Tohoku Math. J.
56 (2004), 583–592

UN RÉSULTAT D'IRRÉDUCTIBILITÉ EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

ALEXANDRU I. BADULESCU

(Received April 14, 2003, revised September 12, 2003)

Abstract. Deligne, Kazhdan and Vignéras proved that, for an inner form of GL_n over a zero characteristic p-adic field, the induced representation from a square integrable irreducible representation is irreducible. Here we prove the case of non-zero characteristic.

1. Le théorème. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque, D une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie d^2, r un entier strictement positif et $G = GL_r(D)$. Le but de ce papier est de montrer le théorème 1.1 plus bas quand le corps de base F est de caractéristique non nulle. Le cas de caractéristique nulle a été prouvé dans [DKV] (Théorème B.2.d) et c'est là qu'apparaît l'idée d'utiliser le théorème de Paley-Wiener. Leur preuve ne marche pas directement en caractéristique positive. On prouve ici le cas de caractéristique non nulle, en utilisant la méthode des corps proches de Kazhdan.

THÉORÈME 1.1. *Soit P un sous-groupe parabolique de G et soit $P = LU$ une décomposition de Levi de P. Soit π une représentation de carré intégrable de L. Alors* $\mathrm{ind}_P^G \pi$ *est irréductible.*

L'importance de ce théorème vient de ce qu'il permet de passer de la classification de Langlands à une classification plus fine, comme l'a montré Zelevinski dans [Ze] pour GL_n et, à sa suite, Tadić dans [Ta] pour les formes intérieures. Dans [Ta], l'auteur se place en caractéristique nulle et le résultat que nous prouvons ici permet de lever cette contrainte.

2. Notations et conventions. On note $\Psi(G)$ l'ensemble des caractères lisses non ramifiés de G. L'ensemble $\Psi(G)$ admet une structure naturelle de variété algébrique. Si π est une représentation admissible de G, on note $\Psi(G;\pi)$ l'ensemble de classes de représentations du type $\psi \otimes \pi$, $\psi \in \Psi(G)$ ($\Psi(G;\pi)$ a une structure de variété algébrique isomorphe à un quotient de la variété $\Psi(G)$). On note $\mathrm{Grot}(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de G. $\mathrm{Grot}(G)$ admet deux $\mathbf{Z}$-bases remarquables, l'une formée des classes des représentations irréductibles, l'autre formée des classes des représentations de Langlands (voir les paragraphes suivants). Par la suite, nous regarderons une représentation de G comme un élément de $\mathrm{Grot}(G)$ quand aucune confusion n'est possible.

Un sous-groupe parabolique de G est dit *standard* s'il contient le groupe des matrices triangulaires supérieures, et un sous-groupe de G est dit *sous-groupe de Levi standard* si

2000 *Mathematics. Subject Classification.* Primary 20G05; Secondary 20G25, 20G30.

c'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique standard et s'il contient le groupe des matrices diagonales. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G alors il existe une partition $A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_k$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\}$ où $A_1 = \{1, 2, \ldots, r_1\}$, $A_2 = \{r_1+1, r_1+2, \ldots, r_1+r_2\}$ etc. telle que L soit l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in G$ telles que m_{ij} est nul si $(i; j) \notin \bigcup_{u=1}^k A_u \times A_u$. Nous identifions alors L au produit $GL_{r_1}(D) \times GL_{r_2}(D) \times \cdots \times GL_{r_k}(D)$. Les notations du paragraphe précédent s'appliquent facilement alors à tout sous-groupe de Levi standard de G.

Si $\nu \in \Psi(L)$, alors $\nu = \prod_{u=1}^k \nu_u$, où $\nu_u \in \Psi(GL_{r_u}(D))$ et s'écrit donc $\nu_u = |\det|^{c_u}$, où c_u est un nombre complexe. On dit que ν est *strictement positif* si $u \mapsto \mathrm{Re}(c_u)$ est une fonction strictement croissante.

