Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 14 (1985), p. 21-32

Les agents integrants et le probleme du cobordisme des germes de feuilletages holomorphes singuliers de codimension un

By (*) D. CERVEAU

(Received May 18, 1984)

0. Introduction.

On considère des germes de feuilletages holomorphes $\mathscr{F}$ à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$, singuliers et saturés [M, M], c'est-à-dire définis par des formes intégrables $\omega_{\mathscr{F}}$ ayant un ensemble singulier $S(\omega_{\mathscr{F}})$ de codimension au moins deux. Un cobordisme de feuilletages entre $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ est un germe de feuilletage $\mathscr{F}$ holomorphe singulier le long de $\{0\}\times\mathscr{D}_{\mathscr{F}}$ dans $\boldsymbol{C}^{n+1}=\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}$ tel que:

1) $\mathscr{F}_{|C^n\times\{0\}}=\mathscr{F}_0$, où $\mathscr{F}_{|C^n\times\{0\}}$ désigne la trace de $\mathscr{F}$ sur l'hyperplan $\mathrm{C}^n\times\{0\}$.

2) $\mathscr{F}_{|C^n\times\{1\}}$

3) Aucun plan $\boldsymbol{C}^n\times\{t_0\}$ n'est une feuille de $\mathscr{F}$.

$\mathscr{D}_{\mathscr{F}}$ est un domaine de la droite complexe contenant 0 et 1.

Du point de vue des équations de pfaff intégrables ω, ω_0, ω_1 définissant respectivement $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ cela se traduit de la façon suivante:

1)′ $\omega_{|t=0}\wedge\omega_0=0$

2)′ $\omega_{|t=1}\wedge\omega_1=0$

3)′ $\omega\wedge dt$ n'est pas divisible par $t-t_0$ pour tout t_0 dans $\mathscr{D}_{\mathscr{F}}$ (t désigne la coordonnée de $\boldsymbol{C}$).

Deux feuilletages $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ sont cohomologues s'ils possèdent deux équations ω_0 et ω_1 telles que $d\omega_0=d\omega_1$. (cod $S(\omega_i)\geq 2$), ie $\omega_1=\omega_0+dV$ où V est un élément de l'anneau $\mathcal{O}_n$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

On s'intéresse dans cet article au problème du cobordisme des feuilletages cohomologues. On se restreint ici à cette éventualité dans la mesure où le problème général du cobordisme ne se laisse pas approcher très facilement notamment du fait de l'absence d'une théorie satisfaisante des déformations des formes intégrables. De plus, on tente de faire sentir que la différentielle $d\omega_{\mathscr{F}}$ d'une équation $\omega_{\mathscr{F}}$ d'un feuilletage $\mathscr{F}$, bien que n'étant pas

(*) Cet article a été rédigé lors d'un séjour de l'auteur à l'IMPA de Rio de Janeiro.

intrinsèquement liée au feuilletage à priori, donne tout de même des renseignements utiles à la résolution de certains problèmes spécifiques. Ceci avait été remarqué dans certain cas particuliers (essentiellement "dicritiques") par Camacho et Lins [C, L].

I. Agents integrants-definition des formes de type 0, I, II, III.

Soient ω_0 et $\omega_1=\omega_0+dV$ deux germes de formes intégrables holomorphes cohomologues;

Ia condition d'intégrabilité se traduit ici par les deux égalités:

$$\begin{cases} \omega_0\wedge \mathrm{d}\omega_0=0 & (1) \\ dV\wedge \mathrm{d}\omega_0=0 & (2) \end{cases}$$

Ces deux égalités ne sont évidemment consistantes qu'en dimension $n\geq 3$. Une banalité que l'on se doit de signaler est que le problème du cobordisme est trivial pour la classe des formes ω_0 ayant la propriété qu'aucune fonction holomorphe non constante ne vérifie (2); ce phénomène se produit effectivement notamment pour certaines formes dicritiques [J]. Si $\{V\in\mathcal{O}_n,\ dV\wedge d\omega=0\}\equiv \boldsymbol{C}$, on dira que ω est de type 0. De façon générale, pour ω intégrable, on considère le sous-anneau $\mathscr{A}_\omega$ de $\mathcal{O}_n$: $\mathscr{A}_\omega=\{f\in\mathcal{O}_n\ d\omega\wedge df=0\}$.

