SUR LA MOYENNE TEMPORELLE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE

PAR
FRANCOIS ARIBAUD

1. Introduction

Le présent travail est la suite de [1]. Dans [1] nous avions considéré un système dynamique quelconque, c'est à dire un triplet composé d'un espace mesuré X, d'une mesure de probabilité m sur X et d'un groupe de transformations mesurables de X conservant la mesure m. Nous avons montré (Théorème A de [1]) qu'il existe *un projecteur unique* U de l'espace de Banach réel $L^1(X, m)$, composé des classes de fonctions réelles, possédant les propriétés suivantes:

(i) *pour toute* $f \in L^1(X, m)$, Uf *est l'unique élément invariant par l'action de* G *qui appartient à l'enveloppe convexe fermée* (*pour la topologie de la norme*) *de l'ensemble des translatées de* f *par les éléments de* G,

(ii) *pour toute* f *de* $L^1(X, m)$ *on a* $\int Uf\,dm = \int f\,dm$,

(iii) *le projecteur* U *est un contraction de l'espace de Banach* $L^1(X, m)$.

Dans [1] la démonstration des assertions (i) à (iii) se fait en étudiant la restriction de U à $L^\infty(X, m)$ et en réalisant la décomposition spectrale de m en mesures "quasi-ergodiques". Mais comme nous l'a signalé G. A. Elliot [2], le théorème A de [1] peut s'établir en étudiant la restriction de U à $L^2(X, m)$ suivant la méthode bien connue de Alaoglu-Birkhoff [3] (ou [4] Ch X n° 146); il n'est d'ailleurs plus nécessaire de se limiter aux fonctions réelles. En fait toute la construction entre dans le cadre beaucoup plus général de la théorie des fonctions faiblement presque-périodiques (cf. [5] Part II) et des représentations faiblement presque-périodiques (cf. [6] Section 3.8). On obtient ainsi, comme nous le verrons au paragraphe 2, des démonstrations très rapides des théorèmes ergodiques moyens.

Au paragraphe 3 nous reviendrons à la situation plus particulière des systèmes dynamiques pour donner quelques propriétés importantes de la moyenne temporelle sur ces systèmes.

Enfin au paragraphe 4 nous reprendrons l'étude de la décomposition spectrale de la mesure d'un système dynamique en mesures "quasi-ergodiques".

2. Représentations faiblement presque périodiques

DEFINITION 1 (Cf. [6] Section 3.8, Lemme 3.8.1). Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe et G un groupe d'automorphismes linéaires continus de G. On dit qu'un élément x de E est faiblement presque-périodique par rapport à G si l'orbite Gx de x est relativement compacte pour la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$.

Received October 23, 1970.

On dit que G est un groupe faiblement presque-périodique d'opérateurs de E si tout élément x de E est faiblement presque-périodique par rapport à G.

On désignera par $W(G, E)$ l'ensemble des éléments de E faiblement presque-périodiques par rapport à G. Nous utiliserons sans référence le résultat suivant pour lequel on se reportera à [5] Part II Théorème 12.1 (la démonstration donnée pour des espaces et algèbres de fonctions s'étend aussitôt au cas général):

Supposons que E soit un espace de Banach et que G soit un groupe d'opérateurs unitaires dans E. Alors $W(G, E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E stable par G. Si de plus E est une algèbre de Banach et si les éléments de G sont des automorphismes de la structure d'algèbre, $W(G, E)$ est une sous-algèbre de E.

Ces deux résultats essentiels sont des conséquences relativement immédiates du célèbre théorème de compacité pour les topologies affaiblies d'Eberlein. Ils sont donc valables sous des hypothèses plus larges que l'hypothèse "E est un espace de Banach". Mais cette dernière hypothèse sera suffisante pour ce qui suit.

LEMMA 1. *On garde les hypothèses et notations le la définition* 1. *On suppose donnée sur E une deuxième topologie qui fait de E un espace vectoriel topologique localement convex E° sur lequel les éléments de G sont encore des automorphismes linéaires continus. Si la topologie de E° est moins fine que la topologie de E, on a $W(G, E) \subset W(G, E^\circ)$.*

Comme la topologie de E° est moins fine que la topologie de E, il y a plus de formes linéaires continues sur E que de formes linéaires continues sur E°. Autrement dit $\sigma(E^\circ, E^{\circ\prime})$ est moins fine que $\sigma(E, E')$ et un élément faiblement presque-périodique par rapport à G pour la topologie initiale E est encore faiblement presque périodique pour la topologie E° (qui est séparée), Q.E.D.

COROLLAIRE. *Soient E un espace de Fréchet réflexif, n une norme continue sur E, E_n l'espace de Banach obtenu en complétant E pour la topologie de la norm n. Soit d'autre part un groupe G d'automorphismes linéaires de E tel que:*

(i) *pour tout x de E l'orbite Gx de x est un ensemble borné de E,*

(ii) *pour tout x de E et tout g de G on a $n(gx) \leq n(x)$.*

Alors

(1) *les automorphismes de G se prolongent en des automorphismes unitaires de E_n,*

(2) *le groupe d'automorphismes de E_n ainsi obtenu est un groupe faiblement presque-périodique d'opérateurs de E_n.*

L'assertion (1) est une conséquence immédiate de l'hypothèse (ii). Comme l'espace de Fréchet E est réflexif, il résulte du théorème de Banach-Mackey-Arens que toute partie bornée de E est compacte pour la topologie affaible $\sigma(E, E')$. C'est donc le cas pour chacune des orbites Gx, Q.E.D.

THEOREME A. *On garde les hypothèses et notations du corollaire du lemme* 1. *Alors:*

(1) *pour tout* x *de* E_n *il existe dans l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de* x *(pour la topologie de la norme) un élément invariant* Ux *et un seul, et l'application* $x \to Ux$ *est un projecteur* U *de norme* 1 *de* E_n *sur* E_n^G, *sous-espace fermé de* E *des éléments de* E *invariants par* G,

(2) *l'espace de Banach* E_n *est somme directe de* E_n^G *et du sous-espace fermé engendré par les différences* $gy - y$, g *dans* G *et* y *dans* E,

(3) *pour tout* x *dans* E_n *et tout* x' *dans* E'_n *la fonction sur* G *(muni de la topologie discrète)* $h(g) = \langle gx, x' \rangle$ *est faiblement presque-périodique* (cf. [5] Part II par. 10) *et on a, en désignant par* M *la moyenne presque-périodique* (cf. [6] par. 3.1.) $Mh = \langle Ux, x' \rangle$.

Vu le corollaire du Lemme 1 les assertions (1) et (2) sont des conséquences immédiates du Théorème 3.8.4. de [6] par. 3.8. Quant à (3) ce n'est rien d'autre que le Lemme 3.8.2. de [6] par. 3.8, Q.E.D.

COROLLAIRE 1. *Soit* (X, m, G) *un système dynamique. On fait opérer* G *sur* $L^1(X, m)$ *par transposition. Alors:*

(1) *Le groupe* G *est un groupe faiblement presque-périodique d'opérateurs dans* $L^1(X, m)$.

(2) *Pour toute* f *dans* $L^1(X, m)$ *il existe dans l'enveloppe convexe fermée de l'orbite* Gf *de* f *un élément invariant* Uf *et un seul.*

(3) *L'application qui à* f *associe* Uf *est un projecteur de* $L^1(X, m)$ *sur le sous-espace* $L^1_G(X, m)$ *des éléments de* $L^1(X, m)$ *invariants par* G, *et* $L^1(X, m)$ *est somme directe de* $L^1_G(X, m)$ *et du sous-espace fermé engendré par les différences* $gy - y$, g *dans* G *et* y *dans* $L^1(X, m)$ ("Propriété de Alaoglu-Birkhoff"). *Le projecteur* U *est une contraction telle que* $U(g.f) = Uf$ *pour tout* g *dans* G *et toute* f *dans* $L^1(X, m)$ *et que* $Uf = f$ *pour toute* f *invariante par* G.