Nous appelons *représentation de Langlands* une représentation du type $\mathrm{ind}_Q^G \nu \otimes \tau$ où Q est un sous-groupe parabolique standard de G, τ est une représentation tempérée du sous-groupe de Levi de Q, et ν est un caractère strictement positif. L'ensemble des représentations de Langlands forme une base de $\mathrm{Grot}(G)$ ([DKV], A.4.f) que nous appellerons *la base de Langlands*. Nous appellerons *représentation de Langlands strictement induite* une représentation comme plus haut avec $Q \neq G$. On note $W(G)$ le groupe formé par les matrices de permutation dans G qu'on identifie aussi avec le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\}$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G et $g \in G$, alors on pose ${}^gL = gLg^{-1}$ (même notation aussi pour les paraboliques) et si π est une représentation de L, on note ${}^g\pi$ la représentation de ${}^gL$ définie par ${}^g\pi(x) = \pi(g^{-1}xg)$. On utilise aussi les notations: L^g pour ${}^{g^{-1}}L$ et π^g pour ${}^{g^{-1}}\pi$.

Une représentation de G est dite *essentiellement de carré intégrable* si elle peut s'écrire comme produit tensoriel d'une représentation de carré intégrable et d'un caractère de G. Une représentation est dite *essentiellement tempérée* si elle peut s'écrire comme produit tensoriel d'une représentation tempérée et d'un caractère de G. Ces définitions s'étendent de façon évidente aux sous-groupes de Levi standard de G.

3. La preuve.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1. On peut supposer que P est standard. Nous montrons le théorème par récurrence sur l'entier strictement positif k tel que $G = GL_k(D)$ (D est fixée). Pour $k = 1$ le théorème est évident. Supposons que le théorème est vérifié pour tout $k < r$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un sous-groupe parabolique propre P_0 de $G = GL_r(D)$, une décomposition de Levi $P_0 = L_0U_0$ de P_0 et une représentation de carré intégrable π_0 de L_0 telle que l'induite de P_0 à G de la représentation π_0 ne soit pas irréductible. On sait qu'on a dans $\mathrm{Grot}(G)$:

$$\mathrm{ind}_{P_0}^G \pi_0 = \sum_{i=1}^s a_i \tau_i$$

où les a_i sont des entiers strictement positifs et les τ_i sont des représentations tempérées de G non équivalentes, et aucune parmi les τ_i n'est de carré intégrable.

LEMME 3.1. *On a* $s = 1$.

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que $s \geq 2$. On a alors deux cas:

Premier cas: Il existe un $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ tel que $\tau_i \notin \Psi(G; \tau_1)$. On peut supposer que $i = 2$. Posons

$$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_s\} \cap \Psi(G; \tau_1) = \{\tau_{i_1} = \tau_1, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \ldots, \tau_{i_p}\}$$

et

$$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_s\} \cap \Psi(G; \tau_2) = \{\tau_{j_1} = \tau_2, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}, \ldots, \tau_{j_q}\}.$$

Soient

$$\alpha = \sum_{u=1}^{q} a_{j_u}$$

et

$$\beta = \sum_{v=1}^{p} a_{i_v}.$$

On considère alors la forme linéaire f sur Grot(G) définie sur la base de Langlands par:

(1) $f(\rho) = \alpha$ si $\rho \in \Psi(G; \tau_1)$

(2) $f(\rho) = -\beta$ si $\rho \in \Psi(G; \tau_2)$

(3) $f(\rho) = 0$ si ρ est une représentation de la base de Langlands de Grot(G) qui n'appartient ni à $\Psi(G; \tau_1)$, ni à $\Psi(G; \tau_2)$.

Remarque. Les conditions (1) et (2) ont été choisies de façon à ce que (1), (2) et (3) impliquent que $f(\chi \otimes \mathrm{ind}_{P_0}^G \pi_0) = 0$ pour tout $\chi \in \Psi(G)$. On a aussi $f(\tau_1) = \alpha \neq 0$.

