ÜBER EBENE ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

von

Yûsaku KAWAHARA

In dieser Arbeit verallgemeinern wir die Theorie der ebenen algebraischen Kurve (vgl. HENSEL-LANDSBERG)(1) zu der, welche vollkommenen Körper als Konstantenkörper besitzen. Erstens werden Punkt, Zweig, Grad von Punkt, singulärer Punkt u.s.w. definiert. Dann studieren wir die Relation zwischen den Punkten und Zweigen bei Konstantenerweiterungen. Es gilt auch für unseren Fall, daß der Zweig, der im Doppelpunktdivisor aufgeht, den singulärer Punkt als Ausgangspunkt hat, und umgekehrt, u.s.w.

Es sei k ein beliebiger Körper und $k[X, Y]$ Polynomring von zwei Veränderlichen. Dann ist ein Primideal aus $k[X, Y]$ entweder 1-dimensional oder 0-dimensional. Ein 1-dimensionales Primideal ist Hauptideal, 0-dimensionales Primideal ist maximales Ideal.(2) Wir definieren folgende Primideale als *Punkte* im zwei-dimensionalen k-Raum, und bezeichnen stets mit $\mathfrak{p}_0^*$:

1) 0-dimensionales Primideal in $k[X, Y]$

2) 0-dimensionales Primideal in $k\left[X, \frac{1}{Y}\right]$, das $\frac{1}{Y}$ enthält.

3) 0-dimensionales Primideal in $k\left[\frac{1}{X}, Y\right]$, das $\frac{1}{X}$ enthält.

4) 0-dimensionales Primideal in $k\left[\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\right]$, das $\frac{1}{X}$ und $\frac{1}{Y}$ enthält.

Wir nennen ein Primideal im Fall 1) einen *endlichen Punkt*, ein Primideal im Fall 2) *y_∞-Punkt*, ein Primideal im Fall 3) *x_∞-Punkt* und ein Primideal im Fall 4) *x_∞, y_∞-Punkt*.

(1) K. HENSEL und G. LANDSBERG : Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale.

(2) VAN DER WAERDEN : Moderne Algebra II.

Eine *Kurve* ist ein 1-dimensionales Ideal in $k[X, Y]$ (endlicher Fall) oder ein $\frac{1}{Y}$ enthaltendes, 1-dimensionales Ideal in $k\left[X, \frac{1}{Y}\right]$, oder ein $\frac{1}{X}$ enthaltendes, 1-dimensionales Ideal in $k\left[\frac{1}{X}, Y\right]$. (unendlicher Fall)

Da jedes 1-dimensionale Ideal aus $k[X, Y]$ ein Hauptideal (f) mit bis auf die Koeffizienten aus k eindeutig bestimmten f ist, so ist es auch eine "*Kurve* f" genannt.

Ist nun $f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$, $a_0(X) \neq 0$, so ist $g\left(X, \frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{Y^n} f(X, Y) = a_0(X) + a_1(X)\frac{1}{Y} + \cdots + a_n(X)\frac{1}{Y^n} \in k\left[X, \frac{1}{Y}\right]$.

Ein Punkt $\mathfrak{p}_0^*$ heiße "*liegt in* (*auf*) *der Kurve f*", wenn

1) $\mathfrak{p}_0^*$ endlich und $\mathfrak{p}_0^* \ni f$ ist,

2) $\mathfrak{p}_0^*$ y_∞ und $\mathfrak{p}_0^* \ni g\left(X, \frac{1}{Y}\right)$ ist.

Im Falle 3) oder 4) können wir gleichartige Definition geben. Wenn ein Punkt gleichzeitig auf der Kurve f und auf der Kurve g liegt, so ist er ein *Schnittpunkt* von f und g genannt.

Wir nehmen an, daß die Kurve f irreduzibel ist, d.h. $(f) = \mathfrak{p}_1$ ein Primideal in $k[X, Y]$ ist. $k[X, Y]/\mathfrak{p}_1 = k[x, y]$, und der Quotientenkörper von $k[x, y]$ ist ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen. Dabei bezeichnen x, y resp. die X, Y enthaltenden Restklassen nach $\mathfrak{p}_1$. Zwischen den $\mathfrak{p}_1$ enthaltenden Primidealen aus $k[X, Y]$ und den Primidealen (also Maximalidealen) aus $k[x, y]$ besteht eine ein-eindeutige Zuordnung:

$$\mathfrak{p}_0^* \rightleftarrows \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0^*/\mathfrak{p}_1 \subseteqq k[x, y] .$$

Hilfssatz 1. $k\left[X, \frac{1}{Y}\right] \Big/ \left(g\left(X, \frac{1}{Y}\right)\right) \cong k\left[x, \frac{1}{y}\right]$, *wenn* $y \neq 0$.

Daraus folgt:

Hilfssatz 2. *Eine ein-eindeutige Zuordnung besteht zwischen*

1) *den in Kurve* $\mathfrak{p}_1$ *liegenden endlichen Punkten und nicht-trivialen Primidealen aus* $k[x, y]$,

2) *den in Kurve* $\mathfrak{p}_1$ *liegenden* y_∞*-Punkten und den* $\frac{1}{y}$ *enthaltenden, nicht trivialen Primidealen aus* $k\left[x, \frac{1}{y}\right]$,

3) *den in Kurve* $\mathfrak{p}_1$ *liegenden* x_∞*-Punkten und den* $\frac{1}{x}$ *enthaltenden nicht-trivialen Primidealen aus* $k\left[\frac{1}{x}, y\right]$,

und

4) *dem in Kurve* $\mathfrak{p}_1$ *liegenden* x_∞, y_∞*-Punkt und dem* $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ *enthaltenden nicht-trivialen Primideal aus* $k\left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]$.

Ist $\mathfrak{p}$ das einem Punkt $\mathfrak{p}_0^*$ entsprechende Primideal aus $k[x,y]$, so ist $k[X, Y] / \mathfrak{p}_0^* \cong k[x,y] / \mathfrak{p}$; eine ähnliche isomorphe Relationen besteht für unendliche Punkten.

Die Primdivisoren aus $k(x,y)$ sind *Zweige* (von $\mathfrak{p}_1$) genannt und mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Ferner wird die normierte Exponenten-bewertung in bezug auf $\mathfrak{P}$ mit $\nu_{\mathfrak{P}}$ und das Primideal aus dem Bewertungsring in bezug auf $\nu_{\mathfrak{P}}$ schlechthin mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.
1) Wenn $\nu_{\mathfrak{P}}(x) \geqq 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(y) \geqq 0$ sind, dann ist $\mathfrak{P} \frown k[x,y]$ ein Primideal aus $k[x,y]$. 2) Wenn $\nu_{\mathfrak{P}}(x) \geqq 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(y) < 0$ sind, dann ist $\mathfrak{P} \frown k\left[x, \frac{1}{y}\right]$ ein $\frac{1}{y}$ enthaltendes Primideal aus $k\left[x, \frac{1}{y}\right]$. 3) Wenn $\nu_{\mathfrak{P}}(x) < 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(y) \geqq 0$ sind, dann ist $\mathfrak{P} \frown k\left[\frac{1}{x}, y\right]$ ein $\frac{1}{x}$ enthaltendes Primideal aus $k\left[\frac{1}{x}, y\right]$. 4) Wenn $\nu_{\mathfrak{P}}(x) < 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(y) < 0$ sind, dann ist $\mathfrak{P} \frown k\left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]$ ein $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ enthaltendes Primideal aus $k\left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]$.

