ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 22, Number 1, March 1978

ÜBER SUMMEN VON RUDIN-SHAPIROSCHEN KOEFFIZIENTEN

VON

JOHN BRILLHART UND PATRICK MORTON

Abstract

The Rudin–Shapiro coefficients $\{a(n)\}$ are an infinite sequence of ± 1's, defined recursively by $a(0) = 1$, $a(2n) = a(n)$, and $a(2n+1) = (-1)^n a(n)$, $n \geq 0$. Various formulas are developed for the nth partial sum $s(n)$ and the nth alternating partial sum $t(n)$ of this sequence. These formulas are then used to show that $\sqrt{3/5} < s(n)/\sqrt{n} < \sqrt{6}$ and $0 \leq t(n)/\sqrt{n} < \sqrt{3}$, $n \geq 1$, where the inequalities are sharp and the ratios are dense in the two intervals. For a given $n \geq 1$, the equation $s(k) = n$ is shown to have exactly n solutions k.

1. Einleitung

Die hier betrachtete Zahlenfolge $\{a(n)\}$, deren Glieder als die Koeffizienten der in [1], [2], und [3] untersuchten Polynome erscheinen, wurde von Shapiro [5] und Rudin [4] eingeführt. Diese Glieder lassen sich wie folgt induktiv definieren:

DEFINITION 1. Es sei $a(0) = 1$, und, für $n \geq 0$, $a(2n) = a(n)$, $a(2n+1) = (-1)^n a(n)$.

Man zeigt leicht, daß die Zahlen $a(n)$ für alle $n \geq 0$ durch Definition 1 bestimmt sind. Eine explizite Formel für $a(n)$ (siehe [1]) gibt der

SATZ 1. *Ist* $n = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^r$, $k \geq 0$, $\varepsilon_r = 0$ *oder* 1, *so ist* $a(n) = (-1)^{e(n)}$, *wo* $e(n) = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß die Funktion $f(n) = (-1)^{e(n)}$ die drei Bedingungen der Definition 1 erfüllt:

(i) $f(0) = 1$.

(ii) Aus $2n = \sum_{r=0}^{k+1} \varepsilon_{r-1} 2^r$, $\varepsilon_{-1} = 0$, folgt

$$e(2n) = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_{r-1}\varepsilon_r = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1} = e(n),$$

$$f(2n) = f(n).$$

Received August 17, 1976.

(iii) Aus $2n+1=\sum_{r=0}^{k+1}\varepsilon_{r-1}2^r$, $\varepsilon_{-1}=1$, folgt

$$e(2n+1)=\varepsilon_{-1}\varepsilon_0+\sum_{r=1}^{k}\varepsilon_{r-1}\varepsilon_r=\varepsilon_0+e(n)\equiv n+e(n)(\mathrm{mod}\ 2),$$
$$f(2n+1)=(-1)^{n+e(n)}=(-1)^n f(n).$$

Beispiel 1. $a(2^k)=1$, $k\geq 0$; $a(2^k-1)=(-1)^{k+1}$, $k\geq 1$.

Beispiel 2. $a((2^{2k}-1)/3)=1$, $k\geq 0$, was unmittelbar aus

$$(2^{2k}-1)/3=\textstyle\sum_{r=0}^{k-1}2^{2r}$$

folgt.

Beispiel 3. Für $n=(5\cdot 2^{2k}-2)/3$, $k\geq 0$, gilt $(-1)^n a(n)=-1$. Für $k=0$ ist das klar. Für $k\geq 1$ ist n gerade, also $(-1)^n a(n)=a(n)=-1$ wegen $(5\cdot 2^{2k}-2)/3=2^{2k+1}-1-\sum_{r=0}^{k-1}2^{2r}$.

Beispiel 4.

$$a\left(2^{2k+1}-1-\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon_r 2^{2r+1}\right)=1,\qquad k\geq 0;$$
$$a\left(2^{2k}-1-\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon_r 2^{2r+1}\right)=-1,\quad k\geq 1.$$

2. $s(n)$ und $t(n)$

Die Summen, mit denen diese Arbeit zu tun hat, sind folgendermaßen definiert:

DEFINITION 2. Es sei für $n\geq 0$

(1) $$s(n)=\sum_{r=0}^{n}a(r),$$

(2) $$t(n)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r a(r).$$

TAFEL 1

n	$a(n)$	$s(n)$	$t(n)$	n	$a(n)$	$s(n)$	$t(n)$
0	1	1	1	8	1	5	1
1	1	2	0	9	1	6	0
2	1	3	1	10	1	7	1
3	−1	2	2	11	−1	6	2
4	1	3	3	12	−1	5	1
5	1	4	2	13	−1	4	2
6	−1	3	1	14	1	5	3
7	1	4	0	15	−1	4	4

Ersichtlich gilt

$$s(n) \equiv t(n) \equiv n + 1 \pmod 2. \tag{3}$$

SATZ 2.

$$s(2n) = s(n) + t(n-1), \quad n \geq 1, \tag{4}$$

$$s(2n+1) = s(n) + t(n), \quad n \geq 0, \tag{5}$$

$$t(2n) = s(n) - t(n-1), \quad n \geq 1, \tag{6}$$

$$t(2n+1) = s(n) - t(n), \quad n \geq 0. \tag{7}$$

Beweis. Aus Definition 2,1 ergibt sich

$$\begin{aligned} s(2n) &= \sum_{r=0}^{2n} a(r) \\ &= \sum_{r=0}^{n} a(2r) + \sum_{r=0}^{n-1} a(2r+1) \\ &= \sum_{r=0}^{n} a(r) + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r a(r) \\ &= s(n) + t(n-1), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s(2n+1) &= s(2n+2) - a(2n+2) \\ &= s(n+1) + t(n) - a(n+1) \\ &= s(n) + t(n). \end{aligned}$$

Ebenso folgen (6) und (7).