Deuxième cas: Pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ il existe un caractère $\chi_i \in \Psi(G)$ tel qu'on ait $\tau_i = \chi_i \otimes \tau_1$. Pour une représentation tempérée donnée x, il existe, modulo conjugaison dans G, un unique couple (L, σ) avec L sous-groupe de Levi standard et σ représentation essentiellement de carré intégrable de L tel que x soit un sous-quotient de $\mathrm{ind}_L^G \sigma$. Soit $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$. La représentation τ_i est sous-quotient des l'induite à G de $(\mathrm{res}_{P_0}^G \chi_i) \otimes \pi_0$, avec multiplicité a_1, et de l'induite à G de π_0, avec multiplicité a_i. On en déduit que les a_i sont tous égaux. Soit alors f_0 une fonction algébrique définie sur la variété $\Psi(G; \tau_1)$ par: si l est le plus grand entier tel que $|\det|^{2\pi i/l} \otimes \tau_1$ est équivalente á τ_1 alors, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{C}$, $f_0(|\det|^{\alpha} \otimes) \tau_1) = e^{l\alpha}$.

Définissons cette fois la fonction f sur la base de Langlands de Grot(G) de la façon suivante:

(1') $f(\rho) = f_0(\rho)$ si $\rho \in \Psi(G; \tau_1)$

(2') $f(\rho) = 0$ si ρ est une représentation de la base de Langlands qui ne se trouve pas dans $\Psi(G; \tau_1)$.

Remarque. Dans ce cas aussi, $f(\chi \otimes \mathrm{ind}_{P_0}^G \pi_0) = 0$ pour tout $\chi \in \Psi(G)$, tandis que $f(\tau_1) = 1 \neq 0$.

Nous allons montrer que la fonction f vérifie toujours (qu'on soit dans le premier ou le deuxième cas) les conditions de Paley-Wiener.

LEMME 3.2. *L'application f s'annule sur toute représentation induite à partir d'un sous-groupe parabolique propre de G.*

DÉMONSTRATION. Se fait en deux étapes:

Étape 1: f s'annule sur toute induite d'une représentation essentiellement de carré intégrable d'un sous-groupe de Levi propre. (N'utilise pas l'hypothèse de récurrence.)

Soient P un sous-groupe parabolique propre de G, $P = LU$ une décomposition de Levi de P et σ une représentation essentiellement de carré intégrable de L. On sait (voir, par exemple, [Ba1], Lemme 2.3) qu'on a deux possibilités:

- si σ est un produit du type $\sigma = \psi \otimes \sigma_u$ où ψ est la restriction à L d'un caractère Ψ de G et σ_u est de carré intégrable, alors $\mathrm{ind}_L^G \sigma = \Psi \otimes \mathrm{ind}_L^G \sigma_u$,

- sinon $\mathrm{ind}_L^G \sigma$ est une somme de représentations de Langlands strictement induites.

Maintenant, si σ est dans la seconde situation, $f(\mathrm{ind}_P^G \sigma) = 0$ par la construction de f (condition (3) dans le premier cas et (2') dans le deuxième). Si σ est dans la première situation, alors on a encore une fois deux possibilités:

- ou bien $L = L_0^g$ pour un $g \in G$ et il existe un caractère θ de L qui est la restriction d'un caractère Θ non ramifié de G tel que $\sigma_u = \theta \otimes \pi_0^g$; alors, dans $\mathrm{Grot}(G)$, on a $\mathrm{ind}_L^G \sigma_u = \Theta \otimes \mathrm{ind}_{L_0}^G \pi_0$, ce qui implique

$$f(\mathrm{ind}_P^G \sigma) = f(\Psi \otimes \mathrm{ind}_L^G \sigma_u) = f(\Psi\Theta \otimes \mathrm{ind}_{L_0}^G \pi_0) = 0$$

(voir les remarques faites plus haut sur la construction de f dans les deux cas),