Auf diese Weise entspricht jedem Zweig $\mathfrak{P}$ eindeutig ein Primideal $\mathfrak{p}$. Man definiert $\mathfrak{p}$ als *Ausgangspunkt* von $\mathfrak{P}$. Umgekehrt gilt

Satz 1. *Zu jedem Primideale* $\mathfrak{p}$ *existiert ein Zweig, der* $\mathfrak{p}$ *als Ausgangspunkt hat.*

Beweis. Wir nehmen an, daß der zu $\mathfrak{p}$ entsprechende Punkt im f endlich ist. (Der unendliche Fall wird gleichartig behandelt.) Es sei $\mathfrak{O}$ der Ring, der aus allen in bezug auf $k[x,y]$ ganzen Elementen aus $k[x,y]$ besteht. $k(x,y) / k(x)$ ist endlich. Da $k[x,y] \supseteqq k[x]$ ist, und $\mathfrak{O}$ alle in bezug auf $k[x]$ ganze Elemente aus $k(x,y)$ enthält, so enthält $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von $k[x]$, in der der Zerlegungssatz in Primideale gilt. $\mathfrak{O}$ ist ein Zwischenring zwischen der Hauptordnung von $k[x]$ und ihrem Quotientenkörper $k(x,y)$, also gilt in $\mathfrak{O}$ der Zerlegungssatz in Primideale.[(3)] Ein Primteiler des Erweiterungsideales $\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$ bestimmt bekanntlich einen Primdivisor von $k(x,y)$ mit $\mathfrak{p}$ als dem Ausgangspunkt.

Birationale Transformationen. Ist $k(x,y) = k(\xi, \eta)$, so bilden die

(3) K. MATUSHITA: Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem, Jap, Journ. of Math., Vol. 19, 97–110.

Polynome $f(X, Y)$ aus $k[X, Y]$ mit $f(\xi, \eta) = 0$ ein Primideal $\mathfrak{p}_1'$ in $k[X, Y]$, für das $k[X, Y]/\mathfrak{p}_1' \cong k[\xi, \eta]$ gilt. Dann sagen wir, daß bei der *birationalen Transformation* $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$; $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ $\mathfrak{p}_1'$ zu $\mathfrak{p}_1$ entspricht. Wenn für einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ in $k(x, y) = k(\xi, \eta)$ $\mathfrak{p}$ der Ausgangspunkt von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{p}_1$, und $\mathfrak{p}'$ der von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{p}_1'$ ist, so sagen wir, daß bei dieser birationalen Transformation $\mathfrak{p}'$ zu $\mathfrak{p}$ entspricht.

Die Anzahl der Zweigen mit $\mathfrak{p}$ als dem Ausgangspunkt ist endlich. $\mathfrak{P}_i$ sei ein solcher Zweig und a_i ist der Exponent von $\mathfrak{p}$ in bezug auf $\mathfrak{P}_i$ d.h. $a_i = \min\limits_{\Pi \in \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}_i}(\Pi)$. Dann nennt man $\Pi \mathfrak{P}_i^{a_i} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\kappa^{a_\kappa} = \mathfrak{K}$ *den Divisor von* $\mathfrak{p}$.

Satz 2. *Bei jeder linearen Transformation* $x = (a\,\xi + b)/(a'\,\xi + b')$, $y = (c\,\eta + d)/(c'\,\eta + d')$ *mit* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ *und* $\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} \neq 0$ *bleiben die Divisoren von* $\mathfrak{p}$ *unverändert.*

Beweis. Eine allgemeine lineare Transformation entsteht aus sukkzessiven Anwendungen der linearen Transformationen $x = (a\xi + b)/(a'\,\xi + b')$, $y = \eta$ und $x = \xi$, $y = (c\,\eta + d)/(c'\,\eta + d')$. Nun bezeichne $\mathfrak{P}_0$ ein fest gelegter Zweig mit $\mathfrak{p}$ als dem Ausgangspunkt und $\mathfrak{p}'$ ein Primideal aus $k[\xi, \eta]$, welches bei Anwendung einer linearen Transformation $x = (a\,\xi + b)/(a'\,\xi + b')$, $y = \eta$ durch Vermitterung von $\mathfrak{P}_0$ aus $\mathfrak{p}$ entsteht. Es ist dann hinreichend zu zeigen, daß der Exponent e von $\mathfrak{p}$ in bezug auf einen beliebigen Zweig $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ nicht kleiner ist als der von $\mathfrak{p}'$.

1) $\nu_{\mathfrak{P}}(x) \geqq 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(y) \geqq 0$; $k[x, y] \supseteqq \mathfrak{p}$. a) $\nu_{\mathfrak{P}_0}(\xi) \geqq 0$. Dann ist $\nu_{\mathfrak{P}}(\xi) \geqq 0$. Ist nämlich $\nu_{\mathfrak{P}}(\xi) < 0$, so folgt aus $\xi = (-b'\,x + b)/(a'\,x - a)$

$$\nu_{\mathfrak{P}}(a'\,x - a) > 0\,,$$

so daß $a'\,x - a \in \mathfrak{p}$ ist. Hieraus folgt $\nu_{\mathfrak{P}_0}(a'\,x - a) > 0$. Wegen $\begin{vmatrix} -b' & b \\ a' & -a \end{vmatrix} \neq 0$ muß $\nu_{\mathfrak{P}_0}(-b'\,x + b) = 0$ sein, woraus

$$\nu_{\mathfrak{P}_0}(\xi) = \nu_{\mathfrak{P}_0}(-b'\,x + b / a'\,x - a) < 0$$

folgt, was aber ein Widerspruch ist. Es muß also $\nu_{\mathfrak{P}}(\xi) \geqq 0$ sein. Weil $\nu_{\mathfrak{P}}(a\,\xi + b) \geqq 0$ und $\nu_{\mathfrak{P}}(a'\,\xi + b') \geqq 0$ ist, so sieht man nach $\nu_{\mathfrak{P}}(x) = \nu_{\mathfrak{P}}(a\,\xi + b / a'\,\xi + b') \geqq 0$ sofort ein, daß $\nu_{\mathfrak{P}}(a'\,\xi + b') = 0$ ist. Nun enthält $\mathfrak{p}$ ein Polynom $h(x, y)$ mit $\nu_{\mathfrak{P}}(h(x, y)) = e > 0$; dann ist natürlich $\nu_{\mathfrak{P}_0}(h(x, y)) > 0$.

$$h(x, y) = a_0(y)x^m + \cdots + a_m(y)$$
$$= (1/(a'\xi+b'))^m [a_0(y)(a\xi+b)^m + a_1(y)(a\xi+b)^{m-1}(a'\xi+b') + \cdots]$$
$$= (1/(a'\xi+b'))^m g(y, \xi).$$