Les éléments non constants de $\mathscr{A}_\omega$ sont les agents intégrants holomorphes de ω. Une forme ω intégrable est du type I si

a) ω possède un agent intégrant holomorphe f non constant.

d) tout agent intégrant méromorphe F (ie $dF\wedge \mathrm{d}\omega=0$ avec F méromorphe) satisfait à $df\wedge dF\equiv 0$.

Grosso-modo ceci signifie que le feuilletage défini par $\mathrm{d}\omega$, qui est de codimension 2, n'est contenu que dans un seul feuilletage simple, i. e ayant une intégrale première ordinaire holomorphe.

Le type II est constitué des formes ω intégrables pour lesquelles il existe f et g dans $\mathscr{A}_\omega$ non constants tel que l'ensemble singulier de (f, g) $S(df\wedge dg)=\{x,\ df\wedge dg(x)=0\}$ soit de codimension au moins 2. Dans le type II les feuilles du feuilletage défini par $d\omega$, sont les fibres (ou plutôt les composantes connexes des fibres) de l'application (f, g): $\boldsymbol{C}^n, 0\to\boldsymbol{C}^2, 0$.

Le type III rassemble les formes ω qui ne sont pas du type(0), I ou II.

REMARQUE: Les définitions ci-dessus portent sur les équations et non sur les feuilletages. Un feuilletage peut possèder une équation du type I et une autre du type II; nous reviendrons ultérieurement sur ce problème.

EXEMPLES: 1) Une forme du type $\omega=gdf$, g unité, $f\in\mathcal{O}_n$ n'est pas du type I et est génériquement du type II.

2) Toute forme à 2 variables est du type II.

3) Une forme du type $f_1 \ldots f_p \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ est génériquement du type I ; par exemple si (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de $\boldsymbol{C}^3$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois nombres complexes $\boldsymbol{Z}$-indépendants alors $x_1 x_2 x_3 (\sum \lambda_i \frac{dx_i}{x_i})$ est du type I.

4) Rappelons qu'un facteur intégrant holomorphe f d'une forme intégrable ω est un élément de $\mathcal{O}_n$ tel que $d(\frac{\omega}{f}=0$ (cf $[C, M]$ notamment pour le théorème d'intégration en présence de facteur intégrant). On remarque trivialement qu'un facteur intégrant est un agent intégrant.

PROPOSITION I. 1 : *Si ω est du type* I *il existe $f \in \mathcal{A}_\omega$ tel que $\mathcal{A}_\omega = \boldsymbol{C}\{f\}$. On dit alors que f est un agent intégrant minimal de ω.*

PREUVE : Soit f un élément de $\mathcal{A}_\omega$ qui ne soit pas puissance d'une autre fonction holomorphe. Un tel f existe. Le résultat découle du :

THÉORÈME $[M, M]$: *Soit f un élément de $\mathcal{O}_n$ qui n'est pas une puissance; alors :*

$$\{g \in \mathcal{O}_n,\ df \wedge dg \equiv 0\} = \boldsymbol{C}\{f\}$$

PROPOSITION I. 2. : *Si ω est du type* II *il existe une application $F : \boldsymbol{C}^n, 0 \to \boldsymbol{C}^2$, 0 et un germe de* 1*-forme holomorphe $\bar{\omega}$ à l'origine de $\boldsymbol{C}^2$ tel que $\omega = F^*(\bar{\omega})$.*

PREUVE : Soient f et g dans $\mathcal{A}_\omega$ tels que cod $S(df \wedge dg) \geq 2$. Visiblement :

$$\mathcal{A}_\omega = \{h \in \mathcal{O}_n,\ dh \wedge df \wedge dg \equiv 0\}.$$

Soit H une fonction holomorphe en $0 \in \boldsymbol{C}^n$ telle que

$$d\omega = H.\ df \wedge dg \qquad (1)$$

Un tel H se construit de la façon suivante : en chaque point x de $\mathbf{C}^n - S(df \wedge dg)$ on peut trouver un germe H, x unique tel que $d\omega, x = H, x\ df \wedge dg$ (exercice) ; les H, x de part l'unicité se recollent en une fonction H sur $(\boldsymbol{C}^n - S(df \wedge dg), 0)$ qui s'étend naturellement à $\boldsymbol{C}^n$ puisque cod $S(df \wedge dg) \geq 2$. Différentiant (1) on obtient

$$0 = dH \wedge df \wedge dg$$

Invoquant un argument de Moussu-Tougeron $[M, T]$, on exhibe une fonction de deux variables $\alpha(x, y)$ telle que :

$$H = \alpha(f, g)$$

Ce fait conduisant visiblement à :

$$d\omega = (f, g)^*(\alpha(x, y)\ dx \wedge dy).$$

$\bar{\omega}_1$ étant une primitive quelconque de $\alpha(x, y)\ dx \wedge dy$, on a certainement :

$$\omega = (f, g)^* \bar{\omega}_1 + dG \text{ où } G \in \mathcal{O}_n.$$

L'intégrabilité de ω conduit encore à une égalité :

$$dG \wedge df \wedge dg = 0$$

et G s'écrit $G=\beta(f, g)$, $\beta\in\mathcal{O}_2$. La forme $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+d\beta$ convient.