- ou bien on ne se trouve pas dans cette situation; alors les séries de composition de $\Theta \otimes \mathrm{ind}_{P_0}^G(\pi_0)$ et $\mathrm{ind}_P^G \sigma_u$ sont disjointes pour tout $\Theta \in \Psi(G)$. La suite de composition de $\mathrm{ind}_P^G \sigma_u$ est donc formée de représentations tempérées, mais ne contient aucun élément de $\bigcup_{i=1}^s \Psi(G; \tau_i)$. Cela implique que la suite de composition de $\mathrm{ind}_P^G \sigma = \Psi \otimes \mathrm{ind}_P^G \sigma_u$ est formée de représentations essentiellement tempérées mais ne contient aucun élément de $\bigcup_{i=1}^s \Psi(G; \tau_i)$. Donc, encore une fois, $f(\mathrm{ind}_P^G \sigma) = 0$ par la condition (3) dans le premier cas et (2') dans le deuxième cas dans la construction de f.

Étape 2: Soit $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$ le sous-groupe de $\mathrm{Grot}(G)$ engendré par toutes les représentations induites à partir de sous-groupes paraboliques propres de G. Les représentations induites de représentations essentiellement de carré intégrable à partir de sous-groupes paraboliques propres de G forment une famille génératrice pour $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$. (Utilise l'hypothèse de récurrence.)

Remarquons que l'hypothèse de récurrence implique que pour tout sous-groupe parabolique propre P de G qui a une décomposition de Levi $P = LU$, toute représentation tempérée de L est une représentation induite d'une représentation de carré intégrable. Par conséquent, toute représentation essentiellement tempérée de L est une représentation induite d'une représentation essentiellement de carré intégrable.

Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique propre de G. La remarque plus haut vaut maintenant pour tous les sous-groupes paraboliques de L, propres ou pas cette fois. Mais l'ensemble des induites des représentations essentiellement tempérées de tous les sous-groupes paraboliques (propres ou pas) de L est une famille génératrice de Grot(L) (car elle contient la base de Langlands de L). L'hypothèse de récurrence implique donc que l'ensemble des induites des représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes paraboliques (propres ou pas) est aussi une famille génératrice de Grot(L). Cela prouve que les représentations induites de représentations essentiellement de carré intégrable à partir de sous-groupes paraboliques propres de G engendrent $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$. □

Pour vérifier les conditions de Paley-Wiener sur f, il suffit, grâce au lemme 3.2, de montrer que pour toute représentation irréductible π de G, la restriction de f à $\Psi(G;\pi)$ est algébrique. Pour cela, on écrit π sur la base de Langlands dans Grot(G). Il y a deux types de représentations qui apparaissent dans cette écriture: des représentations essentiellement tempérées de G et des représentations de Langlands strictement induites. Quand on fait le produit tensoriel d'une représentation de Langlands strictement induite par un caractère, on obtient toujours un élément de $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$. Or, on a montré que f s'annule sur $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$. Donc, l'algébricité de f sur $\Psi(G;\pi)$ se réduit à l'algébricité de f sur les variétés $\Psi(G;\tau)$ où τ est une représentation essentiellement tempérée, qui est évidente par les conditions posées à la construction de f.

Donc f est une fonction trace par application du théorème de Paley-Wiener ([BDK]). Soit f' une fonction sur G qui correspond à f par ce théorème.

Rappelons qu'un élément de G est dit *semisimple régulier* si son polynôme caractéristique est sans racine multiple sur une clôture algébrique de F, et *elliptique régulier* si son polynôme caractéristique est irréductible et sans racine multiple sur une clôture algébrique de F.

LEMME 3.3. *L'intégrale orbitale de f' est nulle sur les éléments semisimples réguliers qui ne sont pas elliptiques réguliers de G.*

DÉMONSTRATION. On a vu que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G)$, on avait $\mathrm{tr}\,\sigma(f') = 0$. Le lemme est alors une conséquence classique en toute caractéristique (voir par exemple [Ba1], Lemme 2.4). □

La fonction f' annule de plus les traces de toutes les représentations essentiellement de carré intégrable, mais pas la trace de τ_1. Montrons qu'il y a là une contradiction qui prouve que $s = 1$ (on est toujours dans la démonstration du lemme 3.1). On distingue deux cas, selon la caractéristique de F:

(a) F est de caractéristique nulle.