Es folgt also: $\nu_{\mathfrak{P}}(h(x, y)) = \nu_{\mathfrak{P}}(g(y, \xi)) = e$.
Ebenso ist $\nu_{\mathfrak{P}_0}(g(y, \xi)) = \nu_{\mathfrak{P}_0}(h(x, y)) > 0$. Also ist $g(y, \xi) \in \mathfrak{p}'$ und $\nu_{\mathfrak{P}}(g(y, \xi)) = e$; es folgt daher $e \geqq e' =$ Exponent von $\mathfrak{p}'$.

b) $\nu_{\mathfrak{P}_0}(\xi) < 0$. In diesem Fall ist $\nu_{\mathfrak{P}_0}(1/\xi) < 0$; wie im a) schließt man $\nu_{\mathfrak{P}}(1/\xi) \geqq 0$ und $\nu_{\mathfrak{P}}(a'+b'/\xi) = 0$.

$$h(x, y) = a_0(y)x^m + \cdots + a_m(y) = (1/(a'+b'/\xi))^m (a_0(y)(a+b/\xi)^m + \cdots)$$
$$= (1/(a'+b'/\xi))^m \; g(1/\xi, y),$$

$g(1/\xi, y) \in \mathfrak{p}'$. Wegen $\nu_{\mathfrak{P}}(h(x, y)) = \nu_{\mathfrak{P}}(g(1/\xi, y))$ ist $e \geqq e'$.

2) Falls $\mathfrak{p}$ x_∞ oder y_∞ ist, *d.i.* $\nu_{\mathfrak{P}}(x) < 0$ oder $\nu_{\mathfrak{P}}(y) < 0$, ersetzen wir $1/x$ durch $(a'\xi+b')/(a\xi+b)$, oder $1/y$ durch $(c'\eta+d')/(c\eta+d)$ und dann gehen wie im Fall 1) vor.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Zweig mit $\mathfrak{p}$ als dem Ausgangspunkt, und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ der Bewertungsring von $\mathfrak{P}$. Wegen $k[x, y] \frown \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ ist (wir ersetzen $k[x, y]$ bzw. durch $k[1/x, y]$ $k[x, 1/y]$ und $k[1/x, 1/y]$, falls $\mathfrak{p}$ y_∞, x_∞ und $x_\infty - y_\infty$ ist), so kann man in üblicher Weise annehmen, daß der Restklassenkörper $k[x, y]/\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}$ enthalten ist. Wegen der Relation $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} \supseteqq k[x, y]/\mathfrak{p} \supseteqq k$ ist $(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} : k)$ ein Vielfaches von $(k[x, y]/\mathfrak{p} : k) = (k[X, Y]/\mathfrak{p}_0^* : k)$. Dabei heißt $(k[x, y]/\mathfrak{p} : k)$ der *Grad* von $\mathfrak{p}$ (von $\mathfrak{p}_0^*$). Für den Grad gilt:

Hilfssatz 3. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 ist, ist $\mathfrak{p} = (x-a, y-b)$ mit a, b aus k, falls $\mathfrak{p}$ endlich ist.*

Ein Punkt heißt ein *reeller Punkt* oder ein *imaginärer Punkt*, je nachdem der Grad des Punktes $= 1$ oder > 1 ist.

Satz 3. *Die Grade von Punkten sind invariant bei linearen Transformationen.*

Satz 4. *Bei birationalen Transformationen bleiben die Grade von Punkten invariant bis auf endlich viele Punkte, die Ausgangspunkte von Zweigen $\mathfrak{P}$ mit $(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} : k) > 1$ sind.*

Beweis. 1) Wenn $(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} : k) = 1$ ist, so sind die Grade der Ausgangspunkte der beiden Kurve 1. 2) $k(x, y) = k(\xi, \eta)$,

$$\xi = f_1(x, y)/f_2(x, y), \quad \eta = g_1(x, y)/g_2(x, y); \quad x = f_1'(\xi, \eta)/f_2'(\xi, \eta),$$
$$y = g_1'(\xi, \eta)/g_2'(\xi, \eta).$$

Wir betrachten einen beliebigen Zweig $\mathfrak{P}$, für den $\nu_{\mathfrak{P}}(f_2) = \nu_{\mathfrak{P}}(g_2) = \nu_{\mathfrak{P}}(f_2') = \nu_{\mathfrak{P}}(g_2') = 0$ gilt. Dabei wollen wir annehmen, daß der Ausgangspunkt von $\mathfrak{P}$ endlich ist. $\overline{h_1(\xi, \eta)}, \overline{h_2(\xi, \eta)}, \cdots, \overline{h_\rho(\xi, \eta)}$ sei ein System der Elemente aus $k[\xi, \eta]/\mathfrak{p}'$, wo $h_i(\xi, \eta) \in k[\xi, \eta]$. Ist dann dieses System über k unabhängig, so gibt es auch in $k[x, y]/\mathfrak{p}$ ρ über k unabhängige Elemente. Nämlich es gibt einen Exponenten t, für den $(f_2(x, y)\, g_2(x, y))^t\, h_i(f_1(x, y)/f_2(x, y), g_1(x, y)/g_2(x, y)) = H_i(x, y) \in k[x, y]$ ist $(i=1, \cdots, \rho)$. Wenn $\sum_{i=1}^{\rho} a_i H_i(x, y) \in \mathfrak{p}$ ist, so ist $\nu_{\mathfrak{P}}(\sum a_i h_i(\xi, \eta)) > 0$, weil $\nu_{\mathfrak{P}}(f_2(x, y), g_2(x, y))^t = 0$ ist. Also $\sum a_i h_i(x, y) \in \mathfrak{p}'$, daraus folgt $a_i = 0\ (i = 1, \cdots, \rho)$. Daher ist $\{H_i(x, y)\}$ unabhängig. Mithin ist $(k[\xi, \eta]/\mathfrak{p}' : k) \leqq k[x, y]/\mathfrak{p} : k)$; ebenso gilt: $(k[\xi, \eta]/\mathfrak{p}' : k) \geqq (k[x, y]/\mathfrak{p} : k)$, woraus $(k[\xi, \eta]/\mathfrak{p}' : k) = (k[x, y]/\mathfrak{p} : k)$ folgt. Ebenfalls kann man zeigen, dass die Grade von fast alle Punkte invariant sind, wenn $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}'$ ein unendlicher Punkt.

Von nun an nehmen wir an, daß k die algebraisch abgeschlossene Hülle von k in $k(x, y)$ ist. Es sei $\mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\kappa^{a_\kappa} = \mathfrak{K}$ der Divisor des Punktes $\mathfrak{p}$ und Grad $\mathfrak{K} = \sigma$, Grad $\mathfrak{P}_i = f_i$, Grad $\mathfrak{p} = f$. $\sum a_i f_i = \sigma$. Bekanntlich ist $f | \sigma$. Wir definieren $\mathfrak{p}$ als ein *singulärer Punkt,* wenn $\sigma / f > 1$ und als ein *isolierter Punkt* wenn $f_i > f$ für alle i. Und $\mathfrak{p}$ heißt ein *κ-zweigiger* und *σ/f-facher Punkt.*

$f(X, Y)$ sei ein irreduzibles Polynom vom Grade n bzw. m in bezug auf Y bzw. X. Ferner sei $g(X, Y)$ ein (nicht notwendig irreduzibles) Polynom, dessen Grade in bezug auf Y, X resp. t, s sind. Sind dann $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$ Nennerdivisor von x, y (wir setzen) $\mathfrak{N}_y = 1$, falls $y = 0$), so ist der Divisor von $g(x, y)$ von der Form $\mathfrak{G} / (\mathfrak{N}_x^s \mathfrak{N}_y^t)$, wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist. Da der Grad von $\mathfrak{N}_x = n$, und der von $\mathfrak{N}_y = m$ ist, so ist der Grad von $\mathfrak{N} =$ Grad von $(\mathfrak{N}_x^s \mathfrak{N}_y^t) = ns + mt$.