SATZ 3.

$$s(4n) = s(n) + s(n-1) = 2s(n) - a(n), \quad n \geq 1, \tag{8}$$

$$s(4n+1) = s(4n+3) = 2s(n), \quad n \geq 0, \tag{9}$$

$$s(4n+2) = 2s(n) + (-1)^n a(n), \quad n \geq 0. \tag{10}$$

Beweis. Aus (4) und (7) ergibt sich

$$\begin{aligned} s(4n) &= s(2n) + t(2n-1) \\ &= s(n) + t(n-1) + s(n-1) - t(n-1) \\ &= s(n) + s(n-1) \\ &= 2s(n) - a(n). \end{aligned}$$

Nach Definition 2,1 hat man auch

$$\begin{aligned} s(4n+1) &= s(4n) + a(4n+1) = 2s(n) - a(n) + a(n) = 2s(n), \\ s(4n+2) &= s(4n+1) + a(4n+2) = 2s(n) + (-1)^n a(n), \\ s(4n+3) &= s(4n+2) + a(4n+3) = 2s(n) + (-1)^n a(n) - (-1)^n a(n) = 2s(n). \end{aligned}$$

SATZ 4.

$$t(4n) = 2t(n-1) + a(n), \quad n \geq 1, \tag{11}$$

$$t(4n+1) = 2t(n-1), \quad n \geq 1, \tag{12}$$

$$t(4n+2) = t(n) + t(n-1), \quad n \geq 1, \tag{13}$$

$$t(4n+3) = 2t(n), \quad n \geq 0. \tag{14}$$

Beweis. Folgt wie bei Satz 3 aus (6), (4), (7).

Beispiel 5. $s(2^k) = 2^{[(k+1)/2]} + 1$, $k \geq 0$.

Für $k = 0$, 1 klar. Weiter läßt sich mittels (8) und Beispiel 1 induktiv rechnen:

$$s(2^{k+1}) = 2s(2^{k-1}) - a(2^{k-1}) = 2(2^{[k/2]} + 1) - 1 = 2^{[(k+2)/2]} + 1.$$

Aus Beispiel 1, 5 folgt:

Beispiel 6.

$$s(2^k - 1) = 2^{[(k+1)/2]}, \quad k \geq 0,$$
$$s(2^k - 2) = 2^{[(k+1)/2]} + (-1)^k, \quad k \geq 1.$$

Beispiel 7. $s(3 \cdot 2^{2k} - 1) = 3 \cdot 2^k$, $k \geq 0$; $s(3 \cdot 2^{2k+1} - 1) = 2^{k+2}$, $k \geq 0$.

Das ergibt sich aus (9):

$$s(3 \cdot 2^{2k} - 1) = 2s(3 \cdot 2^{2k-2} - 1) = \cdots = 2^k s(3 \cdot 2^0 - 1) = 3 \cdot 2^k,$$
$$s(3 \cdot 2^{2k+1} - 1) = 2s(3 \cdot 2^{2k-1} - 1) = \cdots = 2^k s(3 \cdot 2 - 1) = 2^{k+2}.$$

Beispiel 8. $t(2^{2k}) = 2^k + 1$, $k \geq 1$; $t(2^{2k+1}) = 1$, $k \geq 0$.

Nach (6), (4) und Beispiel 5 gilt

$$t(2^{2k}) = 2s(2^{2k-1}) - s(2^{2k}) = 2^{k+1} + 2 - 2^k - 1 = 2^k + 1$$

und

$$t(2^{2k+1}) = 2s(2^{2k}) - s(2^{2k+1}) = 2^{k+1} + 2 - 2^{k+1} - 1 = 1.$$

Aus Beispiel 1, 8 ergibt sich weiter:

Beispiel 9.

$$t(2^{2k} - 1) = 2^k, \; k \geq 0,$$
$$t(2^{2k+1} - 1) = 0, \quad k \geq 0,$$
$$t(2^{2k} - 2) = 2^k - 1, \quad k \geq 1,$$
$$t(2^{2k+1} - 2) = 1, \quad k \geq 0.$$

Beispiel 10. $t(3 \cdot 2^k - 1) = 2^{[(k+1)/2]}$, $k \geq 0$.

Das folgt induktiv aus (14):

$$t(3 \cdot 2^{2k} - 1) = 2t(3 \cdot 2^{2k-2} - 1) = \cdots = 2^k t(2) = 2^k,$$
$$t(3 \cdot 2^{2k+1} - 1) = 2t(3 \cdot 2^{2k-1} - 1) = \cdots = 2^k t(5) = 2^{k+1}.$$

SATZ 5.

$$s(n + 2^{2k}) - s(n) = 2^k, \quad 0 \leq n \leq 2^{2k-1} - 1,\ k \geq 1, \tag{15}$$
$$s(n + 2^{2k}) + s(n) = 3 \cdot 2^k, \quad 2^{2k-1} - 1 \leq n \leq 2^{2k} - 1,\ k \geq 1, \tag{16}$$
$$s(n + 2^{2k+1}) - s(n) = 2^{k+1}, \quad 0 \leq n \leq 2^{2k} - 1,\ k \geq 0, \tag{17}$$
$$s(n + 2^{2k+1}) + s(n) = 2^{k+2}, \quad 2^{2k} - 1 \leq n \leq 2^{2k+1} - 1,\ k \geq 0. \tag{18}$$

Beweis. Bei festem k ist der Satz für alle Anfangswerte von n (bzw. 0, $2^{2k-1} - 1$, 0, $2^{2k} - 1$) wegen

$$s(2^{2k}) - s(0) = 2^k + 1 - 1 = 2^k,$$
$$s(3 \cdot 2^{2k-1} - 1) + s(2^{2k-1} - 1) = 2^{k+1} + 2^k = 3 \cdot 2^k,$$
$$s(2^{2k+1}) - s(0) = 2^{k+1} + 1 - 1 = 2^{k+1},$$
$$s(3 \cdot 2^{2k} - 1) + s(2^{2k} - 1) = 3 \cdot 2^k + 2^k = 2^{k+2}$$

klar, wobei die betrachteten Werte aus Beispiel 5, 6, 7 zu entnehmen sind.

Es sei $m \geq 1$ fest und der Satz für n schon bewiesen, wo m anstelle von $2k$ bzw. $2k + 1$ gesetzt wird. Daraus folgt die Behauptung für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
s(n + 1 + 2^m) &= s(n + 2^m) + a(n + 1 + 2^m) \\
&= s(n + 2^m) + \begin{cases} a(n+1), & 0 \leq n + 1 \leq 2^{m-1} - 1, \\ -a(n+1), & 2^{m-1} \leq n + 1 \leq 2^m - 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2^k + s(n) + a(n+1) = 2^k + s(n+1), \\ \qquad\qquad m = 2k,\ 0 \leq n + 1 \leq 2^{2k-1} - 1 \\ 3 \cdot 2^k - s(n) - a(n+1) = 3 \cdot 2^k - s(n+1), \\ \qquad\qquad m = 2k,\ 2^{2k-1} \leq n + 1 \leq 2^{2k} - 1 \\ 2^{k+1} + s(n) + a(n+1) = 2^{k+1} + s(n+1), \\ \qquad\qquad m = 2k + 1,\ 0 \leq n + 1 \leq 2^{2k} - 1 \\ 2^{k+2} - s(n) - a(n+1) = 2^{k+2} - s(n+1), \\ \qquad\qquad m = 2k + 1,\ 2^{2k} \leq n + 1 \leq 2^{2k+1} - 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise beweist man