LEMME 3.4. *L'intégrale orbitale de f' s'annule sur les éléments elliptiques réguliers de G.*

DÉMONSTRATION. Soient Z le centre de G et ω un caractère unitaire de Z. Nous allons utiliser l'espace $L_0(G_e;\omega)$ des fonctions f localement constantes sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G, invariantes sous l'action de conjugaison par des éléments de G, et vérifiant $f(zg) = \omega(z)f(g)$ pour tout $z \in Z$ et tout g elliptique régulier dans G. On considère le sous-espace $L^2(G_e;\omega)$ de $L_0(G_e;\omega)$ formé des fonctions f telles que

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_e}|W_T|^{-1}\int_{T^{\mathrm{reg}}/Z}D(\bar t)|f(\bar t)|^2d\bar t$$

converge, où $\mathcal{T}_e$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G, $|W_T|$ est le cardinal du groupe de Weyl de T, T^{reg} est l'ensemble des éléments réguliers de T, $d\bar t$ est choisie de façon à ce que le volume de T^{reg}/Z soit 1, et $D(\bar t)$ est la valeur absolue normalisée du déterminant de l'opérateur $\mathrm{Ad}(\mathrm{t}^{-1})-\mathrm{Id}$ agissant sur $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(T)$. On définit un produit scalaire dans $L^2(G_e;\omega)$ en posant:

$$\langle f_1;f_2\rangle_e=\sum_{T\in\mathcal{T}_e}|W_T|^{-1}\int_{T^{\mathrm{reg}}/Z}D(\bar t)f_1(\bar t)\overline{f_2(\bar t)}d\bar t\,,$$

qui munit $L^2(G_e;\omega)$ d'une structure d'espace préhilbertien.

On sait que pour toute représentation π de G de carré intégrable et de caractère central ω, la restriction du caractère χ_π de π à G_e se trouve dans $L^2(G_e;\omega)$ et les éléments de $L^2(G_e;\omega)$ ainsi obtenus forment une famille orthonormale pour $\langle\ ;\ \rangle_e$ ([Cl], on est en caractéristique nulle). Une conséquence de la correspondance de Jacquet-Langlands avec une algèbre à division est que ce système est complet ([Ba2], cor. 5.13, par exemple). À partir de f' on définit f'_ω en posant, pour tout $g\in G$,

$$f'_\omega(g)=\int_Z\omega(z)f'(zg)dz\,.$$

Nous avons la relation entre les intégrales orbitales

$$\Phi(f'_\omega;g)=\int_Z\omega(z)\Phi(f';zg)dz\,,$$

pour tout $g\in G$. Le lemme 3.3 entraîne donc que l'intégrale orbitale de f'_ω est nulle sur les éléments semisimples réguliers qui ne sont pas elliptiques, i.e. qui n'appartiennent pas à un tore elliptique maximal. Dans ce cas, la formule d'intégration de Weyl donne, pour toute représentation de carré intégrable π de G de caractère central ω,

$$\mathrm{tr}\,\pi(f'_\omega)=\sum_{T\in\mathcal{T}_e}|W(T)|^{-1}\int_{T^{\mathrm{reg}}/Z}D(\bar t)\chi_\pi(\bar t)\Phi(f'_\omega;\bar t)d\bar t\,.$$

Or, on sait que $\mathrm{tr}\,\pi(f'_\omega)=\mathrm{tr}\,\pi(f')=0$.

LEMME 3.5. *La restriction à l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G de l'intégrale orbitale de f'_ω se trouve dans l'espace $L^2(G_e;\omega^{-1})$.*

DÉMONSTRATION. D'après [H-CvD], th.14, chap.8, pour tout T dans $\mathcal{T}_e$, le produit de l'intégrale orbitale de f'_ω et de la fonction $D^{1/2}$ est borné sur T^{reg}. Le module du carré de cette fonction est ainsi borné et donc intégrable sur T^{reg}/Z qui est de mesure 1. Comme $\mathcal{T}_e$ est fini, le résultat s'ensuit. $\square$

D'après ce qui précède, la fonction conjuguée complexe de $\Phi(f'_\omega;\cdot)$ est un élément de $L^2(G_e;\omega)$ orthogonal à χ_π. C'est vrai pour toute représentation π de carré intégrable et de caractère central ω. On en déduit que $\Phi(f'_\omega;\ \cdot)$ est identiquement nulle sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers.

