

UN ESTUDIO DE LA LÓGICA ALGEBRAICA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

LUIS M. LAITA

Summary

In this paper a model is provided for the bivalued propositional calculus and for Halmos' monadic and polyadic logics, by means of a preorder category which has unions, intersections, nul and conul objects, and a contravariant functor defined on it.

The set of propositions and of propositional functions are structured as categories the arrows of which are the implication functors. Quantifiers and logical constants are shown to be special functors. Implications, implications among implications and so on, are described respectively as arrows, functors, natural transformations, etc., so that logical formulæ are studied as constructs of the theory of categories. An extension to the study of cylindric algebras is suggested at the end.

The paper is an extract of the more important points of a Ph.D. Thesis in Mathematics accepted by the Department of Mathematics of Universidad Complutense of Madrid, in August 1974. The author is indebted to Professors N. Cuesta and V. Muñoz of Salamanca and A. Dou of Madrid who first introduced him to the field of logic, and especially to Professor P. Abellanas of Madrid University, director of the dissertation, for his suggestions and advice, and to Professor B. Sobociński of Notre Dame University, under whose constant supervision he has worked for the last six years. The dissertation was done under a Grant provided by the Foundation Juan March of Spain.

Se presentan a continuación unas sugerencias para la formulación de un modelo de la lógica bivalente en el lenguaje de la teoría de categorías.

En la introducción se describen las "R-categorías" cuyos grafos corresponden a retículos con objetos inicial y final, y se prueban de forma diferente a la usual, algunas relaciones importantes de la teoría de retículos. Ello sugiere indirectamente, un método para hallar tautologías. En la sección 2, se construye una categoría especial, a la que se denomina " φ -categoría", un instrumento básico usado a lo largo de todo el trabajo. En las secciones 3 y 4 se traducen al lenguaje de las categorías, los

Received September 16, 1974

conceptos más importantes de las lógicas monádica y poliádica de Halmos; cuantificadores, constantes y operadores de sustitución resultan ser unos funtores especiales sobre φ -categorías. Un interesante modelo para la lógica bivalente aparece en la sección 5; implicaciones, implicaciones entre implicaciones, etc., quedan reducidas a flechas, funtores, transformaciones naturales, etc. Finalmente, se presenta una extensión de la teoría a las álgebras cilíndricas de dimensión dos.*

1 Introducción

Definición 1.1 *Categoría Preorden* es una categoría en la que dados dos cualesquiera de sus objetos a y b , el morfismo $[a, b]$ contiene como máximo una sola flecha, ([1], p. 11).

Definición 1.2 *Categoría Orden Parcial* es una categoría preorden en la que los únicos elementos inversibles son las identidades.

Definición 1.3 *Categoría R* es una categoría orden parcial que tiene uniones e intersecciones parciales y objetos nulo y conulo. Si sólo existen uniones y objeto conulo o intersecciones y objeto nulo, llamamos a las estructuras correspondientes *Categoría R-V* y *Categoría R-Λ*.

A partir de aquí, denotaremos con los símbolos $0, 1, R, R-V, R-Λ$, el objeto nulo, conulo, la categoría R y las categorías $R-V$ y $R-Λ$ respectivamente. A su vez $UN(a, b)$ o $a \vee b$ representarán la unión de a y b ; $INT(a, b)$ o $a \wedge b$ (indistintamente) representarán la intersección de a y b .

Lema 1.1 *Las flechas $a \rightarrow b$ y $a \wedge b \rightarrow a \vee b$ coinciden en R .*

Prueba: por aplicación de las definiciones de unión e intersección.

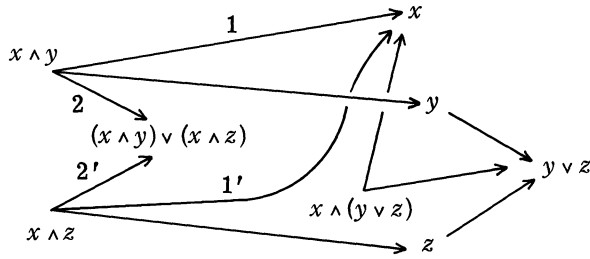
Lema 1.2 *Dadas las variables x, y, z , que representan objetos de R , las siguientes flechas son morfismos de R :*

- (i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x \wedge (y \vee z)$
- (ii) $x \vee (y \wedge z) \rightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- (iii) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \rightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
- (iv) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x \wedge (y \vee (x \wedge z))$.

Prueba: como ilustración, probamos (i). La prueba de los restantes puntos es similar.

De las definiciones de unión e intersección en R , resulta el siguiente esquema válido en dicha categoría:

*El trabajo contiene los puntos más importantes de una Tesis Doctoral presentada el día 20 de agosto de 1974 en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. El autor agradece el apoyo prestado por los Profesores V. Muñoz, N. Cuesta y A. Dou, quienes le introdujeron en el campo de la lógica simbólica; debe así mismo un especial reconocimiento a los Profesores P. Abellanas, director de la tesis, y B. Sobociński, consejero infatigable, por su constante ayuda. La realización del trabajo ha sido posible gracias a una beca de estudios concedida al autor por la Fundación Juan March, de España.



De la existencia de las flechas 1, 1', 2, 2', y de la definición de unión resulta: $((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x) \in \mathbf{R}$. (I)

De $x \wedge y \rightarrow y \rightarrow y \vee z$, $x \wedge z \rightarrow z \rightarrow y \vee z$, de la transitividad que resulta de la composición ordinaria de flechas de una categoría, y de la definición de unión, obtenemos: $((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow (y \vee z)) \in \mathbf{R}$. (II)

Pero $x \wedge (y \vee z)$ es la intersección de x con $(y \vee z)$; por tanto: de (I), (II), y de la definición de intersección resulta:

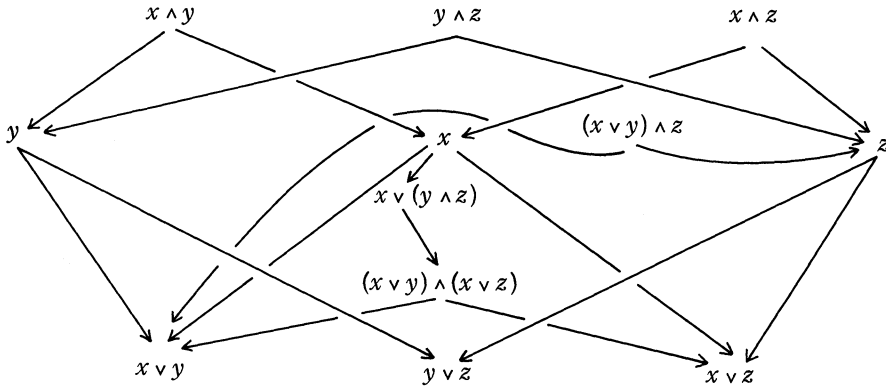
$$((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x \wedge (y \vee z)) \in \mathbf{R}. \quad \text{Q.F.D.}$$

Definición 1.4 $\mathbf{R}$ es distributiva en $\wedge$, $\vee$ si y sólo si cada una de las flechas (i), (ii), (iii) del Lema 1.2 es inversible.

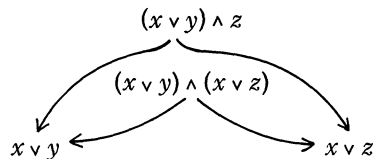
Teorema 1.1 $\mathbf{R}$ es distributiva en $\vee$, $\wedge$ si y sólo si

$$((x \vee y) \wedge z \rightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}.$$

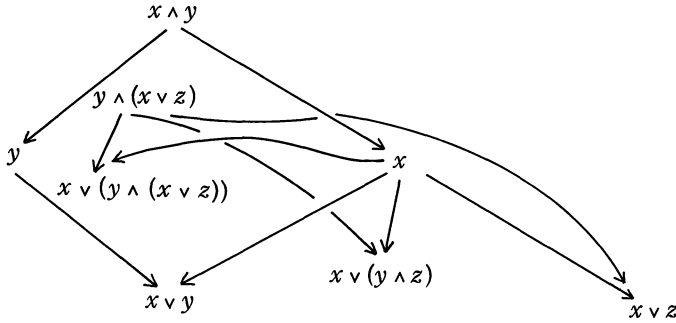
Prueba: consideremos el esquema válido



Si la categoría es distributiva, de la Definición 1.4 obtenemos: $((x \vee y) \wedge (x \vee z) \leftrightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}$. Por la propiedad transitiva, también $((x \vee y) \wedge z \rightarrow x \vee z) \in \mathbf{R}$. Obtenemos entonces el siguiente subdiagrama válido en la categoría $\mathbf{R}$:



y ya que $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ es la intersección de sus factores, se sigue: $((x \vee y) \wedge z \rightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)) \in \mathbf{R}$, que de acuerdo con la suposición de distributividad cambia a $(x \vee y) \wedge z \rightarrow x \vee (y \wedge z)$. Supongamos ahora $((x \vee y) \wedge z \rightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}$, y probemos la distributividad. Cambiando y por z se tiene $((x \vee z) \wedge y \rightarrow x \vee (z \wedge y)) \in \mathbf{R}$. Resulta entonces el siguiente esquema válido:



Por tanto: $((x \vee (y \wedge (x \vee z)) \rightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}$. Por otro lado, cambiando z por $x \vee z$ en la misma flecha, se obtiene $((x \vee y) \wedge (x \vee z) \rightarrow x \vee (y \wedge (x \vee z)) \in \mathbf{R}$. De las dos relaciones anteriores se sigue: $((x \vee y) \wedge (x \vee z) \rightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}$. Por tanto, por el Teorema 1.1 (ii), $((x \vee y) \wedge (x \vee z) \leftrightarrow x \vee (y \wedge z)) \in \mathbf{R}$. Q.F.D.

2 φ -categorías En esta sección se describe una categoría $\mathbf{R}$ distributiva especial sobre la cual se construirá en secciones sucesivas una teoría de la lógica en términos de la teoría de categorías. La descripción es básicamente una extensión de la construcción de G. Grätzer ([2], pp. 58 y ss) de un retículo booleano a partir de un semirretículo pseudocomplementado.

Definición 2.1 f es una función de objetos en una categoría $\mathbf{R-V}$ que cumple las siguientes condiciones:

- (i) $a \vee fa = 1$
- (ii) $ffa = 1$,

para todo objeto a de la categoría.

Lema 2.1 Si $a \rightarrow b \in \mathbf{R-V}$, entonces $fa \vee b = 1$.

Prueba: por definición de unión, definición de elemento conulo, aplicación de Lema 1.1, y Definición 2.1

Interesa ahora considerar una categoría $\mathbf{C}$ en la que el lema anterior sea válido en las dos direcciones, ya que no debe perderse de vista que lo que aquí se busca es la construcción de un modelo para la implicación lógica, en donde $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b = v$. Sea ese el caso, la definición dada para f sugiere una extensión interesante; de ser una involución, resulta que para un dado $b \in \mathbf{C}$, $ffb = b$. De la condición $a \rightarrow b \in \mathbf{C}$, se obtiene $fa \vee b = 1$, es decir $fa \vee ffb = ffb \vee fa = 1$, que se traduce a afirmar $fb \rightarrow fa \in \mathbf{C}$. Pero que f transforme $a \rightarrow b$ en $fb \rightarrow fa$ sugiere definir f como un funtor contra-variante en $\mathbf{C}$. Cambiando f por φ definimos:

Definición 2.2 φ es un funtor contravariante endomórfico en una categoría $\mathbf{R-V}$ que cumple las condiciones:

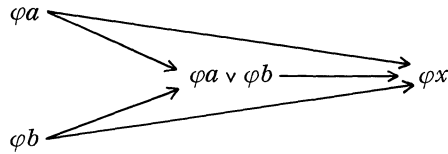
- (i) $a = \varphi\varphi a$
- (ii) $a \vee \varphi a = 1$
- (iii) $\varphi a \vee b = 1$ si y sólo si $a \rightarrow b \in \mathbf{R-V}$.