Satz 5. *Die Schnittpunkte von f und g werden durch $\mathfrak{G}$ gegeben; d.h. der Ausgangspunkt des Zweiges $\mathfrak{P}$, welcher in $\mathfrak{G}$ aufgeht, bestimmt einen Schnittpunkt von f und g, und umgekehrt.*

Beweis. 1) Punkt $\mathfrak{p}_0^*$ ist endlich und liegt auf der Kurve f. $\mathfrak{P}$ ist ein beliebiger Zweig, der zu $\mathfrak{p}_0^*$ entsprechende Primideal $\mathfrak{p}$ aus $k[x, y]$ als Ausgangspunkt hat.

$\mathfrak{p}_0^*$ liegt auf der Kurve

$$g(X, Y) \rightleftarrows \mathfrak{p}_0^* \ni g(X, Y) \rightleftarrows \mathfrak{p} \ni g(x, y) \rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(g(x, y)) > 0$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) > 0 .$$

2) $\mathfrak{p}_0^* \subseteqq k[X, 1/Y]$. Da $\nu_{\mathfrak{P}}(x) \geqq 0$ und $\nu_{\mathfrak{P}}(y) < 0$, so ist $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_x) = 0$, $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_y) > 0$.

$\mathfrak{p}_0^*$ liegt auf

$$g(X,Y) \rightleftarrows \mathfrak{p}_0^* \ni h(X,1/Y) = (1/Y)^t g(X,Y) \rightleftarrows \mathfrak{p} \ni h(x,1/y) = (1/y)^t g(x,y)$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}((1/y)^t g(x,y)) > 0 \rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(g(x,y)) + \nu_{\mathfrak{P}}((1/y)^t) > 0$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) - \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_y^t) + \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_y^t) > 0 \rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) > 0.$$

3) $\mathfrak{p}_0^* \subseteqq k[1/X, Y]$: Wie im Fall 2) kann man leicht schließen: $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) > 0$.

4) $\mathfrak{p}_0^* \subseteqq k[1/X, 1/Y]$

$\mathfrak{p}_0^*$ liegt auf

$$g(X,Y) \rightleftarrows \mathfrak{p}_0^* \ni h(1/X, 1/Y) = (1/X)^s (1/Y)\ g(X,Y).$$

$$\rightleftarrows \mathfrak{p} \ni h(1/x, 1/y) = (1/x)^s (1/y)^t\ g(x,y)$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}((1/x)^s (1/y)^t\ g(x,y)) > 0$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(g(x,y)) + \nu_{\mathfrak{P}}((1/x)^s) + \nu_{\mathfrak{P}}((1/y)^t) > 0$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) - \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_x^s) - \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_y^t) + \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_x^s) + \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N}_y^t) > 0$$

$$\rightleftarrows \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{G}) > 0.$$

Wir nehmen an, daß k vollkommen ist und x, y über k transzendent sind. Wir bezeichnen den Verzweigungsdivisor (Differentendivisor)[4] von $k(x,y)/k(x)$ mit $\mathfrak{Z}_x$, den von $k(x,y)/k(y)$ mit $\mathfrak{Z}_y$. Wenn $f_x'(x) \neq 0$, $f_y'(y) \neq 0$,

$$dy/dx = -f_x'(x)/f_y'(y) = (\mathfrak{N}_x^2 \mathfrak{Z}_y)/(\mathfrak{N}_y^2 \mathfrak{Z}_x).$$

Wie im Dedekind-Weber[5], kann man schließen, daß $\partial f/\partial x = (\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_y)/(\mathfrak{N}_x^{m-2}\mathfrak{N}_y^n)$ ist, falls $\partial f/\partial x \neq 0$ ist, und $\partial f/\partial y = (\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x)/(\mathfrak{N}_x^m \mathfrak{N}_y^{n-2})$, wenn sogar $\partial f/\partial y \neq 0$ ist, und gleichzeitig daß der ganze Divisor $\mathfrak{D}$ unabhängig ist bei linearen Transformationen.

Wir definieren den *Doppelpunktdivisor* von f (oder Divisor der

(4) F. K. Schmidt: Analytische Zahlentheorie in Körpern den Charakteristik p, Math. Zeitschr., 33.

(5) Dedekind und Weber: Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Crelle, 1882, 181–290.

singulären Punkte) auf folgende Weise. Wenn einer der $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ nicht Null ist, so ist $\mathfrak{D}$ der Doppelpunktdivisor, und wenn beide Null sind, ist der Doppelpunktdivisor 0, und $\nu_{\mathfrak{P}}(0)=\infty$ für jedes $\mathfrak{P}$.

Wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade 1 ist, so ist $\mathfrak{p}=(x-a, y-b)$ (oder $(x-a, 1/y)$ u.s.w.). Ist $\mathfrak{R}=\Pi\mathfrak{P}_i^{a_i}$ der Divisor von $\mathfrak{p}$, so ist stets $\mathfrak{P}_i^{a_i} \mid \mu(y-b)+\lambda(x-a)$ wenn $\mu, \lambda \in k$. Wenn $\mathfrak{P}_1$ vom Grade 1 ist, so existiert ein und nur ein (bis auf dem Verhältnis $(\mu:\lambda)$) $\mu(y-b)+\lambda(x-a)$, für den

$$\mathfrak{P}_1^{a_1+1} \mid \mu(y-b)+\lambda(x-a).$$

Wir nennen diesen $\mu(Y-b)+\lambda(X-a)$ die *Tangente* an $\mathfrak{P}_1$ der Kurve $f(X, Y)$, und $(\mu:\lambda)$ die Steigung der Tangente an $\mathfrak{P}_1$. Daß $\mathfrak{p}$ verschiedene Steigungen der Tangente an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ hat, ist ungeändert bei linearen Transformationen.

Wir betrachten nun Konstantenerweiterungen von $k(x, y)$. Der Zerfällungskörper von $K=k[x, y]/\mathfrak{p}$ über k ist mit $\bar{K}$ und der $\bar{K}$ enthaltende kleinste algebraisch abgeschlossene körper mit K^* bezeichnet. $f=$ Grad von $\mathfrak{p}$.