Soit g un élément elliptique régulier de G. Nous avons trouvé que pour tout caractère unitaire ω de Z on a

$$\int_Z \omega(z)\Phi(f'; zg)dz = 0\,.$$

La proposition 4.4, [Bo], Chap. 2, implique que $\Phi(f'; g) = 0$. Le lemme est montré. □

Les lemmes 3.3 et 3.4 impliquent que l'intégrale orbitale de f' est nulle sur l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G. Mais alors la trace de toute représentation de G est nulle sur f' (nous sommes en caractéristique nulle). Cela contredit $\mathrm{tr}(\tau_1(f')) \neq 0$. En conclusion $s = 1$ et on a $\mathrm{ind}_{P_0}^G \pi_0 = a\tau$ où a est un entier strictement positif et τ est une représentation tempérée de G. □

(b) F est de caractéristique positive. Nous avons utilisé deux résultats connus pour l'instant uniquement en caractéristique nulle dans la démonstration plus haut; le deuxième est le résultat de [H-CvD] utilisé dans le lemme 3.5, et le premier est l'intégrabilité locale des caractères, utilisée quand on a appliqué la formule d'intégration de Weyl (ce dernier résultat n'est pas connu en caractéristique non nulle, puisque [Ba3], bien que publié avant, se base sur le présent papier, désolé). Dans le cas de caractéristique non nulle, nous allons utiliser les corps proches de Kazhdan pour conclure. Soit E un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Notons O_F (resp. O_E) l'anneau des entiers de F (resp. E), et I_F (resp. I_E) l'idéal maximal de O_F (resp. O_E). Nous disons que E et F sont m-proches s'il existe un isomorphisme d'anneaux $\bar\lambda^m_{FE}$ de O_F/I_F^m sur O_E/I_E^m (pour tout m on peut trouver un tel corps E). Quand nous dirons par la suite que F et E sont *m-proches*, on considérera tacitement qu'un isomorphisme $\bar\lambda^m_{FE}$ est fixé une fois pour toutes. Soit E un corps m-proche de F. Rebaptisons G_F notre groupe pour rappeler qu'il est défini sur F. Nous avons $G_F = GL_r(D_F)$ où D_F est une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie d^2. On note G_E le groupe $GL_r(D_E)$ où D_E est une algèbre à division centrale sur E qui a la même dimension et le même invariant (associé par la théorie du groupe de Brauer) que ceux de D_F.

Notons O_{D_F} l'anneau des entiers de D_F, et I_{D_F} l'idéal maximal de O_{D_F}. On pose $K^0_{D_F} = GL_r(O_{D_F})$, et, pour tout entier strictement positif l, $K^l_{D_F} = 1 + M_r(I^{dl}_{D_F})$. On fixe sur G_F une mesure de Haar telle que le volume de $K^0_{D_F}$ soit 1. Soit f une fonction localement constante à support compact sur G_F. Nous définissons le *niveau* de f comme étant le plus petit entier l tel que f soit bi-invariante par $K^l_{D_F}$. Notons H^l_F l'algèbre de Hecke des fonctions localement constantes à support compact de niveau inférieur ou égal à l sur G_F. Si π est une représentation lisse irréductible de G_F on appelle niveau de π le plus petit entier l tel que π ait un vecteur non nul fixe sous $K^l_{D_F}$. Adoptons pour G_E des notations et définitions analogues à celles fixées dans ce paragraphe pour G_F.