Definición 2.3 φ -categoría es una categoría $\mathbf{R}$, distributiva en $\vee$, $\wedge$, y con el funtor φ definido en ella.

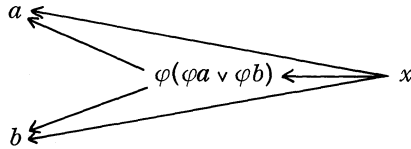
Teorema 2.1 φ determina en una categoría $\mathbf{R-V}$ una φ -categoría $\mathbf{C}$.

Prueba: (i) $\mathbf{C}$ tiene objeto nulo. En efecto, $1 \in \mathbf{R-V}$, entonces $\varphi 1 \in \mathbf{R-V}$, pero por definición de objeto conulo, $x \rightarrow 1$ existe para todo objeto $x \in \mathbf{R-V}$, es decir; $\varphi 1 \rightarrow \varphi x \in \mathbf{R-V}$, lo cual afirma la existencia de un objeto $\varphi 1$ que precede a todos los objetos φx , que son a su vez todos los objetos de la categoría. $\varphi 1$ es por tanto el objeto nulo 0.

(ii) Las leyes de De Morgan son válidas en $\mathbf{C}$. En efecto, dadas las flechas $\varphi a \rightarrow \varphi x$, $\varphi b \rightarrow \varphi x$ de $\mathbf{C}$ el siguiente esquema es esquema de $\mathbf{C}$:



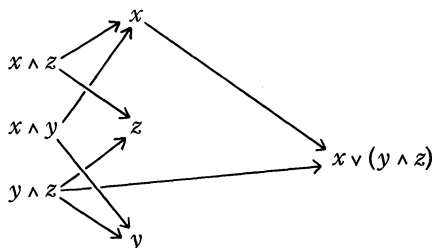
Aplicando el funtor contravariante φ obtenemos (recordar $\varphi\varphi a = a$):



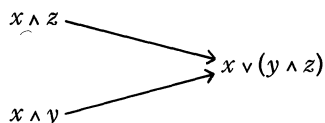
Este último esquema muestra en primer lugar que $\varphi(\varphi a \vee \varphi b)$ es un objeto de $\mathbf{C}$ por haber sido obtenido aplicando φ a un objeto de $\mathbf{C}$, y en segundo lugar, que dicho objeto cumple con la definición de intersección de los objetos a y b . En efecto, $\varphi(\varphi a \vee \varphi b)$ precede inmediatamente a a y b ; no puede haber otro objeto x tal que $\varphi(\varphi a \vee \varphi b) \rightarrow x \in \mathbf{R-V}$ porque x (todo x) se ha obtenido mediante $\varphi\varphi x$; al estar φx situado “después” de $\varphi a \vee \varphi b$, necesariamente x debe estar situado “antes” de $\varphi(\varphi a \vee \varphi b)$. Obtenemos entonces $a \wedge b = \varphi(\varphi a \vee \varphi b)$; de modo parecido puede obtenerse $a \vee b = \varphi(\varphi a \wedge \varphi b)$. Las dos relaciones obtenidas expresan las fórmulas de De Morgan si por “complemento” de un objeto a entendemos el objeto φa .

Es interesante hacer notar que de esta forma se obtienen las leyes de De Morgan sin presuponer la distributividad de las operaciones $\vee$ y $\wedge$. Indirectamente se obtiene además una segunda condición necesaria para la prueba del teorema: que $\mathbf{C}$ tiene intersecciones parciales.

(iii) $\mathbf{C}$ es distributiva en las operaciones $\vee$, $\wedge$. En efecto, el siguiente esquema es válido en $\mathbf{C}$:

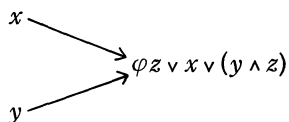


y por tanto también lo es el subdiagrama:



En lo que resta de prueba se sigue a Grätzer, aunque usando las fórmulas de De Morgan demostradas en (ii).

Aplicando la definición de φ resulta del esquema anterior $\varphi(x \wedge z) \vee (x \vee (y \wedge z)) = 1$, $\varphi(y \wedge z) \vee (x \vee (y \wedge z)) = 1$. De las leyes de De Morgan; $(\varphi x \vee \varphi z) \vee (x \vee (y \wedge z)) = 1$, $(\varphi y \vee \varphi z) \vee (x \vee (y \wedge z)) = 1$, y de la definición de φ se obtiene el esquema válido:



Aplicando la definición de unión, resulta de dicho esquema; $x \vee y \rightarrow \varphi z \vee x \vee (y \wedge z)$. Aplicando la definición de φ de nuevo, resulta sucesivamente $\varphi(x \vee y) \vee \varphi z \vee x \vee (y \wedge z) = 1$, $(x \vee y) \wedge z \rightarrow x \vee (y \wedge z)$. La última relación, de acuerdo con el Teorema 1.1, prueba la distributividad. Q.F.D.

Corolario 2.1 *Un retículo booleano es isomorfo al grafo en el que una φ -categoría es libre.*

Corolario 2.2 *Un álgebra de Boole es un retículo complementado en el que la complementación es pseudocomplementación (caracterización de Huntington de las álgebras de Boole).*

Prueba: basta aplicar la definición de categoría libre en un determinado grafo, y considerar que la definición dada para el funtor φ corresponde al concepto de pseudocomplementación.

3 Lógica Monádica de Halmos ([3], pp. 20-25, 37-51, 60-64 y 76-82).

Teorema 3.1 *El conjunto de las proposiciones cerradas de una teoría adquiere la estructura de una φ -categoría si:*

- (i) *la flecha de la categoría es la implicación lógica,*
- (ii) *dadas las proposiciones $p, q, r, \dots$, $\text{INT}(p, q) \equiv p \text{ "y" } q$,*
- (iii) *las identidades son $p \rightarrow p, q \rightarrow q, r \rightarrow r$, etc.,*

(iv) la ley de composición es $(q \rightarrow r) \cdot (p \rightarrow q) = (p \rightarrow r)$,

(v) el objeto conulo es $p \vee \neg p = 1$.

Prueba: la expresión “ p implica q ” es lógicamente equivalente a afirmar “no- p o q es verdadero”, es decir $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q = v$. Sustituyendo la flecha implicación por la de una categoría, la conectiva “o” por la operación de unión, y v por el objeto conulo 1, y aplicando el resultado del Teorema 2.1, obtenemos nuestro teorema.

Es interesante hacer notar que estructurar un conjunto de proposiciones en forma de categoría es algo “natural”. En efecto, la implicación lógica es una flecha, la transitividad de la implicación corresponde a la composición de morfismos en la categoría; an cuanto a las conectivas “o”, “y”, es fácil ver que dadas dos proposiciones p, q , la proposición “ p y q ” implica a p y a q , y si otra proposición r implica a p y a q , necesariamente implica a “ p y q ”: ello corresponde a la definición de intersección.

Teorema 3.2 *Dado un universo $\mathbf{C}$ de objetos, $\mathbf{C}$ adquiere la estructura de una φ -categoría si*

- (i) La flecha es la relación de inclusión “ $\subset$ ”,
- (ii) $\text{INT}(A, B) \equiv A \cap B$ (A, B subconjuntos de $\mathbf{C}$),
- (iii) Las identidades son $A \subset A, B \subset B$, etc.,
- (iv) La ley de composición es $B \subset C \cdot A \subset B = A \subset C$,
- (v) El objeto nulo es $\emptyset$.

Prueba: sabemos “ $A \subset B$ ” $\equiv$ “ $A \cap \text{Compl} B = \emptyset$ ”, y por otro lado $A \cap \text{Compl} A = \emptyset$. Como en el caso anterior, basta aplicar el Teorema 2.1.

En lo que queda de sección los símbolos $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ y $(\mathbf{C}, \subset)$ denotarán respectivamente las categorías descritas en los Teoremas 3.1 y 3.2. Cuando no haya peligro de confusión ambas vendrán representadas por el símbolo $\mathbf{C}$.

Definición 3.1 Dada una categoría discreta $\mathbf{X}$ y una φ -categoría de proposiciones cerradas, definimos *función proposicional de una variable* como cada una de las funciones objeto de los funtores de una sola flecha entre la categoría $\mathbf{X}$ y la categoría $(\mathbf{C}, \rightarrow)$.

Si $\mathbf{X}$ representa el conjunto de objetos de los que la teoría trata, cada función proposicional manda cada uno de esos objetos a un objeto de $\mathbf{C}$; por ejemplo, manda “4” sobre “4 es un múltiplo de 2” si la función proposicional en cuestión es “ x es un múltiplo de 2”. Al mismo tiempo envía la categoría $\mathbf{X}$ sobre un objeto de $(\mathbf{C}, \subset)$. Si los símbolos $F_1, F_2, F_3, \dots$ etc. representan funciones proposicionales, denotaremos mediante $F_1\mathbf{X}, F_2\mathbf{X}, F_3\mathbf{X} \dots$ etc. y $F_1x, F_2x, F_3x \dots$ etc. respectivamente, los objetos de $(\mathbf{C}, \subset)$ y de $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ correspondientes a esas funciones. Nótese que para $F_1, F_1\mathbf{X}$ es un subconjunto del conjunto de objetos $\mathbf{C}$, y F_1x es un objeto de $\mathbf{C}$ (correspondiente a un $x \in \mathbf{X}$).

Teorema 3.3 *El conjunto $\mathbf{P}$ de las funciones proposicionales de una*

variable adquiere la estructura de una φ -categoría mediante el siguiente conjunto de definiciones:

- (i) $F_1 \rightarrow F_2 = F_1 X \subset F_2 X$ ($F_1, F_2 \in \mathbf{P}$; $F_1 X, F_2 X \in (\mathbf{C}, \subset)$),
- (ii) $F_3 = \text{INT}(F_1, F_2) \equiv F_3 X = F_1 X \cap F_2 X$,
- (iii) $F_0 \equiv F X = \emptyset$,
- (iv) $F_2 \rightarrow F_3 \cdot F_1 \rightarrow F_2 = F_1 \rightarrow F_3 \equiv F_2 X \subset F_3 X \cdot F_1 X \subset F_2 X = F_1 X \subset F_3 X$.

Prueba: La definición dada estructura $\mathbf{P}$ como una categoría isomorfa a la φ -categoría $(\mathbf{C}, \subset)$ (Teorema 3.2).

En consecuencia, $F_1 \vee F_2$ es la función que corresponde a $F_1 X \cup F_2 X$, y el objeto conulo es la función que manda X sobre $\mathbf{C}$. Llamaremos a la categoría de las funciones proposicionales de una variable $(\mathbf{P}, \rightarrow)$. Puede verse que la flecha de esa categoría corresponde al sentido intuitivo de la implicación entre funciones proposicionales.

Lema 3.1 $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ es isomorfa a una subcategoría de $(\mathbf{P}, \rightarrow)$.