REMARQUE: L'argument de Moussu–Tougeron affirme précisément que $\mathscr{A}_\omega=\boldsymbol{C}\{f, g\}$. Pour les formes du type III nous ne possèdons aucun résultat général. Nous formulerons les conjectures suivantes:

(1) Si $\mathscr{A}_\omega=\boldsymbol{C}\{f\}$ pour un certain f alors ω est du type I. (on doit prouver que si F est méromorphe et satisfait à $dF\wedge d\omega=0$ et $dF\wedge df\not\equiv0$ alors il existe g holomorphe tel que $dg\wedge d\omega\equiv0$ et $dg\wedge df\not\equiv0$).

(2) Si ω est du type III, il existe des fonctions $g_1, \cdots, g_s\in\mathcal{O}_n$ (3 à 3 analytiquement dépendantes) telles que:

$$\mathscr{A}_\omega=\boldsymbol{C}\{g_1, \cdots, g_s\} \qquad (*)$$

(3) $\mathscr{A}_\omega=\boldsymbol{C}\{g_1, \cdots, g_s\}\Longleftrightarrow g_i\in\mathscr{A}_\omega$ et les fibres de l'application $(g_1, \cdots, g_s): \boldsymbol{C}^n, 0\to\boldsymbol{C}^s, 0$ sont connexes.

(4) Supposant$(*)$ satisfaite et que l'image de $(g_1, \cdots, g_s)$ soit contenue dans une surface S analytique de $\boldsymbol{C}^s, 0$ (en presque tout point $\mathrm{Im}(g_1, \cdots, g_s)$ est de dimension 2) il existe une 1-forme $\bar{\omega}$ sur S telle que $\omega=(g_1, \cdots, g_s)^*\bar{\omega}$.

La conjecture (2) semble être raisonnable car confortée par le théorème classique de Siegel [S]:

THÉORÈME [S] *Soient $P_1, \cdots, P_p\in\boldsymbol{C}[x_1, \cdots, x_n]$ des polynômes tels que $dP_1\wedge\cdots\wedge dP_p$ ne soit pas identiquement nul. Il existe des polynômes $Q_1, \cdots, Q_l$ tels que:*

$$\{R\in\boldsymbol{C}(x_1, \cdots, x_n)/dR\wedge dP_1\wedge\cdots\wedge dP_p=0\}=\boldsymbol{C}(Q_1, \cdots, Q_l).$$

Les conjectures (3) et (4) sont des conjectures optimistes; (2) et (3) se laissent généraliser en dehors de notre contexte.

II. Etude specifique des formes du type I. Theoreme de promotion. Probleme de cobordisme des formes du type II cohomologues.

§1. Fonction caractéristique K.

Soit ω un germe de forme intégrable à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$ cod $S(\omega)\geq2$. Notant $\mathscr{X}_n$ le $\mathcal{O}_n$ module des champs de vecteurs en $0\in\boldsymbol{C}^n$, on considère les distributions involutives (ie des sous modules de $\mathscr{X}_n$ stables par crochet de Lie) $D(\omega)$ et $D(d\omega)$ définies de la façon suivante:

$D_{(\omega)}=\{X\in\mathscr{X}_n,\ i_X\omega=\omega(X)=0\}$

$D_{(d\omega)}=\{X\in_n,\ i_Xd\omega=0\}$

La condition d'intégrabilité implique visiblement l'inclusion $D(d\omega)\subset D(\omega)$. On construit un morphisme de module $h: D(\omega)\to\mathcal{O}_n$ de la façon suivante; si $X\in D(\omega)$ on a:

$0=i_X\ (\omega\wedge d\omega)=\omega(X)d\omega+i_Xd\omega\wedge\omega=i_Xd\omega\wedge\omega$. Il en résulte, puisque cod $S(\omega)\geq2$, l'existence d'une fonction h_X telle que:

$$i_Xd\omega=h_X\cdot\omega$$

On pose $h(X)=h_X$; on a la suite exacte courte

$$0\to D(d\omega)\to D(\omega)\xrightarrow{h}\mathcal{O}_n$$

Lorsque cette suite exacte est longue on a un phénomène de quasi-homogénéité qui a été étudié pour $n=3$ (avec quelques conditions de généricité) par Camacho et Lins dans [C, L]. On peut donner des conditions suffisantes portant sur $d\omega$ pour qu'il en soit ainsi.