SATZ 6.

$$t(n + 2^{2k}) - t(n) = 2^k, \quad 0 \le n \le 2^{2k-1} - 1,\ k \ge 1, \tag{19}$$

$$t(n + 2^{2k}) + t(n) = 2^k, \quad 2^{2k-1} - 1 \le n \le 2^{2k} - 1,\ k \ge 1, \tag{20}$$

$$t(n + 2^{2k+1}) - t(n) = 0, \quad 0 \le n \le 2^{2k} - 1,\ k \ge 0, \tag{21}$$

$$t(n + 2^{2k+1}) + t(n) = 2^{k+1}, \quad 2^{2k} - 1 \le n \le 2^{2k+1} - 1,\ k \ge 0. \tag{22}$$

SATZ 7. *Für $k \ge 1$ und $0 \le n \le 2^k - 1$ ist*

$$a(2^k - 1 - n) = (-1)^{k+n+1} a(2^k + n). \tag{23}$$

Beweis (Vollständige Induktion). Für $k = 1$ ist der Satz klar. Sei er für k und jedes n mit $0 \le n \le 2^k - 1$ schon bewiesen. Wenn $0 \le n \le 2^{k+1} - 1$ ist, so gilt im Falle von geradem n $(= 2n_1)$

$$\begin{aligned} a(2^{k+1} - 1 - 2n_1) &= (-1)^{2^k - 1 - n_1} a(2^k - 1 - n_1) \\ &= (-1)^{n_1+1}(-1)^{k+n_1+1} a(2^k + n_1) \\ &= (-1)^{k+n+2} a(2^{k+1} + n), \end{aligned}$$

und im Falle von ungeradem n $(= 2n_1 + 1)$

$$\begin{aligned} a(2^{k+1} - 1 - n) &= a(2^k - n_1 - 1) \\ &= (-1)^{k+n_1+1} a(2^k + n_1) \\ &= (-1)^{k+n_1+1+2^k+n_1} a(2^{k+1} + n) \\ &= (-1)^{k+n+2} a(2^{k+1} + n). \end{aligned}$$

Auf Grund von Satz 7 gilt

SATZ 8. *Es sei $k \ge 1$. Dann ist*

$$t(2^{2k} - 2 - n) = \begin{cases} 2^k - s(n), & 0 \le n \le 2^{2k-1} - 1, \\ s(n) - 2^k, & 2^{2k-1} \le n \le 2^{2k} - 2, \end{cases} \tag{24}$$

und

$$t(2^{2k+1} - 2 - n) = \begin{cases} s(n), & 0 \le n \le 2^{2k} - 1, \\ 2^{k+1} - s(n), & 2^{2k} \le n \le 2^{2k+1} - 2. \end{cases} \tag{25}$$

Beweis. Bei festem $k \ge 1$ ist der Satz für alle Anfangswerte von n (bzw, 0, 2^{2k-1}, 0, 2^{2k}) klar, wegen

$$t(2^{2k} - 2) = 2^k - 1 = 2^k - s(0),$$

$$t(2^{2k-1} - 2) = 1 = (2^k + 1) - 2^k = s(2^{2k-1}) - 2^k,$$

$$t(2^{2k+1} - 2) = 1 = s(0),$$

$$t(2^{2k} - 2) = 2^k - 1 = 2^{k+1} - (2^k + 1) = 2^{k+1} - s(2^{2k}),$$

wo man die Werte $t(2^k - 2)$ aus Beispiel 9 zu entnehmen hat. Nun sei $m \geq 2$ fest und der Satz für n bewiesen, wo m anstelle von $2k$ bzw. $2k + 1$ gesetzt wird. Dann folgt seine Gültigkeit für $n + 1$ aus (23):

$$\begin{aligned}
t(2^m - 2 - (n + 1)) &= t(2^m - 2 - n) - (-1)^{2^m - 2 - n} a(2^m - 2 - n) \\
&= t(2^m - 2 - n) - (-1)^n a(2^m - 1 - (n + 1)) \\
&= t(2^m - 2 - n) + (-1)^{m+1} a(2^m + n + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t(2^m - 2 - n) + \begin{cases} (-1)^{m+1} a(n + 1), & 0 \leq n + 1 \leq 2^{m-1} - 1, \\ (-1)^m a(n + 1), & 2^{m-1} \leq n + 1 \leq 2^m - 2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2^k - s(n) - a(n + 1) = 2^k - s(n + 1), \\ \qquad\qquad m = 2k,\ 0 \leq n + 1 \leq 2^{2k-1} - 1, \\ s(n) - 2^k + a(n + 1) = s(n + 1) - 2^k, \\ \qquad\qquad m = 2k,\ 2^{2k-1} \leq n + 1 \leq 2^{2k} - 2, \\ s(n) + a(n + 1) = s(n + 1), \\ \qquad\qquad m = 2k + 1,\ 0 \leq n + 1 \leq 2^{2k} - 1, \\ 2^{k+1} - s(n) - a(n + 1) = 2^{k+1} - s(n + 1), \\ \qquad\qquad m = 2k + 1,\ 2^{2k} \leq n + 1 \leq 2^{2k+1} - 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

3. Das Verhalten der Folgen in den Intervallen $[2^k, 2^{k+1} - 1]$

Aus Satz 3 folgt durch Induktion unmittelbar, daß $s(n) \geq 1$ ist. Man hat aber den etwas genaueren

SATZ 9. (a) *Ist* $2^{2k} \leq n \leq 2^{2k+1} - 1$, $k \geq 0$, *so gilt*

$$2^k + 1 \leq s(n) \leq 2^{k+1}. \tag{26}$$

Links besteht Gleichheit dann und nur dann, wenn $n = 2^{2k}$ *oder* $(5 \cdot 2^{2k} - 2)/3$ *ist; rechts dann und nur dann, wenn*

$$n = 2^{2k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}$$

mit $\varepsilon_r = 0$ *oder* 1 *ist.*

(b) *Ist* $2^{2k+1} \leq n \leq 2^{2k+2} - 1$, $k \geq 0$, *so gilt*

$$2^{k+1} \leq s(n) \leq 2^{k+2} - 1. \tag{27}$$

Links besteht Gleichheit dann und nur dann, wenn

$$n = 2^{2k+2} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}$$

mit $\varepsilon_r = 0$ *oder* 1 *ist; rechts dann und nur dann, wenn* $n = 2(2^{2k+2} - 1)/3$ *ist.*

Beweis (Vollständige Induktion). Für $k = 0$ ist alles klar, da $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ und $s(3) = 2$. Seien alle Behauptungen für k wahr und sei $m = [n/4]$ gesetzt.