Prueba: considerando entre los objetos de $\mathbf{P}$ aquellas funciones que son constantes, es decir las que mandan X sobre un objeto de $(\mathbf{C}, \rightarrow)$, dichas funciones forman una subcategoría de $(\mathbf{P}, \rightarrow)$. Por otro lado dicha subcategoría es isomorfa a la categoría $(\mathbf{C}, \rightarrow)$.

Definición 3.2 *Máximo* $\vee$ (*Mínimo* $\wedge$) de un subconjunto del conjunto de objetos de la categoría $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ es la UN (INT) de los objetos de dicho conjunto (En lo que sigue supondremos que la φ -categoría tiene uniones e intersecciones).

Definición 3.2 *Cuantificadores:* $\exists$ es una función $\mathbf{P} \rightarrow \{\text{Máximos de } (\mathbf{C}, \rightarrow)\}$, $\forall$ es una función $\mathbf{P} \rightarrow \{\text{Mínimos de } (\mathbf{C}, \rightarrow)\}$, tales que:

- (i) $\exists$ y $\forall$ son biyectivas,
- (ii) Si $F_1 \rightarrow F_2$ entonces $\left. \begin{matrix} \exists F_1 \rightarrow \exists F_2 \\ \forall F_1 \rightarrow \forall F_2 \end{matrix} \right\}$ en $(\mathbf{C}, \rightarrow)$.

Como los máximos de $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ son todos los objetos de $(\mathbf{C}, \rightarrow)$ tenemos el siguiente:

Corolario 3.1 $\exists$ y $\forall$ son funciones $\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{C}, \rightarrow)$ que cumplen (i), (ii)

Corolario 3.2 $\exists$ y $\forall$ son funtores covariantes $(\mathbf{P}, \rightarrow) \rightarrow (\mathbf{C}, \rightarrow)$ tales que $\exists: F_1 \rightarrow \forall F_1 X$. $\forall: F_1 \rightarrow \wedge F_1 X$.

Prueba: por definición de funtor y Corolario 3.1. Queda justificada entonces la siguiente:

Definición 3.3 Un *cuantificador monádico* es un funtor covariante entre la φ -categoría de las funciones proposicionales de una variable y la φ -categoría de las proposiciones cerradas.

Teorema 3.4 *Axiomas de la Lógica Monádica.* Las siguientes relaciones son verdaderas en $(\mathbf{P}, \rightarrow)$:

- (i) $\exists 0 = 0', 0 \in P, 0' \in C$
- (ii) $F \rightarrow \exists F$
- (iii) $\exists \exists F = \exists F$
- (iv) $\exists (\neg \exists F) = \neg \exists F$
- (v) $\exists (F_1 \vee F_2) = \exists F_1 \vee \exists F_2$

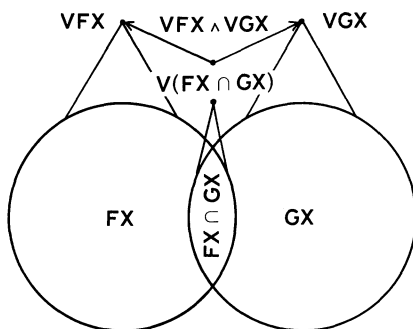
Prueba: (i) $\exists 0 = V\emptyset$. Como $\emptyset$ no tiene objetos, todos los objetos de C son límites superiores. El mínimo de ellos es el objeto nulo $0' \in C$. Por tanto $\exists 0 = 0'$.

(ii) Dado $x \in X$, Fx es un objeto de $(C, \rightarrow)$. Como VFX es la UN de todos los Fx (para todos los $x \in X$), hay una flecha $Fx \rightarrow VFX$ para todo $x \in X$.

(iii) De la definición de $\exists$: $\exists \exists F = V(VFx) = VFx = \exists F$

(iv) $\exists (\neg \exists F) = V(VF)'$. Pero $(VF)'$ es un objeto de C , y la UN de un objeto es el mismo objeto. Por tanto: $\exists (\neg \exists F) = (VF)' = \neg \exists F$.

En general $\exists (F \wedge G)$ no es igual a $\exists F \wedge \exists G$ porque $\exists (F \wedge G) = V(FX \cap GX)$, y el máximo de $FX \cap GX$ no es necesariamente la intersección de los máximos VFX y VGX como puede verse en la siguiente figura:



Lo que sí muestra la figura es el siguiente lema:

Lema 3.2 $\exists (F \wedge G) \rightarrow \exists F \wedge \exists G$

Lema 3.3 $\neg \exists F = \forall (\neg F)$

Prueba: $\neg \exists F = (VFX)' = \wedge (FX)' = \forall (\neg F)$

Corolario 3.3 De Teorema 3.4 y Lema 3.3 sacamos:

- (i) $\forall 1 = 1', 1 \in P, 1' \in C$
- (ii) $\forall F \rightarrow F$
- (iii) $\forall \forall F = \forall F$
- (iv) $\forall (\neg \forall F) = \neg \forall F$
- (v) $\forall (F \wedge G) = \forall F \wedge \forall G$

Hasta aquí la descripción general de la lógica monádica; basta para terminar, caracterizar las llamadas constantes individuales. Una constante transforma una función proposicional de una variable FX en una proposición cerrada $\exists G$ ($\exists G$ es un máximo en $(C, \rightarrow)$ porque es un objeto de $(C, \rightarrow)$). Así pues:

$$c: F \rightarrow \exists G$$

Suponiendo que $F_1 \rightarrow F_2$ (F_1 implica F_2) y la siguiente transformación:

$$c: F_1 \rightarrow \exists G_1 = F_1(c)$$

$$c: F_2 \rightarrow \exists G_2 = F_2(c)$$

la lógica nos dice que $F_1(c) \rightarrow F_2(c)$ (Por ejemplo, de “ x múltiplo de 4 implica x múltiplo de 2” podemos obtener “16 múltiplo de 4 implica 16 múltiplo de 2”). c es por tanto una pareja de funciones: una envía la flecha $F_1 \rightarrow F_2 \in (P, \rightarrow)$ a la flecha $F_1(c) \rightarrow F_2(c) \in (C, \rightarrow)$, la otra envía el objeto F de $(P, \rightarrow)$ al objeto $F(c)$ de $(C, \rightarrow)$. Por tanto podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 3.4 Una *constante individual lógica* es un funtor covariante entre la categoría $(P, \rightarrow)$ y su subcategoría $(C, \rightarrow)$.

A continuación usaremos el símbolo cF por $F(c)$.

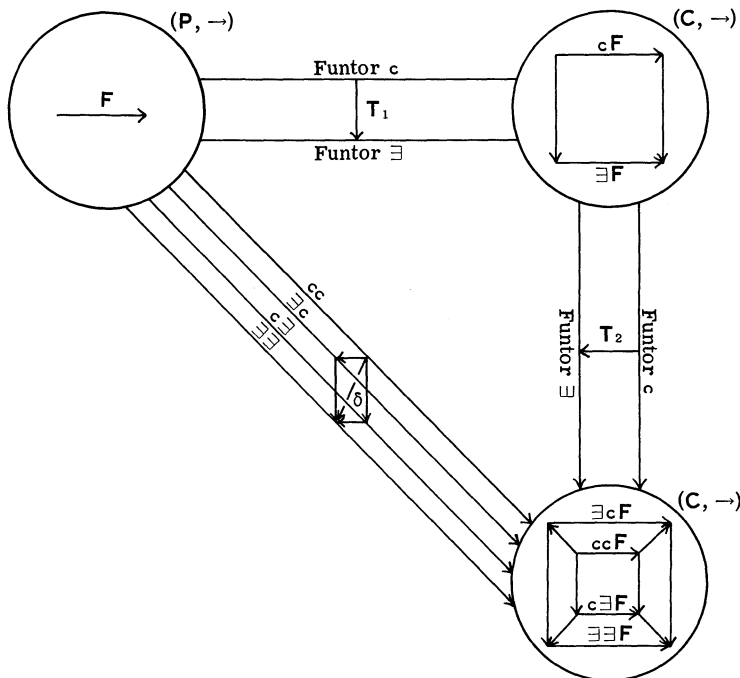
Lema 3.4 $ccF = cF$

Prueba: c transforma F en la función constante cuyo valor en C es cF . Aplicando c a una función constante, ésta no varía.

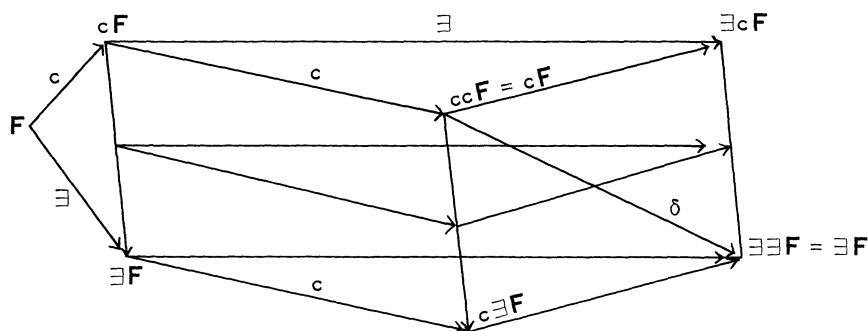
Teorema 3.5 Las siguientes relaciones se dan en $(P, \rightarrow)$:

- (i) $cF = \exists cF$,
- (ii) $F = c\exists F$.

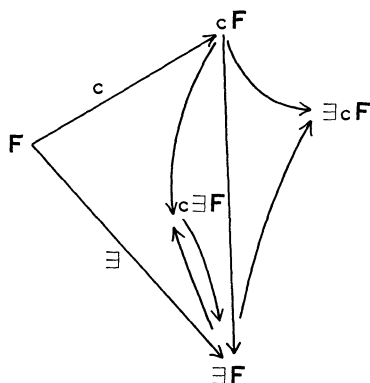
Prueba: ésta requiere el uso de la composición de transformaciones naturales T_1, T_2 representada en la figura siguiente:



El proceso de transformación de la flecha F , primero a la figura de dos dimensiones de la categoría superior derecha, y luego a la categoría inferior izquierda puede representarse, reduciendo flechas a puntos, de la forma siguiente:



Llevando por último δ sobre $cF \rightarrow \exists F$ (ya que coinciden), obtenemos el esquema:



en el cual tenemos la doble flecha $\exists F \leftrightarrow c\exists F$. Por tanto, por Def. 1.2: $\exists F = c\exists F$. La demostración de $cF = \exists cF$ es similar. Q.F.D.

4 Lógica Poliádica ([3], pp. 25-31, 102-113 y 170-172). Halmos define *álgebra poliádica* como una estructura $\langle A, I, S, \exists \rangle$ en la que A es un álgebra de Boole, I un conjunto de índices, S un conjunto de permutaciones en I y $\exists$ un cuantificador existencial. Al concepto de álgebra poliádica se llega mediante la combinación de los conceptos de *álgebra cuantificacional* y *álgebra sustitucional*. Los primeros describen algebraicamente funciones como *existe un x tal que $p(x, y, \dots)$* , los segundos describen funciones del tipo *si $p(x, y)$ y $p(y, x)$ entonces hay tal o cual relación entre x e y* .