PROPOSITION II. 1. *Soit ω intégrable dy type I et f un agent intégrant minimal de ω Si $X\in D(\omega)-D(d\omega)$, la fonction $\frac{X(f)}{h_X}$ est indépendante de X, holomorphe et se factorise dans f : il existe une fonction holomorphe $K(t)$, $t\in\mathbf{C}$, s'annulant à l'origine de $\mathbf{C}$ telle que :*

$$\frac{X(f)}{h_X}=K(f)$$

K s'appelle la fonction caractéristique de ω.

PREUVE : L'égalité $i_X(df\wedge d\omega)=0$ conduit à :

$$\frac{X(f)}{h_X}d\omega+\omega\wedge df=0 \qquad (1)$$

qui montre d'abord que $\frac{X(f)}{h_X}$ est indépendante de X. Par différentiation de (1), on obtient :

$$d\left(\frac{X(f)}{h_X}\right)\wedge d\omega=0$$

qui conduit, puisqu'on est dans le type I, à :

$$d\left(\frac{X(f)}{h_X}\right)\wedge df=0.$$

$\frac{X(f)}{h_X}$ est donc ou bien holomorphe ou bien l'inverse d'une fonction holomorphe et il existe une fonction K holomorphe ou méromorphe telle que:

$$\frac{X(f)}{h_X}=K(f)$$

(1) s'écrit désormais :

$$K(f)d\omega+\omega\wedge df=0$$

a) Si $K(t)$ était nulle identiquement, ω possèderait l'intégrale première f. Il existerait alors g tel que $g\cdot\omega=df$ de sorte que $d\omega=\frac{df}{g^2}\wedge dg$ et $g\in\mathscr{A}(\omega)$; donc $g=g(f)$ et ω est fermée, ce qui contredit le fait que ω soit de type I.

b) Supposons maintenant que $K(t)$ soit ou bien une unité holomorphe ou bien méromorphe non holomorphe ie :

$$K(t)=\frac{K_0(t)}{t^p} \text{ avec } p\geq 0 \text{ et } K(0)\neq 0.$$

La fonction $l(z)=\exp\int\frac{dz}{K(z)}$ est une unité holomorphe et on vérifie sans peine que l'unité $F=l(f)$ est un facteur intégrant de ω ; parce que F est une unité, ω possède une intégrale première holomorphe ce qui comme dans le cas a) est exclus par le type I. D'où la proposition.

§ 2. Théorème de promotion des agents intégrants.

On se propose d'établir le :

THÉORÈME II. 2. : *Soit ω intégrable du type I, $K(t)$ la fonction caractéristique de ω ; ω possède un facteur intégrant si et seulement si $K'(0)$ est l'inverse d'un entier positif.*

DÉMONSTRATION : Soit g un facteur intégrant de ω ; comme on l'a déjà signalé $dg\wedge d\omega=0$. Soit f un agent intégrant minimal de ω ; $g=l(f)$ où $l\in\mathcal{O}_1$. On a les deux égalités :

$$K(f)d\omega+\omega\wedge df=0 \qquad (1)$$
$$l(f)d\omega+l'(f)\omega\wedge df=0 \qquad (2)$$

Il en résulte que $\omega\wedge(l(f)-l'(f)\ K(f))df=0$: comme ω ne peut posséder d'intégrale première, $K(f)=\frac{l(f)}{l'(f)}$. Si i est l'ordre de l on a visiblement $K'(0)=\frac{1}{i}$. Inversement si $K'(0)=\frac{1}{i}$ il existe une fonction holomorphe l telle que $\frac{l'}{l}=\frac{1}{K(z)}$; $l(f)$ vérifiera alors (2) et sera un facteur intégrant de ω.

q. e. d.