(4) *Pour toute* f *dans* $L^1(X, m)$ *on a* $\int Uf\, dm = \int f\, dm$.

Soit $p > 1$. L'espace de Banach $L^p(X, m)$ est réflexif et est partout dense dans $L^1(X,m)$. L'assertion (1) est une conséquence immédiate de l'assertion (2) du corollaire du Lemme 1. Les assertions (2) et (3) se déduisent aussitôt des énoncés (1) et (2) du théorème A, du fait que f et $g.f$ ont même orbite et du fait que l'orbite d'un élément invariant est réduite à cet élément. Quant à (4) elle se déduit en remarquant que tout élément de l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de f à une intégrale égale à l'intégrale de f, Q.E.D.

L'assertion (2) du corollaire précédent peut se préciser comme suit:

COROLLAIRE 2. *Soit toujours* (X, m, G) *un système dynamique et soit* I *un ensemble quelconque. Considérons une famille* $(h_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* $L^1(X, m)$ *telle que* $\sum \| h_i \| < \infty$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $g_1, g_2, \cdots, g_n$ *dans* G *et* $c_1, c_2, \cdots, c_n$, *nombres réels positifs de somme égale à* 1, *tels que*

$$\sum_i \| Uh_i - \sum_j c_j h_i(g_j x) \| < \varepsilon.$$

Munissons I de la mesure discrète r pour laquelle tout point à une masse égale à 1, et considérons l'espace mesuré $(X \times I, m \times r)$. Le groupe G opère sur cet espace par $g(x, i) = (gx, i)$, et ces opérations conservent la mesure. Un élément h de $L^1(X \times I, m \times r)$ est une famille $(h_i)_{i \in I}$ d'éléments de $L^1(X, m)$ indexée par I et telle que $\sum \| h_i \| < \infty$. Soit K un ensemble fini de I. On désigne par $L_K^p(X \times I)$ le sous-espace de $L^p(X \times I)$ des fonctions $h(x, i)$ telle que $h(x, i) = 0$ pour tout $i \notin K$. Chacun des $L_K^p(X \times I)$ est pour $p > 1$ un espace de Banach réflexif, stable par G; le groupe G opère alors de façon unitaire sur $L_K^p(X \times I)$, d'où il résulte du Corollaire du Lemme 1 que $L_K^p(X \times I)$ est contenu dans $W(G, L^1(X \times I))$. Or la réunion des $L_K^p(X \times I)$, K parcourant les parties finies de I, est partout dense dans $L^1(X \times I)$. Par suite $W(G, L^1(X \times I)) = L^1(X \times I)$. On applique alors le théorème A, Q.E.D.

COROLLAIRE 3. *Soit (X, m, G) un système dynamique et soit S un sous-ensemble compact (pour la topologie forte) de $L^1(X, m)$. Considérons une fonction f de $L^1(X, m)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver des $g_1, g_2, \cdots, g_n$ dans G et des nombres réels positifs $c_1, c_2, \cdots, c_n$, de somme égale à 1 tels que*

$$\| Uf - \textstyle\sum_i c_i f(g_i x) \| < \varepsilon \quad \textit{pour toute} \quad f \in S.$$

On peut trouver un recouvrement fini de S par des boules de rayon $<\varepsilon/3$ ayant pour centres des éléments $h_1, \cdots, h_q$ de S. D'après le Corollaire 2 du Théorème A on peut trouver des $g_1, g_2, \cdots, g_n$ dans G et des nombres réels positifs $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de somme égale à 1 tels que

$$\| Uh_i - \textstyle\sum_j c_j h_i(g_j x) \| < \varepsilon/3$$

pour tout i compris entre 1 et q. Soit alors f un élément quelconque de s; on peut trouver un i tel que $\| f - h_i \| < \varepsilon/3$. On a alors

$$\| Uf - Uh_i \| < \epsilon/3 \quad \text{et} \quad \| \textstyle\sum c_j f(g_j x) - \sum c_j h_i(g_j x) \| < \varepsilon/3.$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned} &\| Uf - \textstyle\sum c_j f(g_j x) \| \\ &\leq \| Uf - Uh_i \| + \| Uh_i - \textstyle\sum c_j h_i(g_j x) \| + \| \textstyle\sum c_j h_i(g_j x) - \sum c_i f(g_j x) \| \\ &\leq \varepsilon, \qquad\qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

COROLLAIRE 4. *Soit (X, m, G) un système dynamique et soit E un sous-espace vectoriel de $L^1(X, m)$ contenant $L^\infty(X, m)$ et obtenu en complétant $L^\infty(X, m)$ par une norme $\| x \|$ satisfaisant à $\| x \|_1 \leq \| x \| \leq \| x \|_\infty$, où l'on désigne par $\| x \|_1$ (resp. par $\| x \|_\infty$) la norme de l'espace L^1 (resp. de l'espace L^∞). Supposons que:*

(1) *le dual E' de E, identifié de façon naturelle à un sous-espace de $L^\infty(X, m)'$, est un sous-espace de $L^1(X, m)$, considéré comme plongé dans $L^\infty(X, m)'$,*

(2) *L'espace E est stable par le groupe G,*

(3) *le groupe G est un groupe unitaire dans E muni de la norme $\| x \|$. Alors G est un groupe faiblement presque-périodique d'opérateurs de E.*

On sait que $W(G, E)$ est fermé. D'autre part $L^\infty(X, m)$ est partout dense dans E. Il suffit donc de vérifier qu'une f de $L^\infty(X, m)$ est faiblement presque-périodique par rapport à G *dans* E.

Soit (g_n) une suite de G. Comme tout élément f de $L^1(X, m)$ est faiblement presque-périodique par rapport à G, on peut extraire de (g_n) une suite (s_p) et on peut trouver y dans $L^1(X, m)$ tels que la suite en $p\langle s_p.f, k\rangle$ soit convergente de limite $\langle y, k\rangle$ pour tout $k \in L^\infty(X, m)$. Comme $\| s_p.f \|_\infty = \| f \|_\infty$ pour tout p, on a $\| y \|_\infty \leq \| f \|_\infty$, d'où $y \in L^\infty(X, m)$. Soit alors $k \in L^1(X, m)$; on peut représenter k comme une limite L^1 d'une suite (k_n) de fonctions de $L^\infty(X, m)$. On a alors

$$\begin{aligned} |\langle y, k\rangle - \langle s_p.f, k\rangle| &\leq |\langle y - s_p.f,\ k - k_n\rangle| + |\langle y - s_p.f,\ k_n\rangle| \\ &\leq 2\| f \| \, \| k - k_n \|_1 + |\langle y - s_p.f,\ k_n\rangle|. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être rendu arbitrairement petit en choisissant un n assez grand .Le choix de n étant ainsi fait, le deuxième terme peut être rendu arbitrairement petit en choisissant p assez grand, puisque k_n est une fonction de $L^\infty(X, m)$.

Il en résulte que toute $f \in L^\infty(X, m)$ a une orbite compacte pour $\sigma(L^\infty(X, m), L^1(X, m))$. Mais $\sigma(E, E')$ induit sur $L^\infty(X, m)$ une topologie séparée moins fine que $\sigma(L^\infty(X, m), L^1(X, m))$ puisque la topologie de la norme de E est moins fine que la topologie de la norme de $L^\infty(X, m)$. Il en résulte que l'orbite de $f \in L^\infty(X, m)$ est faiblement compacte dans E muni de $\sigma(E, E')$; autrement dit $L^\infty(X, m) \subset W(G, E)$. Par suite $W(G, E) = E$, puisque $W(G, E)$ est fermé et que $L^\infty(X, m)$ est partout dense dans E, Q.E.D.