(a) Es liege n im Intervall $2^{2k+2} \leq n \leq 2^{2k+3} - 1$; dann liegt m im Intervall $2^{2k} \leq m \leq 2^{2k+1} - 1$.

(i) $n = 4m$. Aus (8), (26) erhält man

$$s(4m) = s(m) + s(m-1) \leq \begin{cases} 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2} & \text{für } m > 2^{2k}, \\ 2^{k+1} + s(2^{2k} - 1) = 2^{k+1} + 2^k < 2^{k+2} & \text{für } m = 2^{2k}, \end{cases}$$

letzeres wegen Beispiel 6. Außerdem gilt

$$s(4m) = s(m) + s(m-1) \geq \begin{cases} 2^k + 1 + 2^k + 1 > 2^{k+1} + 1 & \text{für } m > 2^{2k}, \\ 2^k + 1 + 2^k = 2^{k+1} + 1 & \text{für } m = 2^{2k}. \end{cases} \tag{28}$$

(ii) $n = 4m + 1$ oder $4m + 3$. (9) gibt $s(n) = 2s(m)$, und nach (26) ist dies $\leq 2^{k+2}$ und $\geq 2^{k+1} + 2 > 2^{k+1} + 1$.

(iii) $n = 4m + 2$. Aus (10), (26) folgt

$$s(4m+2) = 2s(m) + (-1)^m a(m) \leq \begin{cases} 2^{k+2} - 1 < 2^{k+2} & \text{für } s(m) \leq 2^{k+1} - 1, \\ 2^{k+2} - a(m) = 2^{k+2} - 1 < 2^{k+2} & \text{für } s(m) = 2^{k+1}. \end{cases}$$

Im zweiten Falle folgt $a(m) = 1$ aus Beispiel 4, da nach Annahme

$$m = 2^{2k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}.$$

Auch gilt $s(4m+2) \geq 2(2^k + 1) - 1 = 2^{k+1} + 1$. Damit ist (26) für $k + 1$ bewiesen.

Nun ist der zweite Teil der Behauptung (a) für $k + 1$ zu beweisen.

Man nehme zuerst an, daß $s(n) = 2^{k+1} + 1$. Dann ist n gerade; im Falle $n = 4m$ gibt (28), daß $m = 2^{2k}$, also $n = 2^{2k+2}$ ist. Im Falle $n = 4m + 2$ erhält man aus (10), (26)

$$2s(m) + (-1)^m a(m) = 2^{k+1} + 1,$$
$$2^k + 1 \leq s(m) = 2^k + [1 - (-1)^m a(m)]/2,$$
$$(-1)^m a(m) = -1, \quad s(m) = 2^k + 1.$$

Nach Annahme ist $m = 2^{2k}$ oder $(5 \cdot 2^{2k} - 2)/3$; nach Beispiel 1 nebst $(-1)^m a(m) = -1$ gilt

$$m = (5 \cdot 2^{2k} - 2)/3, \quad n = 4m + 2 = (5 \cdot 2^{2k+2} - 2)/3.$$

Umgekehrt ist $s(n) = 2^{k+1} + 1$ für $n = 2^{2k+2}$ nach Beispiel 6. Andererseits folgt aus $n = (5 \cdot 2^{2k+2} - 2)/3$, daß $n \equiv 2 \pmod 4$, $m = (5 \cdot 2^{2k} - 2)/3$, $(-1)^m a(m) = -1$ (Beispiel 3), und $s(n) = 2s(m) + (-1)^m a(m) = 2^{k+1} + 1$.

Nun werde $s(n) = 2^{k+2}$ angenommen. Dann ist n ungerade und $s(m) = 2^{k+1}$ nach (9); daraus folgt

$$m = 2^{2k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1},$$

$$4m + 1 = 2^{2k+3} - 3 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+3}$$

$$= 2^{2k+3} - 1 - \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_{r-1} 2^{2r+1} \quad \text{mit } \varepsilon_{-1} = 1,$$

und

$$4m + 3 = 2^{2k+3} - 1 - \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_{r-1} 2^{2r+1} \quad \text{mit } \varepsilon_{-1} = 0;$$

in jedem Fall ist n von der behaupteten Form.

Umgekehrt, ist $n = 2^{2k+3} - 1 - \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1}$, so folgt

$$m = [n - (3 - 2\varepsilon_0)]/4 = 2^{2k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{2r+1},$$

und (9) gibt $s(n) = 2s(m) = 2^{k+2}$. Damit ist (a) vollständig bewiesen.

(b) Ergibt sich auf dieselbe Weise.

Analog zu Satz 9 gelten für $t(n)$ folgende drei Sätze.

SATZ 10 (Nullstellensatz). *Für $n \geq 0$ ist $t(n) = 0$ dann und nur dann, wenn $n = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1} - 1$ mit $k \geq 0$, $\varepsilon_r = 0$ oder 1.*

Beweis (Vollständige Induktion). Zum Beweis werden die natürlichen Zahlen in die Intervalle $\mathfrak{J}_k = [2^{2k+1} - 1, 2^{2k+3} - 2]$, $k \geq 0$, eingeteilt. Dann lautet die Behauptung: Gehört n zum Intervall $\mathfrak{J}_k$, so ist $t(n) = 0$ genau dann, wenn $n = 2^{2k+1} - 1 + \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}$.

(i) Für $k = 0$ klar, wegen $t(1) = 0$, $t(n) \neq 0$, $2 \leq n \leq 6$.

(ii) Angenommen, die Behauptung stimme für k, und n gehöre zum Intervall $\mathfrak{J}_{k+1}$. Sei

$$n = 2^{2k+3} - 1 + \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1} \quad \text{und} \quad m = 2^{2k+1} - 1 + \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{2r+1}$$

gesetzt. Dann ist $t(m) = 0$ nach Annahme, und $n = 4m + 2\varepsilon_0 + 3$, also, nach (14) und (12), $t(n) = 2t(m) = 0$.

Ist umgekehrt $t(n) = 0$, so muß n ungerade sein (gemäß (3)), also $n = 4m \pm 1$, $m \geq 2$. Nach (12) und (14) ist $2t(m - 1) = t(n) = 0$. Daher hat man, da $m - 1$ in

$\mathfrak{J}_k$ liegt (m ist gerade),

$$m = 2^{2k+1} + \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1},$$

$$4m - 1 = 2^{2k+3} - 1 + \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_{r-1} 2^{2r+1}, \quad \varepsilon_{-1} = 0$$

und

$$4m + 1 = 2^{2k+3} - 1 + \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_{r-1} 2^{2r+1}, \quad \varepsilon_{-1} = 1.$$

In beiden Fällen ist n von der behaupteten Form.