En fait comme nous allons le voir les formes du type I possèdent un facteur intégrant multiforme ; en effet l'équation $\frac{l'}{l}=\frac{1}{K}$ s'intègre de façon explicite en :

$$l(t)=t^{\lambda}\exp\frac{\alpha(t)}{t^p}$$ où $\alpha(t)$ est holomorphe en $0\in\boldsymbol{C}$. p est un entier égal à l'ordre de K, moins 1 et λ est le résidu en 0 de $\frac{1}{K}$. D'où le :

THÉORÈME II. 3. : *Les formes du type I possèdent un facteur intégrant multiforme $F=f^{\lambda}\exp\frac{\alpha(f)}{f^p}$, où λ est le résidu de $\frac{1}{K}$ en 0, $p+1$ l'ordre de K et $\alpha(t)\in\mathcal{O}_1$.*

REMARQUE : Alors que la fonction K dépend du choix de f dans $\mathscr{A}_\omega$ on notera que les nombres $K'(0)$, λ et p n'en dépendent pas. Si K est associée à f et L associée à $g=l(f)$, où $l\in\mathrm{Diff}(\boldsymbol{C},0)$ on vérifie sans peine que $l'(t).K(t)=L(l(t))$; on note au passage que les difféomorphismes agissent sur les fonctions K comme sur les champs de vecteurs. Il aurait été plus convenable et moins commode de parler du " champ " caractéristique

$K(t)\dfrac{\partial}{\partial t}$. La présence de facteur intégrant ordinaire ou multiforme est liée à la forme normale de ce champ de vecteur.

§3. Problème du cobordisme des formes cohomologues du type I.

On se propose d'établir le :

THÉORÈME II. 4. : *Soient ω_0 et $\omega_1 = \omega_0 + dV$ 2 formes intégrables holomorphes cohomologues, ω_0 du type I. Alors ω_0 et ω_1 sont cobordants dès que $i\ K'(0) \neq 1$ pour tout entier $i > 0$, où K est la fonction caractéristique de ω_0.*

En fait, nous allons prouver un peu plus ; un cobordisme entre ω_0 et $\omega_1 = \omega_0 + dV$ est linéaire s'il est du Type $\omega = \omega_0 + tdV + Hdt$ où $H \in \mathcal{O}_n$. (ω est intégrable). Le théorème résulte du :

LEMME : *Sous les hypothèses de* II. 4, *ω_0 et ω_1 sont linéairement cobordantes.*

DÉMONSTRATION : Soit f un agent intégrant de ω_0 ; parce que ω_0 est du type I, il existe $L \in \mathcal{O}_1$ telle que

$$V = L(f)$$

On cherche d'abord à déterminer $H(x) \in \mathcal{O}_n$ tel que :

$$\omega = \omega_0 + tdL(f) + H(x)\ dt$$

Ensuite, on vérifiera qu'une telle forme réalise bien un cobordisme entre ω_0 et ω_1.

L'intégrabilité de ω :

$(\omega_0 + tdL(f) + Hdt) \wedge d\omega_0 + (dH - dL(f)) \wedge dt = 0$ conduit à :

$$0 \equiv (\omega_0 \wedge (dH - L'(f)\,df) + Hd\omega_0) \wedge dt + tL'(f).df \wedge (dH - L'(f)\,df) \wedge dt \equiv 0.$$

Demander que le terme en tdt soit nul revient à demander l'égalité

$$dH \wedge df = 0.$$

Puisque f est minimal on recherchera donc H sous la forme $H = l(f),\ l \in \mathcal{O}_1$. Il suffit donc de trouver l convenable pour annuler le terme du premier ordre :

$$0 \equiv \omega_0 \wedge (l'(f) - L'(f))\,df + l(f).d\omega_0.$$

Se rappelant de l'équation :

$$0 \equiv K(f)\,d\omega_0 + \omega \wedge df = 0$$

on doit résoudre en l l'équation différentielle.

$$(1) \qquad K(z).\ l'(z) - l(z) = L'(z)\ K(z)$$

Cette équation se résoud de façon classique ; on pose :

$$l(z) = \sum_{j=0}^{\infty} l_j z^j$$

Les l_j sont alors donnés par :

$$l_j(jK'(0) - 1) = F_j(l_1, \cdots, l_{j-1}) \qquad (j)$$

où F_j est une formule polynomiale ne faisant intervenir que les coefficients l_j, $i < j$ et les coefficients des données K et L. Si $K'(0)$ n'est pas l'inverse d'un entier, il existe une solution formelle unique et il est bien connu, via des méthodes de séries majorantes classiques, que cette série converge.