Revenons aux hypothèses et notations du Théorème A. Le groupe G opère par transposition sur le dual E'_n de E_n. Considérons un sous-ensemble faiblement compact S de E'_n qui soit stable par G. Le group G se prolonge en un groupe d'opérateurs unitaires de l'algèbre $C(S)$ des fonctions complexes continues sur S.

Proposition 1. *Le groupe G est un groupe faiblement presque-périodique d'automorphismes unitaires de $C(S)$.*

On sait que $W(C(S), G)$ est une sous-algèbre fermée de $C(S)$. Il est d'autre part immédiat que la complexe conjuguée d'une fonction faiblement presque-périodique est encore une fonction faiblement presque-périodique. Il suffira donc de voir, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, que $W(C(S), G)$ sépare les points.

Soient s et s' deux éléments distincts de S. On peut trouver un x dans E_n tel que $s(x) \neq s'(x)$. Si $\hat{x}$ est la fonction sur S définie par $\hat{x}(t) = t(x)$ pour tout $t \in S$, $\hat{x}$ sépare les points s et s' de S. Reste à voir que $\hat{x}$ est faiblement presque-périodique par rapport à G. Soit (g_p) une suite d'éléments de G. Comme l'élément x est faiblement presque-périodique dans E par rapport à G

d'après le corollaire du Lemme 1, on peut extraire de (g_p) une suite (g'_p) telle que $(g'_p x)$ soit convergente pour $\sigma(E_n, E'_n)$ vers un $y \in E_n$: pour tout $s \in S$ on a $s(y) = \lim s(g'_p x)$, soit $\hat{y}(t) = \lim \hat{x}_p(t)$ pour tout $t \in S$, si $x_p = g'_p x$. Par application du Théorème 1.3 de [5] on voit que $\hat{x}$ est une fonction continue sur S faiblement presque-périodique par rapport à G, Q.E.D.

COROLLAIRE. *On conserve les notations de la proposition précédente. On suppose de plus que S est la fermeture de l'orbite de l'un de ses points s. Alors il existe sur S une mesure de Radon m_S et une seule qui soit positive invariante par G et de masse totale égale à* 1. *Toute mesure de Radon sur S invariante par G est proportionnelle à m_S et pour tout $x \in E$ et tout $t \in S$ on a*

$$\langle Ux, t\rangle = \int_S r(x) dm_S(r).$$

D'après la proposition 1 et le Théorème 3.8.4 de [6] il existe pour toute $f \in C(S)$ une fonction constante Uf et une seule dans l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de f. En posant $Uf = m_S(f)$ on définit la mesure invariante cherchée. Si n est une deuxième mesure invariante sur S on a $n(h) = n(f)$ pour toute h appartenant à l'enveloppe convexe fermée des translatées de f. En particulier $n(f) = n(m_S(f)) = m_S(f)n(1)$.

Soit x dans E. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $g_1, \cdots, g_n$ dans G et des nombres réels positifs $c_1, \cdots, c_n$ de somme 1 tels que

$$\| Ux - \sum c_i g_i x \| < \varepsilon.$$

En particulier pour tout $t \in S$ on a

$$| \langle Ux, t\rangle - \sum c_i \langle g_i x, t\rangle | < \varepsilon \| t \|.$$

Si $C = \sup_{t \in S} \| t \|$, qui est fini puisque S est borné, on a pour tout $t \in S$,

$$| \langle Ux, gs\rangle - \sum c_i \langle g_i x, gs\rangle | \leq C\varepsilon.$$

Comme Ux est un élément invariant, on a $\langle Ux, gs\rangle = \langle Ux, s\rangle$ pour tout $g \in G$, soit

$$| [Ux, s] - \sum c_i \langle g_i x, gs\rangle | \leq C\varepsilon$$

pour tout g dans G. En prolongeant par continuité trouve

$$| \langle Ux, s\rangle - \sum c_i \langle g_i x, t\rangle | \leq C\varepsilon$$

pour tout $t \in S$. Intégrons cette inégalité par rapport à m_S. On obtient

$$\int \left| \langle Ux, s\rangle - \sum c_i \langle x, g_i t\rangle \right| dm_S(t) \leq C\varepsilon$$

soit, la mesure m_S étant invariante,

$$\left| \langle Ux, s\rangle - \int \langle x, t\rangle \, dm_S(t) \right| \leq C\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a $\langle Ux, s\rangle = \int_S \langle x, t\rangle\, dm_S(t)$. Comme d'autre part $\langle Ux, gs\rangle = \langle Ux, s\rangle$ pour tout $g \in G$, on a

$$\langle Ux, gs\rangle = \int_S \langle x, t\rangle\, dm_S(t)$$

d'où, en prolongeant par continuité,

$$\langle Ux, t\rangle = \int_S \langle x, t\rangle\, dm_S(t), \qquad \text{Q.E.D.}$$

On conserve les notations du théorème A et on suppose de plus que G est un groupe localement compact, l'application $(g, x) \to gx$ de $G \times E$ dans E étant continue lorsqu'on munit $G \times E$ de la topologie produit. On considère d'autre part une mesure de Haar dg invariante à gauche sur G. Soit I un ensemble ordonné filtrant et soit $(f_i)_{i\in I}$ un ensemble de fonctions de $L^1(G, dg)$ indexé par I. On dit que *la famille* $(f_i)_{i\in I}$ *est asymptotiquement invariante à gauche* (au sense fort) si pour tout $h \in G$ la famille de fonctions en x de G $[f_i(x) - f_i(hx)]$ tend vers 0 suivant l'ensemble filtrant I au sens de la topologie de la norme L^1, cf. [6] Ch. II, §2.4 Def. 2.4.1. Suivant la remarque fondamentale de M. Day toute moyenne invariante à gauche $s \in L^\infty(G)'$ est *limite dans* $L^\infty(G)'$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(G)', L^\infty(G))$ d'une famille $(f_i)_{i\in I} \in L^1(G)$ asymptotiquement invariante à gauche au sens fort et composée de fonctions réelles positives d'intégrales par rapport à dg égales à 1. Une telle famille (f_i) sera appelée *une famille de définition de la moyenne s*. Nous nous proposons d'établir le théorème suivant:

THEOREME B. *Soient E un espace de Banach et G un groupe d'automorphismes linéaires continus de E faiblement presque-périodique. On suppose que G est muni d'une topologie qui en fait un groupe localement compact moyennisable et que l'application $(g, x) \to gx$ de $G\times E$ dans E est continue. Soit $(h_i)_{i\in I}$ une famille de définition d'une moyenne à gauche s sur G.*

(1) *Pour tout i et pour tout x de E l'application $h_i(g)g^{-1}x$ de de G dans E est intégrable au sens fort de Bochner par rapport à la mesure de Haar dg.*

(2) *Soit U le projecteur presque-périodique de E sur le sous-espace E^G des éléments de E invariants par G* (cf. *Théorème* A). *On a, la limite étant prise au sens fort,*

$$Ux = \lim_{i\in I} \int_G h_i(g)g^{-1}x\, dg.$$

La fonction h_i est une limite L^1 d'une suite (k_n) de fonctions continues à support compact. La fonction $g \to k_n(g)g^{-1}x$ est intégrable au sens fort de Bochner, étant continue à support compact. D'autre part

$$\left\| \int k_n(g)g^{-1}x\, dg - \int k_m(g)g^{-1}x\, dg \right\| \leq \left\| k_n - k_m \right\|_1 \left\| x \right\|.$$

D'où aussitôt (1).