Bemerkung. Daß die in Satz 10 angegebenen Zahlen tatsächlich Lösungen der Gleichung $t(m) = 0$ sind, läßt sich auch mittels (21) schließen.

ZUSATZ. *Für* $n \geq 0$ *ist* $s(n) = t(n)$ *genau dann, wenn* $n = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r} - 1$ *ist,* $k \geq 0$, $\varepsilon_r = 0$ *oder* 1.

Beweis. Folgt aus (7) und Satz 10.

SATZ 11. *Für* $n \geq 0$ *ist*

$$t(n) \geq 0. \tag{29}$$

Beweis. Die Behauptung sei falsch, und es sei n_1 die kleinste ganze Zahl, für die (29) nicht gilt. Dann ist, da $t(n)$ sich nur schrittweise ändert, $n_1 \geq 2$, $t(n_1) = -1$, $t(n_1 - 1) = 0$. Nach Satz 10 ist $n_1 = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1}$, demgemäß $a(n_1) = 1$, und $-1 = t(n_1) = t(n_1 - 1) + (-1)^{n_1} a(n_1) = 0 + 1 = 1$; Widerspruch.

ZUSATZ. *Für* $n \geq 0$ *ist*

$$s(n) \geq t(n), \quad s(n+1) \geq t(n),$$
$$s(2n) \geq s(n), \quad s(2n+1) \geq s(n).$$

Beweis. Folgt aus Satz 11 und den Gleichungen (7), (6), (4), (5).

SATZ 12. (a) *Im Intervall* $2^{2k} \leq n \leq 2^{2k+1} - 1$, $k \geq 0$, *ist*

$$t(n) \leq 2^{k+1} - 1, \tag{30}$$

wofür $k \geq 1$ *Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn* $n = 4(2^{2k} - 1)/3$ *ist.*

(b) *Im Intervall* $2^{2k+1} \leq n \leq 2^{2k+2} - 1$, $k \geq 0$, *ist*

$$t(n) \leq 2^{k+1}, \tag{31}$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $n = 2^{2k+2} - 1$ *ist.*

Beweis. Für $k = 0$ klar, wegen $t(1) = 0$, $t(2) = 1$, $t(3) = 2$.

(a) Ist $k \geq 1$ und $m_1 = [n/2]$, so gilt $2^{2k-1} \leq m_1 \leq 2^{2k} - 1$; nach (6), (7), (29), (27) ist also $t(n) \leq s(m_1) \leq 2^{k+1} - 1$.

Zur zweiten Behauptung von (a) fahre man mittels Induktion fort. $k = 1$ ist klar. Die Behauptung für $k + 1$ folgt aus der für k so:

Ist $n = 4(2^{2k+2} - 1)/3$ so ist nach (11) und Beispiel 2

$$\begin{aligned} t(n) &= 2t(4(2^{2k} - 1)/3) + a((2^{2k+2} - 1)/3) \\ &= 2^{k+2} - 2 + 1 = 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

Umgekehrt, ist $t(n) = 2^{k+2} - 1$, so ist n gerade. Wäre $n = 4m_2 + 2$, so wäre nach (13) (und im Falle $m_2 = 2^{2k}$ auch wegen $t(n) \leq s(n)$ und (27))

$$2^{k+2} - 1 = t(n) = t(m_2) + t(m_2 - 1) \leq 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 2.$$

Also ist $n = 4m_2$; nach (11) ist dann

$$2^{k+1} - 1 \geq t(m_2 - 1) = [t(n) - a(m_2)]/2 = 2^{k+1} - [1 + a(m_2)]/2,$$

somit $a(m_2) = 1$, $t(m_2 - 1) = 2^{k+1} - 1$, $m_2 = (4(2^{2k} - 1)/3) + 1$, $n = 4m_2 = 4(2^{2k+2} - 1)/3$. Damit ist (a) bewiesen.

(b) Folgt auf die gleiche Weise.

SATZ 13. *Es bezeichne n_ν die ν-te Lösung der Gleichung $t(m) = 0$ ($n_1 = 1$, $n_2 = 7$, $n_3 = 9$, usw.). Dann ist $s(n_\nu) = 2\nu$, $\nu \geq 1$.*

Vorbemerkung. n_ν läßt sich Satz 10 zufolge leicht explizit darstellen: ist $\nu = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^r$, $k \geq 0$, $\varepsilon_r = 0$ oder 1, so ist $n_\nu = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1} - 1$.

Beweis (Vollständige Induktion). Für $\nu = 1$ klar, da $s(n_1) = s(1) = 2$. Angenommen, der Satz sei für alle natürlichen Zahlen $< \nu$, $\nu \geq 2$, bewiesen. Es sei $\nu = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^r$, $k \geq 1$, $\varepsilon_k = 1$.

(i) $\varepsilon_0 = 0$. Aus (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} s(n_\nu) &= s\left(\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1} - 1\right) \\ &= s\left(4 \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r 2^{2r-1} - 1\right) \\ &= 2s\left(\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{2r+1} - 1\right) \\ &= 2\left(2 \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^r\right) \quad \text{(nach Annahme)} \\ &= 2 \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^r \\ &= 2\nu. \end{aligned}$$

(ii) $\varepsilon_0 = 1$. Aus (9) und Definition 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} s(n_\nu) &= s\left(\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{2r+1} - 1\right) \\ &= s\left(4 \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r 2^{2r-1} + 1\right) \\ &= 2s\left(\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{2r+1}\right) \\ &= 2\left[s\left(\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{2r+1} - 1\right) + a\left(\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}\right)\right] \\ &= 2\left[2\left(\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_{r+1} 2^{r}\right) + 1\right] \quad \text{(nach Annahme)} \\ &= 2 \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^r \\ &= 2\nu. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Weiteren Zusammenhang zwischen der Folge $\{s(n)\}$ bzw. $\{t(n)\}$ und den „Extrema" von $t(n)$ bzw. $s(n)$ im Sinne der Sätze 10, 12, 9 enthält Satz 14, dessen Beweis wie die Beweise der Beispiele 5–10 und Sätze 9–11, 13 verläuft.