Pour vérifier que ω réalise un cobordisme entre ω_0 et ω_1 on doit seulement s'assurer que ω est singulière le long de l'axe $\{0\}\times\boldsymbol{C}$. Tout d'abord $\omega_0(0)=0$ puisque ω_0 est du type I ; puisque $K(0)=0$, $l(0)=0$ et $H=l(f)$ s'annule le long de l'axe. La seule possibilité pour que ω ne soit pas singulière le long de l'axe des t, est que $dV=L'(f)df$ y soit non singulière, et que f soit une submersion. Munissant $\boldsymbol{C}^n$ de coordonnées $(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ telles que $x_1=f$ on a :

$$dx_1\wedge d\omega_0=0.$$

qui conduit à :

$$d\omega_0=dx_1\wedge\eta$$

où η est une forme fermée relativement au coordonnée $x_2,\cdots x_n$

$$\eta=\sum_{i=2}^{n}\eta_i(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)dx_i$$

à paramètre x_1.

Soit W une fonction telle que $d_{x_2,\cdots\cdots,x_n}W(x_1,\cdots,x_n)=\eta$, on a $d\omega_0=dx_1\wedge dW$ et ω_0 ne peut-être de type I. q. e. d.

La démonstration conduit en fait au résultat suivant :

THÉORÈME II.5. : *Soit ω_0 du type I, f un agent minimal de ω_0 et $\omega_1=\omega_0+dL(f)$, $L\in\mathcal{O}_1$, une forme intégrable cohomologue à ω_0. Si K est la fonction caractéristique de ω_0 et si $K'(0)=\frac{1}{i}$ $i\in\boldsymbol{N}^*$, ω_0 et ω_1 sont linéairement cohomologue si l'ordre de L est strictement supérieur à i.*

Nous allons essayer de convaincre le lecteur que ce résultat est le meilleur possible. Si $K'(0)=\frac{1}{i}$, d'après le théorème II. 2., ω_0 possède un facteur intégrant qui est la puissance $i^{\grave{e}me}$ d'un agent intégrant.

Voici un exemple où l'on ne peut résoudre le problème du cobordisme en présence d'un facteur intégrant réduit (ici $i=1$).

PROPOSITION : *Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois nombres complexes $\boldsymbol{Z}$-indépendants tels que pour $i\neq j$ on ait :*

$$(*)\quad \lambda_i/\lambda_j\notin\boldsymbol{R},\ \frac{\lambda_i+1}{\lambda_j+1}\notin\boldsymbol{R}$$

$$(**)\quad \frac{\lambda_i+1}{\lambda_j+1}\neq\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$

Les formes cohomologues $\omega_0=x_1\ x_2\ x_3\sum\lambda_i\frac{dx_i}{x_i}$ et $\omega_1=\omega_0+d(x_1\ x_2\ x_3)$ sont de type I mais non cobordantes.

PREUVE : Supposons que les feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}$ soient cobordants. Il existerait une forme ω s'annulant sur un domaine D de l'axe de t (contenant 0 et 1) dans $\boldsymbol{C}^3\times\boldsymbol{C}$ telle que $\omega_{|t=0}\wedge\omega_0=0$ et $\omega_{|t=1}\wedge\omega_1=0$.

Deux cas sont possibles :

1) ou bien pour tout point $m \in D$ le 1 jet $j^1\, \omega_{|t=m}$ de $\omega_{|t=m}$ en m est nul; la condition $(*)$ permet alors d'appliquer [C_eL Théorème 6] : notamment $j^2\, \omega_{|t=m}$ et $j^l \omega_0$ sont linéairement conjugués sauf peut être en un ensemle de points isolés de D ne contenant pas 0 et 1. Ceci est impossible puisque $j^2\omega_1$ et $j^2\omega_0$ ne sont pas conjugués (d'après $(**)$).

2) ou bien $j^1\omega$ n'est pas identiquement nul le long de D et on peut alors trouver un chemin γ dans D joignant 0 à 1 le long duquel $j^1\omega$ et $j^0 d\omega$ ne sontpas nul. Le long de γ, ω est alors analytiquement triviale (phénomène de Kupka Reeb), ce qui est encore contradictoire avec $(**)$.

La non-égalité des résidus (les λ_i) donne donc une obstruction au problème du cobordisme. En fait, cette obstruction, dans le cas où le facteur intégrant est réduit n'est levée que si l'ordre de L est strictement supérieur à 1 et là le théorème II. 5 fonctionne.

§ 4. Remarque sur le probleme du cobordisme des formes du type II.