Pour tout y invariant on a $\int h_i(g)^{-1}y\, dg = y$. C'est en particulier le cas pour $y = Ux$. D'autre part, le groupe G opérant de façon faiblement presque-périodique sur E, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ des $g_1, \cdots, g_n$ dans G et des nombres réeels positifs $c_1, \cdots, c_n$ de somme égale à 1 tels que $\| Ux - \sum c_j g_j x \| < \varepsilon$. Pour tout i on a donc

$$\left\| Ux - \sum_j c_j \int h_i(g) g^{-1} g_j\, x\, dg \right\| < \varepsilon.$$

Mais, dg étant invariante à gauche, on a également

$$\left\| Ux - \sum \int h_i(g_j g) g^{-1} x\, dg \right\| < \varepsilon$$

ou

$$\left\| Ux - \sum_j c_j \int h_i(g) g^{-1} x\, dh \right\| < \varepsilon + \left\| \sum_j c_j \int (h_i(g_j\, g) - h_i(g) g^{-1} x\, dg \right\|$$
$$< \varepsilon + \sum c_j \left\| h_i(g_j\, g) - h_i(g) \right\|_1 \left\| x \right\|.$$

Or h_i est une famille asymptotiquement invariante à gauche et ε est arbitraire, Q.E.D.

Corollaire. *Soit (X, m, G) un système dynamique composé d'un espace compact X, d'une mesure de Radon m sur X et d'un groupe localement compact moyennisable G, tels que l'application $(g, x) \to gx$ de $G \times X$ dans X soit continue. On fixe d'autre part une mesure de Haar invariante à gauche dg sur G et on considère une famille (h_i) de définition d'une moyenne invariante à gauche sur G. Pour toute $f \in L^1(X, m)$ on a, la limite étant prise au sens de la norme L^1,*

$$Uf(x) = \lim_i \int h_i(g) f(gx)\, dg.$$

Le groupe G opère de façon unitaire sur $L^1(X, m)$, et il résulte des hypothèses faites que l'application $(g, f) \to g.f$ de $G \times L^1(X, m)$ dans $L^1(X, m)$ est continue. D'autre part, si $h(g)$ est une fonction continue sur G à support compact et si b est fonction continue sur X, la fonction continue

$$x \to \int h(g) b(gx)\, dg$$

est l'intégrale au sens de Bochner de la fonction continue

$$g \to h(g) g^{-1}.b$$

de G à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur X et est à plus forte raison l'intégrale au sens de Bochner de la même fonction considérée comme étant à valeurs dans $L^1(X, m)$. Par passage à la limite par rapport aux normes L^1 dans $L^1(G)$ et dans $L^1(X, m)$ on en déduit que la classe de la fonction

$$x \longrightarrow \int h_i(g)f(gx)\ dg$$

est l'intégrale au sens de Bochner de la fonction $g \longrightarrow h_i(g)g^{-1}.f$. Le corollaire est alors une conséquence immédiate du théorème précédent, Q.E.D.

3. Quelques propriétés de la movenne temporelle d' un système dynamique

Dans ce paragraphe (X, m, G) désigne un système dynamique quelconque. On se propose d'abord de démontrer le théorème suivant, qui complète le corollaire 1 du Théorème A:

THEOREME C. *Soit (X, m, G) un système dynamique.*

(i) *Pour tout $f \in L^p(X,m)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fonction Uf appartient également à $L^p(X, m)$ et, pour $p < \infty$, est l'unique élément invariant appartenant à l'enveloppe convexe fermée dans $L^p(X, m)$ des translatées de f par les éléments de G. Le projecteur U induit ainsi une contraction de l'espace $L^p(X, m)$.*

(ii) *Pour tout couple (p, q) d'exposants conjugués, $1 \leq p, q \leq \infty$, toute $h \in L^p(X, m)$ et toute $k \in L^q(X, m)$, on a entre fonctions de $L^1(X, m)$ l'identité de Reynolds, dans laquelle le point (.) représente le produit usuel de deux fonctions*

$$U(Uh.k) = Uh.Uk = U(h.Uk).$$

(iii) *Pour toute suite croissante de fonctions réelles f_n de $L^1(X, m)$ d'enveloppe supérieure f appartenant à $L^1(X, m)$ on a*

$$Uf = \lim Uf_n,$$

la limite pouvant être prise au sens L^1 ou au sens de la convergence presque-partout pour la mesure m.

(iv) *Pour tout sous-ensemble m-presque-invariant Y de X, i.e. tel que pour tout $g \in G$ les ensembles $Y \cap \complement g^{-1}(Y)$ et $g^{-1}(Y) \cap \complement Y$ soient de mesure nulle, on a*

$$\int_Y f(x)\ dm(x) = \int_Y Uf(x)\ dm(x).$$

Autrement dit Uf est l'espérance conditionnelle de f par rapport à la sous-tribu des ensembles m-mesurables composée des ensembles presque-invariants.

Je remercie M.Lin qui a bien voulu attirer mon attention sur l'intérêt de la propriété (iv).

(i) Considérons d'abord une fonction f essentiellement bornée en valeur absolue par une constante positive C. Toute combinaison convexe de translatées de f est essentiellement bornée par C, et il en est de même de tout élément appartenant à l'adhérence pour la topologie L^1 de l'ensemble de ces combinaisons convexes, donc en particulier pour Uf. D'où (i) pour les fonctions de L^∞.

Soit maintenant f une fonction de L^p avec $1 < p < \infty$. L'enveloppe convexe fermée $C_p(f)$ pour la topologie L^p de l'orbite de f est évidemment stable par G; et comme G est un groupe d'opérateurs unitaires dans L^p, espace uniformément convexe, il existe dans $C_p(f)$ au moins un élément invariant f°. Mais X est de mesure finie; l'inégalité de Hölder montre que, pour $1 < p < \infty$, $C_p(f)$ est contenu dans $C_1(f)$, d'où $f^\circ = Uf \epsilon L^p(X, m)$. Comme Uf appartient ainsi à l'enveloppe convexe fermée pour la topologie L^p de l'orbite de f, on a $\| Uf \|_p \leq \| f \|_p$.

ii) Soient p et q des exposants conjugués, h une fonction de $L^p(X, m)$ et k une fonction de $L^q(X, m)$. D'après ce qui précède Uh et Uk appartiennent respectivement à L^p et à L^q et, d'après l'inégalité de Hölder, les fonctions $h.k$, $Uh.k$, $h.Uk$ et $Uh.Uk$ appartiennent à $L^1(X, m)$. Quels que soient les nombres réels positifs $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de somme 1 et les éléments $g_1, g_2, \cdots, g_n$ de G on a dans $L^1(X, m]$

$$\sum c_i(Uh.k)(g_i x) = Uh(x)(\sum c_i k(g_i x)).$$

On sait d'après (i) que appartient à l'enveloppe convexe fermée pour la norme L^q des translatées de k par les éléments de G. Il résulte de l'identité précédente et de l'inégalité de Hölder que $Uh.Uk$ appartient à l'enveloppe convexe fermée pour la topologie L^1 des translatées de $Uh.k$ par les éléments de G d'où, puisque $Uh.Uk$ est invariante, $U(Uh.k) = Uh.Uk$. On montre de même que $Uh.Uk = U(h.Uk)$.

(iii) On a

$$\sup_n \int Uf_n \, dm = \sup_n \int f_n \, dm = \int f \, dm,$$

d'où il résulte que $f^\circ = \sup Uf_n$ appartient à L^1. Comme $f - f_n \geq 0$ pour tout n, il résulte aussitôt de l'appartenance de $U(f - f_n)$ à l'enveloppe convexe fermée des translatées de $f - f_n$ que $Uf - Uf_n \geq 0$, d'où $f^\circ \leq Uf$. On en tire

$$0 \leq \int (Uf - f^\circ) \, dm = \inf_n \int (Uf - Uf_n) \, dm$$

$$= \int f \, dm - \sup_n \int f_n \, dm = 0.$$

(iv) Soit Y un ensemble presque-invariant et soit j_y la classe de la fonction caractéristique de Y dans $L^1(X, m)$. L'élément j_Y est une élément invariant par l'action de G, et on a donc d'après (ii) pour toute $f \epsilon L^1$

$$j_Y.Uf = Uj_Y.Uf = U(Uj_Y.f) = U(j_Y.f),$$

ce qui donne par intégration

$$\int_Y Uf \, dm = \int_X j_Y.Uf \, dm = \int_X U(j_Y.f) \, dm = \int_X j_Y.f \, dm = \int_Y f \, dm.$$

D'autre part, Uf étant un élément invariant de L^1, toute fonction f° sur X dont la classe dans L^1 est égale à Uf est mesurable par rapport à la tribu des ensembles m-mesurables presque-invariants, Q.E.D.