En las páginas que vienen a continuación se estudian entonces las álgebras poliádicas de acuerdo con el siguiente esquema:

- Funciones proposicionales de varias variables
- Cuantificadores

c) Sustituciones

d) Relación entre cuantificadores y sustituciones

a) *Funciones proposicionales de varias variables*

Lema 4.1 *El producto de dos categorías preorden es una categoría preorden.*

Prueba: supongamos que **B** y **C** son esas categorías, y $b, b' \in \mathbf{B}$; $c, c' \in \mathbf{C}$. Como en **B** y **C** si existe un morfismo, éste consta de una sola flecha, aplicando la definición de categoría producto resultan objetos del tipo (b, c) , (b', c') , y flechas del tipo $(b, c) \rightarrow (b', c')$ así:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix} \end{array} \quad (*)$$

o un par de objetos sin flecha entre ellos:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Ahora bien, dados los objetos b, c, b', c' , las flechas de la categoría producto vienen unívocamente definidas por una de las tres parejas de flechas (*), o por ninguna. Como en *cada una* de las parejas (*) las posibles flechas son *únicas*; en la categoría producto, si hay un morfismo entre dos objetos, queda unívocamente determinado por las flechas que existían en **B** y **C**, dicho de otra forma, el morfismo producto es *una* flecha. Ello define $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ como un preorden.

Corolario 4.1 *El producto de dos categorías “orden parcial” es un orden parcial.*

Prueba: dada una “flecha” (producto) tal como:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

ésta es en realidad el objeto $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$; por tanto, en la categoría producto, los únicos elementos inversibles son las identidades. Por Definición 1.2 obtenemos nuestro corolario.

Lema 4.2 *El producto de dos categorías del tipo **R**, es una categoría **R**.*

Prueba: definimos en la categoría producto:

$$\begin{aligned} \text{UN}((a, b), (a', b')) &= (a \vee a', b \vee b') \\ \text{INT}((a, b), (a', b')) &= (a \wedge a', b \wedge b') \end{aligned}$$

La categoría compuesta tiene entonces uniones e intersecciones por tenerlas las categorías simples.

Definición 4.1 Ψ es una aplicación $\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ tal que:

$$(i) \quad \Psi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n),$$

(ii) $\Psi(a_1 \rightarrow b_1, \dots, a_n \rightarrow b_n) = (b'_1 \rightarrow a'_1, \dots, b'_n \rightarrow a'_n)$; donde $a', b' \dots$ etc. representan $\varphi a, \varphi b, \dots$ etc.

Teorema 4.1 *El producto de n φ -categorías es una φ -categoría.*

Prueba: aplicando Ψ a $\mathbf{C}^n$ resulta:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

que es obviamente el objeto nulo de $\mathbf{C}^n$. Si por otra parte; $(x_1 \rightarrow a_1), \dots, (x_n \rightarrow a_n) \in \mathbf{C}$, entonces:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

y también:

$$((x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)) \in \mathbf{C}^n,$$

que son las condiciones requeridas para que $\mathbf{C}^n$ sea una φ -categoría.

Definición 4.2 *Funciones proposicionales de varias variables:* el conjunto de las funciones proposicionales de n variables es el conjunto de las funciones objeto de los funtores entre una categoría $\mathbf{X}^n$ (una categoría producto de n categorías discretas $\mathbf{X}$), y la φ -categoría $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$, producto de n φ -categorías $\mathbf{C}$.

De modo parecido a lo dicho de las funciones de una variable, las de n variables mandan la categoría $\mathbf{X}^n$ sobre objetos de la categoría $(\mathbf{C}^n, \subset)$ (estos objetos son subconjuntos de $\mathbf{C}^n$, y $\subset$ es la flecha de la categoría); cada objeto de $\mathbf{X}^n$ es a su vez enviado a un objeto de $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$. En esta última categoría los objetos son n -complejos; hay una flecha de un n -complejo a otro si al menos hay una flecha desde uno de los componentes del primer n -complejo hasta uno de los componentes del segundo n -complejo. Dada una función proposicional $\mathbf{F}$ de n variables, denotaremos con los símbolos $\mathbf{F}\mathbf{X}^n$ y $\mathbf{F}x^n$ los objetos de $(\mathbf{C}^n, \subset)$ y $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$ respectivamente.

Teorema 4.2 *El conjunto $\mathbf{P}_n$ de las funciones proposicionales de n variables adquiere la estructura de una φ -categoría mediante el siguiente conjunto de definiciones:*

- (i) $\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_1\mathbf{X}^n \subset \mathbf{F}_2\mathbf{X}^n$
- (ii) $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_3\mathbf{X}^n = \mathbf{F}_1\mathbf{X}^n \cap \mathbf{F}_2\mathbf{X}^n$
- (iii) $\mathbf{F} = 0 \equiv \mathbf{F}\mathbf{X}^n = \emptyset$
- (iv) $\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_3 \equiv \mathbf{F}_2\mathbf{X}^n \subset \mathbf{F}_3\mathbf{X}^n \cdot \mathbf{F}_1\mathbf{X}^n \subset \mathbf{F}_2\mathbf{X}^n = \mathbf{F}_1\mathbf{X}^n \subset \mathbf{F}_3\mathbf{X}^n$

Prueba: como en Teorema 3.3. Como entonces, aquí también la flecha corresponde con el sentido intuitivo de la implicación. Denotaremos con el símbolo $(\mathbf{P}_n, \rightarrow)$ la categoría de las funciones proposicionales.

b) Cuantificadores

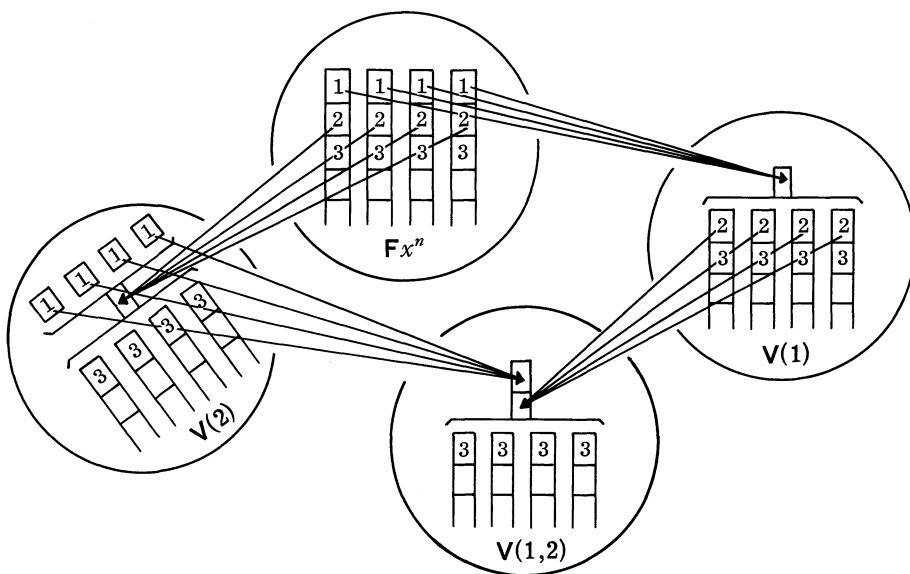
Definición 4.3 *Máximo parcial $\mathbf{V}(i)$ (Mínimo parcial $\mathbf{\Lambda}(i)$) de un subconjunto del conjunto de objetos $\mathbf{C}^n$ de la categoría $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$ es el conjunto de los*

n -complejos cuyo elemento i es la unión (intersección) de los elementos i de los n -complejos que forman el subconjunto mencionado y cuyos restantes elementos permanecen inalterados (recordar que un subconjunto de $(\mathcal{C}^n, \rightarrow)$ es un objeto de $(\mathcal{C}^n, \subset)$).

Definición 4.4 *Máximo parcial* $V(i, j, \dots, m)$ (*Mínimo parcial* $\Lambda(i, j, \dots, m)$) del subconjunto mencionado es el conjunto de los n -complejos cuyos elementos $i, j, \dots, m$ son las uniones (intersecciones) de los elementos $i, j, \dots, m$ de los n -complejos y cuyos restantes elementos permanecen inalterables.

Definición 4.5 Dado un conjunto de índices I , llamamos *Máximo parcial* $V(J)$ (*Mínimo parcial* $\Lambda(J)$) para FX^n , al conjunto $V(i, j, \dots, m)$ ($\Lambda(i, j, \dots, m)$) para $J \subset I$, y $i, j, \dots, m \in J$.

El siguiente esquema nos ayudará a visualizar como van las flechas dentro de los máximos en $(\mathcal{C}^n, \subset)$, para una función F :



Si como objetos se consideran los máximos de $FX^n \subset \mathcal{C}^n$, y como flechas las ordenaciones visualizadas en la figura anterior se obtiene una R -categoría. Otra R -categoría se puede construir sobre el conjunto I de índices mencionado anteriormente (sus elementos son números enteros positivos), si consideramos los subconjuntos de I como objetos de la categoría y como flechas, las inclusiones $\subset$. Estas consideraciones justifican la siguiente definición, en la que los símbolos $(V, \rightarrow)_F$ y $(\Lambda, \rightarrow)_F$ representan las R -categorías de los máximos y mínimos correspondientes a F , y $(I, \subset)$ representa la R -categoría de los índices:

Definición 4.6 *Cuantificadores.* *Cuantificador existencial* $\exists$ (*universal* $\forall$) es un funtor covariante entre $(I, \subset)$ y $(V, \rightarrow)_F$ ($(\Lambda, \rightarrow)_F$).

Por otro lado un cuantificador es también una aplicación que manda un conjunto de n -complejos a un máximo o un mínimo parcial; por tanto una serie de cuantificadores va enviando la categoría $(\mathbf{P}_n, \rightarrow)$ a sucesivas subcategorías, la última de las cuales, si el cuantificador es $\exists(l)$ sería precisamente $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$ de aquí que podamos enunciar:

Definición 4.7 Un cuantificador es un funtor entre la categoría $(\mathbf{P}_n, \rightarrow)$ y una de sus subcategorías de máximos o mínimos.

Teorema 4.3 *Axiomas de las álgebras cuantificacionales*

- (i) $\exists \emptyset \mathbf{F} = \mathbf{F}$
- (ii) $\exists J(\exists K) = \exists(J \cup K)$

Prueba: (i) $\emptyset$ es el objeto inicial de $(l, \subset)$; el objeto inicial de la $\mathbf{R}$ -categoría $(\mathbf{V}, \rightarrow)_{\mathbf{F}}$ es el conjunto $\mathbf{F}\mathbf{X}^n$. Pero al ser $\exists$ un funtor covariante debe transformar el objeto inicial (o nulo) de la primera categoría en el objeto inicial de la segunda. Por tanto: $\exists \emptyset \mathbf{F} = \mathbf{F}$.

(ii) $\exists J(\exists K) = \exists J(\mathbf{V}K) = \mathbf{V}J(\mathbf{V}K)$, y por Definición 4.5, $\mathbf{V}J(\mathbf{V}K) = \mathbf{V}(J \cup K)$.
Q.F.D.

Lema 4.3 Si $\mathbf{F}_1$ implica $\mathbf{F}_2$, entonces $\exists(J)\mathbf{F}_1$ implica $\exists(J)\mathbf{F}_2$.

Prueba: Si $\mathbf{F}_1$ implica $\mathbf{F}_2$, tenemos $\mathbf{F}_1\mathbf{X}^n \subset \mathbf{F}_2\mathbf{X}^n$, entonces $\mathbf{V}(J)\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{V}(J)\mathbf{F}_2$, es decir: $\exists(J)\mathbf{F}_1$ implica $\exists(J)\mathbf{F}_2$.