Satz 6. *Wenn der Restklassenkörper K über k separabel ist, so ist*

$$\mathfrak{p}\cdot\bar{K}[x, y]=\bar{\mathfrak{p}}_1\cdots\bar{\mathfrak{p}}_f=\bar{\mathfrak{p}}_1\frown\cdots\frown\bar{\mathfrak{p}}_f,$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}_i$ $(1\leqq i\leqq f)$ ein Primideal aus $\bar{K}[x, y]$ vom Grad 1 und $\bar{\mathfrak{p}}_i\frown k[x, y]=\mathfrak{p}$ ist.

Beweis. Da K/k separabel ist, so ist $\bar{K}/k$ auch separabel. Also ist $\mathfrak{p}\cdot\bar{K}[x, y]$ gleich dem Durchschnitt aller über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale $\bar{\mathfrak{p}}$ aus $\bar{K}[x, y]$ (Krull, Idealtheorie, § 3). Die Dimension von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\bar{K}[x, y]$ ist gleich der von $\mathfrak{p}$ in $k[x, y]$, also gleich 0. Daher sind alle $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\bar{K}[x,y]$ maximal und der Durchschnitt aller $\bar{\mathfrak{p}}$ ist gleich dem Produkt aus ihnen. Nun zeigen wir, daß es genau f "über $\mathfrak{p}$ liegende Primideale" gibt. Bezeichnet man mit $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ die x bzw. y enthaltende Restklasse von $k[x, y]/\mathfrak{p}$, so ist dann und nur dann $g(x, y)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, wenn $g(\bar{x}, \bar{y})=0$ in K, wo $g(x, y)$ ein Polynom aus $k[x, y]$ bedeutet. Setzen wir $\bar{\mathfrak{p}}=(x-\bar{x}, y-\bar{y})\subseteqq\bar{K}[x, y]$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}\supset\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}\frown k[x, y]=\mathfrak{p}$. Also ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein "über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal". Da $K=k(\bar{x}, \bar{y})$ eine separable Erweiterung über k vom Grad f ist, gibt es f konjugierte Körper die in $\bar{K}$ enthalten sein. Für jeden konjugierten Körper kann man verschiedenes über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal konstruieren.

Umgekehrt sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal aus $\bar{K}[x, y]:\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{p}}\frown k[x, y]$. In $K^*[x, y]$ gibt es dann wenigstens ein über $\bar{\mathfrak{p}}$ liegendes

Primideal $\mathfrak{Q}$. Da K^* algebraisch abgeschlossen ist, so ist $\mathfrak{Q}$ vom Grad 1, und es folgt aus Hilfssatz 3; $\mathfrak{Q}=(x-\alpha, y-\beta)$ für $\alpha, \beta \in K^*$. Da $\mathfrak{p}\subset\bar{\mathfrak{p}}\subset\mathfrak{Q}$, so ist $f(x,y)\in\mathfrak{Q}$, wenn $\mathfrak{p}\ni f(x,y)$; so folgt $f(\alpha,\beta)=0$. Daher ist $k(\alpha,\beta)=k[\alpha,\beta]\cong k[x,y]/\mathfrak{p}=K$; daraus folgt, daß $k(\alpha,\beta)$ im Zerfällungskörper $\bar{K}$ von K über k enthalten sein muss: $\alpha, \beta\in\bar{K}$. Also $\bar{\mathfrak{p}}=(x-\alpha, y-\beta)$ in $\bar{K}[x,y]$.

Unter derselben Annahme wie oben sei $\mathfrak{P}$ ein Zweig in $k(x,y)$ mit $\mathfrak{p}$ als dem Ausgangspunkt. Ferner sei der Grad von $\mathfrak{p}$ gleich f und der Grad von $\mathfrak{P}$ gleich mf. Dann gilt nach Satz 6:

$$\mathfrak{p}\cdot\bar{K}[x,y]=\bar{\mathfrak{p}}_1\cdots\bar{\mathfrak{p}}_f\,,\qquad \bar{\mathfrak{p}}_i=(x-\alpha_i\,,\,y-\beta_i)\,,$$

wo $k(\alpha_i,\beta_i)=K_i$ gesetzt ist. Wir betrachten nun in $\bar{K}(x,y)$ Fortsetzungen des Primdivisors $\mathfrak{P}$ in $k(x,y)$. Ist $\bar{\mathfrak{P}}_1$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}$, so ist $\bar{\mathfrak{P}}_1\frown\bar{K}[x,y]$ ein Primideal aus $\bar{K}[x,y]$ und $\bar{\mathfrak{P}}_1\frown k[x,y]=\mathfrak{p}$; d.h. es ist ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal aus $\bar{K}[x,y]$. Das Primideal $\bar{\mathfrak{P}}_1\frown\bar{K}[x,y]$ muß also mit einem von den $\bar{\mathfrak{p}}_1,\cdots,\bar{\mathfrak{p}}_f$ übereinstimmen. Durch geeignete Umordnung kann man $\bar{\mathfrak{P}}_1\frown\bar{K}[x,y]=\bar{\mathfrak{p}}_1$ annehmen. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{P}^{(1)}$ die durch $\bar{\mathfrak{P}}_1$ induzierte Bewertung von $K_1(x,y)$, mit $\mathfrak{O}^{(1)}$ den Bewertungsring von $K_1(x,y)$ in bezug auf $\mathfrak{P}^{(1)}$, und mit $\mathfrak{O}$ den von $k(x,y)$ in bezug auf $\mathfrak{P}$. Dann gilt: $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{P}^{(1)}\supseteqq\mathfrak{O}/\mathfrak{P}\supseteqq k$. Da $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}:k)=mf$ ist, so folgt $(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{P}^{(1)}:k)\geqq mf$. Andererseits ist $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{P}^{(1)}\supseteqq K_1\supseteqq k$ und $(K_1:k)=f$. Also ist der Grad von $\mathfrak{P}^{(1)}$ in bezug auf K_1 nicht kleiner als m. Weil $\bar{\mathfrak{P}}_1$ $x-\alpha_1$ und $y-\beta_1$ enthält, so sind $x-\alpha_1$ und $y-\beta_1$ in $\mathfrak{P}^{(1)}$ enthalten. Daher ist $\mathfrak{P}^{(1)}$ ein Zweig mit dem Ausgangspunkt $(x-\alpha_1, y-\beta)$. Nun sei $\mathfrak{P}^{(1)}=\bar{\mathfrak{P}}_1^{(1)}\cdots\bar{\mathfrak{P}}_{s_1}^{(1)}$ die Divisorenzerlegung von $\mathfrak{P}^{(1)}$ in $\bar{K}(x,y)$, wo $\bar{\mathfrak{P}}^{(1)}=\bar{\mathfrak{P}}_1$ gesetzt ist. Dann ist jedes $\bar{\mathfrak{P}}_j^{(1)}$ ein Zweig mit dem Ausgangspunkt $\bar{\mathfrak{p}}_1$. Weil bei Konstantenerweiterung der Grad des Divisors nicht ändert, so ist der Grad von $\bar{\mathfrak{P}}_1^{(1)}\cdots\bar{\mathfrak{P}}_{s_1}^{(1)}$ (in bezug auf $\bar{K}$) $\geqq m$.

