewer-

---

9) „Krull", s. 48∼49.

10) Über die Übereinstimmung von (i) und (I) siehe §2 s. 327 dieser Note. Es ist klar dass (ii), (iii) resp. mit (II), (III) übereinstimmen. Über die Übereinstimmung von (iv) und (IV) siehe Sätze 23 und 24 (§5. s. 338) in dieser Note.

tungstheoretische Einteilung von $\mathfrak{q}$ auf idealtheoretischen Grund folgenderweise auszusprechen:

Primärideal von erster Art heisst $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *sind,*
Primärideal von zweiter Art heisst $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *sind,*
Primärideal von dritter Art heisst $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *sind,*
Primärideal von vierter Art heisst $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *sind.*

In den folgenden Paragraphen wollen wir die Eigenschaften der Primärideale von jeder Art und den Zusammenhang zwischen dem Primärideal einer Art und einer anderen untersuchen.

§ 2. Primärideale von erster Art

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlköper $\mathfrak{K}$ erhalten wir folgenden wichtigen Satz:[11] Ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{O}$ ist dann und nur dann idempotent, wenn $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigt. Aus diesem Satz ergibt sich sofort der folgende

HILFSSATZ 3. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von erster Art, so ist* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$.

Nach unserer Definition erhalten wir $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, so folgt aus Sätze 4 und 1

$$\left.\begin{aligned} &e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda\,, &&(1)\\ &(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1 &&(2)\end{aligned}\right\} \text{ für alle } \lambda\ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich $h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = 1$ d.h. $h_{\nu+1} = h_{\nu+2} = \cdots = h_\lambda = 1$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$. Daher muss der Exponent e_λ, $\lambda > \nu \geqq N$ für hinreichend grosses N konstant sein, folglich muss $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ sein.

Ferner erhalten wir auch folgenden Satz[12]: Ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ ist dann und nur dann gleich einer Potenz von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist. Deswegen, ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von erster Art, so ist $\mathfrak{q}$ gleich einer bestimmten Potenz von $\mathfrak{p}$.

HILFSSATZ 4. *Ist* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, *so ist* $\mathfrak{p}^m : \mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{m-n}$ *für* $m > n$.

$\mathfrak{p}^m : \mathfrak{p}^n \geqq \mathfrak{p}^{m-n}$ ist klar. Nehmen wir jetzt $\mathfrak{p}^m : \mathfrak{p}^n \supset \mathfrak{p}^{m-n}$ an, so gibt es ein Element α in $\mathfrak{p}^m : \mathfrak{p}^n$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}^{m-n}$. Aus $\alpha\mathfrak{p}^n \leqq \mathfrak{p}^m$ folgt $\alpha \in \mathfrak{p}$. Da $\alpha \in \mathfrak{p}$ und $\alpha \notin \mathfrak{p}^{m-n}$ sind, gibt es eine Zahl $f (1 < f \leqq m-n)$ von der Art, dass $\alpha \in \mathfrak{p}^{f-1}$, $\alpha \notin \mathfrak{p}^f$ ist. Dann muss

$$(\mathfrak{p}^f, \alpha) = \mathfrak{p}^{f-1} \tag{3}$$

sein, weil kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}^f$ und $\mathfrak{p}^{f-1}$ existiert.[13] Es sei π ein Element derart,

11) „Nakano (1)", Satz 1, s. 13.
12) „Nakano (1)", Satz 8, s. 19.
13) „Nakano (1)", Satz 4, s. 15.

dass $\pi \in \mathfrak{p}$, $\pi \notin \mathfrak{p}^2$ ist, so erhalten wir in gleicher Weise

$$(\pi^n, \mathfrak{p}^{n+1}) = \mathfrak{p}^n. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\mathfrak{p}^{f-1}\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^f, \alpha)(\mathfrak{p}^{n+1}, \pi^n) = (\mathfrak{p}^{f+n+1}, \alpha\mathfrak{p}^{n+1}, \pi^n\mathfrak{p}^f, \alpha\pi^n),$$

wobei $\alpha\mathfrak{p}^{n+1} \subseteqq \mathfrak{p}^{n+f}$, $\pi^n\mathfrak{p}^f \subseteqq \mathfrak{p}^{n+f}$, $\alpha\pi^n \in \alpha\mathfrak{p}^n \subseteqq \mathfrak{p}^m \subseteqq \mathfrak{p}^{n+f}$ sind. Damit erhalten wir $\mathfrak{p}^{n+f-1} = \mathfrak{p}^{n+f}$. Das ist aber unmöglich.[14] Also muss $\mathfrak{p}^m : \mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{m-n}$ sein.

Aus diesem Gedankengang ergibt sich schliesslich der folgende wichtige

SATZ. 6. *Ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal* $\mathfrak{q}$ *ist dann und nur dann von erster Art, wenn* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ *ist.*

Wenn $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von erster Art ist, so ist nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Sei umgekehrt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, dann ist $\mathfrak{q}$ von der Form: $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$, folglich $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{e+1}$. Also ist $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{p}^e \neq \mathfrak{p}^{e+1}$ ist. Ferner erhalten wir nach Hilfssatz 4

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{e-1} \neq \mathfrak{p}^e (= \mathfrak{q})$$

folglich $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Daher muss $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von erster Art sein.

ZUSATZ. *Sind* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ *und* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, *so ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal von zweiter Art. Sind* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ *und* $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, *so ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal von dritter Art.*

Aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ ergibt sich sofort nach Satz 6 $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, nämlich $\mathfrak{q}$ ist von zweiter Art, usw.

Beispiel eines Primärideals von erster Art.

Adjungieren wir zum rationalen Körper $\mathfrak{K}_0$ sukzessive die 3-ten, 5-ten, 7-ten, $\cdots$, p_ν-ten, $\cdots$ Einheitswurzeln, wobei p_ν die $(\nu-1)$-te natürliche Primzahl bedeutet, so entsteht eine Folge von Kreiskörpern:

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(\omega_3),\ \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_0(\omega_3, \omega_5),\ \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_0(\omega_3, \omega_5, \omega_7),\ \cdots,\ \mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_0(\omega_3, \omega_5, \cdots \omega_{p_\nu}),\ \cdots,$$

wobei $\omega_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ und $3 = p_1$, $5 = p_2$, $7 = p_3, \cdots$ sind. Die Gesamtheit der Zahlen von allen $\mathfrak{K}_\nu$ ist wieder ein Körper, den wir mit

$$\mathfrak{K} = \{\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots\}$$

bezeichnen. Ist p eine Primzahl, so hat $p\mathfrak{O}_\nu$ in $\mathfrak{K}_\nu$ die Zerlegung

$$p\mathfrak{O}_\nu = (\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{p}_{\nu 2} \cdots \mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu})^{e_\nu}$$

und bleibt der Exponent e_ν für hinreichend grosses ν konstant, während λ_ν mit ν über alle Grenzen wächst.[15] Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in $\mathfrak{O}$, so muss danach stets $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ sein. Ist $\mathfrak{q}$ ferner ein beliebiges Primärideal in $\mathfrak{O}$, so ist $\mathfrak{q}$ nach Satz 6 stets ein Primärideal von erster Art.

---

14) Vor kurzem habe ich den folgenden Satz bewiesen: *Wenn* $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots (m \geqq 2)$ *ist, so muss* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ *sein.* Vgl. „Nakano (1)", Satz 2, s. 13.

15) N. Nakano; „Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 16, No. 3 (1953), § 1. s. 427, zitiert mit „Nakano (2)".