De modo parecido puede probarse que $\exists(J)\mathbf{F}$ implica $\exists(K)\mathbf{F}$ si $K \subset J$.

c) Sustituciones Enunciados del tipo “si $\mathbf{F}(x, y, \dots)$ entonces $\mathbf{F}(y, x, \dots)$ ” se explican mediante la consideración de una permutación de los elementos sobre los que actúa la función $\mathbf{F}$. Dicho de otra forma; se explican mediante un cambio de orden entre los elementos de los n -complejos del subconjunto $\mathbf{F}\mathbf{X}^n$. El cambio no se altera si se extiende la permutación mencionada a todo el conjunto de objetos de $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$; en este caso puede considerarse cada permutación simplemente como un funtor endomórfico en $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$.

Definición 4.6 $\mathbf{E}$ es el conjunto de los funtores endomórficos sobre una φ -categoría $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$.

Aplicando la definición de funtor sería inmediato probar el:

Lema 4.4 Si $\mathbf{G} \in \mathbf{E}$, y a, b, c, d son objetos de $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$ tales que $\mathbf{G}a = c$, $\mathbf{G}b = d$, entonces (i) $\mathbf{G}(a \vee b) = c \vee d$, (ii) $\mathbf{G}(a \wedge b) = c \wedge d$, (iii) $\mathbf{G}\varphi a = \varphi \mathbf{G}a$.

Puede verse que el conjunto $\mathbf{E}$ de funtores sobre el grafo correspondiente a $(\mathbf{C}^n, \rightarrow)$ es isomorfo al conjunto de endomorfismos booleanos sobre el retículo booleano correspondiente a la mencionada categoría. Por otro lado, considerando $\mathbf{E}$ como un conjunto de flechas y como ley de composición, la composición de endomorfismos, $\mathbf{E}$ adquiere la estructura de una categoría monoide. La denotaremos mediante los símbolos $(\mathbf{E}, .)$. Enunciemos ahora:

Definición 4.7 Categoría $(\mathbf{I}, .)$ es un *monoide* cuyas flechas son las permutaciones de los elementos de $\mathbf{I}$ (el conjunto de índices mencionado) y cuya (única) identidad es la permutación idéntica

A partir de los monoides $(I, .)$ y $(E, .)$ puede finalmente construirse la siguiente importante definición:

Definición 4.8 *Operador de sustitución* S . El operador S de la lógica polidádica de Halmos es un funtor covariante entre los monoides $(I, .)$ y $(E, .)$.

Teorema 4.4 *Axiomas de las álgebras sustitucionales*

- (i) $S(\delta)F = F$ donde δ es la permutación identidad en $(I, .)$.
- (ii) $S(\sigma) \cdot S(\nu) = S(\sigma \cdot \nu)$; $\sigma, \nu \in (I, .)$.

Prueba: (i) Al ser δ la identidad de $(I, .)$ y S un funtor, S debe transformar la identidad de $(I, .)$ en la identidad de $(E, .)$. Dicho de otra forma, los objetos del subconjunto FX^n permanecen invariables.

(ii) Un funtor covariante siempre transforma la composición de flechas de la primera categoría (en nuestro caso, la composición “.”) en la composición de las correspondientes transformaciones. Supongamos que a σ le corresponde el endomorfismo $S(\sigma)$, y a τ , $S(\tau)$. Entonces $S(\sigma \cdot \tau) = S(\sigma) \cdot S(\tau)$.

d) Relaciones entre cuantificadores y sustituciones

Teorema 4.5 *Las dos relaciones siguientes entre cuantificadores y transformaciones se cumplen en $(P_n, \rightarrow)$:*

- (i) $S(\sigma)\exists(J) = S(\tau)\exists(J)$ siempre que para todo $i \in I - J$ se cumpla $\sigma i = \tau i$.
- (ii) $\exists(J)S(\tau) = S(\tau)\exists(\tau^{-1}(J))$

Prueba: (i) Apliquemos a la categoría de funciones proposicionales de n variables los funtores $\exists(J)$, $S(\sigma)$ y $S(\tau)$. Para hacer, más clara la demostración, tomemos $J = \{1, 3\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Aplicar a la función F el operador $\exists(1, 3)$ es determinar el máximo $V(1, 3)$ de FX^n , es decir:

$$V(1, 3) \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline n & n & n & \dots & n \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline V(1) & & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline V(3) & & & & \\ \hline 4 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline n & n & n & \dots & n \\ \hline \end{array} \right)$$

donde los números 1, 2, 3... representan los objetos que ocupan los lugares 1, 2, 3... etc. (no deben confundirse estos números dentro de los pequeños cuadrados con los números que aparecen en σ , τ que son y representan números positivos elementos de I).

Aplicando a continuación $S(\sigma)$ a $V(1, 3)F$ resulta:

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \dots \boxed{2} \\ & \boxed{V(3)} & & \\ & \boxed{V(1)} & & \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{4} & \dots \boxed{4} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \dots \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \dots \boxed{\cdot} \\ \boxed{n} & \boxed{n} & \boxed{n} & \dots \boxed{n} \end{array} \right) \quad (*)$$

Y por último, aplicando $S(\tau)$ a $V(1, 3)F$ se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \dots \boxed{2} \\ & \boxed{V(1)} & & \\ & \boxed{V(3)} & & \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{4} & \dots \boxed{4} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \dots \boxed{\cdot} \\ \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \boxed{\cdot} & \dots \boxed{\cdot} \\ \boxed{n} & \boxed{n} & \boxed{n} & \dots \boxed{n} \end{array} \right) \quad (**)$$

Pero (*) y (**) representan el mismo grupo de n -complejos debido a la construcción de C^n como un producto de n categorías C ; por tanto $S(\sigma)\exists(J) = S(\tau)\exists(J)$ se cumple para este caso particular. No es difícil ver que la igualdad sigue cumpliéndose para el caso general; al ser σ y τ idénticas para $I-J$, siempre tendremos dos grupos de complejos con máximos V en los mismos lugares. La demostración de (ii) es similar. El presente teorema, juntamente con los Teoremas 4.3 y 4.5 sugieren la siguiente definición de categoría poliádica que correspondería a la de álgebra poliádica de Halmos:

Definición 4.9 *Categoría poliádica* es una estructura $\langle C, I, S, \exists \rangle$ en la que C es una φ -categoría, I un conjunto de índices, S un funtor covariante entre el monoide de permutaciones en I y el monoide de endomorfismos en C , y $\exists$ un funtor covariante entre la R -categoría sobre I y la R -categoría de los máximos parciales de C .

5 Cálculo de proposiciones bivalente La presente sección consta de dos partes. En la primera se describe el concepto de implicación de la lógica bivalente mediante una construcción sobre φ -categorías. En la segunda se muestra como algunos de los sistemas axiomáticos más conocidos referentes al cálculo bivalente de proposiciones pueden reducirse a esquemas de la teoría de categorías.

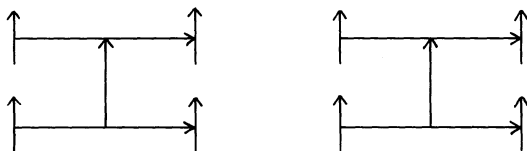
a) Primera parte

Construcción a-1 Partimos de una φ -categoría C y consideramos la categoría discreta de sus objetos a la que vamos a llamar C_0 . La siguiente estructura a considerar es la categoría C a la que por coherencia llamaremos C_1 . Se construye después la categoría de tripletes C_2 sobre la categoría de flechas C_1 . En general, se construyen las categorías de flechas C_i sobre esquemas de flechas de C_{i-1} .

Si el objeto a de C_0 se desarrolla en la forma $a \rightarrow a$, puede considerarse

como una flecha de C_1 ; del mismo modo, la flecha $a \rightarrow b$ de C_1 puede escribirse en la forma $(1 \rightarrow a) \rightarrow (1 \rightarrow b)$ que es a su vez una flecha de C_2 , y en general una flecha de C_{i-1} puede escribirse como una flecha de C_i . Lo que tenemos entonces es indistintamente, una serie de categorías C_i o una gran categoría C_n que acoge a todas las C_i para $i \leq n$. Los esquemas de flechas de C_n pueden representar, de acuerdo con el Teorema 3.1 todas las fórmulas bien formadas de una teoría con 2^{n-1} proposiciones simples (en las que todas las conectivas han sido reducidas a la negación e implicación).

Surge aquí una dificultad: cómo definir la ley de composición para el caso general? En C_0 y C_1 no hay problema; C_2 es una categoría de tripletes que procede de una categoría doble cuya ley de composición ha sido descrita por Ehresmann ([4], pp. 26-38). C_3 no ofrece mayor dificultad tampoco por corresponder a un reticulado espacial de tres dimensiones, pero a partir de C_4 ya no es posible visualizar un modelo espacial. La ley de composición debe entonces definirse, no en función de una interpretación espacial sino en el plano. Por ejemplo, en C_4 los dos esquemas:



pueden componerse si los tripletes de la derecha del primero coinciden exactamente con los de la izquierda del segundo (o los inferiores del primero con los superiores del segundo). Lo interesante sería poder definir una ley de composición con toda generalidad pero de momento esto no es posible: la categoría de todas las categorías cuando el número de flechas crece indefinidamente presenta dificultades insuperables. Sin embargo este hecho no representa un gran obstáculo a la aplicación a la lógica bivalente de la teoría de categorías: todas las fórmulas “utilizables” de la primera tienen dimensión finita.

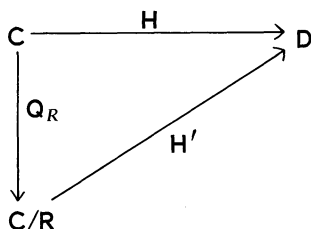
Construcción α -2 Paralelamente, partimos de una φ -categoría con dos objetos 0, 1 y flechas entre ellos $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 1$ además del morfismo vacío $1 \rightarrow 0$ y consideramos como en la construcción α -1 las sucesivas categorías de objetos, flechas, tripletes etc. que vienen ahora denotadas por los símbolos $(0,1)_0$, $(0,1)_1$, $(0,1)_2$, . . . , $(0,1)_i$; $i \leq n$.

Construcción α -3 Dadas las categorías C_i y $(0,1)_i$ se establecen relaciones de equivalencia $R_0, R_1, \dots, R_i, \dots, R_n$ mediante funtores entre las categorías de la serie C_i y las categorías de la serie $(0,1)_i$.

Para llegar a ello se necesita primero considerar la siguiente proposición de S. Mac Lane ([1], p. 51).

Proposición 5.1 Dada una categoría C , sea R una función que asigna a cada par de objetos a, b de la categoría, una relación binaria $R_{a,b}$ dentro de $\text{Hom}(a, b)$ (es decir en el conjunto de morfismos entre a y b). Entonces

existe una categoría $\mathbf{C}/R$ y un funtor $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_R: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/R$ tal que: (i) si $(f R_a, b f')$ se cumple un $\mathbf{C}$, entonces $\mathbf{Q}f = \mathbf{Q}f'$; (ii) si $\mathbf{H}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ es cualquier funtor desde $\mathbf{C}$ para el cual, si de $(f R_a, b f')$ se sigue $\mathbf{H}f = \mathbf{H}f'$ para todo $f, f' \in \text{Hom}(a, b)$, entonces existe un único funtor $\mathbf{H}': \mathbf{C}/R \rightarrow \mathbf{D}$ con la propiedad $\mathbf{H}' \cdot \mathbf{Q}_R = \mathbf{H}$. Dicho funtor es una biyección de objetos.