Bezeichnet nun $\mathfrak{P}^{(i)}$ denjenigen Primidivisor in $K_i(x,y)$, der bei äquivalenter Zuordnung (in bezug auf k) zu $\mathfrak{P}^{(1)}$ entspricht, so ist $\mathfrak{P}^{(i)}$ ein Zweig mit dem Ausgangspunkt $(x-\alpha_i, y-\beta_i)$ und Grad $\mathfrak{P}^{(i)}=$ Grad $\mathfrak{P}^{(1)}\geqq m$. Ferner gilt in $\bar{K}(x,y)$:

$$\mathfrak{P}^{(i)}=\bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)}\cdots\bar{\mathfrak{P}}_{s_i}^{(i)}.$$

Weil in $\bar{K}[x,y]$ eine Fortsetzung $\bar{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}^{(i)}$ stets $x-\alpha_i$ und $x-\beta_i$ enthält, so ist $\bar{\mathfrak{P}}$ nicht gleichzeitig eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}^{(i)}$ in $K_i(x,y)$ und $\mathfrak{P}^{(j)}$ in $K_j(x,y)$, falls $i\neq j$ ist. Also ist die Divisorenzerlegung von

$\mathfrak{P}$ in $\bar{K}[x, y]$ durch $\prod_{i=1}^{f} \bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{s_i}^{(i)}$ teilbar. Da der Grad von $\mathfrak{P}$ (in bezug auf $\bar{K}$) gleich mf und der Grad von $\bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{s_i}^{(i)}$ nicht kleiner ist als m, so schließt man ohne Schwierigkeit, daß für jedes i der Grad von $\bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{s_i}^{(i)}$ gleich m ist und

$$\mathfrak{P} = \prod_{i=1}^{f} \bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{s_i}^{(i)}$$

ist. Berücksichtigt man hierbei, daß $\bar{K}/k$ separabel galoisch ist, so sind alle $\bar{\mathfrak{P}}_j^{(i)}$ von demselben Grad über $\bar{K}$, daraus folgt $s_1 = \cdots = s_f = s$ und $s\bar{f} = m$. Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 7. *Wenn $k[x, y]/\mathfrak{p}$ separabel über k vom Grad f, und $\mathfrak{p} \cdot \bar{K}[x, y] = \bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{p}}_f$ ist, so ist*

$$\mathfrak{P} = \prod_{i=1}^{f} \bar{\mathfrak{P}}_1^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_s^{(i)}$$

für jeden Zweig $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$. Und $\bar{\mathfrak{P}}_j^{(i)}$ sind Zweige auf dem $\bar{\mathfrak{p}}_i$.

Satz 8. *Wenn $\mathfrak{p} \cdot \bar{K}[x, y] = \bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{p}}_f$, und $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\kappa^{a_\kappa}$ der Divisor von $\mathfrak{p}$ ist, so sind $\mathfrak{P}_k = \prod_{i=1}^{f} \bar{\mathfrak{P}}_{k,1}^{(i)} \bar{\mathfrak{P}}_{k,2}^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{k,s(k)}^{(i)}$ und ist $\prod_{k=1}^{\kappa} (\bar{\mathfrak{P}}_{k,1}^{(i)} \bar{\mathfrak{P}}_{k,2}^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{k,s(k)}^{(i)})^{a_k}$ der Divisor von $\bar{\mathfrak{p}}_i$. Und wenn der Grad von $\mathfrak{R} = ft$ ist, so ist der Grad von $\prod_{k=1}^{\kappa} (\bar{\mathfrak{P}}_{k,1}^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{k,s(k)}^{(i)})^{a_k} = t$.*

Beweis. $\alpha_1 = \min\limits_{\pi \in \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}_1}(\pi)$. Wir setzen $\bar{\alpha}_1 = \min\limits_{\bar{\pi} \in \bar{\mathfrak{p}}_1} \nu_{\bar{\mathfrak{P}}_1}(\bar{\pi})$. Erstens $\bar{\alpha}_1 \leqq \alpha_1$ weil $\bar{\mathfrak{p}}_1 \supset \mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{P}}_1$ bei Konstantenerweiterung, nicht verzweigt ist. Da $\bar{\mathfrak{p}}_2, \cdots, \bar{\mathfrak{p}}_f$ kein Ausgangspunkt von $\bar{\mathfrak{P}}_1$ sind, so gibt es in $\bar{\mathfrak{p}}_i$ ein Element Π_i mit $\nu_{\bar{\mathfrak{P}}_1}(\Pi_i) = 0$ $(i = 2, \cdots, f)$. Ferner hat $\bar{\mathfrak{p}}_1$ ein Element Π_1 für das $\nu_{\bar{\mathfrak{P}}_1}(\Pi_1) = \bar{\alpha}_1$. $\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdots \Pi_f \in \mathfrak{p} \cdot \bar{K}[x, y]$ (nach Satz 6). $\nu_{\bar{\mathfrak{P}}_1}(\Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_f) = \bar{\alpha}_1$. Andererseits ist für jedes Element Π von $\mathfrak{p} \cdot \bar{K}[x, y]$ $\nu_{\bar{\mathfrak{P}}_1}(\Pi) \geqq \alpha_1$. Also ist $\bar{\alpha}_1 \geqq \alpha_1$. So folgt $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$.

Zusatz. *Ist k vollkommen, so gilt Satz 8 für K^* statt $\bar{K}$ und $s(k) =$ Grad von $\mathfrak{P}_k$.*

Wir definieren $\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}(\sum a_\lambda x^\lambda) = \sum \binom{\lambda}{\nu} a_\lambda x^{\lambda-\nu}$.[6] $\frac{\partial^{g+h} f(x, y)}{\partial x^g \partial y^h} = \frac{\partial^h}{\partial y^h}\left(\frac{\partial^g}{\partial x^g} f\right)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für $g = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$; $\left(\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g\right)_{x=a} = 0$, $\nu > h$ und $\left(\frac{\partial^h}{\partial x^h} g\right)_{x=a} \neq 0$ ist, ist offenbar $a_0 = a_1 = \cdots = a_{h-1} = 0$, $a_h \neq 0$.

---

(6) F. K. Schmidt-H. Hasse: Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörfer einer Unbestimmten, Crelle, 177 (1937).

Satz 9. *Wir nehmen an, daß* $k[x, y]/\mathfrak{p}$ *separabel über* k *ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $\mathfrak{p}$ *ein* l*-facher Punkt von Kurve* f *ist, ist daß* $\frac{\partial^{g+h} f(x, y)}{\partial x^g \partial y^h}$ *für* $g+h<l$ *zu* $\mathfrak{p}$ *gehört, aber nicht eine Ableitung* l*-ter Ordnung. (Wenn* $\mathfrak{p} \cdot y_\infty$ *ist, ersetzen wir* $f(x, y)$ *durch* $g(x, 1/y) = 1/y^n (f(x, y))$ *und* y *durch* $1/y$.)

Beweis. Dieser Satz ist gleichwertig mit dem folgenden, falls $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 ist: $\mathfrak{p} = (x-a, y-b)$.

$\frac{\partial^{g+h} f(x, y)}{\partial x^g \partial y^h}$ haben a, b als Wurzeln $(g+h<l)$ und es gibt eine Ableitung l-ter Ordnung, die a, b nicht als Wurzeln hat.