Soient ω_0 et $\omega_0 + dV = \omega_1$ deux formes cohomologues, ω_0 du type II. D'après le chapitre I, $\omega_0 = (f, g)^* \,\bar{\omega}_0$ où $\bar{\omega}_0$ est un germe de forme à l'origine de $\boldsymbol{C}^2$ et et V une fonction de f, g: $V = V(f, g)$. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'une condition suffisante pour que ω_0 et ω_1 soient cobordantes est que $\bar{\omega}_0$ et $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_0 + dV(x, y)$ le soient. La condition est nécessaire si l'on demande au cobordisme d'être linéaire. Maintenant, $\bar{\omega}_0$ et $\bar{\omega}_1$ sont linéairement cobordants si il existe $h(x, y)$ tel que :

$$\bar{\omega}_0 + t dV + h dt$$

soit intégrable soit :

$$\begin{cases} \omega_0 \wedge (dh - dV) + \mathrm{h}\ d\omega_0 = 0 & (1) \\ dh \wedge (dh - dV) = 0 & (2) \end{cases}$$

Soit W fonction holomorphe qui ne soit pas une puissance et telle que $V = W^i$ $i \geq 1$: l'égalité (2) dit que $h = l(W)$; (1) s'écrit alors :

$$\omega_0 \wedge \frac{dl'(W) - W^i}{l(W)} + d\omega_0 = 0 \qquad (1)'.$$

On peut coborder linéairement ω_0 et ω_1 si et seulement si $(1)'$ a une solution. Ce qui signifie d'ailleurs que ω_0 a un facteur intégrant multiforme comme dans II. 3.

III. Quelques remarques liees aux feuilletages.

DÉFINITIONS : 0) $\mathscr{F}$ est de type (0) si toutes les équations ω définissant $\mathscr{F}$ sont de type (0).

1) $\mathscr{F}$ est de type I, s'il possède effectivement une équation de type I et toutes les autres sont ou bien de type (0) ou bien de type I.

2) $\mathscr{F}$ est de type II, s'il possède effectivement une équation

de type II et les autres sont de type 0, I ou II.

3) $\mathscr{F}$ est de type III s'il n'est pas de type (0), I, II.

On peut appliquer la théorie de II obtenue pour les équations de Pfaff aux feuilletages cobordants ; mais on se doit ici d'apporter quelques précisions quant aux équations. On pourrait en effet imaginer deux feuilletages $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ cohomologues ayant des équations de types différents et pour lesquels la théorie, qui ne donne que des conditions suffisantes, ne fonctionnerait que pour l'un des types par exemple.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de type I, ω une équation de type I de $\mathscr{F}$ et f un agent minimal de ω ; ω possède un facteur intégrant $F=f^{\lambda}e^{\frac{\alpha(f)}{f^p}}$. Supposons que $\omega'=U\omega$ soit une autre équation du type I, f' un agent minimal *de* ω' et $f'^{\lambda'}e^{\frac{\alpha'(f')}{f'^{p'}}}=F'$ un facteur intégrant *de* ω'. Visiblement $U\, f^{\lambda}e^{\frac{\alpha(f)}{f^p}}$ est un facteur intégrant de ω' et le quotient :

$$\frac{UF}{F'}=Uf^{\lambda-\lambda'}e^{\frac{\alpha(f)}{f^p}-\frac{\alpha'(f')}{f'^{p'}}}$$

est une intégrale première de ω.

Il y a deux possibilités à priori :

1) si ce quotient est non constant il découle de $[C, M]$ que ω (ou $U\omega$) possède un facteur intégrant méromorphe H.

Puisque ω est de type I, H ou bien $\frac{1}{H}$ est holomorphe. Mais s'il s'agit de $\frac{1}{H}$, H. ω est fermée : $H\omega=d\alpha$; fait qui conduit à $dH\wedge d\alpha=0$ puisque ω est de type I. Ainsi $\alpha=\alpha(H)$; ce qui est absurde car ω serait fermée.

Donc H est holomorphe et ω possède un facteur intégrant holomorphe ; il en résulte que, dans cette éventualité, toutes les équations de $\mathscr{F}$ sont de type I, puisque toute autre équation $V\omega$ de $\mathscr{F}$ aura V. H comme facteur intégrant.