Zum Schluss werden wir diesem Paragraph zwei Sätze hinzufügen, welche mit den Sätzen über die Primärideale von anderer Art im Zusammenhang stehen.

SATZ 7. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale von erster Art, und* $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *für hinreichend grosses* ν, *so ist* $e'_\nu + e''_\nu = e_\nu$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.[16]

Wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, setzen wir $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}^{e'}$, $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{p}^{e''}$ und $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \mathfrak{p}^{e'+e''}$, so sind $\mathfrak{p}^{e'} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'}$, $\mathfrak{p}^{e''} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''}$ und $\mathfrak{p}^{e'+e''} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'+e''}$ für hinreichend grosses ν[17]. Also sind $e' = e'_\nu$, $e'' = e''_\nu$ und $e_\nu = e' + e'' = e'_\nu + e''_\nu$.

SATZ 8. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von erster Art, so erhalten wir*

(i) $\mathfrak{q}^m : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}^m$ *für alle* m, (ii) $\mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k = \mathfrak{q}^m$ *für alle* m *und* k.

Aus Satz 6 und Hilfssatz 4 folgt das ohne weiteres.

§ 3 Primärideale von zweiter Art

Im folgenden wollen wir vor allem ein Beispiel von Primärideal von zweiter Art anführen. Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Satz voraus.

SATZ 9. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein idempotentes Primideal und setzen wir nacheinander* $\mathfrak{p}_\nu^a \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}} \mathfrak{a}_{\nu+1}$, $(\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{a}_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_\nu^a \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda} \mathfrak{a}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$, $\cdots\cdots$, $\lambda > \nu \geqq N$, *und bezeichnen wir dann mit* $\mathfrak{q}$ *die Vereinigungsmenge* $\{\mathfrak{p}_\nu^a, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda}, \cdots\}$, *so ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal von zweiter Art.*

Ist $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, so ist offenbar $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \supseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}$, nämlich

$$e_\lambda \leqq ah_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \tag{1}$$

Andererseits sei α ein genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ teilbares Element, dann wird $\alpha = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$ und $\alpha \in \mathfrak{q}$, folglich $\alpha \in \mathfrak{p}_\mu^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda h_{\lambda+1}\cdots h_\mu}$ für hinreichend grosses $\mu (> \lambda)$. Da aber $\alpha \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1}\cdots h_\mu} \mathfrak{b}_\mu$, $(\mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{b}_\mu) = \mathfrak{O}_\mu$ ist, erhalten wir sofort

$$\mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1} h_{\lambda+2}\cdots h_\mu} \subseteqq \mathfrak{p}_\mu^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda h_{\lambda+1}\cdots h_\mu}, \text{ d.h. } e_\lambda \geqq ah_{\nu+1}h_{\nu+2} \cdots h_\lambda . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $e_\lambda = ah_{\nu+1}h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$. Daher gilt

$$\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}. \tag{3}$$

Danach wollen wir $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ beweisen. Ist β ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^a$ teilbares Element, so wird $\beta \in \mathfrak{q}$, aber $\beta \notin \mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Denn wäre $\beta \in \mathfrak{q}\mathfrak{p}$, so würde $\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda + 1}$ für hinreichend grosses λ $(\lambda > \nu)$ sein, weil nach Hilfssatz 2

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_\nu^{a+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda + 1}, \cdots\}$$

---

16) Vgl. Satz 12 und Satz 19 in dieser Note.

17) In „Nakano (1)" Satz 3 (s. 14) habe ich den folgenden Satz bewiesen: Es sei $a \geqq 2$, so ist $\mathfrak{p}^a \frown \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\geqq N)$ dann und nur dann gleich $\mathfrak{p}_\nu^a$, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist.

18) Vgl. Satz 22, und Sätze 26, 27, 28 in dieser Note.

ist. Aus $\beta=\mathfrak{p}_\nu^a\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, ergäbe sich $\beta=\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$. Danach würde $\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda+1}$ sein. Folglich ist $\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda}=\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda+1}$. Das ist aber unmöglich, also muss $\beta\notin\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ sein. Daraus folgt $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und nach Zusatz von Satz 6 ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von zweiter Art.

Beispiel eines Primärideals von Zweiter Art.

Adjungieren wir dem Körper $\mathfrak{K}_0$ der rationalen Zahlen nacheinander die p-ten, p^2-ten, $\cdots$, p^ν-ten, $\cdots$ Einheitswurzeln, wobei p eine natürliche Primzahl bedeutet, so entsteht eine Folge von Köpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots$ und wir bezeichnen die Gesamtheit der in sämtlichen $\mathfrak{K}_\nu$ auftretenden Zahlen mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu \cdots\}$.[19]

Die Primzahl p ist in $\mathfrak{K}_\nu$ gleich einem Produkt von $\varphi(p^\nu)=p^{\nu-1}(p-1)$ gleichen Primidealen: $p\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}(p-1)}$, wenn $\mathfrak{O}_\nu$ die Gesamtheit der ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}_\nu$ ist. Wir erkennen hieraus, dass $\mathfrak{p}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ jedesmal in p gleichen Primidealen $\mathfrak{p}_{\nu+1}$ verzweigt und es ist demnach klar, dass die Vereinigungsmenge $\{p, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_\nu, \cdots\}=\mathfrak{p}$ ein idempotentes Primideal ist. Dann sind alle Ideale von diesem Körper $\mathfrak{K}$, welche die Form $\mathfrak{p}_\nu^a\mathfrak{O}$ mit einer beliebigen natürlichen Zahl a haben, die Primärideale von zweiter Art.[20]

Als ein Beispiel ist $\mathfrak{q}=\{p. \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2^p, \mathfrak{p}_3^{p^2}, \cdots, \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}}, \cdots\}$ ein Primärideal von zweiter Art und der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$ ist eine rationale Zahl;

$$w(\mathfrak{q})=\lim_{\nu\to\infty}\frac{p^{\nu-1}}{(p-1)p^{\nu-1}}=\frac{1}{p-1}$$

und wird von ν $(\geqq 1)$ an $\frac{e_\nu}{n_\nu}=\frac{e_{\nu+1}}{n_{\nu+1}}=\cdots=w(\mathfrak{q})>\cdots>\frac{e_\lambda-1}{n_\lambda}>\cdots>\frac{e_\nu-1}{n_\nu}$.

Nun wollen wir einige Eigenschaften des Primärideals von zweiter Art untersuchen. Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst folgenden vorbereitenden Satz 10 und die Hilfssätze 5 und 6.

SATZ 10. *Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von zweiter Art, so gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.*

Nach der Voraussetzung erhalten wir $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$. Nehmen wir damit an, dass ein Ideal $\mathfrak{q}'$ von der Art existiert, dass $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{q}'\supset\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p})$ ist. Aus $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{q}'\supset\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}'\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}^2=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}'\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ist, so wird

$$\mathfrak{q}'\neq\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \tag{1}$$

Andererseits nach Definition des Idealquotients ist offenbar $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, daraus ergibt sich

$$\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\subseteqq(\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}):\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}^2=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}\,,$$

19) Vgl. „Stiemke“, Kapitel 6 „Der Körper aller p_ν-ten Einheitswurzeln,“ s. 38.