Soit $(A, 1)$ un deuxième ensemble probabilisé. On appellera *fonction aléatoire* (réelle) *strictement stationnaire sur* X une fonction $f(x, a)$ sur $X \times A$ mesurable pour la mesure produit de m et de l et telle que pour tout système fini $x_1, \cdots, x_p$ d'éléments de X (l'entier p étant arbitraire) et tout système $d_1, \cdots, d_p$ de nombres réels on ait

$$l(a/f(x_1, a) < d_1, \cdots, f(x_p, a) < d_p) \\ = l(a/f(gx_1, a) < d_1, \cdots, f(gx_p, a) < d_p)$$

quel que soit g dans G.

On définit sans difficulté à partir du cas réel les fonctions aléatoires strictement stationnaires *complexes* sur X, en considérant les parties réelles et imaginaires.

On associe à la fonction aléatoire f la fonction m-mesurable sur X définie par

$$Mf(x) = \int_A f(x, a)\, dl(a)$$

que l'on appelle *la moyenne statistique de f.*

LEMME 2. *Soit f une fonction aléatoire (réelle ou complexe) strictement stationnaire sur X. La moyenne statistique de f est une fonction invariante par l'action de G.*

On peut supposer que f est réelle positive et bornée: on se ramène au cas réel positif en utilisant la décomposition

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i\,(\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-$$

et au cas borné en introduisant les $f_n = \inf (f, n)$.

Soit $g \epsilon G$. L'ensemble des x tels que l'une des intégrales

$$\int f(gx, a)\, dl(a) \quad \text{et} \quad \int f(x, a)\, dl(a)$$

n'existe pas est de mesure nulle pour m. Dans ce qui suit on fixera un $g \epsilon G$ et on considérera les x tels que les deux intégrales précédentes existent. On désignera par M un nombre >0 tel que f prenne ses valeurs dans $[0, M]$.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k, $1 \leq k \leq n$, on introduira les ensembles $A_{n,k}(x)$:

$$A_{n,k}(x) = \{a : (k - 1)M/n \leq f(x, a) \leq kM/n\}.$$

Si

$$I_n(x) = \textstyle\sum_{1 \leq k \leq n} (kM/n) m(A_{n,k}(x))$$

on a

$$Mf(x) = \lim_n I_n(x)$$

Dire que f est strictement stationnaire entraine que

$$m(A_{n,k}(gx)) = m(A_{n,k}(x)) \quad \text{et} \quad I_n(gx) = I_n(x).$$

D'où le lemme, Q.E.D.

Dans ce qui suit nous considérerons une fonction aléatoire strictement stationnaire f sur X telle que

$$\iint |f(x, a)| \, dm(x) \, dl(a) < \infty.$$

Pour presque tous les a de A la fonction $f_a(x) = f(x, a)$ appartient à $L^1(X, m)$. On peut considérer que le groupe G opère sur $X \times A$ par $g(x, a) = (gx, a)$. On peut alors définir $Uf(x, a)$ dans le système dynamique $(X \times A, m \times l, G)$.

Lemme 3. *Supposons G dénombrable. Pour presque tous les a on a*

$$Uf(x, a) = Uf_a(x) \quad m\text{-presque-partout en } x.$$

On peut construire une suite $t_n(x, a)$ de combinaisons convexes de translatées de f convergeant vers $Uf(x, a)$ dans $L^1(X \times A)$. Comme

$$\| Uf - t_n \|_1 = \int_A \int_X |Uf(x, a) - t_n(x, a)| \, dm(x) \, dl(a)$$

on peut extraire de la suite t_n une suite s_p telle que

$$\lim \int_X |Uf(x, a) - s_p(x, a)| \, dm(x) = 0$$

pour presque tous les a. Par suite pour presque tous les a, $Uf(x, a)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée des translatées de f_a dans $L^1(X)$. Pour tout $g \in G$ on a $Uf(gx, a) = Uf(x, a)$ pour presque tous les a de A et presque tous les x de X. Comme G est dénombrable, il en résulte que l'ensemble B, réunion des ensembles exceptionnels de A correspondant à chaque élément de G, est de mesure nulle et que pour tout $g \in G$ et tout $a \notin B$ on a $Uf(gx, a) = Uf(x, a)$ presque-partout en x. Autrement dit la fonction $(Uf)_a$ sur X, qui appartient à l'enveloppe convexe fermée des translatées f_a dans $L^1(X, m)$ pour presque tous les a, est également invariante pour presque tous les a. D'où le lemme, Q.E.D.

Proposition 2. *Soit (X, m, G) un système dynamique dont l'ensemble des temps G est dénombrable et soit f une fonction aléatoire strictement stationnaire sur X, paramétrée par l'espace probabilisé (A, l). On suppose que f est dans $L^1(X \times A, m \times l)$.*

Si pour tout $a \in A$, f_a désigne la fonction sur X qui à x associe $f(x, a)$ et si Uf_a désigne la "moyenne temporelle" de l'élément f_a de $L^1(X, m)$, la fonction $Uf_a(x)$ de (x, a) sur $X \times A$ est mesurable et on a l'égalité entre moyennes statistiques de *fonctions aléatoires*

$$\int_A Uf_a(x)\,dl(a) = \int_A f(x, a)\,dl(a) \quad \text{p.p. } en\ x,$$

soit symboliquement $MUf_a = Mf$.

Autrement dit, lorsque l'on étudie les fonctions aléatoires strictement stationnaires sur un système dynamique, les moyennes statistiques se factorisent à travers la moyenne temporelle U qui joue ainsi le rôle d'une "moyenne statistique universelle".

D'après le Lemme 3 on peut remplacer $Uf_a(x)\epsilon L^1(X, m)$ dépendant du paramètre a par $Uf(x, a)\epsilon L^1(X\times A, m\times l)$. Comme Mf est un élément invariant de $L^1(X, m)$ d'après le Lemme 2, on a, dans $L^1(X, m)$, $Mh = Mf$ pour toute combinaison linéaire convexe de translatées de f. Pour tout $n > 0$ on peut trouver une telle combinaison convexe h_n telle que

$$\int_X\int_A |Uf(x, a) - h_n(x, a)|\,dm(x)\,dl(a) < 1/n$$

d'où

$$\int_X \left| \int_A Uf(x, a)\,dl(a) - \int_A h_n(x, a)\,dl(a) \right| dm(x) < 1/n.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$\int_A h_n(x, a)\,dl(a) = \int_A f(x, a)\,dl(a)$$

m-presque partout en x. Comme n est arbitraire on a donc

$$\int_A Uf(x, a)\,dl(a) = \int_A f(x, a)\,dl(a)$$

m-presque partout en x, Q.E.D.

Soit (X, m, G) un système dynamique dans lequel le "groupe des temps" G est un groupe localement compact. On fixe sur G une mesure de Haar invariante à gauche dg, et on suppose que $(g, x) \to gx$ de $G\times X$ dans X est mesurable lorsqu'on munit $G\times X$ de la mesure produit de dg et de m. Supposons d'autre part que G soit moyennisable, et soit s une moyenne invariante à gauche sur G.