$f(x, y) = u_l + u_{l+1} \cdots$; $u_i = a_0(x-a)^i + a_1(x-a)^{i-1}(y-b) + \cdots + a_i(y-b)^i$, $a_k \in k$, $u_l \neq 0$.

Wenn wir $y-b = u(x-a)$ setzen, für Unbestimmte u, so ist $(x-a)^l \mid f(x, b+u(x-a))$ $(x-a)^{l+1} \nmid f(x, b+u(x-a))$.

Wenn der Grad von $\mathfrak{p}$ gleich 1 ist, kann man wie [H.L. s. 371][1] bewiesen. Wenn Grad $\mathfrak{p} = f$ ist, so ist $\mathfrak{p} \cdot \bar{K}[x, y] = \bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{p}}_f$, Grad von $\bar{\mathfrak{p}}_i = 1$. Der Divisor von $\mathfrak{p}$ ist mit $\mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\kappa^{a_\kappa}$ bezeichnet. Da $\mathfrak{p}$ l-fach ist, so ist der Grad von $\mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\kappa^{a_\kappa} = lf$. Nach Satz 8 ist der Divisor von $\bar{\mathfrak{p}}_i$ gleich $\prod_{k=1}^{\mathfrak{N}} (\bar{\mathfrak{P}}_{k,1}^{(i)} \cdots \bar{\mathfrak{P}}_{k,s(k)}^{(i)})$ mit dem Grad l. Da k in $k(x, y)$ algebraisch abgeschlossen ist, so ist $f(x, y)$ auch irreduzibel bei Konstantenerweiterung zu $\bar{K}$. Also ist $\frac{\partial^{g+h} f}{\partial x^g \partial y^h} \in \bar{\mathfrak{p}}_i$ für $g+h<l$, woraus $\frac{\partial^{g+h} f}{\partial x^g \partial y^h} \in \mathfrak{p}$ folgt. Aber es gibt eine nicht zu $\bar{\mathfrak{p}}_i$ gehörige Ableitung l-ter Ordnung, die natürlich nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört.

Es sei a_i die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}_i$ in bezug auf $k(x,y)/k(x)$, d.i. $a_i = [\nu_{\mathfrak{P}_i}(k(x, y)) : \nu_{\mathfrak{P}_i}(k(x))]$ und b_i die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}_i$ in bezug auf $k(x, y)/k(y)$. Bei Konstantenerweiterung bleiben a_i und b_i invariant und der Divisor von $\mathfrak{p}$ ist $\prod \mathfrak{P}_i^{\min(a_i, b_i)}$, wo $\mathfrak{P}_i$ die Zweige, die $\mathfrak{p}$ als Ausgangspunkt hat, sind.

Hierbei nehmen wir an, daß k algebraisch abgeschlossen ist, und $\mathfrak{p} = (x-a, y-b)$ endlich ist. $\mathfrak{p}$ induziert die Bewertung $\mathfrak{p}_x$ in $k(x)$; $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_\nu^{a_\nu}$ in $k(x, y)$. Ferner sei $f(t, x) = a_0(x) f_1(t) f_2(t) \cdots f_\nu(t)$ in der Perfekten Hülle $k(x)_{\mathfrak{p}_x}$ in bezug auf $\mathfrak{p}_x$; mit $\mathfrak{p} \notin a_0(x)$, (dies ist stets durch lineare Transformation erreichbar), wo $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ irreduzible Polynome von t in $k(x)_{\mathfrak{p}_x}$. Ist dann $f_1(y, x) = 0$, so ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=y} = f_1'(y)\, f_2(y) \cdots\cdots f_\nu(y).$$

Da der Relativgrad von $\mathfrak{P}_1$ in bezug auf $k(x,y)/k(x)$ gleich 1 ist, so ist $\nu_{\mathfrak{P}_1}(f_1') = \nu_{\mathfrak{p}_x}$ (Diskriminant von f_1) $= e + l_{11}$, (e ist der Exponent des $\mathfrak{P}_1$-Beitrages von Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$) und $\nu_{\mathfrak{P}_1}(f_t(y)) = \nu_{\mathfrak{p}_x}(R(f_1, f_t)) = l_{1t}$. Und $\mathfrak{P}_1$-Beitrag des Doppelpunktdivisors $\mathfrak{D}$ ist $\mathfrak{P}_1^{l_{11}+l_{12}+\cdots+l_{1\nu}}$.

Hilfssatz. 4. $l_{11} \geqq (a_1 - 1)(b_1 - 1)$.

Beweis. Es sei $\Pi = \Pi^{(1)}$ ein Primelement aus der perfekten Hülle $k(x,y)_{\mathfrak{P}}$ von $k(x,y)$ in bezug auf $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P} \| \Pi$, und $\Pi^{(t)}$ konjugierte Größen zu Π in bezug auf $k(x)_{\mathfrak{p}_x}$

$$y^{(1)} - b = \lambda\, \Pi^{(1)b_1} + \cdots \qquad (\lambda \neq 0), \qquad y^{(1)} = y.$$

$$y^{(t)} - b = \lambda\, \Pi^{(t)b_1} + \cdots$$

$$f_1'(y) = (y^{(1)} - y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(3)}) \cdots (y^{(1)} - y^{(a_1)}).$$

$$(y^{(1)} - y^{(t)}) = [\lambda(\Pi^{(1)} - \Pi^{(t)})(\Pi^{(1)b_1-1} + \Pi^{(1)b_1-2}\Pi^{(t)} + \cdots + \Pi^{(t)b_1-1}) + (\Pi^{(1)} - \Pi^{(t)})\, Q(\Pi^{b_1})].$$

$$(1)\quad f_1'(y) = \prod_{t=2}^{a_1}(\Pi^{(1)} - \Pi^{(t)}) \cdot \prod_{t=2}^{a_1}(\Pi^{(1)b_1-1} + \Pi^{(1)b_1-2}\Pi^{(t)} + \cdots + \Pi^{(1)b_1-1}) + \cdots.$$

Da der Relativgrad von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $k(x,y)_{\mathfrak{P}}/k(x)_{\mathfrak{p}_x}$ gleich 1 ist, so ist die Differente von $k(x,y)/k(x)_{\mathfrak{p}_x}$ die Differente von Π. Daraus folgt daß $l_{11} \geqq (a_1 - 1)(b_1 - 1)$.

Hilfssatz 5.[7] *Der kleinste Wert von l_{11} ist Null, und dies tritt dann und nur dann ein, wenn* $\min(a_1, b_1) = 1$, *oder was dasselbe ist, wenn $(x - a,\ y - b)$ genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}_1$ teilbar ist.*

Beweis. Da $l_{11} \geqq (a_1-1)(b_1-1)$, so folgt $\min(a_1, b_1) = 1$, wenn $l_{11} = 0$. Umgekehrt, wenn $a_1 = 1$, so $f_1(t) = (t - y^{(1)})$, $f_1'(y^{(1)}) = 1$, also $l_{11} = 0$. wenn $b_1 = 1$, so folgt aus (1) $l_{11} = 0$.