20) In dem Satz 9 erhalten wir $\mathfrak{p}_\nu^a\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\nu^a\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda}, \cdots$ für $\lambda>\nu\geqq N$.

folglich $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$ klar ist. Aus $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{q}'\supset\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$. Daher erhalten wir $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}\supset\mathfrak{q}'$ ist, so wird

$$\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'. \tag{2}$$

Nach (1), (2) und Satz 6 ist $\mathfrak{p}$ kein idempotentes Primideal, weil $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist.[21] Mit diesem Widerspruch ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

ZUSATZ. *In allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörpern ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von erster Art, so ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^e$, und dann gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}^e(=\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{p}^{e+1}(=\mathfrak{q}\mathfrak{p})$. In diesem Falle ist daher unsere Behauptung einleuchtend. Ist $\mathfrak{q}$ von dritter oder vierter Art, so ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, folglich ist die Richtigkeit unseres Behauptung schon klar. Daher existiert jedenfalls zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ kein echtes Zwischenideal.

HILFSSATZ 5. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und* $\mathfrak{q}'\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, $\nu\geqq N$, *so ist die Vereinigungsmenge* $\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}+e''_{\nu+1}}\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda}\cdots\}$ *gleich* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.

Aus $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\geqq\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}$ folgt ohne weiteres $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\geqq\{\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}\}$. Umgekehrt, ist α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, so ist α in der Form $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\alpha''_i$ darstellbar, wobei $\alpha'_i\in\mathfrak{q}'$, $\alpha''_i\in\mathfrak{q}''$ sind. Wir können N so gross wählen, dass alle α'_i, α''_i $(i=1,2,\cdots,n)$ in $\mathfrak{O}_\nu$ für $\nu\geqq N$ legen. Dann ist obige Summe für $\nu\geqq N$ durch $\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}$ teilbar. Also ist $\alpha\in\{\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}\}$, folglich $\{\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}\}\geqq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Damit ergibt sich $\{\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}\}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.

HILFSSATZ 6. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demslben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und sind* $\alpha\notin\mathfrak{q}'$, $\beta\notin\mathfrak{q}''$, *so ist* $\alpha\beta\notin\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.

Zum Beweise nehmen wir jetzt an, dass $\alpha\beta\in\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, falls $\alpha\notin\mathfrak{q}'$, $\beta\notin\mathfrak{q}''$. Dann nach Hilfssatz 5 gibt es ein Index λ von der Art, dass $\alpha\beta\in\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda}$ ist, wobei $\mathfrak{q}'\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda}$, $\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e''_\lambda}$ sind. Anderseits aus $\alpha\notin\mathfrak{q}'$ ergibt sich $\alpha\notin\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda}$, folglich $\alpha\notin\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda}$. Also erhalten wir sofort $\beta\in\mathfrak{p}_\lambda$ und in gleicher Weise $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda$ aus $\beta\notin\mathfrak{q}''$. Da $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda$ und $\alpha\notin\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda}$ sind, gibt es eine Zahl f'_λ $(1\leqq f'_\lambda<e'_\lambda)$ von der Art, dass $\alpha\notin\mathfrak{p}_\lambda^{f'_\lambda+1}$, $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{f'_\lambda}$ sind. Auch gibt es eine Zahl f''_λ $(1\leqq f''_\lambda<e''_\lambda)$ von der Art, dass $\beta\notin\mathfrak{p}_\lambda^{f''_\lambda+1}$, $\beta\in\mathfrak{p}_\lambda^{f''_\lambda}$ sind. Daher ist $\alpha\beta$ durch genau $\mathfrak{p}_\lambda^{f'_\lambda+f''_\lambda}$ teilbar. Daraus folgt $\mathfrak{p}_\lambda^{f'_\lambda+f''_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda}$, d.h.

21) Für Primärideal aus $\mathfrak{O}$ gilt bekanntlich folgender grundlegender Satz: Ein Ideal $\mathfrak{q}$ ist dann und nur dann ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, wenn $\mathfrak{q}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Siehe etwa „Moriya" s. 172. Nach diesem Satze ist $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal.

$f'_\lambda + f''_\lambda \geqq e'_\lambda + e''_\lambda$. Jedoch ist $f'_\lambda + f''_\lambda < e'_\lambda + e''_\lambda$ klar, was aber ein Widerspruch ist. Also muss $\alpha\beta \notin \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ sein, wenn $\alpha \notin \mathfrak{q}'$, $\beta \notin \mathfrak{q}''$ sind.

SATZ 11. *Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von zweiter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von zweiter Art.*

Da zuerst $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art ist, sind $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Da aber nach Satz 10 kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ existiert, so gibt es ein Element α, derart, dass $\alpha \in \mathfrak{q}'$, $\alpha \notin \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{q}'\mathfrak{p}, \alpha)$ sind. In gleicher Weise existiert auch ein Element β, derart, dass $\mathfrak{q}'' = (\mathfrak{q}''\mathfrak{p}, \beta)$ ist. Daraus folgt $\alpha\beta \in \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.

Unter diesen Umständen ergibt sich aus $\alpha \notin \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$, $\beta \notin \mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ nach Hilfssatz 6

$$\alpha\beta \notin \mathfrak{q}'\mathfrak{p}\mathfrak{q}''\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}.$$

Damit muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}$, nämlich $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von zweiter Art sein.

SATZ 12. *Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von zweiter Art und setzen wir $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ und $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für hinreichend grosses $\nu \geqq N$, so ist $e_\nu = e'_\nu + e''_\nu$.*

Ist $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art, so ist $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$. Dann folgt aus Satz 4

$$e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

in gleicher weise

$$e''_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e''_\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Daraus ergibt sich zuerst

$$(e'_\nu + e''_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda + e''_\lambda. \tag{1}$$

Es sei nun α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbares Element, so ist $\alpha \in \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Dann nach Hilfssatz 5 gibt es einen Index λ von der Art, dass $\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda + e''_\lambda}$ ist, so ist ohne weiteres

$$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e'_\lambda + e''_\lambda. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $e_\nu \geqq e'_\nu + e''_\nu$. Da aber evident $e_\nu \leqq e'_\nu + e''_\nu$ ist, erhalten wir $e_\nu = e'_\nu + e''_\nu$ für alle ν $(\nu \geqq N)$.

Wir erhalten bereits den folgenden Satz[22]: Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und von $\mathfrak{p}$ verschieden, so muss $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}^2$ sein. Danach besteht die Frage, ob wir $\mathfrak{q}^m = \mathfrak{q}^{m+1} = \cdots, m \geqq 2$ erhalten, wenn $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ist. Betreffs dieser Frage können wir den folgenden Satz beweisen.