PROPOSITION 3. *Pour toute moyenne invariante à gauche s sur G, pour toute $f\epsilon L^p(X, m)$ et toute $f'\epsilon L^q(X, m)$, p et q étant conjugués, la fonction de corrélation*

$$c(f, f')(g) = \int_X f(g^{-1}x)f'(x)\,dm(x)$$

appartient à $L^\infty(G)$ et on a

$$s(c(f, f')) = \int_X Uf(x)f'(x)\,dm(x) = \int_X f(x)Uf'(x)\,dm(x).$$

Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $g_1, \cdots, g_n$ dans G es $c_1, \cdots, c_n$ nombres réels positifs de somme égale à 1 tels que

$$\| Uf - \sum c_i f(g_i x) \| p < \varepsilon.$$

On en tire

$$\left| \int Uf(x) f'(x) \, dm(x) - \sum_{c_i} \int f(g_i gx) f'(x) \, dm(x) \right| < \epsilon \| f' \|_q .$$

En "intégrant" par rapport à la moyenne s on trouve

$$\left| \int Uf(x) f'(x) \, dm(x) - \sum_{c_i s_g} (c(f, f')(g_i g)) \right| < \epsilon \| f' \|_q$$

Comme s est invariante à gauche, $s_g(c(f, f')(g_i g)) = s_g(c(f, f')(g))$ d'où

$$\left| \int Uf(x) f'(x) \, dm(x) - s(c(f, f')) \right| < \epsilon \| f' \|_q .$$

Or ε est arbitraire.

Supposons maintenant que $f \epsilon L^\infty(X, m)$ et que $f' \epsilon L^1(X, m)$. On approche f' par des fonctions bornées f'_n. On a

$$\left| \int f(gx) f'(x) \, dm(x) - \int f(gx) f'_n(x) \, dm(x) \right| \leq \| f \|_\infty \| f' - f'_n \|_1 .$$

Comme f et f'_n appartiennent à $L^\infty(X, m)$ on a, d'après ce qui précède,

$$| s(c(f, f'_n)) - s(c(f, f'_n)) | \leq \| f \|_\infty \| f' - f'_n \|_1 .$$

Par suite

$$s(c(f, f')) = \lim s(c(f, f'_n)) = \lim \int Uf(x) f'_n(x) \, dm(x)$$

$$= \int_X Uf(x) f'(x) \, dm(x).$$

Enfin, d'après le Théorème C (ii), on a dans tous les cas

$$\int Uf . f' \, dm = \int U(Uf . f') \, dm = \int f . Uf' \, dm, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Les hypothèses de la proposition étant conservées, supposons de plus que $f \epsilon L^\infty(X, m)$. Pour presque tous les x la fonction sur $Gf_x : g \to f(gx)$ est une fonction de $L^\infty(G)$; par suite $s(f_x)$ est défini. *Il est naturel de se demander si l'on a* $s(f_x) = Uf(x)$ m-presque partout en x, ce qui serait la généralisation la plus immédiate du théorème ergodique individuel. La difficulté que l'on rencontre lorsque l'on veut établir un tel énoncé provient essentiellement du fait que pour calculer $s(f_x)$ on doit faire intervenir une famille de définition de s en général non dénombrable.

Soit (X, m, G) un système dynamique dans lequel X est un espace compact, m une mesure de Radon positive de masse totale 1, et G un groupe localement compact. On suppose que l'application $(g, x) \to gx$ de $G \times X$ dans est continue. On fixe une mesure de Haar invariante à gauche dg sur G et on considère une famille $h_n(g)$ de fonctions de $L^1(G, dg)$ telle que:

(1) pour tout n on a $\int h_n(g)dg = 1$,
(2) pour tout s dans G la suite $\int | h_n(sg) - h_n(g) | dg$ tend vers 0.

D'après M. Day [9] une telle suite existe sous la seule condition que G soit *dénombrable à l'infini.*

THEOREME D. *On garde les hypothèses et notations précédentes et on suppose qu'il existe un* $C > 0$ *et un* $r \geq 1$ *tels que*

$$\int_X \lim_n \sup \int_G h_n(g) \mid t(gx) \mid dg\, dm(x) \leq C \left[\int_X \mid t(x) \mid^r dm(x) \right]^{1/r}$$

pour toutes les fonctions $t(x)$ *appartenant à un sous-ensemble partout dense de* $C(X)$ *(pour la topologie de la norme).*

On a alors pour toute f *de* $L^\infty(X, m)$

$$Uf(x) = \lim_n \int_G h_n(g)f(gx)\, dg$$

la limite étant prise au sens L^1 *ou au sens presque-partout pour la mesure* m.

On posera

$$\| f \|_w = \int_X \lim_n \sup \int_G h_n(g) \mid f(gx) \mid dg\, dm(x)$$

pour toute f dans $L^\infty(X, m)$ et on dira que $\| f \|_w$ est la norme de Weyl de f. On a $\| f \|_1 \leq \| f \|_w \leq \| f \|_\infty$ pour toute $f \epsilon L^\infty(X, m)$. On déduit aussitôt des hypothèses et des inégalités précédentes que pour toute f dans $C(X)$ on a $\| f \|_w \leq C \| f \|_r$. De cette dernière inégalité résulte que, si (f_p) est une suite croissante bornée de fonctions continues d'enveloppe supérieure f on a $\| f \|_w \leq C \| f \|_r$. On peut faire la même opération pour les suites décroissantes, et finalement on a, en remarquant que $L^\infty(X, m)$ s'obtient à partir de $C(X)$ en fermant par rapport à l'opération de passage à la limite sur des suites monotones,

$$\| f \|_w \leq C \| f \|_r$$

pour toute f dans $L^\infty(X, m)$. Soit alors E_w la fermeture de $L^\infty(X, m)$ pour la norme de Weyl. On a $L^r(X, m) \subset E_w \subset L^1(X, m)$ et il en résulte que le dual de l'espace de Banach E_w s'identifie à un sous-espace de $L^1(X, m)$ considéré comme plongé dans le dual de $L^\infty(X, m)$. D'autre part, comme la famille $h_n(g)$ est asymptotiquement invariante à gauche (condition (2) précédant l'énoncé du théorème), on vérifie sans difficulté que $\| g.f \|_w = \| f \|_w$ pour tout g dans G et toute f dans $L^\infty(X, m)$. Il en résulte que G opère unitairement dans E_w. Le Corollaire 4 du Théorème A est applicable:

pour toute f de E_w il existe dans l'enveloppe convexe fermée dans E_w de l'orbite de f un élément invariant et un seul qui n'est autre que Uf, puisque cette enveloppe est contenue dans l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de f pour la norme L^1.