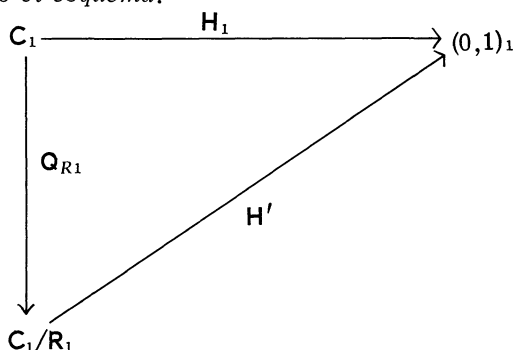
En el caso de una categoría preorden-que es el nuestro-, dados dos objetos a y b , el conjunto $\text{Hom}(a, b)$ es o bien vacío o consta de una sola flecha. De aquí que los puntos (i), (ii) de la proposición de Mac Lane se cumplan trivialmente; ello nos permite definir directamente R como una relación entre objetos o flechas con independencia de las relaciones dentro de $\text{Hom}(a, b)$:

Definición 5.1 Dadas dos categorías $\mathbf{C}_i$ y $(0,1)_i$ se definen las relaciones R_i de la siguiente forma: $x R_i y$ si y sólo si $\mathbf{H}_i x = \mathbf{H}_i y$ donde $\mathbf{H}_i$ es un funtor entre las categorías mencionadas, y x e y representan objetos en $\mathbf{C}_0$, flechas en $\mathbf{C}_1$, tripletes en $\mathbf{C}_2$ y así sucesivamente.

Lema 5.1 R_i son relaciones de equivalencia.

La prueba es trivial por definición de funtor aplicado a una categoría preorden.

Teorema 5.1 Dado el esquema:



donde $\mathbf{C}_1$, $(0,1)_1$, $\mathbf{H}_1$ y R_1 vienen dados de acuerdo con la Definición 5.1, $\mathbf{H}'$ está bien definido, es 1-1 y onto y preserva las operaciones.

Prueba: Para no complicar la notación con demasiados subíndices, escribimos R por R_1 y $\mathbf{H}$ por $\mathbf{H}_1$. La flecha $a \rightarrow b$ pertenece a $\mathbf{C}_1$, y su correspondiente en $(0,1)_1$ es $a' \rightarrow b'$.

- (i) Supongamos $[a \rightarrow b]_R = [a' \rightarrow b']_R$, entonces: $H(a \rightarrow b) = H(a' \rightarrow b')$ y de $H = H' \cdot Q_R$: $H' \cdot Q_R(a \rightarrow b) = H' \cdot Q_R(a' \rightarrow b')$ o sea $H'([a \rightarrow b]_R) = H'([a' \rightarrow b']_R)$.
- (ii) Supongamos $H'([a \rightarrow b]_R) = H'([a' \rightarrow b']_R)$, entonces $H(a \rightarrow b) = H(a' \rightarrow b')$, es decir: $(a \rightarrow b)R(a' \rightarrow b')$, o $[a \rightarrow b]_R = [a' \rightarrow b']_R$.
- (iii) Si la flecha $x \rightarrow y \in (0,1)_1$, existe $u \rightarrow v \in C$ tal que: $H(u \rightarrow v) = x \rightarrow y$. Entonces $H' \cdot Q_R(u \rightarrow v) = x \rightarrow y$.

Resulta pues: $H'([u \rightarrow v]_R) = x \rightarrow y$.

- (iv) $H'([UN((a \rightarrow b), (a' \rightarrow b'))]_R) = H'([UN(a, a') \rightarrow UN(b, b')]_R) = H(UN(a, a') \rightarrow UN(b, b')) = UN(Ha, Ha') \rightarrow UN(Hb, Hb') = UN(H'([a \rightarrow b]_R), H'([a' \rightarrow b']_R))$.

La demostración es dual para INT.

En cuanto al complemento: $H'([\varphi x]_R) \vee H'([x]_R) = H'([\varphi x]_R \vee [x]_R)$ donde para simplificar, $\vee$ significa UN; x es una flecha. La última expresión se transforma en: $H(\varphi x \vee x) = H(1') = 1$ ($1'$, 1 son los objs. conulos de C_1 y $(0,1)_1$) respectivamente.

Pero $1 = \varphi Hx \vee Hx = \varphi H'([x]_R) \vee H'([x]_R)$. Entonces $H'([\varphi x]_R) = \varphi H'([x]_R)$.
Q.F.D.

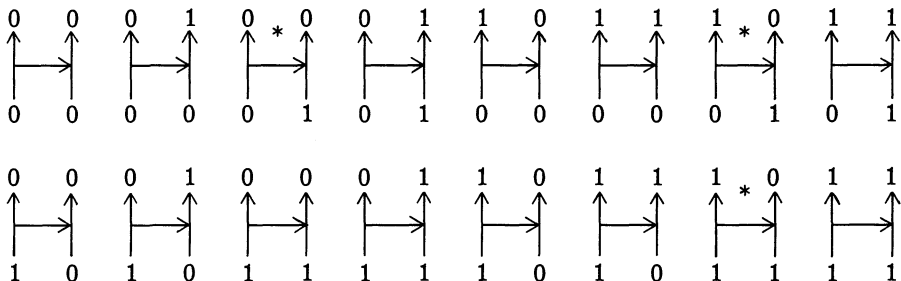
Las relaciones R_0 , R_1 y R_2 determinan en particular C_0/R_0 , C_1/R_1 y C_2/R_2 de la siguiente forma:

C_0/R_0 tiene dos objetos que corresponden a 0 y 1 de $(0,1)_0$.

C_1/R_1 tiene cuatro objetos que corresponden a las flechas de $(0,1)_1$:

$$0 \longrightarrow 0, 0 \longrightarrow 1, 1 \longrightarrow 1, 1 \longrightarrow 0$$

C_2/R_2 está formado por 16 objetos que corresponden a los tripletes de $(0,1)_2$.



Lo que hasta aquí se ha conseguido es pues, una clasificación de objetos en C_0 , de flechas en C_1 , de flechas entre flechas en C_2 y así sucesivamente. Ello nos acerca bastante a lo que en lógica se hace al asignar valores a las variables proposicionales de una fórmula proposicional, en la que todas las conectivas han sido reducidas a la implicación y negación.

Sin embargo no todas las implicaciones son válidas en la lógica

bivalente. Por ejemplo, la implicación $v \Rightarrow f$ (que corresponde a la flecha $1 \rightarrow 0$ de C_1) o las implicaciones que resultaran en sustituir f por 0 y v por 1 en los tripletes marcados arriba con asterisco una vez sustituida la flecha de la categoría por la flecha implicación, no son válidas. ¿Cómo pues podríamos introducir un criterio de validez que hiciera aceptables aquellos esquemas de categorías y sólo aquellos que correspondieran exactamente a fórmulas válidas en lógica?: esto es lo que se intenta a continuación.

Construcción a-4 Se definen unas transformaciones T_i ($1 \leq i \leq n$):

$$C_n \xrightarrow{T_n} C_{n-1} \dots \dots \dots C_2 \xrightarrow{T_2} C_1 \xrightarrow{T_1} C_0$$

que determinan las condiciones de existencia de flechas en C_1 , tripletes en $C_2, \dots$, etc. Podríamos intentar una definición arbitraria cuyo único requisito fuera el hacer válidas aquellas fórmulas de categorías que correspondieran a fórmulas válidas de la lógica. Sin embargo el hecho de que C_1 es una φ -categoría delimita-felizmente- la arbitrariedad de la definición. Que C_1 es una φ -categoría justifica la:

Definición 5.2 $a \rightarrow b \in C_1$ si y sólo si $\varphi a \vee b = 1$

Y ésta, a su vez, la:

Definición 5.3 T_1 es un functor olvidadizo que envía C_1 a C_0 de forma que $T_1(a \rightarrow b) = \varphi a \vee b$ para toda $a \rightarrow b \in C_1$.

Considerando una transformación paralela a T_1 entre $(0,1)_1$ y $(0,1)_0$ resultaría que solamente las flechas $a \rightarrow b$ tales que sustituyendo a y b por los valores 0 y 1 que juntamente hicieran válida la fórmula $\varphi a \vee b = 1$ serían válidas. Pero éstas son, como puede fácilmente comprobarse, las flechas $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 1$, pero no la flecha $1 \rightarrow 0$. Ello es también consecuencia directa de ser $(0,1)_0$ una φ -categoría.

Así pues, hemos establecido un modelo para una lógica con implicaciones simples (una sola flecha), mediante la estructura $(C_1/R_1, T_1)$. La extensión al caso general es inmediata y viene sugerida por la definición de T_1 . Para hacer más clara dicha extensión, consideremos primero el caso C_2 .

Definición 5.4 $\left(\begin{smallmatrix} b & d \\ \uparrow & \uparrow \\ a & c \end{smallmatrix} \right) \in C_2$ si y sólo si $(\varphi a \vee b \rightarrow \varphi c \vee d) \in C_1$.

Corolario 5.1 $\left(\begin{smallmatrix} b & d \\ \uparrow & \uparrow \\ a & c \end{smallmatrix} \right) \in C_2$ si y sólo si $\varphi(\varphi a \vee b) \vee \varphi c \vee d = 1 \in C_0$.

Prueba: por Definiciones 5.4 y 5.2.

Definición 5.4 T_2 es un functor olvidadizo entre C_2 y C_1 tal que: $T_2 \left(\begin{smallmatrix} b & d \\ \uparrow & \uparrow \\ a & c \end{smallmatrix} \right) = (\varphi a \vee b \rightarrow \varphi c \vee d)$ para todo $\left(\begin{smallmatrix} b & d \\ \uparrow & \uparrow \\ a & c \end{smallmatrix} \right) \in C_2$.

$$\text{Corolario 5.2 } T_1 \cdot T_2 \left(\begin{array}{cc} b & d \\ \uparrow & \uparrow \\ a & c \end{array} \right) = \varphi(\varphi a \vee b) \vee \varphi c \vee d.$$

Prueba: por Definiciones 5.3 y 5.4.

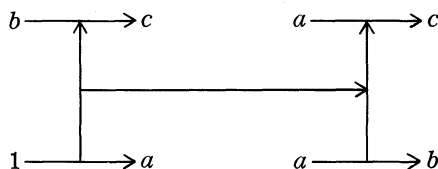
Del mismo modo que $(C_1/R_1, T_1)$ proveía un modelo para una lógica con implicaciones simples, la estructura $(C_2/R_2, T_1 \cdot T_2)$ provee un modelo para una lógica cuyas fórmulas pueden reducirse a implicaciones entre implicaciones. En efecto, sustituyendo en la fórmula $\varphi(\varphi a \vee b) \vee \varphi c \vee d$ los valores 0 y 1, las series de valores que igualan dicha fórmula con el objeto conulo 1 son precisamente las series de valores v y f que hacen válida la fórmula lógica $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow d)$. Dejamos la comprobación al lector.

Las consideraciones anteriores nos llevan a la siguiente generalización importante:

Definición 5.5 Para $1 \leq i \leq n$, la flecha $x \in C_i$ existe si y sólo si $T_1 \cdot T_2 \dots T_i(x) = 1 \in C_0$, en donde las transformaciones T_i se definen de forma paralela a T_1 o T_2 .

Corolario 5.3 La estructura $(C_1/R_1, C_2/R_2, \dots, C_n/R_n, T_1, T_2, \dots, T_n)$ provee un modelo para la lógica bivalente de proposiciones.