SATZ 13. *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und von $\mathfrak{p}$ verschieden, so kann keineswegs $\mathfrak{q}^m = \mathfrak{q}^{m+1} = \cdots, m \geqq 2$ sein.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}^m = \mathfrak{q}^{m+1} = \cdots, m \geqq 2$ sein kann. Sei α ein beliebiges Element in $\mathfrak{q}$, so ist $\alpha \in \mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für hinreichend grosses $\nu \geqq N$, hierbei können wir $e_\nu \geqq 2$ annehmen, weil $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ist. Dann setzen wir

22) „Nakano (1)“, Satz 6, s. 16.

$$\alpha=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+a}\mathfrak{b}_\nu, \quad a\geqq 0, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu. \tag{1}$$

Nun sei β ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{me_\nu}$ teilbares Element, so ist $\beta\in\mathfrak{q}^m$ und in der Form $\beta=\mathfrak{p}_\nu^{me_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$ darstelbar. Da aber

$$\mathfrak{q}^m=\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{me_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{me_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{me_\lambda}\cdots\}$$

$$\mathfrak{q}^{m+t}=\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{(m+t)e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{(m+t)e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{(m+t)e_\lambda}, \cdots\}^{23)}$$

und $\mathfrak{q}^m=\mathfrak{q}^{m+1}=\cdots=\mathfrak{q}^{m+t}=\cdots$ sind, so ist $\beta\in\mathfrak{q}^{m+k}$ für eine beliebige grosse natürliche Zahl k derart, dass $m+k>me_\nu$ ist. Daraus ergibt sich die Existenz eines Index λ von der Art, dass $\beta\in\mathfrak{p}_\lambda^{(m+k)e_\lambda}$, $\lambda>\nu$ ist. Wegen $\beta=\mathfrak{p}_\lambda^{me_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, erhalten wir $\mathfrak{p}_\lambda^{(m+k)e_\lambda}\supseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{me_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}$, folglich ist $(m+k)e_\lambda\leqq me_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$. Infolge von $m+k>me_\nu$ wird ferner

$$e_\lambda<h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda. \tag{2}$$

Andererseits folgt aus (1) $\alpha\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu+a)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$. Dann ergibt sich aus (2) und $e_\nu\geqq 2$

$$e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\nu e_\lambda\geqq 2e_\lambda,$$

so wird $\mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu+a)h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{2e_\lambda}\subseteqq\mathfrak{q}^2$. Daher ist nach (1) α ein Element in $\mathfrak{q}^2$, folglich $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^2$. Das ist aber unmöglich. Der Beweis unseres Satzes ist hiermit abgeschlossen.

ZUSATZ. *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und von $\mathfrak{p}$ verschieden, so ist immer* $\mathfrak{q}^2\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Falls $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ ist, ist $\mathfrak{q}$ in der Form $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^e$ darstellbar, hierbei ist $e>1$, wegen $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$. Damit ist $\mathfrak{q}^2=\mathfrak{p}^{2e}$ keinesweg gleich $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^{e+1}$.

Falls $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist, wäre $\mathfrak{q}^2=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, so würde

$$\mathfrak{q}^3=\mathfrak{q}^2\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}\mathfrak{p})\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}^2=\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^2 \qquad \text{sein,}$$

im Widerspruch zu Satz 13.

SATZ 14. *Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von zweiter Art, so gelten*

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m \qquad \textit{für alle } m,$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^m \qquad \textit{für alle } m \textit{ und } k.$$

Zunächst nach Satz 11 muss $\mathfrak{q}^m$ wieder ein Primärideal von zweiter Art sein, und dann nach Definition des Primärideales von zweiter Art erhalten wir sofort $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$ für alle m.

Zweitens sei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k$, so ist

23) „Nakano (1)", Hilfssatz 5, s. 15.

$$\alpha \mathfrak{q}^k \leqq \mathfrak{q}^{m+k}. \tag{3}$$

Für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$ ist $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$. Nun aus $\mathfrak{q} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ ergibt sich nach Satz 12 $\mathfrak{q}^2 \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}$ und im allgemeinen

$$\mathfrak{q}^k \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{ke_\nu}, \qquad \mathfrak{q}^{m+k} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{(m+k)e_\nu} \tag{4}$$

Dann gilt $\alpha \mathfrak{p}_\nu^{ke_\nu} \leqq \alpha \mathfrak{q}^k$ und aus (3) erhalten wir

$$\alpha \mathfrak{p}_\nu^{ke_\nu} \leqq \mathfrak{q}^{m+k},$$

weiter aus (4) $\alpha \mathfrak{p}_\nu^{ke_\nu} \leqq \mathfrak{p}_\nu^{(m+k)e_\nu}$, folglich ist

$$\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{(m+k)e_\nu} : \mathfrak{p}_\nu^{ke_\nu} = \mathfrak{p}_\nu^{me_\nu} \leqq \mathfrak{q}^m.$$

Danach erhalten wir $\mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k \leqq \mathfrak{q}^m$. Nach Definition von dem Idealquotient ist es klar, dass $\mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k \geqq \mathfrak{q}^m$ ist, daraus ergibt sich $\mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k = \mathfrak{q}^m$ für alle m und k.

§ 4. Primärideale von dritter Art

In diesem Paragraphen wollen wir nicht nur die Eigenschaften von Primäridealen von dritter Art, sondern auch den Zusammenhang zwischen Primäridealen von zweiter Art und von dritter Art untersuchen. Vor allem ist zu zeigen, dass ein Beispiel von dieser Art existiert. Zu diesen Zwecke schicken wir folgenden Satz voraus.

Satz 15. *Ist $\mathfrak{p}$ ein idempotentes Primideal und setzen wir nacheinander*

$$\mathfrak{p}_\nu^a \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}} \mathfrak{a}_{\nu+1}, \ (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{a}_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}, \quad \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{p}_\nu^a \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \mathfrak{a}_\lambda, \ (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda, \ \lambda > \nu \geqq N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und bezeichnen wir die Vereinigungsmenge

$$\{\mathfrak{p}_\nu^{a+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda + 1}, \cdots\} = \mathfrak{q},$$

so ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von dritter Art.

Es sei $\mathfrak{q}' = \{\mathfrak{p}_\nu^a, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1} \cdots h_\lambda}, \cdots\}$, dann ist $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. Denn offenbar ist $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{q}'$, damit nehmen wir an, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ ist. Dann ist α ein genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}$ teilbares Element, so wird $\alpha \in \mathfrak{q}'$, folglich $\alpha \in \mathfrak{q}$, wegen $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. Aus $\alpha \in \mathfrak{q}$ ergibt sich

$$\alpha \in \mathfrak{p}_\mu^{ah_{\nu+1} \cdots h_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu + 1} \text{ für hinreichend grosses } \mu \ (\mu > \lambda). \tag{1}$$

Da wir aber α in der Form $\alpha = \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1} \cdots h_\lambda} \mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$, schreiben können, so ist α genau durch $\mathfrak{p}_\mu^{ah_{\nu+1} \cdots h_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu}$ teilbar, und damit erhalten wir sofort $\alpha \notin \mathfrak{p}_\mu^{ah_{\nu+1} \cdots h_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu + 1}$

und so geraten wir in Widerspruch zu (1). Deher muss $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ sein.

Wegen $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ gibt es ein Element β in $\mathfrak{q}'$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}$. Dann ist $\beta\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$, dazu erhalten wir noch nach dem Beweise von Satz 9 und Hilfssatz 2

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_\nu^{a+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{ah_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{ah_{\nu+1}\cdots h_\lambda+1}, \cdots\} = \mathfrak{q},$$

also erhalten wir schliesslich $\beta\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}$. Daher ist β in $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}$, folglich wird $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Damit muss $\mathfrak{q}$ von dritter Art sein.

Beispiel eines Primärideals von dritter Art.

Es sei $\mathfrak{K}$ der Körper aller p^ν-ten Einheitswurzeln und $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primidealteiler von p in $\mathfrak{K}_\nu$. Dann ist nach Satz 15

$$\mathfrak{q} = \{p, \mathfrak{p}_1^2, \mathfrak{p}_2^{p+1}, \mathfrak{p}_3^{p^2+1}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}+1}, \cdots\}$$

ein Primärideal von dritter Art und der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$ ist eine rationale Zahl;

$$w(\mathfrak{q}) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{p^{\nu-1}+1}{(p-1)p^{\nu-1}} = \frac{1}{p-1}$$

und ist stets $\dfrac{e_\nu}{n_\nu} > w(\mathfrak{q}) = \dfrac{e_\nu - 1}{n_\nu}$ für alle $\nu \geqq 1$.