SATZ 14. *Es sei $k \geq 0$ und $\varepsilon_r = 0$ oder 1. Dann ist:*

(a) $$s(4(2^{2k} - 1)/3) = 2^{k+1} - 1, \quad s(2^{2k+2} - 1) = 2^{k+1},$$

(b) $$t(2^{2k}) = 2^k + 1 \ (k \geq 1), \quad t((5 \cdot 2^{2k} - 2)/3) = 2^k - 1,$$

(c) $$t\left(2^{2k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}\right) = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{r+1},$$

(d) $$t\left(2^{2k+2} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{2r+1}\right) = 2^{k+1} - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r 2^{r+1},$$

(e) $$t(2(2^{2k+2} - 1)/3) = 1.$$

4. Das Verhalten der Folgen $\{s(n)/\sqrt{n}\}$, $\{t(n)/\sqrt{n}\}$

Die nächsten sieben Sätze zielen darauf hin, folgenden genauen Satz zu beweisen. (Siehe [4, Satz 1] mit $\theta = 0, \pi$.)

SATZ (Vgl. Satz 15, 16, 19, 21). *Für $n \geq 1$ ist*

$$\sqrt{\frac{3}{5}} < \frac{s(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{6}, \quad 0 \leq \frac{t(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{3}.$$

Überdies sind die Folgen $\{s(n)/\sqrt{n}\}$ *und* $\{t(n)/\sqrt{n}\}$ *dicht in den Intervallen* $[\sqrt{3/5}, \sqrt{6}]$ *bzw.* $[0, \sqrt{3}]$. *Dies besagt natürlich auch, daß*

$$\liminf_{n=\infty} s(n)/\sqrt{n} = \sqrt{3/5}, \quad \limsup_{n=\infty} s(n)/\sqrt{n} = \sqrt{6},$$

$$\liminf_{n=\infty} t(n)/\sqrt{n} = 0, \quad \limsup_{n=\infty} t(n)/\sqrt{n} = \sqrt{3}.$$

HILFSSATZ. *Es ist,* $\theta_\nu = 1 - 2^{-\nu}$, $\nu \geq 0$, *gesetzt,*

$$\frac{1}{\sqrt{3+\theta_\nu}} + \sqrt{\frac{\theta_{\nu+1}}{3+\theta_{\nu+1}}} < 1. \tag{32}$$

Beweis.

$$\frac{1}{\sqrt{3+\theta_\nu}} + \sqrt{\frac{\theta_{\nu+1}}{3+\theta_{\nu+1}}} < \frac{1+\sqrt{\theta_{\nu+1}}}{\sqrt{3+\theta_\nu}} < 1,$$

wo die letzte Ungleichung aus $\theta_\nu = 2\theta_{\nu+1} - 1$ und

$$1 - \left(\frac{1+\sqrt{\theta_{\nu+1}}}{\sqrt{3+\theta_\nu}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{\theta_{\nu+1}}}{\sqrt{2+2\theta_{\nu+1}}}\right)^2 = \frac{(1-\sqrt{\theta_{\nu+1}})^2}{2+2\theta_{\nu+1}} > 0$$

folgt.

SATZ 15. *Für* $n \geq 1$ *ist* $s(n)/\sqrt{n} < \sqrt{6}$.

Beweis. Liegt n in einem der Intervalle $2^{2k} \leq n \leq 2^{2k+1} - 1$, $k \geq 0$, so gilt nach Satz 9(a), $s(n)/\sqrt{n} \leq 2^{k+1}/2^k = 2 < \sqrt{6}$. Liegt n in einem Intervall $2(2^{2k+2} - 1)/3 \leq n \leq 2^{2k+2} - 1$, $k \geq 0$, so gilt nach Satz 9(b)

$$\frac{s(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{(2^{k+2}-1)\sqrt{6}}{2\sqrt{2^{2k+2}-1}} < \sqrt{6}.$$

Der Satz ist also nur noch für die Intervalle $2^{2k+1} \leq n \leq 2(2^{2k+2} - 1)/3$, $k \geq 0$, zu beweisen. Das kann man induktiv erschließen: Für $k = 0$ ist der Satz wegen $n = 2$, $s(2) = 3$ klar. Angenommen, er sei für alle zu den Intervallen $[2^{2r+1}, 2(2^{2r+2} - 1)/3]$, $0 \leq r < k$, gehörigen n bewiesen. Dann stimmt er auch für die zum Intervall $[2^{2k+1}, 2(2^{2k+2} - 1)/3]$ gehörigen n, wie man folgendermaßen sieht.

Es werden die zum Teilintervall

$$[(3+\theta_\nu)2^{2k+1}/3, (3+\theta_{\nu+1})2^{2k+1}/3]$$

gehörigen n betrachtet, wo $0 \leq \nu \leq 2k - 1$ und θ_ν die Bedeutung aus dem Hilfssatz hat. Im Falle $\nu = 0$ kann wegen

$$\frac{s(2^{2k+1})}{\sqrt{2^{2k+1}}} = \frac{2^{k+1}+1}{\sqrt{2^{2k+1}}} = \frac{2^{k+1}+1}{2^k\sqrt{2}} < \sqrt{6} \quad \text{(Beispiel 5)},$$

$n \geq 2^{2k+1}+1$ vorausgesetzt werden. Dann gilt nebst $1 \leq n - 2^{2k+1} \leq 2(2^{2k}-1)/3$, Induktionsannahme, (17), und (32):

$$\frac{s(n)}{\sqrt{n}} = \frac{2^{k+1}}{\sqrt{n}} + \frac{s(n-2^{2k+1})}{\sqrt{n-2^{2k+1}}}\sqrt{\frac{n-2^{2k+1}}{n}}$$
$$< \frac{2^{k+1}\sqrt{3}}{2^k\sqrt{2}\sqrt{3+\theta_\nu}} + \sqrt{6}\sqrt{\frac{(3+\theta_{\nu+1})2^{2k+1} - 3\cdot 2^{2k+1}}{(3+\theta_{\nu+1})2^{2k+1}}}$$
$$= \sqrt{\frac{6}{3+\theta_\nu}} + \sqrt{\frac{6\theta_{\nu+1}}{3+\theta_{\nu+1}}} < \sqrt{6},$$

womit der Satz für das Intervall $[2^{2k+1}, 2(2^{2k+2}-1)/3]$ bewiesen ist.

Satz 15 (oder auch nur das schwächere $s(n) = O(\sqrt{n})$) hat folgende interessante Tatsache zur Folge: wenn $c(n)$ die Anzahl der $k \leq n$ mit $a(k) = -1$ bezeichnet, so gilt

$$s(n) + 2c(n) = n+1, \quad c(n) = [n+1-s(n)]/2$$
$$\lim_{n=\infty} c(n)/n = 1/2;$$

d.h., bei wachsendem n gibt es „beinahe" so viele $k \leq n$ mit $a(k) = -1$ wie mit $a(k) = 1$.