Dans [Ba2] nous montrons que, quel que soit l'entier positif l, il existe un entier m tel que, pour tout corps E m-proche de F, $\bar\lambda^m_{FE}$ induise un isomorphisme d'algèbres $\bar\zeta^l_{D_F D_E}$

de H_F^l sur H_E^l. D'oú une bijection entre l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G_F de niveau inférieur ou égal à l et l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G_E de niveau inférieur ou égal à l. On utilise pour cet isomorphisme la même notation $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}$. Nous avons

$$\mathrm{tr}\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(\pi)(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f)) = \mathrm{tr}\,\pi(f)$$

pour toute représentation π de G_F de niveau inférieur ou égal à l et toute $f \in H_F^l$.

Avec les conventions faites en début de section, un sous-groupe de Levi standard L de G_F ou G_E est formé des matrices diagonales par blocs de taille donnée et on peut associer à L de façon biunivoque une suite ordonnée d'entiers strictement positifs $r_1, r_2, \dots, r_k$ telle que $\sum_{i=1}^k r_i = r$ où les r_i représentent les tailles de ces blocs. À un sous-groupe de Levi standard de G_F correspond donc un unique sous-groupe de Levi standard de G_E. C'est pareil pour les sous-groupes paraboliques standard. Si L_F est un sous-groupe de Levi standard de G_F on note L_E le sous-groupe de Levi standard de G_E qui lui correspond, et si P_F est un sous-groupe parabolique standard de G_F on note P_E le sous-groupe parabolique standard de G_E qui lui correspond. Sur chaque bloc d'un sous-groupe de Levi standard de G_F et G_E nous adoptons les mêmes notations et conventions que plus haut.

Soit P est un sous-groupe parabolique standard de G_F et $P = LU$ sa décomposition de Levi (L sous-groupe de Levi standard de G_F et U le radical unipotent de P). On munit P et U de mesures de Haar invariantes à gauche telles que les volumes de $P \cap K^0_{D_F}$ et $U \cap K^0_{D_F}$ soient égaux à 1. On note δ_P le caractère modulaire sur P.

Pour toute fonction localement constante à support compact sur G_F, on définit une fonction localement constante à support compact sur L, f^P, par la formule:

$$f^P(l) = \delta_P^{1/2}(l) \int_{K^0_{D_F}} \int_U f(k^{-1}luk)dkdu$$

pour tout $l \in L$.

Les mêmes définitions s'appliquent à E.

PROPOSITION 3.6. *Soient P_F un sous-groupe parabolique standard de G_F et $P_F = L_F U_F$ la décomposition de Levi standard de P_F. Alors il existe un m tel que, si F et L sont m-proches, alors $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')$ et $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}({f'}^{P_F})$ sont bien définies et on a*

$$(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f'))^{P_E} = \bar{\zeta}^l_{D_F D_E}({f'}^{P_F})\,.$$

DÉMONSTRATION. L'analogue de cette proposition dans le cas particulier $G_F = GL_r(F)$ est montré à la page 1053 de [Le]. La démonstration est exactement la même dans notre cas. □

Nous allons relever notre situation en caractéristique nulle et utiliser (a). Soit $\mathcal{P}_F$ l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques standard, propres ou non, de G_F et soit m un entier suffisamment grand pour que, pour tout corps local E qui est m-proche de F, la proposition 3.6 plus haut soit vérifiée pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ qui a une décomposition de Levi standard $P_F = L_F U_F$ (c'est possible puisque $\mathcal{P}_F$ est un ensemble fini). On a alors:

1) si P_E est un sous-groupe parabolique standard propre de G_E, si $P_E = L_E U_E$ est une décomposition de Levi standard de P_E, si π est une représentation lisse irréductible de L_E, alors:

- ou bien le niveau de π est supérieur strictement à l et alors

$$\operatorname{tr}\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f'^{P_F})) = 0\,,$$

- ou bien le niveau de π est inférieur ou égal à l et alors, en supposant que σ est la représentation lisse irréductible de L_F qui vérifie $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(\sigma) = \pi$ on peut écrire:

$$\operatorname{tr}\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f'^{P_F})) = \operatorname{tr}\sigma(f'^{P_F}) = \operatorname{tr}(\operatorname{ind}^{G_F}_{P_F}\sigma)(f') = 0$$

car f' annule la trace de toute représentation de $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G_F)$.