Pour établir le Théorème D on peut se limiter aux fonctions réelles f. La fonction Uf est alors réelle et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $g_1, \cdots, g_p$ dans G et $c_1, \cdots, c_p$ nombres réels positifs de somme égale à 1 tels que $\| Uf - \sum c_i f(g_i x)\|_w < \varepsilon$. Comme la fonction f est réelle on a l'inégalité

$$Uf(x) - \sum c_i f(g_i x) \leq | Uf(x) - \sum c_i f(g_i x)|$$

d'où

$$\int h_n(g) Uf(gx)\, dg - \sum \int c_i h_n(g) f(g_i g x)\, dg$$
$$\leq \int h_n(g)\, | Uf(gx) - \sum c_i f(g_i g x) |\, dg$$

Comme Uf et la mesure dg sont invariantes on a

$$\left| Uf(x) - \sum c_i \int h(g_i^{-1} g) f(gx)\, dg \right| \leq \int h_n(g)\, | Uf(gx) \sum c_i f(g_i g x) |\, dg$$

d'où l'on tire

$$Uf(x) - \sum c_i \lim_n \inf \int h(g_i^{-1} g) f(gx)\, dg$$
$$\leq \lim_n \sup \int h_n(g)\, | Uf(x) - \sum c_i f(g_i g x) |\, dg$$

Comme la famille $h_n(g)$ est asymptotiquement invariante à gauche et comme f est essentiellement bornée, on a m-presque partout

$$\lim_n \inf \int h_n(g_i^{-1} g) f(gx)\, dg = \lim_n \inf \int h_n(g) f(gx) dg$$

Finalement on trouve

$$\int_X Uf(x)\, dm(x) - \int_X \liminf_n \int_G h_n(g) f(gx) dg\, dm(x)$$
$$\leq \int_X \limsup_n \int_G h_n(g)\, | Uf(x) - \sum c_i f(g_i g x) |\, dg\, dm(x)$$
$$= \| Uf - \sum c_i f(g_i x) \|_w < \varepsilon.$$

On a ainsi

$$\int_X Uf(x)\, dm(x) \leq \int_X \liminf_n \int_X g_n(g) f(gx) dg\, dm(x) + \varepsilon$$

et ε est arbitraire, d'où

$$\int_X Uf(x)\ dm(x) \leq \int_X \liminf_n \int_G h_n(g)f(gx)dg\ dm(x)$$

On montre de même, en partant de l'inégalité

$$\sum c_i f(g_i gx) - Uf(x) \leq | \sum c_i f(g_i gx) - Uf(x)|.$$

que

$$\int_X \limsup_n \int_G h_n(g)f(gx)dg \leq \int_X Uf(x)\ dm(x)$$

On a ainsi

$$\int_X \limsup_n \int_G h_n(g)f(gx)dg - \liminf_n \int_G h_n(g)f(gx)dg \leq 0$$

d'où

$$\limsup_n \int_G h_n(g)f(gx)dg = \liminf_n \int_G h_n(g)f(gx)\ dx$$

m-presque partout. La suite $\int h_n(g)f(gx)dg$ est donc convergente m-presque partout. Or d'après le corollaire du Théorème B, cette suite converge au sens L^1 vers $Uf(x)$. La démonstration du théorème D est ainsi achevée, Q.E.D.

Corollaire. *On garde les mêmes hypothèses et on suppose de plus que X est métrisable et que G est moyennisable et dénombrable à l'infini. Il existe une suite (K_n) de sous-ensembles compacts de G de mesure non nulle telle que l'on ait*

$$Uf(x) = \lim\ (1/m(K_n)) \int_{K_n} f(gx)\ dg$$

m-presque-partout en x pour toute $f \in L^\infty(X, m)$.

Il résulte des conditions de Følner (cf. [6] §3.6 Th 3.6.2) et du fait que G est dénombrable à l'infini qu'il existe une *suite* (L_n) d'ensembles compacts non nuls de G telle que la suite $h_n = 1/m(L_n)$ fonction caractéristique de L_n soit asymptotiquement invariante à gauche. D'autre part $C(X)$ est séparable. Soit t_p une suite de fonctions de $C(X)$ partout dense dans $C(X)$. D'aprés le corollaire du Théorème B la suite en x

$$1/m(L_n) \int_{L_n} f_g(gx)\ dg$$

converge en norme L^1 vers Ut_p pour tout p. Par procédé diagonal on peut extraire de la suite des L_n une suite K_n telle que $(1/m(K_n))\int_{K_n} t_p(gx)dg$ converge m-presque partout vers Ut_p pour tout p. Le corollaire est alors, pour la suite (K_n) ainsi obtenue, une conséquence immédiate du Théorème D, Q.E.D.

D'après le corollaire précédent l'opérateur U est représentable comme une "moyenne" sur G au sens le plus élémentaire du terme. Le corollaire montre également que l'on peut choisir une suite (K_n) utilisable pour le calcul presque-partout de Uf pour toute f dans $L^\infty(X, m)$. Mais, contrairement à ce qui se passe pour la convergence L^1, on ne sait pas si la suite (K_n) est utilisable pour *tous les systèmes dynamiques* admettant G comme groupe des temps. La construction d'une suite (K_n) utilisable pour le calcul presque-partout de U pour *tous les systèmes dynamiques* et la caractérisation d'une telle suite semblent devoir poser de grandes difficultés.

Décomposition spectrale de la mesure m

On considère dans tout ce paragraphe un système dynamique (X, m, G). On désignera par $L_G^\infty(X, m)$ le sous-espace fermé de $L^\infty(X, m)$ composé des éléments invariants de $L^\infty(X, m)$, sous-espace qui est également une sous-algèbre sur laquelle on définit une involution par

$$f^* = \text{complexe conjuguée de } f.$$

Il est immédiat que $L_G^\infty(X, m)$ devient ainsi une C^*-algèbre. On désignera par S le spectre de Gelfand de $L_G^\infty(X, m)$ et par h l'isomorphisme de $L_G^\infty(X, m)$ sur $C(S, \mathbf{C})$ défini par la transformation de Gelfand.

LEMME 4. *Par restriction aux classes réelles de $L_G^\infty(X, m)$ la transformation de Gelfand définit un isomorphisme de l'espace de Riesz unitaire complètement réticulé* (cf. [1] §2) $(L_G^\infty(X, m, \mathbf{R}), 1)$ *sur l'espace de Riesz unitaire complètement réticulé* $(C(S, \mathbf{R}), 1)$.

Remarquons d'abord que la transformation de Gelfand transforme l'élément unité de l'algèbre $L_G(X, m)$ en l'élément unité de $C(S)$. D'autre part h définit par restriction une surjection de $L_G^\infty(X, m, \mathbf{R})$ sur $C(S, \mathbf{R})$: une f de $L_G^\infty(X, m)$ est réelle si et seulement si $\bar{f} = f$, ce qui entraîne $\overline{h(f)}; = h(f)$ la fonction $h(f)$ de $C(S)$ est donc réelle. Réciproquement soit ψ une fonction réelle sur S. On peut représenter ψ comme différence de deux fonctions réelles continues ≥ 0; pour montrer que h est surjective il suffit donc de montrer que toute φ réelle positive de $C(S, \mathbf{R})$ est l'image d'un élément réel de $L_G^\infty(X, m)$. Dire que φ est réelle positive entraîne qu'il existe ω dans $C(S)$ telle que $\varphi = \omega\bar{\omega}$; si $f \epsilon L^\infty(X, m)$ est telle que $\omega = h(f)$, on a $\varphi = h(f\bar{f})$. Mais $f\bar{f}$ est un élément réel de $L_G^\infty(X, m)$.

Pour achever la démonstration du lemme il reste à montrer que l'isomorphisme h transforme le cône des éléments ≥ 0 de $L_G^\infty(X, m, \mathbf{R})$ en le cône des éléments ≥ 0 de $C(S, \mathbf{R})$. On a établi plus haut que toute fonction réelle positive de $C(S, \mathbf{R})$ était l'image d'une fonction réele positive de $L_G^\infty(X, m, \mathbf{R})$. Un argument analogue montre que l'image d'une fonction positive de $L_G(X, m, \mathbf{R})$ est un élément positif de $C(S, \mathbf{R})$, Q.E.D.

COROLLAIRE. *Le spectre de Gelfand de $L_G^\infty(X, m)$ s'identifie au spectre de Stone-Kakutani de l'espace de Riesz unitaire complètement réticulé* $(L_G^\infty(X, m, \mathbf{R}), l)$.

Soit T le spectre de Stone-Kakutani de $(L_G^\infty(X, m, \mathbf{R}), l)$. Des isomorphismes d'espaces de Riesz complétement unitaires entre $(L_G^\infty(X, m, \mathbf{R}), l)$ et $(C(T, \mathbf{R}), l)$ et entre $(L_G^\infty(X, m, \mathbf{R}), l)$ et $(C(S, \mathbf{R}), l)$ on déduit un isomorphisme d'espaces de Riesz unitaires complétement réticulés entre $(C(T, \mathbf{R}), l)$ et $(C(S, \mathbf{R}), l)$. Mais il est bien connu qu'un tel isomorphisme est réalisé par un homéomorphisme de T sur S, Q.E.D.