Hilfssatz 6.[7] *Der kleinste Wert, welcher l_{12} annehmen kann, ist 1 und dies tritt dann und nur dann ein, wenn* $\min(a_1, b_1) = \min(a_2, b_2) = 1$ *und die Steigungen der Tangente an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschieden sind. (dann ist also $(x-a, y-b)$ genau durch $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$ teilbar, und $(\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y)$ enthält keinen von diesen Primfaktoren).*

(7) K. Hensel: Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II C 5 (1921), 533 650.

Beweis. Im Zerfällungskörper von f über $k(x)_{\mathfrak{p}_x}$ $(= k(x)_{\mathfrak{p}_x}(y_1^{(1)}, \cdots, y_{a\nu}^{(\nu)}))$ ist w die Fortsetzung von der Exponentenbewertung von $\mathfrak{p}_x$, welche wie $w(x-a) = 1$ normiert ist. Da $\mathfrak{P}_i^{a_i} \| (x-a)$, $\mathfrak{P}_i^{b_i} \| (y-b)$, so sind $w(y^{(2)}-b) = b_2/a_2$, $w(y^{(1)}-b) = b_1/a_1$, also $w(f_2(y^{(1)})) \geqq a_2 \min(b_1/a_1, b_2/a_2) = \min(a_2 b_1/a_1, b_2)$; hieraus folgt $l_{12} \geqq \min(a_2 b_1, a_1 b_2)$.

Wenn $l_{12} = 1$, so ist $\min(a_1 b_2, a_2 b_1) = 1$, $\min(a_i, b_i) = 1$ $(i = 1, 2)$, $\min(a_1, a_2) = 1$ und $\min(b_1, b_2) = 1$.

Wir betrachten zunächst den Fall $b_1/a_1 \neq b_2/a_2$. Da $w(y^{(1)}-y_i^{(2)}) = \min(b_1/a_1, b_2/a_2)$, so muß wegen $l_{12} = 1$ entweder $b_1/a_1 = 1/(a_1 a_2)$ oder $b_2/a_2 = 1/a_1 a_2$ sein. Nehmen wir $b_1/a_1 = 1/(a_1 a_2)$ an, so ist $b_1 = a_2 = 1$, also $b_1/a_1 = 1/a_1$; $b_2/a_2 = b_2$, daraus folgt daß die Steigungen der Tangente an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschieden sind.

Wenn aber $b_1/a_1 = b_2/a_2$ ist, so muß $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. $f_2(y^{(1)}) = (y^{(1)}-y^{(2)})$, $w(y^{(1)}-y^{(2)}) = 1$. Also $y^{(1)}-b = \lambda^{(1)}(x-a) + \cdots$, $y^{(2)}-b = \lambda^{(2)}(x-a) + \cdots$, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$. Daraus folgt die erste Hälfte des Satzes.

Umgekehrt nehmen wir an, daß $\min(a_1, b_1) = 1$, $\min(a_2, b_2) = 1$, und die Steigungen der Tangente an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschieden sind. 1) Im Falle $a_1 > 1$ ist $b_2 = 1$. Da die Steigungen der Tangente an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschieden sind, so muß $a_1 = 1$. Also ist $b_1/a_1 = b_1 > b_2/a_2 = 1/a_2$, es folgt $l_{12} = (1/a_2) a_1 a_2 = a_1 = 1$.
2) a) Im Falle $a_2 = 1$ und $a_1 > 1$ ist $b_1/a_1 = 1/a_1 < b_2 = b_2/a_2$, also $l_{12} = (1/a_1) a_1 a_2 = a_2 = 1$. b) Im Falle $a_2 = a_1 = 1$ gilt:

$$y^{(1)} - b = \lambda^{(1)}(x-a)^{b_1} + \cdots, \qquad y^{(2)} - b = \lambda^{(2)}(x-a)^{b_2} + \cdots,$$

Da die Steigungen verschiedene Werte haben, so muß einer der b_1 und b_2, etwa b_1, gleich 1 sein, und $b_2 > 1$ oder $b_2 = 1$, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ sein. In jedem Fall $w(y^{(1)} - y^{(2)}) = 1$, $l_{12} = 1$.

Aus den Hilfssätze 5, 6 folgt: Der Doppelpunktdivisor $\mathfrak{D}$ enthält jeden zu einen κ-zweigigen, singulären Punkte $\mathfrak{p} = (x-a, y-b)$ gehörigen Primteiler $\mathfrak{P}$ mindestens in der $(\kappa - 1)^{te}$ Potenz, und diese untere Grenze wird dann und nur dann erreicht, wenn

$$(x-a,\ y-b) \sim \mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_\kappa \quad (\mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_j \ (i \neq j))$$

und $\mathfrak{p}$ lauter verschiedene Tangente hat.

Satz 10. *Wir nehmen an, daß k vollkommen ist. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$, so ist $\mathfrak{P} | \mathfrak{D}$.* (Wenn etwa $k(x, y)/k(x)$ inseparabel ist, so betrachten wir $\mathfrak{Z}_x$ als 0).

Beweis. Erstens, da bei linearen Transformationen $\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{Z}_y$ und $\mathfrak{D}$

nicht ändern, so kann man annehmen, daß $\mathfrak{P}$ endlich ist, und daß die Primfaktorzerlegung $f(t,x)=a_0(x)f_1(t)\cdots f_\nu(t)$ in $k(x)_{\mathfrak{p}_x}[t]$ mit $a_0(x)\notin\mathfrak{p}$. Bei Konstantenerweiterung ändern $\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{Z}_y$, $\mathfrak{N}_x$ und $\mathfrak{N}_y$ nicht (d.i. wenn wir $\overline{\mathfrak{Z}}_x$, $\overline{\mathfrak{Z}}_y$ in $K^*(x,y)$ betrachten, so sind $\overline{\mathfrak{Z}}_x$, $\overline{\mathfrak{Z}}_y$ Fortsetzungen von $\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{Z}_y$ als Divisoren). Daher ist so auch $\mathfrak{D}$. Also kann man annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Da $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{Z}_x$ ist, muß $\mathfrak{P}$ verzweigen, weil k vollkommen ist. (Wenn $k(x,y)/k(x)$ inseparabel ist, so verzweigen alle Primdivisoren.[8]) Also $(a-1)\geqq 1$ und ebenso $(b-1)\geqq 1$. Aus Hilfssatz 4 $l_{11}\geqq(a-1)(b-1)\geqq 1$. Daraus folgt $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}$.

Satz 11. *Der Zweig $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann Zweige auf dem singulären Punkt, wenn $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}$.*

Beweis. Da $\mathfrak{D}$ und Singularitäten bei linearen Transformationen ungeändert sind, so kann man annehmen, daß $\mathfrak{P}$ auf endlichem Punkt $\mathfrak{p}$ liegt. Wenn $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}$ so folgt $\nu_{\mathfrak{P}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)>0$, $\nu_{\mathfrak{P}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)>0$, also $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\in\mathfrak{p}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{p}$ nach Satz 9 singulär ist. Umgekehrt wenn $\mathfrak{p}$ singulär ist, so ist $\nu_{\mathfrak{P}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)>0$, $\nu_{\mathfrak{P}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)>0$. Also $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_y$. So folgt $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{D}$ nach Satz 10.

(8) H. Hasse; Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitzungsber. Akad. Berlin, 1934, Satz. 1.