Dans les deux cas on obtient $\operatorname{tr}\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f'^{P_F})) = 0$ ce qui implique, compte tenu de la proposition 3.6 plus haut, que

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ind}^{G_E}_{P_E}\pi)(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')) = 0\,.$$

Finalement, on a trouvé que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')$ est une fonction qui annule la trace de toute représentation dans $\mathrm{Grot}_{\mathrm{ind}}(G_E)$.

2) si π est une représentation essentiellement de carré intégrable de G_E, alors ou bien son niveau est supérieur strictement à l et donc $\operatorname{tr}\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')) = 0$ ou bien son niveau est inférieur ou égal à l et alors, en supposant que σ est la représentation lisse irréductible de G_F qui vérifie $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(\sigma) = \pi$ on a que σ est une représentation essentiellement de carré intégrable (th. 2.16.b dans [Ba2]) et par conséquent

$$\operatorname{tr}\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')) = \operatorname{tr}\sigma(f') = 0\,,$$

car f' annule la trace de toute représentation essentiellement de carré intégrable de G_F. Finalement, on a trouvé que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')$ annule la trace de toute représentation essentiellement de carré intégrable de G_E.

Or, E est de caractéristique nulle. Par les points 1) et 2) ci-dessus et par le raisonnement déjà fait en caractéristique nulle, on en déduit que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')$ annule la trace de toutes les représentations de G_E. D'autre part, comme $\operatorname{tr}\tau_1(f') \neq 0$, le niveau de τ_1 est inférieur ou égal à l et donc $\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(\tau_1)$ est bien défini et

$$\operatorname{tr}\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(\tau_1)(\bar{\zeta}^l_{D_F D_E}(f')) = \operatorname{tr}\tau_1(f') \neq 0\,.$$

Contradiction! On trouve donc, comme en caractéristique nulle, que $s = 1$ et on a $\operatorname{ind}^G_{P_0}\pi_0 = a\tau$ où a est un entier strictement positif et τ est une représentation tempérée de G. □

Le fait que $a = 1$ se montre exactement de la même façon que les étapes (2) et (3) de la preuve de la proposition 27 de [FK], page 98. Le th. 1.1 est démontré. □

REFERENCES

[Ba1] A. I. BADULESCU, Orthogonalité des caractères pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle, Manuscripta Math. 101 (2000), 49–70.

[Ba2] A. I. BADULESCU, Correspondance de Jacquet-Langlands en caractéristique non nulle, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 35 (2002), 695–747.

[Ba3] A. I. BADULESCU, Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle, à paraître dans J. Reine Angew. Math.

[BDK] J. BERNSTEIN, P. DELIGNE AND D. KAZHDAN, Trace Paley-Wiener Theorem for reductive p-adic groups, J. Anal. Math. 47 (1986), 180–192.

[Bo] N. BOURBAKI, Théories spectrales, Chap.1-2, Hermann, Paris, 1967.

[Cl] L. CLOZEL, Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group, (Proc. Bowdoin Conf., 1989), 101–102, Progr. Math. 101, Birkhäuser, Boston, 1991.

[DKV] P. DELIGNE, D. KAZHDAN AND M.-F. VIGNÉRAS, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris, 1984.

[FK] Y. FLICKER AND D. KAZHDAN, Metaplectic correspondence, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 64 (1986), 53–110.

[H-CvD] HARISH-CHANDRA, Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, Notes by G. van Dijk, Lecture Notes in Math. 162, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Le] B. LEMAIRE, Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches, Ann. Inst. Fourier 46 (1996), 1027–1056.

[Ta] M. TADIĆ, Induced representations of $GL(n; A)$ for a p-adic division algebra A, J. Reine Angew. Math. 405 (1990), 48–77.

[Ze] A. ZELEVINSKY, Induced representations of reductive p-adic groups II, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), 165–210.

UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR SCIENCES SP2MI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉLÉPORT 2 BP 30179
BOULEVARD MARIE ET PIERRE CURIE
86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL CEDEX
FRANCE

E-mail address: badulesc@math.univ-poitiers.fr