Um zu unserem Ziele zu gelangen, beweisen wir zuerst den folgenden vorbereitenden

SATZ 16. *Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von dritter Art, so gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$.*

Nach Voraussetzung erhalten wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Nehmen wir damit an, dass ein Ideal $\mathfrak{q}'$ von der Art existiert, dass $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}', \mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p})$ ist. Aus $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}':\mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{q}:\mathfrak{p}):\mathfrak{p} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{q}':\mathfrak{p} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ist, so wird $\mathfrak{q}':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$. Andererseits ist offenbar

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}',$$

so wird auch $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$. Nach $\mathfrak{q}':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$ und Satz 6 ist $\mathfrak{p}$ kein idempotentes Primideal, im Widerspruch zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, denn $\mathfrak{q}'$ ist ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal.

ZUSATZ. *Im allgememeinen unendlichen algebraischen Zahlköper ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$.*

Falls $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, können wir $\mathfrak{q}$ in der Form $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$ schreiben. Dann ist nach Hilfssatz 4 $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e:\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{e-1}$. Es ist also klar, dass kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}^e$ und $\mathfrak{p}^{e-1}$ existiert.

Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ ist, sei $\mathfrak{q}$ von zweiter oder vierter Art, so ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, folglich ist die Richtigkeit unserer Behauptung schon klar.

Daher existiert jedenfalls kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$.

SATZ 17. *Ist $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ resp. ein zu demselbem $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von zweiter*

Art, von dritter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *von dritter Art.*

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$, so gibt es ein Element α in $\mathfrak{q}'$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}''$ und $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}''$ sind, so wird $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ und gibt es ein Element β von der Art, dass $\beta\in\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}$, $\beta\notin\mathfrak{q}''$ ist. Aus $\alpha\notin\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ und $\beta\notin\mathfrak{q}''$ ergibt sich nach Hilfssatz 6

$$\alpha\beta\notin\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''.$$

Da ferner $\alpha\in\mathfrak{q}'$ und $\beta\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}''$ sind, so wird $\alpha\beta\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, folglich $\alpha\beta\in\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}$. Wegen $\alpha\beta\notin\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ und $\alpha\beta\in\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}$, erhalten wir $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\neq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}$, womit nach Zustaz von Satz 6 $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art ist.

Satz 18. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale von dritter Art, so ist* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *von dritter Art.*

Weil zuerst $\mathfrak{q}'$ von dritter Art ist, sind $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. Aus $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$ folgt die Existenz eines Elementes α, derart, dass $\alpha\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}'$, $\alpha\notin\mathfrak{q}'$ ist. In gleicher Weise existiert auch ein Element β, derart, dass $\beta\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}''$, $\beta\notin\mathfrak{q}''$ ist. Daher erhalten wir

$$\alpha\beta\mathfrak{p}^2=\alpha\beta\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'',\qquad\text{folglich ist}\qquad\alpha\beta\in\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}.$$

Aus $\alpha\notin\mathfrak{q}'$ und $\beta\notin\mathfrak{q}''$ ergibt sich nach Hilfssatz 6 $\alpha\beta\notin\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Also muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\neq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}$ sein, womit nach Zusatz von Satz 6 $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art ist.

Satz 19. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale von dritter Art und setzen wir* $\mathfrak{q}'\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *für hinreichend grosses* ν $(\nu\geqq N)$, *so ist nicht immer gesagt, dass* $e'_\nu+e''_\nu=e_\nu$ *für alle* ν $(\nu\geqq N)$ *ist.*

Aus $\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}\subseteqq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ ergibt sich sofort $e'_\nu+e''_\nu\geqq e_\nu$ für alle $\nu\geqq N$. Da aber $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ beide von dritter Art sind, so erhalten wir $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}''$, folglich ist nach Satz 1

$$\left.\begin{aligned}(e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda&=e'_\lambda-1,\\(e''_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda&=e''_\lambda-1\end{aligned}\right\}\quad\text{für alle }\lambda\ (\lambda>\nu\geqq N).$$

Daraus folgt
$$(e'_\nu+e''_\nu-2)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e'_\lambda+e''_\lambda-2.$$

Hierauf nehmen wir an, dass $e'_\nu+e''_\nu=e_\nu$ für alle ν $(\nu\geqq N)$ ist. Dann ist

$$(e_\nu-2)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-2. \tag{2}$$

Da aber nach Satz 18 $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art ist, erhalten wir wieder nach Satz 1

$$(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1\qquad\text{für alle }\lambda\ (\lambda>\nu\geqq N). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich $h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=1$, d.h. $h_{\nu+1}=h_{\nu+2}=\cdots=h_\lambda=1$ für alle λ $(\lambda>\nu)$. Daher erhalten wir sofort $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ [24] und so geraten wir in Widerspruch zu $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. Der Beweis unseres Satzes ist hiermit abgeschlossen.

---

24) Siehe Fussnote 11) in dieser Note.

SATZ 20. (i) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von zweiter Art, so ist* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ *von dritter Art.*

(ii) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von dritter Art, so ist* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *von zweiter Art.*

Zunächst ergibt sich $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$, ferner erhalten wir in gleicher Weise wie Beweis in Satz 10 $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$. Da aber $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Hiermit muss $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ von dritter Art sein.

Zweitens ergibt sich $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{q}$ ist klar, und so ist weiter $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, danach erhalten wir $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, d. h. $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Hiermit muss $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ von zweiter Art sein.

SATZ 21. (i) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von zweiter Art, so gelten* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}\neq(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$.

(ii) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von dritter Art, so gelten* $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$.[25]

Zuerst erhalten wir in gleicher Weise wie im Beweis von Satz 10 $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}$ von zweiter Art ist, so wird $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, folglich ist $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$. Ferner erhalten wir sofort $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist. Aus $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ folgt $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$. Also muss $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}\neq(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ sein.

Zweitens sei $\mathfrak{q}$ von dritter Art, dann ist nach Satz 20 $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ von zweiter Art, folglich

$$\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\neq(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{q}:\mathfrak{p}\supset(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}. \tag{4}$$

Aus $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$ ergibt sich $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist, so wird

$$(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}. \tag{5}$$

Infolge von (4) und (5) wird $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\supset(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{q}$. Weil nach Satz 16 kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ existiert, erhalten wir $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$.

Ferner ist $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ klar, wegen $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ ist, so wird $\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$. Also können wir schliessen:

$$\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}.$$

SATZ 22. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von dritter Art, so gelten*

(i) $\quad \mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^m \quad$ *für alle* m,

(ii) $\quad \mathfrak{q}^{m+k}:\mathfrak{q}^k\neq\mathfrak{q}^m \quad$ *für alle* m *und* k.

Zunächst nach Satz 18 ist $\mathfrak{q}^m$ von dritter Art, so erhalten wir sofort $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^m$ für alle m. Zweitens sei α ein beliebiges Element von $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}$, so ist $\alpha\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{q}^m$, folglich ist $\alpha\mathfrak{p}\mathfrak{q}^k\leqq\mathfrak{q}^{m+k}$ für alle k. Da $\mathfrak{q}$ von dritter Art ist, so wird $\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\mathfrak{q}$ d. h. $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^k$, daraus ergibt sich

25) Ist $\mathfrak{q}$ von erster Art oder von vierter Art, so ist es klar, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ sind.

$$\alpha\mathfrak{q}^k \leqq \mathfrak{q}^{m+k}, \quad \text{folglich ist} \quad \alpha \in \mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k.$$

Daher erhalten wir $\mathfrak{q}^m : \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k$. Ferner ist nach (i) $\mathfrak{q}^m \subset \mathfrak{q}^m : \mathfrak{p}$. Es muss also in der Tat $\mathfrak{q}^{m+k} : \mathfrak{q}^k \neq \mathfrak{q}^m$ für alle m und k sein.