Auf Grund von Satz 15 läßt sich rasch beweisen:

SATZ 16. *Für* $n \geq 1$ *ist* $0 \leq t(n)/\sqrt{n} < \sqrt{3}$.

Beweis. Sei $n \geq 1$ und $m = [n/2]$ gesetzt. Aus (29), (6), (7) und Satz 15 folgt $0 \leq t(n)/\sqrt{n} \leq s(m)/\sqrt{2m} < \sqrt{3}$.

Um zu beweisen, daß $\sqrt{3/5}$ untere Grenze der Folge $\{s(n)/\sqrt{n}\}$ ist, ist folgende Definition bequem:

DEFINITION 3. *Für* $n \geq 1$ *sei* $\omega(n)$ *die größte Lösung* m *der Gleichung* $s(m) = n$ *(siehe Tafel* 2).

Das hat nach Satz 9 einen Sinn: jedes $n \geq 1$ kommt in der Folge $\{s(m)\}$ vor, denn $s(0) = 1$, und wird $k = [(\log n)/(\log 2)] - 1$ für $n \geq 2$ gesetzt, so ist $s(m) = n$ für ein m mit $2^{2k+1} \leq m \leq 2^{2k+2} - 1$. Jedes n kommt aber nur endlich oft in der Folge vor, da $s(m) > 2^k$ für $m \geq 2^{2k}$.

Beispiel 11. $\omega(2^{k+1}-1) = 2^{2k+1}-2$, $k \geq 0$. Aus Beispiel 6 ergibt sich $s(2^{2k+1}-2) = 2^{k+1}-1$, $k \geq 0$, also $\omega = \omega(2^{k+1}-1) \geq 2^{2k+1}-2$. Wäre $\omega > 2^{2k+1}-2$, so folgte (da ω nach (3) gerade ist) $\omega \geq 2^{2k+1}$, nach (27) also $2^{k+1} \leq s(\omega) = 2^{k+1}-1$; Widerspruch.

HILFSSATZ. *Aus* $m > \omega(n)$ *folgt* $s(m) > n$.

Beweis. Ersichtlich ist $s(m) \neq n$. Wäre $s(m) < n$, so ließe sich k so bestimmen, daß erstens $2^k > n$, also, nach Satz 9(a), $s(m) < n < 2^k < s(2^{2k})$ wäre, und zweitens $2^{2k} > m$, also $\omega(n) < m < 2^{2k}$ wäre. Da aber $s(n)$ sich nur schrittweise ändert, müßte es ein m_1 zwischen m und 2^{2k} geben, für das $s(m_1) = n$ wäre, was Definition 3 wegen $m_1 > m > \omega(n)$ widerspricht.

SATZ 17.

$$\omega(2n) = 4\omega(n) + 3, \quad n \geq 1. \tag{33}$$

$$a(\omega(n)) = (-1)^r, \quad n \geq 3, n \neq 2^r, r \geq 2. \tag{34}$$

$$\omega(2n+1) = 4\omega(n+1) + 2, \quad n \geq 2, n+1 \neq 2^r, r \geq 2. \tag{35}$$

Beweis. Wegen (3) ist $\omega(2n)$ ungerade. Nach (9) ist $s(4m+1) = s(4m+3)$, folglich $\omega(2n) \equiv 3 \pmod 4$, also $\omega(2n) = 4m+3$. Daraus folgt $2n = s(4m+3) = 2s(m)$, $s(m) = n$. Gäbe es ein $m_1 > m$ mit $s(m_1) = n$, so wäre $4m_1 + 3 > 4m + 3 = \omega(2n)$ und $s(4m_1 + 3) = 2s(m_1) = 2n$, was der Definition von $\omega(2n)$ widerspricht. Daher ist $\omega(n) = m$, $\omega(2n) = 4m + 3 = 4\omega(n) + 3$, womit (33) bewiesen ist.

Nun wird (34) durch Induktion bewiesen, wobei auch (35) mitbewiesen werden wird. Für $n = 3$ ist (34) wegen $\omega(3) = 6$ gültig. Sei (34) für $3 \leq k < 2n+1$, $n \geq 2$ bewiesen. Im Falle $2n + 2 \neq 2^r$, $r \geq 3$, folgt dann aus $n + 1 \neq 2^{r-1}$, $r \geq 3$, und (33):

$$\begin{aligned} a(\omega(2n+2)) &= a(4\omega(n+1)+3) \\ &= -a(2\omega(n+1)+1) \\ &= (-1)^{1+\omega(n+1)} a(\omega(n+1)) \\ &= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{2n+2}. \end{aligned}$$

Aus

$$s(\omega(2n+2)-1) = s(\omega(2n+2)) - a(\omega(2n+2)) = 2n+2-1 = 2n+1$$

ergibt sich $\omega(2n+2) - 1 \leq \omega(2n+1)$. Wäre $\omega(2n+2) < \omega(2n+1) + 1$, so folgte aus dem Hilfssatz, daß

$$\begin{aligned} 2n+2 = s(\omega(2n+2)) &< s(\omega(2n+1)+1) \\ &= s(\omega(2n+1)) + a(\omega(2n+1)+1) \\ &= 2n+1 + a(\omega(2n+1)+1), \end{aligned}$$

d.h. $a(\omega(2n+1)+1) > 1$ wäre, was Unsinn ist. Daher gilt

$$\omega(2n+1) = \omega(2n+2) - 1 = 4\omega(n+1) + 2,$$

womit (35) bewiesen ist.

Weiter folgt aus (35) und der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} a(\omega(2n+1)) &= a(4\omega(n+1)+2) \\ &= (-1)^{\omega(n+1)}a(\omega(n+1)) \\ &= (-1)^n(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{2n+1}; \end{aligned}$$

damit ist (34) für $2n+1$ und $2n+2$ im Falle $2n+2 \neq 2^r$, $r \geq 3$, bewiesen.

Ist dagegen $2n+2 = 2^r$, $r \geq 3$, so ist $n+1 = 2^{r-1}$, und nach Beispiel 11, 4

$$a(\omega(2n+1)) = a(\omega(2^r-1)) = a(2^{2r-1}-2) = -1 = (-1)^{2^r-1},$$

womit (34) in diesem Fall für $2n+1$, und somit völlig, bewiesen ist.

Aus Satz 17 ergibt sich folgende Beziehung zwischen $t(\omega(n))$ und n.