2) Si ce quotient est constant alors U est une fonction de f et f'. Ou bien $0=df\wedge df'$ et $U=U(f)$ auquel cas $\omega'=U(f)\omega$ ou bien $df\wedge df'\not\equiv 0$; mais ceci est impossible puisque U est une unité. On en déduit la :

PROPOSITION III. 1. : *Si $\mathscr{F}$ est de type I on est dans l'une des situations suivantes :*

1) *toutes les équations de $\mathscr{F}$ sont de type I, et toute équation de $\mathscr{F}$ possède un facteur intégrant.*

2) *il y a une équation ω de $\mathscr{F}$ de type I et toutes les autres équations du type I s'écrivent $U(f)$. ω où f est un agent intégrant minimal de ω et $U\in\mathcal{O}_1$ une unité.*

De cette proposition on retiendra le fait que les hypothèses des théorèmes II. 3 et II. 4 sont donc des hypothèses ne portant pas en fait sur les équations mais sur les feuilletages.

En ce qui concerne les équations du type II, comme on possède une théorie plus efficace pour les équations de type I, on aurait à priori intérêt, pour résoudre le problème du cobordisme, à tester les équations du type I. En fait, il n'en est rien ; supposons en effet que $\omega_0=(f,\ g)^*\bar{\omega}$ soit une forme de type II, avec $\bar{\omega}$ vivant dans $\boldsymbol{C}^2, 0$, cod $S(df\wedge dg)\geq 2$, et $\omega_1=\omega_0+dV(f,\ g)$, $V\in\mathcal{O}_2$, une forme cohomologue à ω_0. On se demande s'il existe des unités U_0 et U_1 telles que $U_0\omega_0$ et $U_1\omega_1$ soient cohomologues de type I (on se pose cette question évidemment en dimension plus grande que 3). On aura :

$$dU_0\omega_0=d(U_1(\omega_0+dV(f,\ g))$$

soit :

$$d(U_0-U_1)\wedge\omega_0+(U_0-U_1)d\omega_0=dU_1\wedge dV(f,\ g) \qquad (1)$$

Comme, et nous l'avons déjà signalé, $d\omega_0$ et $df\wedge dg$ sont colinéaires, on a :

$$d(U_0-U_1)\wedge dV(f,\ g)\wedge\omega_0=0 \qquad (2)$$

Ou bien $dV(f,\ g)\wedge\omega_0\equiv 0$ et le problème du cobordisme entre ω_0 et ω_1 est trivial ($\mathcal{F}_0=\mathcal{F}_1$), ou bien $dV(f,\ g)\wedge\omega_0\not\equiv 0$ ce qui conduit à $d(U_0-U_1)\wedge df\wedge dg\equiv 0$ et

$$U_1=U_0-H(f,\ g)$$

Revenant à (1) on obtient :

$$dH(f,\ g)\wedge\omega_0+H(f,\ g)d\omega_0=d(U_0-H(f,\ g))\wedge dV(f,\ g)$$

et visiblement

$$dU_0\wedge df\wedge dg=0 \text{ et } U_0=U_0(f,\ g)$$

Ainsi $U_0\omega_0$ est encore du type II. *D*'où la :

PROPOSITION : *Soient $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ deux feuilletages cohomologues de type* II.

a) *ou bien toutes les équations cohomologues de $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ sont de type* II

b) *ou bien $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}_1$ (cas trivial) (et $\mathcal{F}_0$ possède une intégrale première holomorphe).*

Tout ceci dit que les définitions des feuilletages de type (0), I, II, III sont bien adaptées au problème de cobordisme des feuilletages cohomologues.

Bibliographie

[C, L] C. CAMACHO–A. LINS N. : The topology of integrable form near a singularity. Publ. Math. IHES n° 55 (5–36).

[Ce, L] D. CERVEAU–A. LINS N. : Formes intégrables tangentes à des actions commutatives CRAS (291) Série A p. 647

[C, M] D. CERVEAU–J. F. MATTEI : Formes intégrables holomorphes singulières-Astérisque n° 97.

[J] J. P. JOUANOLOU : Equations de pfaff algébriques-Lect. Notes in Math. N° 708.

Springer Verlag.

[M, M] J. F. MATTEI-R. MOUSSU : Holonomie et intégrales premières, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 13 (1980) p. 469-523.

[M, T] R. MOUSSU-J. C. TOUGERON : CRAS, 282, série A, 1976, p. 1237.

[S] C. L. SIEGEL : Meromorphe Funktionen anf Kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1955, p. 71. 77.

Universite de Dijon
Faculté des Sciences-Mirande
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
B. P. 138, 21004 Dijon Cedex
France