§ 5. Primarideale von vierter Art.

Wenn $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von vierter Art und $w(\mathfrak{q})$ der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$ ist, so wird $w(\mathfrak{q})$ wirklich eine irrationale Zahl oder eine rationale Zahl, deren Nenner bei gekürzter Darstellung in keinem n_λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ aufgeht. In diesem Paragraphen wollen wir Beispiele geben, derart, dass $w(\mathfrak{q})$ eine rationale Zahl bzw. eine irrationale Zahl ist. Zu diesem Zwecke schicken wir folgende Sätze voraus.

Satz 23. *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und $w(\mathfrak{q})$ der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$, und ist $w(\mathfrak{q})$ eine irrationale Zahl, so muss $\mathfrak{q}$ von vierter Art sein.*

Wenn $\mathfrak{q}$ von erster oder zweiter Art ist, so wird nach Satz 5 (i) und (ii) $w(\mathfrak{q}) = \frac{e_\nu}{n_\nu}$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$. Wenn $\mathfrak{q}$ von dritter Art ist, so wird nach Satz 5 (iii) $w(\mathfrak{q}) = \frac{e_\nu - 1}{n_\nu}$ für ν $(\nu \geqq N)$. Danach besitzen alle Primärideale ausser der vierten Art eine rationale Zahl als ihre Werte.

Satz 24. *Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art und ist $w(\mathfrak{q})$ eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gleich, so geht der Nenner n bei gekürzter Darstellung in keinem n_ν $(\nu \geqq N)$ auf, wobei n_ν eine natürliche Zahl ist, derart, dass Primideal $\mathfrak{p}_\nu$ $(=\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu)$ in die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl p mit dem genauen Exponenten n_ν aufgeht.*

Sei $w(\mathfrak{q})$ gleich einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$, so erhalten wir nach Satz 5 (iv) folgende Ungleichung:

$$\frac{e_\nu}{n_\nu} > w(\mathfrak{q}) > \frac{e_\nu - 1}{n_\nu} \qquad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N).$$

Ginge n in n_λ für einen geeigneten Index λ $(\lambda > \nu)$ auf, so könnten wir $n_\lambda = nk$ setzen. Dann würde

$$\frac{e_\lambda}{n_\lambda} > \frac{m}{n} = \frac{mk}{n_\lambda} > \frac{e_\lambda - 1}{n_\lambda}$$

sein, und folglich $e_\lambda > mk > e_\lambda - 1$. Das ist aber unmöglich, also darf n in keinem n_ν aufgehen. Der Beweis unseres Satzes ist hiermit abgeschlossen.

Um Beispiele der Primärideale von vierter Art anzuführen, schicken wir folgenden Satz voraus.

Satz 25. *Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ und setzen wir nacheinander* $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}} \mathfrak{c}_{\nu+1}, (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{c}_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}$,

$\cdots$, $\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, $\cdots$ *und ferner definieren wir eine Folge* $a_\nu, a_{\nu+1}$, $\cdots, a_\lambda, \cdots$ *folgendermassen:*

$$\begin{aligned}
&a_\nu=a+1,\\
&a_{\nu+1}=a_\nu h_{\nu+1}-1=ah_{\nu+1}+h_{\nu+1}-1,\\
&a_{\nu+2}=a_{\nu+1}h_{\nu+2}-1=ah_{\nu+1}h_{\nu+2}+h_{\nu+1}h_{\nu+2}-h_{\nu+2}-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_\lambda=ah_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda+h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda-h_{\nu+2}h_{\nu+3}\cdots h_\lambda-\cdots-h_{\lambda-1}h_\lambda-h_\lambda-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

wo $h_\mu>2$ *für hinreichend grosses* $\mu\,(\mu>\lambda\geqq\nu)$ *ist, und bezeichnen wir mit* $\mathfrak{q}$ *die Vereinigungsmenge* $\{\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}, \cdots\}$, *so ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von vierter Art.*

Zunächst setzen wir $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, so ist $e_\lambda=a_\lambda$ für alle $\lambda\,(\lambda\geqq\nu)$. Denn ist es klar, dass $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\geqq\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$ ist, folglich ist $e_\lambda\leqq a_\lambda$. Jetzt nehmen wir an, dass $e_\lambda<a_\lambda$ ist. Dann gibt es ein Element α von der Art, dass α genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ teilbar, aber durch $\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$ unteilbar ist. Aus $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ folgt $\alpha\in\mathfrak{q}$. Also erhalten wir $\alpha\in\mathfrak{p}_\mu^{a_\mu}$ für hinreichend grosses $\mu\,(\mu>\lambda)$.

Da α andererseits genau durch $\mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu}$ teilbar ist, wird

$$e_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu\geqq a_\mu.$$

Da aber $a_{\lambda+1}=a_\lambda h_{\lambda+1}-1$, $a_{\lambda+2}=a_{\lambda+1}h_{\lambda+2}-1=a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}-h_{\lambda+2}-1, \cdots\cdots$

$$a_\mu=a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-1, \cdots\cdots$$

sind, erhalten wir

$$e_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu\geqq a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-1. \qquad (1)$$

Wegen $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ können wir annahmen dass $h_i\geqq2$ für alle i ist, so muss

$$\begin{aligned}
&h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-1\\
&=(h_{\lambda+1}-2)h_{\lambda+2}\cdots h_\mu+(h_{\lambda+2}-2)h_{\lambda+3}\cdots h_\mu+\cdots\cdots+(h_{\mu-1}-2)h_\mu+h_\mu-1>0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

sein. Aus (1) und (2) folgt

$$e_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu>a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu, \quad \text{d.h.}\quad e_\lambda>a_\lambda-1.$$

Daher erhalten wir $a_\lambda>e_\lambda>a_\lambda-1$, Das ist aber unmöglich. Also muss $e_\lambda=a_\lambda$ sein.

Zweitens können wir leicht beweisen, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ist. Denn, sei β ein beliebiges Element von $\mathfrak{q}$, so ist $\beta\in\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$ für hinreichend grosses λ. Andererseits ist es klar, dass

$$a_\mu+1=a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu<a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu$$

für hinreichend grosses $\mu\,(\mu>\lambda)$ ist.