El interés del método es teórico pero también práctico porque nos da un método de decisión primero, para distinguir si una fórmula está bien formada o no, y segundo, para determinar que fórmulas bien formadas son tautologías. Dada una fórmula mal formada, haciendo los cambios oportunos para expresarla en función de las conectivas “no” e “*implica*” da siempre lugar a un esquema de categorías en el que el objeto inicial o final de una flecha (al menos) no aparece. Si se quiere entonces investigar si una fórmula lógica dada es o no una tautología debemos proceder de la siguiente forma: (i) Cambiar todas las conectivas a “no” e “*implica*”. Por ejemplo dada la fórmula $(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge ((\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg c)$, se reduce a $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$. (ii) Se completa la fórmula añadiendo flechas que empiezan por 1 donde antes había una proposición aislada y se desarrolla en forma de esquema de categorías; en nuestro ejemplo:



Si el esquema que resulta es válido en la teoría de categorías (es decir, no corresponde a un esquema en el que haya al menos una flecha sin origen o fin), la fórmula es válida en lógica. (iii) Por último se prueba la fórmula que resulta de aplicar las T_i . En nuestro caso es: $\varphi(\varphi \varphi a \vee \varphi b \vee c) \vee \varphi(\varphi a \vee b) \vee \varphi a \vee c$; puede verse que sustituyendo a, b, c, d por 0 y 1 de todas las formas posibles siempre obtenemos 1 como resultado. La fórmula es pues una tautología. El método es tan largo como el de las matrices, pero

en ocasiones presenta la ventaja de que no es necesario probar todos los valores; una vez extendida la fórmula en forma de un esquema de categorías es rápida la operación mental que distingue para qué valores la fórmula no sería válida.

El siguiente teorema es una aplicación directa del Corolario 5.3. El teorema es una nueva versión del conocido teorema de Łukasiewicz acerca de la completitud de su sistema para el cálculo de proposiciones.

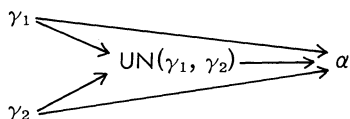
Teorema 5.3 *El sistema de Łukasiewicz $CCpqCCqrCpr$, $CpCNpq$, $CCNppp$, es simplemente completo.* ([5], pp. 81-91).

Siguiendo la prueba original, debe demostrarse que no existen fórmulas bien formadas que cumplen a la vez las propiedades: (i) no son tesis (es decir, consecuencias) del sistema, (ii) no llevan a una contradicción si se añaden como axiomas extra al sistema.

5.3.1 Definición: Las expresiones que cumplen con las dos propiedades enunciadas reciben el nombre de *fórmulas independientes*.

5.3.2 Definición: Dos fórmulas lógicas son *equivalentes* cuando proyectando sus correspondientes esquemas de flechas sobre la categoría $(0,1)_1$ mediante una serie de transformaciones T_i , ambas proyecciones coinciden. Denotaremos mediante $\alpha \sim \beta$ la expresión “ α equivale a β ”.

La fórmula α es *equivalente al par de fórmulas* γ_1, γ_2 cuando el esquema



es conmutativo. Denotaremos mediante $\alpha \sim \gamma_1, \gamma_2$ la expresión “ α equivale a γ_1, γ_2 ”. El siguiente lema es trivial:

5.3.3 Lema: (i) si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$ entonces $\alpha \sim \gamma$. (ii) si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma_1, \gamma_2$ entonces $\alpha \sim \gamma_1, \gamma_2$.

5.3.4 Lema Si $\beta \sim \gamma$, entonces $C\alpha_n C\alpha_{n-1} \dots C\alpha_1 \beta \sim C\alpha_n C\alpha_{n-1} \dots C\alpha_1 \gamma$.

La prueba es por inducción, y se basa en el uso de la fórmula de la Definición 5.5.

(i) $C\alpha_1 \beta \sim C\alpha_1 \gamma$ se cumple puesto que $C\alpha_1 \beta$ se proyecta sobre $\varphi\alpha_1 \vee \beta$ y $C\alpha_1 \gamma$ sobre $\varphi\alpha_1 \vee \gamma$. Ambos objetos coinciden puesto que $\beta \sim \gamma$.

(ii) $C\alpha_2 C\alpha_1 \beta \sim C\alpha_2 C\alpha_1 \gamma$ se cumple porque la primera expresión se proyecta sobre $\varphi 1 \vee \alpha_2 \rightarrow \varphi\alpha_1 \vee \beta$ y ésta a su vez, sobre $\varphi(\varphi 1 \vee \alpha_2) \vee \varphi\alpha_1 \vee \beta$. Por su parte, la segunda expresión se proyecta en $\varphi 1 \vee \alpha_2 \rightarrow \varphi\alpha_1 \vee \gamma$ y ésta en $\varphi(\varphi 1 \vee \alpha_2) \vee \varphi\alpha_1 \vee \gamma$. Como $\varphi 1$ es 0 y “ $0 \vee X = X$ ” para cualquier fórmula X , las dos expresiones se proyectan en el mismo objeto: $\varphi\alpha_2 \vee \varphi\alpha_1 \vee \beta = \varphi\alpha_2 \vee \varphi\alpha_1 \vee \gamma$.

(iii) Suponiendo que la equivalencia es cierta para el caso $n - 1$, ya que cada caso resulta del anterior por simple yuxtaposición de un $\varphi 1$ dentro del

paréntesis abarcado por la primera φ , y otras φ 1 fuera del paréntesis, la equivalencia sigue cumpliéndose para el caso n puesto que “unir” φ 1 a cualquier objeto da lugar al mismo objeto.

5.3.5 Lema *Dada la serie $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ que es simplemente una permutación de los números $1, 2, 3, \dots, n$, tenemos: $C\alpha_{i_1}C\alpha_{i_2} \dots C\alpha_{i_n}\beta = C\alpha_1C\alpha_2 \dots C\alpha_n\beta$.*

La prueba es la misma que para el lema anterior; veamos como ilustración el caso $C\alpha_2C\alpha_1\beta$, $C\alpha_1C\alpha_2\beta$. Los correspondientes tripletes:



se proyectan sobre las flechas $\varphi 1 \vee \alpha_2 \rightarrow \varphi \alpha_1 \vee \beta$, $\varphi 1 \vee \alpha_1 \rightarrow \varphi \alpha_2 \vee \beta$, y éstas a su vez sobre los objetos $\varphi(\varphi 1 \vee \alpha_2) \vee \varphi \alpha_1 \vee \beta$, $\varphi(\varphi 1 \vee \alpha_1) \vee \varphi \alpha_2 \vee \beta$, que como puede verse, coinciden.

5.3.6 Lema *Si $\alpha \sim \beta$ y β no es independiente, entonces α no es independiente. Si $\alpha \sim \gamma_1, \gamma_2$ y γ_1, γ_2 no son independientes, entonces α no es independiente.*

La prueba es como en el teorema original de Łukasiewicz.

5.3.7 Definición *Expresiones de forma I* son las expresiones (bien formadas) del tipo: $C\alpha_1C\alpha_2 \dots C\alpha_nCp\beta$ ($\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ se llaman “antecedentes”).

5.3.8 Lema *Toda expresión bien formada dentro del sistema de Łukasiewicz es equivalente a cierta expresión de la forma I.*

Prueba: basta probar que dada una expresión α , su proyección en $(0,1)_1$ coincide con la proyección de la expresión $CNaNCp\beta$ (dicho de otra forma; $CNaNCp\beta \sim \alpha$).

$CNaNCp\beta$ equivale (aplicando el funtor covariante φ) a $(p \rightarrow p) \rightarrow \alpha$ o sea al triplete: $(p \rightarrow p) \rightarrow (1 \rightarrow \alpha)$. La proyección en $(0,1)_1$ es $\varphi(\varphi p \vee p) \vee \varphi 1 \vee \alpha = \varphi 1 \vee \varphi 1 \vee \alpha = \varphi 1 \vee \alpha$ que coincide con la proyección de $(1 \rightarrow \alpha)$, es decir, de α .

5.3.9 Lema *No existe ninguna expresión simple que sea a la vez una expresión independiente.*

Expresión simple es aquella en la que todos los antecedentes son variables simples o sus negaciones.

La prueba es la del teorema original. Sin embargo puede sugerirse otra: la prueba original se basa en que existen tres proposiciones contradictorias: $NCp\beta$, $NCCp\beta C\beta$ y $NCNCp\beta NCp\beta$. Traduciéndolas a esquemas de flechas en una φ -categoría, resultan esquemas inválidos.

5.3.10 Lema *Cualquier expresión de la forma I que no es simple, es equivalente a una o dos expresiones más simples.*

Una expresión es más simple que otra si consta de un número menor de símbolos; si ambas tienen el mismo número de símbolos la más simple es la que tiene mayor número de antecedentes.

Tenemos que demostrar: (i) $C\alpha C\beta\gamma \sim C\beta C\alpha\gamma$, (ii) $CNN\alpha\gamma \sim C\alpha\gamma$, (iii) $CNC\alpha\beta\gamma \sim C\alpha CN\beta\gamma$, (iv) $CC\alpha\beta\gamma \sim CN\alpha\gamma, C\beta\gamma$. Como ilustración es-cogemos (iii) y (iv):

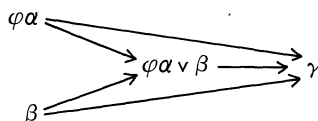
(iii) $CNC\alpha\beta\gamma$ es $\varphi(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ que a su vez equivale (por contravariación) a $\varphi\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. $C\alpha CN\beta\gamma$ es $\alpha \rightarrow (\varphi\beta \rightarrow \gamma)$. Proyectando ambos tripletes resulta

$$\varphi(\varphi 1 \vee \varphi\gamma) \vee \varphi\alpha \vee \beta, \varphi(\varphi 1 \vee \alpha) \vee \varphi\varphi\beta \vee \gamma,$$

o sea, el mismo objeto $\varphi\alpha \vee \beta \vee \gamma$.

(iv) $CC\alpha\beta\gamma$ es $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ que se proyecta sobre $\varphi\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$.

Por otra parte, el siguiente esquema es conmutativo por definición de unión:



Dicho de otra forma, las flechas $\varphi\alpha \rightarrow \gamma$ y $\beta \rightarrow \gamma$ existen en la categoría, y por tanto $CN\alpha\gamma, C\beta\gamma$. Recíprocamente, si esas flechas existen, hay una flecha desde la unión de $\varphi\alpha$ y β hasta γ : $\varphi\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$. Por tanto la fórmula $CC\alpha\beta\gamma$ resulta de $C\beta\gamma$ y $CN\alpha\gamma$.

Por lo tanto, el sistema de Łukasiewicz es completo (el resto de la argumentación es como en el teorema original, y por eso no la transcribimos aquí).

b) Segunda parte En el trabajo original del que el presente artículo es un resumen, se estudiaban los sistemas de Novikov, Hilbert-Ackerman, Mendelson, Rosser, y Łukasiewicz y se veía que correspondían a esquemas válidos de la teoría de φ -categorías, se presentaba también una nueva versión del sistema de Kotelly ([6], pp. 431-476). Aquí nos limitaremos a considerar solamente uno de los sistemas mencionados: el de Novikov.