Une remarque analogue peut être faite pour l'algèbre de Banach complexe $L^\infty(X, m)$: le spectre de Gelfand $\hat{X}$ de $L^\infty(X, m)$ s'identifie au spectre de Stone-Kakutani de l'espace de Riesz unitaire complétement réticulé $(L^\infty(X, m, \mathbf{R}), l)$. Rappelons que la mesure m sur X définit une mesure de Radon $\hat{m} \geq 0$ sur $\hat{X}$ et que $L^1(X, m)$ s'identifie de façon naturelle avec $L^1(\hat{X}, \hat{m})$. Enfin il existe un relèvement isométrique canonique de $L^1(\hat{X}, \hat{m})$ dans l'espace de fonctions $\mathcal{L}^1(\hat{X}, \hat{m})$ sur $\hat{X}$, l'image d'un élément de $L^1(\hat{X}, \hat{m})$ étant une application continue de $\hat{X}$ dans la droite numérique achevée $\bar{\mathbf{R}}$, cf. [7] Ch. II §1 exerc. 13 g) et [1] §3, Prop. 2. Nous identifierons dans ce qui suit les éléments de $L^1(\hat{X}, \hat{m})$ aux fonctions continues correspondantes sur $\hat{X}$. Des remarques analogues peuvent être faites pour $L^1(S, n)$, où n est la mesure sur S définie par la forme linéaire sur $C(S)$, identifié à $L_G^\infty(X, m)$, obtenue par restriction de m.

L'injection canonique $L_G^\infty(X, m) \to L^\infty(X, m)$, qui est un homomorphisme isométrique d'algèbres de Banach, définit une application continue surjective q de $\hat{X}$ sur S, l'image d'une fonction continue sur S par q étant donc une fonction sur $\hat{X}$ invariante par G.

D'autre part l'injection canonique de $L_G^1(X, m)$ dans $L^1(X, m)$ se transpose en une application linéaire continue p de $C(\hat{X})$ dans $C(S)$. Pour tout $s \in S$ on définit une mesure de Radon ≥ 0 m_s sur $\hat{X}$ par $m_s(f) = p(f)(s)$.

Le théorème suivant précise les constructions du §3 de [1]:

Theoreme E. (i) *Pour tout élément (réel ou complexe) f de $L^1(\hat{X}, \hat{m})$ f est m_s–intégrable pour n–presque tous les s de S. La fonction $s \to m_s(f)$ est n-intégrable et on a*

$$\int_S m_s(f)\, dn(s) = \int_{\hat{X}} f\, d\hat{m}.$$

(ii) *Si f est un élément de $L_G^1(\hat{X}, \hat{m})$ il existe h dans $L^1(S, n)$ tel que $f = hq$. Dans ce qui suit nous identifierons h et f.*

(iii) *Soit $f \in L^1(\hat{X}, \hat{m})$. En identifiant suivant la convention précédente l'élément invariant Uf à un élément de $L^1(S, n)$, on a pour presque tous les s dans le cas général et pour tous les s lorsque f est bornée*

$$Uf(s) = \int_{\hat{X}} f(x)\, dm_s(x).$$

(i) La fonction f est continue, donc m_s-mesurable pour tout s. Pour que f soit m_s-intégrable il suffit donc que $\int |f|\, dm_s < \infty$; il en résulte que l'on peut supposer f réelle et positive. On posera $f_n = \inf(f, n)$ pour tout $n \geq 0$. Comme f_n est bornée et continue, la fonction $m_s(f_n)$ de s est continue et on a

$$\int_{\hat{X}} f_n \, d\hat{m} = \int_S m_s(f_n) \, dn(s).$$

D'après le théorème de B. Levi $\sup_n m_s(f_n)$ est n-intégrable et est en particulier finie n-presque-partout. Comme m_s est une mesure de Radon on a

$$\sup_n m_s(f_n) = m_s(f),$$

les deux membres étant simultanément infinis.

(ii) En représentant f sous la forme

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$$

on voit que l'on peut supposer f réelle positive. Posons $f_n = \inf(f, n)$. La fonction continue f est l'enveloppe supérieure des f_n dans $C(\hat{X}, \bar{\mathbf{R}})$. Comme f_n est bornée et invariante, il existe h_n dans $C(S, \mathbf{R})$ telle que $f_n = hq_n$. Soit h l'enveloppe supérieure des h_n dans $C(S, \bar{\mathbf{R}})$, qui existe puisque S est stonien. On a $| hq | \leq f$. D'autre part

$$\int_{\hat{X}} hq \, d\hat{m} = \int_S h \, dn = \sup_p \int_S h_p \, dn$$

la dernière égalité ayant lieu parce que l'enveloppe supérieure des h_n dans $C(S, \bar{\mathbf{R}})$ coïncide n-presque partout avec l'enveloppe supérieure des fonctions h_n, cf. [7] Ch. II §1, exerc. 13 (f). Or

$$\int h_n(s) \, dn = \int f_n(x) \, d\hat{m}(x) \quad .D'où$$

$$\int_{\hat{X}} hq \, d\hat{m} = \int_{\hat{X}} f \, d\hat{m}.$$

Comme $\hat{m}$ est de support X, on a $f = hq$.

(iii) On peut encore supposer f réelle positive. On a, si $f_n = \inf(f, n)$, $Uf = \lim Uf_n$ dans $L^1(S, n)$ et, comme Uf_n est une suite croissante, $Uf = \lim Uf_n$ n-presque-partout. On est donc ramené au cas où f_n est bornée.

Soit h un élément de $C(S)$. Pour toute $k \in L^1(S, n)$ on a

$$\int_S p(hp)k \, dn = \int_{\hat{X}} (hq)(kq) \, d\hat{m} = \int_{\hat{X}} (hk)q \, d\hat{m} = \int_S hk \, d\hat{m}.$$

Il en résulte que $p(h_q) = h$.

En particulier pour f dans $L^\infty(\hat{X}, \hat{m})$ on a, en identifiant Uf et la fonction sur S qui lui correspond,

$$p(Uf) = Uf \quad \text{dans} \quad C(S),$$

d'où

$$\int_{\hat{X}} Uf(x) \, d\hat{m}_s(x) = Uf(s) \quad \text{pour tout} \quad s \quad \text{dans} \quad S.$$

Mais on sait que

$$\int_{\hat{X}} Uf\, d\hat{m}_s(x) = \int_{\hat{X}} f(x)\, d\hat{m}_s(x)$$

n-presque-partout dans S d'après le début du §4 de [1]. Or chacun des deux membres est une fonction continue de s, Q.E.D.

References

1. F. Aribaud, *Un théorème ergodique pour les espaces L^1*, Journal of Functional Analysis vol. 5 (1970), pp. 395–411.
2. G. A. Elliott, Remarques sur [1] (communication privée).
3. E. Alaoglu et G. Birkhoff, *General ergodic theorems*, Ann. of Math., vol. 41 (1940), pp. 293–309.
4. F. Riesz et B. sz Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Gauthiers-Villars, Paris, et Akadémiai Kiado, Budapest, 1954.
5. W. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 67 (1949), pp. 217–240.
6. F. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1969.
7. N. Bourbaki, *Intégration*, Chapters I à IV, 2° édition, Hermann, Paris, 1965.
8. D. Ruelle, *Statistical mechanics*, W. A. Benjamin, New York, 1969.
9. M. Day, *Amenability and equicontinuity*, *Studia Math.*, vol. 21 (1968), pp. 481–494.

Universite Paris
Paris