Dann erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}\mathfrak{O}_\mu \leqq \mathfrak{p}_\mu^{a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu} \subset \mathfrak{p}_\mu^{a_\mu+1}.$$

Da aber nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\{\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda+1}, \cdots\}$ ist, können wir schliessen:

$$\beta\in\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \qquad \text{d. h.} \qquad \mathfrak{q}\leqq\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \qquad \text{folglich ist} \qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Drittens behaupten wir $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$. Zum Beweise dafür nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ist. Dann gibt es ein Element γ in $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}$. Für hinreichend grosses $\lambda\,(\lambda>\nu)$ ist $\gamma\in\mathfrak{O}_\lambda$. Aus $\gamma\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{q}$ ergibt sich $\gamma\in\mathfrak{p}$, folglich ist $\gamma\in\mathfrak{p}_\lambda$. Setzen wir $\gamma=\mathfrak{p}_\lambda^a\mathfrak{a}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, $a\geqq 1$, so ist $\gamma\mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{a+1}\mathfrak{a}_\lambda\leqq\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$. Dann erhalten wir

$$a+1\geqq a_\lambda. \tag{2}$$

Aus $\gamma\notin\mathfrak{q}$ ergibt sich $\gamma\notin\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$, folglich ist

$$\mathfrak{p}_\lambda^a\supset\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda} \qquad \text{d. h.} \qquad a<a_\lambda. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $\qquad a=a_\lambda-1, \qquad \text{d. h.} \qquad \gamma=\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda-1}\mathfrak{a}_\lambda.$ (4)

Nach Voraussetzung ist $h_\mu>2$ für hinreichend grossen Index μ $(\mu>\lambda\geqq\nu)$. Dann sei π ein Element in $\mathfrak{p}_\mu$ für dieses Index μ, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\mu^2$, so ist $\gamma\pi$ genau durch $\mathfrak{p}_\mu^{(a_\lambda-1)h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu+1}$ teilbar. Da aber

$$\gamma\pi\in\gamma\mathfrak{p}_\mu\leqq\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\mu=\mathfrak{p}_\mu^{a_\mu}$$

ist, erhalten wir

$$(a_\lambda-1)h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu+1\geqq a_\mu,$$

wo $a_\mu=a_\lambda h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-1$ ist. Also muss

$$-h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu+1\geqq-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-1$$

sein, folglich ist

$$h_{\lambda+1}h_{\lambda+2}\cdots h_\mu-h_{\lambda+2}h_{\lambda+3}\cdots h_\mu-\cdots\cdots-h_{\mu-1}h_\mu-h_\mu-2$$
$$=(h_{\lambda+1}-2)h_{\lambda+2}\cdots h_\lambda+(h_{\lambda+2}-2)h_{\lambda+3}\cdots h_\mu+\cdots\cdots+(h_{\mu-1}-2)h_\mu+h_\mu-2\leqq 0.$$

Da aber $h_{\lambda+i}\geqq 2$ für $i=1, 2, \cdots, \mu-\lambda-1$ und $h_\mu>2$ sind, ist das unmöglich. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis unseres Satzes abgeschlossen.

Beispiele von Primäridealen von vierter Art.

Beispiel (i). Es sei $\mathfrak{K}$ der Körper aller p^ν-ten Einheitswurzeln und $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primidealteiler von $p(\geqq 3)$ in $\mathfrak{K}_\nu$. Dann ist nach Satz 25

$$\mathfrak{q}=\{p, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2^{p-1}, \mathfrak{p}_3^{p^2-p-1}, \cdots, \mathfrak{p}_\nu^{p^{\nu-1}-p^{\nu-2}-\cdots-p^2-p-1}, \cdots\}$$

ein Primärideal von vierter Art und der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf $\mathfrak{p}$ ist eine rationale Zahl, deren Nenner bei gekürzter Darstellung in keinem $n_\nu=(p-1)p^{\nu-1}$ aufgeht:

$$w(\mathfrak{q})=\lim_{\nu\to\infty}\frac{p^{\nu-1}-p^{\nu-2}-\cdots-p-1}{(p-1)p^{\nu-1}}=\frac{p-2}{(p-1)^2}\,.$$

Beispiel (ii). Zunächst nennen wir die Mengen der natürlichen Zahlen folgendermassen:

$$\{1\}=\mathfrak{m}_1,\ \{2,3\}=\mathfrak{m}_2,\ \{4,5,6\}=\mathfrak{m}_3,\ \{7,8,9,10\}=\mathfrak{m}_4,\ \{11,\cdots,15\}=\mathfrak{m}_5,\ \cdots$$

und definieren eine Funktion $s(\lambda)$ von λ, derart, dass

$s(\lambda)=2$ ist, falls $\lambda\in\mathfrak{m}_t$ für gerade Zahl t ist,

$s(\lambda)=1$ ist, falls $\lambda\in\mathfrak{m}_t$ für ungerade Zahl t ist.

Dann sei $\mathfrak{K}$ der eben genannte Körper aller p^ν-ten inheitswurzeln, so ist

$$\mathfrak{q}=\{p,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3^{p+3},\ \mathfrak{p}_4^{p^2+2p+3},\ \mathfrak{p}_5^{p^3+2p^2+2p+2},\ \cdots,\mathfrak{p}_5^{a_\nu},\ \cdots\},$$

wobei $a_\nu=p^{\nu-2}+2p^{\nu-3}+2p^{\nu-4}+p^{\nu-5}+p^{\nu-6}+p^{\nu-7}+2p^{\nu-8}+\cdots+s(\nu-2)p+s(\nu-1)+1$ für $\nu\geqq 3$ ist, ein Primärideal von vierter Art, und der Wert von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf $\mathfrak{p}$ ist eine irrationale Zahl. Denn, ist

$$w(\mathfrak{q})=\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{(p-1)p^{\nu-1}}\text{[26]},$$

so ist

$$w(\mathfrak{q})=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^5}+\frac{1}{p^6}+\frac{2}{p^7}+\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{2}{p^{10}}+\frac{1}{p^{11}}+\cdots+\frac{1}{p^{15}}+\frac{2}{p^{16}}+\cdots\right\}$$

in der p-adischen Entwicklung kein periodischer Dezimalbruch. Damit ist $w(\mathfrak{q})$ keine

---

26) Im allgemeinen gilt folgender Satz: *Sind* $\mathfrak{q}=\{p,\mathfrak{p}_1^{a_1},\mathfrak{p}_2^{a_2},\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu},\cdots\}$ *und* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, *so ist* $w(\mathfrak{q})=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{e_\nu}{n_\nu}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{a_\nu}{n_\nu}$.

Wegen $\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}\subseteqq\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, ist es klar, dass
$$\frac{a_\nu}{n_\nu}\geqq\frac{e_\nu}{n_\nu}\quad\text{für alle }\nu \tag{1}$$
ist. Andererseits ist α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbares Element, so können wir festlegen wie folgt: $\alpha=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{c}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$. Aus $\alpha\in\mathfrak{q}$ ergibt sich die Existenz eines Indexes λ von der Art, dass $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda}$, $\lambda\geqq\nu$ ist. Aber ist $\alpha=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda,\mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, so erhalten wir
$$\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{a_\lambda},\qquad\text{d. h.}\qquad e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq a_\lambda\,.$$
Daraus folgt
$$\frac{e_\nu}{n_\nu}\geqq\frac{a_\lambda}{n_\lambda}\,. \tag{2}$$
Aus (1) und (2) ergibt sich sofort $w(\mathfrak{q})=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{e_\nu}{n_\nu}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{a_\nu}{n_\nu}$.

rationale Zahl,[27] d. h. eine irrationale Zahl.