Teorema 5.2 *El sistema de axiomas de Novikov ([7], p. 48) corresponde a un sistema de esquemas válidos de la teoría de φ -categorías.*

Prueba: El sistema consta de los axiomas:

- I 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 I 2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

- II 1 $A \wedge B \rightarrow A$
 II 2 $A \wedge B \rightarrow B$
 II 3 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

- III 1 $A \rightarrow A \vee B$

$$\text{III } 2 \quad B \rightarrow A \vee B$$

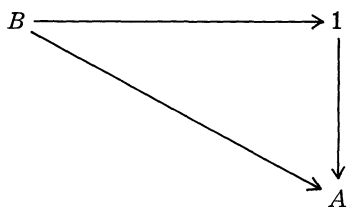
$$\text{III } 3 \quad (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

$$\text{IV } 1 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

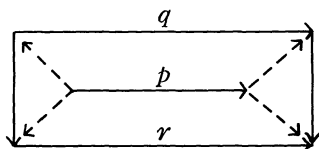
$$\text{IV } 2 \quad A \rightarrow \neg \neg A$$

$$\text{IV } 3 \quad \neg \neg A \rightarrow A$$

Los Axiomas II y III equivalen a la afirmación de que la φ -categoría tiene uniones e intersecciones. Por ejemplo, II-3 dice que si un objeto implica otros dos, implica su disyunción, lo cual equivale a la definición de unión. Los Axiomas IV definen la negación como una doble función, inversa de sí misma: la primera hace corresponder a cada objeto, su negación, la segunda, a cada flecha, otra "en orden inverso". Pero esto corresponde a nuestro funtor φ . El Axioma I-1 dice lo mismo que "Si $1 \rightarrow A$ existe, entonces existe una flecha desde cualquier otro objeto B hasta A ". Esto es cierto simplemente por definición de objeto conulo porque en este caso el siguiente diagrama es conmutativo:



Por último, el Axioma I-2 es consecuencia de una construcción similar a la dada en la sección 3. Supongamos una flecha p y dos funtores en la φ -categoría que la transforman en las flechas q y r respectivamente:



Aplicando una transformación natural obtenemos:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) &\rightarrow (p \rightarrow r) \\ p &\rightarrow (q \rightarrow r) \end{aligned}$$

La primera fórmula es la aplicación de la transformación natural, la segunda es su resultado. Son dos fórmulas que se infieren mutuamente entonces. Puede verse que dicha inferencia es más fuerte que el axioma de Novikov, que solo requiere implicación de la segunda fórmula a la primera: per es sabido que la equivalencia implica la implicación. Q.F.D.

6 Sugerencias para la aplicación de la teoría de categorías a otros campos de la lógica

α Conectiva de Sheffer Para definir la conectiva de Sheffer, partimos de una φ -categoría con objetos $a, b, c, \dots$ etc. y sus correspondientes $a', b',$

$c' \dots$ etc. ($a', b' \dots$ representarán $\varphi a, \varphi b, \dots$ etc). Los objetos $a', b', a', b', c', \dots$ con sus correspondientes flechas forman una subcategoría de la categoría total; vamos a considerar una categoría dual de dicha subcategoría (como se sabe, debe estar formada por los mismos objetos, y flechas en orden contrario). Esta categoría, dual de la categoría de los “primas” es covariante de la subcategoría de los objetos sin “primas”. Existe entonces un funtor covariante entre ambas que vamos a definir:

Definición 6.1 F es un funtor covariante entre una subcategoría C_1 de una φ -categoría y la categoría dual C_2 de la categoría de objetos que resultan de aplicar φ a los de la primera.

F lleva uniones a uniones e intersecciones a intersecciones. Definimos:

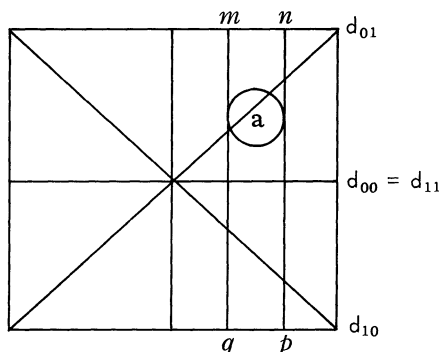
Definición 6.2 $a \downarrow b$ *Conectiva de Sheffer* es el objeto de la categoría C_2 que resulta de aplicar F a la intersección de a y b en C_1 : $a \downarrow b = F(a \wedge b)$.

Las propiedades de la conectiva [8] resultan inmediatamente de la definición dada. Veamos como ejemplo una de ellas:

Lema 6.1 $a \downarrow b = a' \wedge b'$.

Prueba: F lleva la intersección de a y b sobre la intersección de Fa y Fb , es decir sobre $a' \wedge b'$.

b Algebras cilíndricas de dos dimensiones ([9] y [10]) Un álgebra cilíndrica de Dimensión 2 tiene una sencilla representación geométrica mediante el siguiente esquema donde vienen representados todos los elementos: a es un objeto del álgebra, las constantes d son líneas, C_{0a} es el cilindro $mnpq$, etc.



El esquema sugiere la consideración de los subconjuntos de un conjunto producto, dicho de otra forma, el conjunto de relaciones binarias en un conjunto dado. Lo que vamos a hacer entonces es estudiar un álgebra cilíndrica de dos dimensiones tomando como modelo la categoría de relaciones binarias de Ehresmann ([4], pp. 20-24).

Definición 6.3 X es una clase tal que cada elemento tiene un complemento

único, y existe un elemento y sólo uno de X cuyo complemento es él mismo. Denotaremos por φx el complemento de $x \in X$.

Definición 6.4 X_R es la categoría de relaciones binarias en X cuya ley de composición viene dada por:

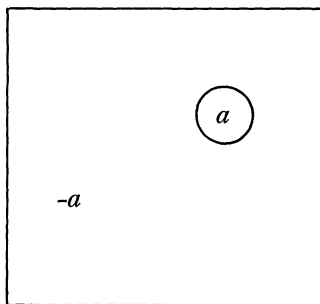
$$(X, a, X) \cdot (X, a', X) = (X, aa', X)$$

donde aa' es el conjunto de pares $(x_2, x_0) \in X^2$ tales que $(x_2, x'_1) \in a$, $(x_1, x_0) \in a'$ y tal que $x'_1 = x_1$.

Definida entonces la categoría de relaciones en ese conjunto X veamos cuáles son los diferentes elementos del álgebra cilíndrica correspondiente.

(i) *Elementos "a"*

En nuestra figura, a es simplemente un subconjunto de X^2



es decir, un objeto de X_R .

Definición 6.5 Los elementos de un álgebra cilíndrica bidimensional son objetos de X_R .

(ii) *Operaciones* $\cup$, $\cap$, $-$ $\cup$ y $\cap$ corresponden simplemente a la unión e intersección en X_R . Dado a , si a es el morfismo cuyas flechas son (x, x') , definimos " $-a$ " como el morfismo de todos los pares (y, y') tales que $(y, y') \neq (x, x')$, es decir, " $-a$ " es la relación $(X, \text{Compl}(a), X)$.

(iii) *Constantes* d

Definición 6.6 $d_{00} = d_{11} = X$

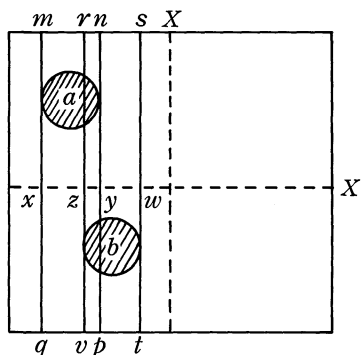
(Tarski define $d_{mm} = 1$, y si el conjunto de elementos del álgebra es un álgebra de Boole, como él define, no es absurdo considerar la clase total como el elemento 1).

Definición 6.7 d_{01} es el conjunto de elementos diagonales, es decir, de la forma (x, x) . Dicho de otra forma, es el conjunto cuyos subconjuntos son las identidades de la categoría de relaciones X_R .

Definición 6.8 d_{10} es el conjunto de los elementos $(\varphi x, x)$.

Puede verse que el "punto" intersección de las " d " es precisamente el punto de X cuyo complemento es él mismo.

(iv) *Operador C* Consideremos el cuadrado (un conjunto de puntos que lo llenan) y dos subconjuntos a y b . Formamos los "cilindros" correspondientes a a y b , es decir los conjuntos verticales y horizontales correspondientes a ellos. En la figura representamos sólo los verticales



El conjunto de todos los conjuntos verticales del cuadrado, juntamente con la flecha " $\subset$ " puede adquirir la estructura de una φ -categoría mediante las definiciones habituales (de hecho es un *campo de conjuntos*, y es entonces isomorfo a un álgebra de Boole). C no puede ser un funtor endomórfico en esa categoría porque de acuerdo con los axiomas no lleva intersecciones a intersecciones. En efecto:

$$C_0a \text{ es el cilindro } mnpq, C_0b \text{ es el cilindro } rstv \text{ y } C_0a \cap C_0b \neq \emptyset$$

Por otro lado, $a \cap b = \emptyset$, con lo que $C_0(a \cap b) = \emptyset$. Entonces $C_0a \cap C_0b$ no coincide con $C_0(a \cap b)$, o sea, como hemos dicho C no lleva intersecciones a intersecciones.

Sin embargo podemos hacer un pequeño cambio: dados los conjuntos a y b , tomamos no sus cilindros, sino sus proyecciones xy y zw . Puede verse $zy = P_0a \cap P_0b$, donde hemos llamado P_0 la proyección sobre el eje horizontal. En este caso sí que es cierto:

$$C_0(P_0a \cap P_0b) = C_0P_0a \cap C_0P_0b;$$

la segunda parte de la igualdad es igual a $C_0a \cap C_0b$, porque resulta el mismo cilindro al aplicar C a a que a su proyección.

Por otro lado por parecido razonamiento:

$$C_0(P_0a \cap P_0b) = C_0(a \cap C_0b).$$

Lo que tenemos entonces es lo siguiente:

- (a) Un campo de conjuntos, formado por los cilindros. Dicho campo de conjuntos es un álgebra de Boole y por tanto podemos definir sobre él una φ -categoría.
- (b) Una categoría de relaciones, que es también una φ -categoría.
- (c) Un operador C que no lleva uniones a uniones luego, que no puede ser definido como un funtor entre las categorías descritas en (a) y (b).

Sin embargo podemos considerar el funtor proyección:

$$X^2 \rightarrow X$$

que lleva flechas a puntos objeto. Definiendo en X una categoría con flecha " $\subset$ ", podríamos de acuerdo con la descripción dada hasta aquí enunciar:

Definición 6.9 C es un funtor entre la categoría X_R y la categoría $(X, \subset)$.

REFERENCIAS

- [1] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1971).
- [2] Grätzer, G., *Lattice Theory, First Concepts and Distributive Lattices*, W. H. Freeman, San Francisco (1971).
- [3] Halmos, P. R., *Algebraic Logic*, Chelsea Publishing Co., New York (1962).
- [4] Ehresmann, C., *Catégories et Structures*, Dunod, Paris (1965).
- [5] Łukasiewicz, J., *Elements of Mathematical Logic*, Macmillan, New York (1964).
- [6] Kotelly, J., "Context logic. I," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XI (1970), pp. 431-446.
- [7] Novikov, P. S., *Elements of Mathematical Logic*, Edinburgh, Oliver & Boyd, Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1964).
- [8] Montero, L., et D. Picco, "Les Reticules de Morgan et l'operation de Sheffer," *Notas de Lógica Matemática*, vol. XIV (1964), Bahia Blanca, Argentina.
- [9] Henkin, L., J. D. Monk and A. Tarski, *Cylindric Algebras*, North Holland, Amsterdam (1971).
- [10] Lucas, T., "Sur l'équivalence des Algebras Cylindriques et Polyadiques," *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, vol. XX (1968), pp. 236-263.

Universidad Complutense
Madrid, España

y

Seminario de Lógica Simbólica
Universidad de Notre Dame
Notre Dame, Indiana, U.S.A.