HILFSSATZ 7. *Der Wert des Produktes zweier zu* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Primärideale* $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ *ist gleich der Summe der Werte der Faktoren.*[28]

Es seien $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{q}'\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}''\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, dann ist $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\geqq\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu}$, folglich $e_\nu\leqq e'_\nu+e''_\nu$. Also erhalten wir

$$\frac{e_\nu}{n_\nu}\leqq\frac{e'_\nu+e''_\nu}{n_\nu}\qquad \text{für alle } \nu. \tag{5}$$

Ist α genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbares Element, so ist $\alpha\in\mathfrak{q}$. Da aber nach Hilfssatz 5

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+e''_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}+e''_{\nu+1}},\ \cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda},\ \cdots\}$$

ist, so wird $\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+e''_\lambda}$ für hinreichend grosses $\lambda\,(\lambda>\nu)$. Weil α genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}$ teilbar ist, erhalten wir $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e'_\lambda+e''_\lambda$, folglich ist

$$\frac{e_\nu}{n_\nu}\geqq\frac{e'_\lambda+e''_\lambda}{n_\lambda}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich sofort

$$w(\mathfrak{q})=\lim_{\nu\to\infty}\frac{e_\nu}{n_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{e'_\nu+e''_\nu}{n_\nu}=w(\mathfrak{q}')+w(\mathfrak{q}'').$$

SATZ 26. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von vierter Art, so gilt:*

(i) *wenn* $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$ *für alle* m *ist, so ist* $w(\mathfrak{q})$ *eine irrationale Zahl,*

(ii) *wenn* $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ *für mindestens eine* n *ist, so ist* $w(\mathfrak{q})$ *eine rationale Zahl.*

(i) Fall. Wenn $\mathfrak{q}^m:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^m$ für alle m ist, so nehmen wir an, dass $w(\mathfrak{q})$ eine rationale Zahl ist. Dann können wir $w(\mathfrak{q})=\frac{m}{n}$, $(m,n)=1$, setzen, wobei, wie wir in Satz 24 bewiesen haben, kein $n_\nu\,(\nu\geqq N)$ durch n teilbar ist. Daher setzen wir $(n,n_\nu)=d$, $n=n'd$, $n_\nu=n'_\nu d$, $(n',n'_\nu)=1$, dann wird nach Hilfssatz 7

---

27) Wir können beweisen folgenden Satz: *In der p-adischen Entwicklung ist eine rationale Zahl ein periodischer Dezimalbruch.*

Zum Beweise ist $\frac{m}{n}$ eine rationale Zahl bei gekürzter Darstellung, wobei $m<n$ ist. Zunächst sei $(n,p)=1$. Nach dem Eulerschen Satz erhalten wir $p^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$, so setzen wir $p^{\varphi(n)}-1=na$. Dann ist

$$\frac{m}{n}=\frac{ma}{na}=\frac{ma}{p^{\varphi(n)}-1}=\frac{ma}{p^{\varphi(n)}}+\frac{ma}{p^{2\varphi(n)}}\cdots+\frac{ma}{p^{i\varphi(n)}}+\cdots. \tag{1}$$

Da aber ma eine ganze rationale Zahl ist, erhalten wir die folgende Darstellung: $ma=a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_tp^t(a_t\neq 0)$. Wegen $ma<na<p^{\varphi(n)}$, ist (1) die p-adische Entwicklung der Zahl $\frac{m}{n}$, und ist ein periodischer Dezimalbruch. Endlich sei $(n,p)=p$, so wird $n=n'p^e$, d. h. $\frac{m}{n}=\frac{1}{p^e}\times\frac{m}{n'}$, $(n',p)=1$. Daher können wir in gleicher Weise wie oben beweisen.

28) Vgl. „Krull“, Satz 8, s. 50, und „Moriya“, Satz 28, s. 168.

$$w(\mathfrak{q}^{n'})=n'w(\mathfrak{q})=n'\times\frac{m}{n}=\frac{m}{d}=\frac{mn'_\nu}{n_\nu}\,.$$

Damit ist nach Satz 23 und 24 $\mathfrak{q}^{n'}$ keinesweg von vierter Art. Da aber $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist, so wird $\mathfrak{q}^{n'}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^{n'}$, und ist $\mathfrak{q}^{n'}$ von dritter Art. Also stossen wir auf einen Widerspruch $\mathfrak{q}^{n'}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{n'}$. Damit muss $w(\mathfrak{q})$ eine irrationale Zahl sein.

(ii) Fall. Wenn $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ für ein n und $\mathfrak{q}$ von vierter Art sind, so ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, folglich ist $\mathfrak{q}^n=\mathfrak{q}^n\mathfrak{p}$, daher muss $\mathfrak{q}^n$ von dritter Art sein. Setzen wir $\mathfrak{q}^n\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird nach Satz 5

$$w(\mathfrak{q}^n)=\frac{E_\nu-1}{n_\nu}\,,\qquad \text{falls } \nu\geqq N, \text{ für hinreichend grosses } N.$$

Dann ist nach Hilfssatz 7

$$w(\mathfrak{q}^n)=nw(\mathfrak{q})=\frac{E_\nu-1}{n_\nu}\qquad \text{d. h.}\qquad w(\mathfrak{q})=\frac{E_\nu-1}{n\cdot n_\nu}\,.$$

Also muss $w(\mathfrak{q})$ eine rationale Zahl sein. Ferner macht der folgende Satz unser obiges Result (ii) weiter klar.

SATZ 27. *Sind* $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ *und* $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ *für ein* n, *so ist* $\mathfrak{q}^{tn}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{tn}$ *für jede natürliche Zahl* t.

Aus $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ folgt die Existenz eines Elementes α, derart, dass $\alpha\notin\mathfrak{q}^n$, $\alpha\in\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}$ ist. Aus $\alpha\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}^n$ ergibt sich $\alpha^t\mathfrak{p}^t\subseteqq\mathfrak{q}^{tn}$ für jede natürliche Zahl t. Wegen $\mathfrak{p}^t=\mathfrak{p}$, erhalten wir $\alpha^t\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}^{tn}$, d. h. $\alpha^t\in\mathfrak{q}^{tn}:\mathfrak{p}$. Andererseits ergibt sich aus $\alpha\notin\mathfrak{q}^n$ nach Hilfssatz 6 $\alpha^t\notin\mathfrak{q}^{tn}$. Danach ist α^t ein Element in $\mathfrak{q}^{tn}:\mathfrak{p}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}^{tn}$. Also muss $\mathfrak{q}^{tn}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{tn}$ sein.

SATZ 28. *Sind* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von vierter Art und* $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ *für ein* n, *so ist* $\mathfrak{q}^{n+k}:\mathfrak{q}^k\neq\mathfrak{q}^n$ *für alle* k.

Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art, so wird $\mathfrak{q}^n\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^n$. Da aber $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ ist, so ist $\mathfrak{q}^n$ von dritter Art. Damit erhalten wir nach Satz 21 $(\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p})\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^n$, folglich ist

$$(\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p})\mathfrak{p}\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^{n+k}\qquad \text{für alle } k,$$

weiter wegen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^k$,

$$(\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p})\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^{n+k} \tag{7}$$

Andererseits nach Satz 16 gibt es kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^n$, daher ist

$$\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}^n,\alpha),\qquad \text{wobei } \alpha\notin\mathfrak{q}^n \text{ ist.}$$

Aus (7) ergibt sich $(\mathfrak{q}^n,\alpha)\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^{n+k}$, folglich ist $\alpha\mathfrak{q}^k\subseteqq\mathfrak{q}^{n+k}$, d. h. $\alpha\in\mathfrak{q}^{n+k}:\mathfrak{q}^k$. Also muss $\mathfrak{q}^{n+k}:\mathfrak{q}^k\neq\mathfrak{q}^n$ für alle k sein. Aus Satz 27 und 26 (i) erhalten wir sofort folgenden

ZUSATZ. *Sind* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von vierter Art und* $\mathfrak{q}^{n+k}:\mathfrak{q}^k=\mathfrak{q}^n$ *für alle* n, k, *so ist* $w(\mathfrak{q})$ *eine irrationale Zahl.*