ZUSATZ. *Für* $2^k \leq n \leq 2^{k+1}-1$, $k \geq 0$, *ist* $t(\omega(n)) = 2^{k+1}-n$.

Beweis (Vollständige Induktion). Für $k=0$ wegen $\omega(1)=0$ klar. Sei die Richtigkeit der Behauptung für ein $k \geq 0$ angenommen, es liege n im Intervall $2^{k+1} \leq n \leq 2^{k+2}-1$, und es werde $m = [n/2]$ gesetzt. Für $n = 2m$ folgt dann nach (33), (14)

$$t(\omega(n)) = t(4\omega(m)+3) = 2t(\omega(m)) = 2(2^{k+1}-m) = 2^{k+2}-n.$$

Für $n = 2m+1$ folgt im Falle $n = 2^{k+2}-1$ nach Beispiel 11, 9

$$t(\omega(n)) = t(2^{2k+3}-2) = 1 = 2^{k+2}-(2^{k+2}-1),$$

und im Falle $n < 2^{k+2}-1$ nach (35), (14), (33), $m < 2^{k+1}-1$, und nach (34)

$$\begin{aligned} t(\omega(n)) &= t(4\omega(m+1)+2) \\ &= t(4\omega(m+1)+3) - (-1)^{4\omega(m+1)+3}a(4\omega(m+1)+3) \\ &= 2t(\omega(m+1)) + a(\omega(2m+2)) \\ &= 2[2^{k+1}-(m+1)]+1 \\ &= 2^{k+2}-n, \end{aligned}$$

wie behauptet.

SATZ 18. *Ist* $2^k \leq n \leq 2^{k+1}-1$, $k \geq 0$, *so ist*

$$\omega(n) = n - 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+1}-2) + 2\sum_{r=0}^{k-1}\left[\frac{n-1}{2^{r+1}}\right]2^{2r}. \tag{36}$$

Beweis (Vollständige Induktion). Für $k=0$ klar, wegen $\omega(1)=0$. Angenommen, der Satz sei für ein $k \geq 0$ bewiesen, und es werde $m = [n/2]$ gesetzt, wo

$2^{k+1} \leq n \leq 2^{k+2} - 1$. Für $n = 2m$ gilt dann nach (33)

$$\begin{aligned}\omega(n) &= 4\omega(m) + 3\\ &= 4m - 4 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 8) + 8 \sum_{r=0}^{k-1} \left[\frac{m-1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r} + 3\\ &= 2m - 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2m - 2 + 2 \sum_{r=0}^{k-1} \left[\frac{2m-2}{2^{r+2}}\right] 2^{2r+2}\\ &= 2m - 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2m - 2 + 2 \sum_{r=1}^{k} \left[\frac{2m-1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r}\\ &= n - 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{n-1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r}.\end{aligned}$$

Für $n = 2m + 1 \neq 2^{k+2} - 1$ gilt nach (33), (35) und dem obigen Ergebnis

$$\begin{aligned}\omega(n) &= \omega(2m + 2) - 1\\ &= 2m + 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{2m+1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r} - 1\\ &= 2m + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{2m}{2^{r+1}}\right] 2^{2r}\\ &= n - 1 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{n-1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r}.\end{aligned}$$

Ist dagegen $n = 2^{k+2} - 1$, so folgt

$$\begin{aligned}n - 1 &+ \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} \left[\frac{n-1}{2^{r+1}}\right] 2^{2r}\\ &= 2^{k+2} - 2 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2 \sum_{r=0}^{k} (2^{k-r+1} - 1)2^{2r}\\ &= 2^{k+2} - 2 + \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2) + 2^{2k+3} - 2^{k+2} - \tfrac{1}{3}(2^{2k+3} - 2)\\ &= 2^{2k+3} - 2\\ &= \omega(2^{k+2} - 1)\end{aligned}$$

aus Beispiel 11. Damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz. *Für $n = 2^\alpha(2m + 1)$, $m \geq 0$, $\alpha \geq 0$, gilt*

$$\omega(n + 1) - \omega(n) = \tfrac{1}{3}(2^{2\alpha+1} + 1),$$

außer wenn $\alpha = 0$ und $n = 2^s - 1$, $s \geq 1$. Im letzeren Fall gilt

$$\omega(n + 1) - \omega(n) = 2^{2s-1} + 1.$$

Beweis. Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus (36) und Beispiel 11. Für $\alpha = 0$ folgt die erste Behauptung aus (33) und (35). Für $\alpha = 1$ folgt sie im Falle $m + 1 \neq 2^s$, $s \geq 0$, gemäß (33), (35) aus

$$\begin{aligned}\omega(4m+3) - \omega(4m+2) &= 4\omega(2m+2) + 2 - 4\omega(2m+1) - 3\\ &= 4[\omega(2m+2) - \omega(2m+1)] - 1\\ &= 3,\end{aligned}$$

und im Falle $m + 1 = 2^s$, $s \geq 0$, nebst Beispiel 11, (36) aus

$$\begin{aligned}\omega(4m+3) - \omega(4m+2) &= \omega(2^{s+2} - 1) - \omega(2^{s+2} - 2)\\ &= 2^{2s+3} - 2 - (2^{2s+3} - 5)\\ &= 3.\end{aligned}$$

Für $\alpha \geq 2$ ergibt sie sich dann folgendermaßen induktiv:

$$\begin{aligned}&\omega(2^\alpha(2m+1)+1) - \omega(2^\alpha(2m+1))\\ &\qquad = 4\omega(2^{\alpha-1}(2m+1)+1) + 2 - 4\omega(2^{\alpha-1}(2m+1)) - 3\\ &\qquad = \tfrac{4}{3}(2^{2\alpha-1} + 1) - 1 = \tfrac{1}{3}(2^{2\alpha+1} + 1).\end{aligned}$$

Mit Satz 18 gelangt man zum ursprünglichen Ziel:

SATZ 19. *Für $n \geq 1$ ist $s(n)/\sqrt{n} > \sqrt{3/5}$.*

Beweis. Wegen

$$\frac{s(m)}{\sqrt{m}} \geq \frac{s(m)}{\sqrt{\omega(s(m))}}, \quad m \geq 1,$$

genügt es,

$$\frac{n}{\sqrt{\omega(n)}} > \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad n \geq 2,$$

zu beweisen. Das folgt aber aus (36), denn ist $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, $k \geq 1$, so hat man

$$\begin{aligned}3\omega(n) &\leq 3n - 3 + 2^{2k+1} - 2 + (3n-3)\sum_{r=0}^{k-1} 2^r\\ &\leq 3n - 3 + 2n^2 - 2 + (3n-3)(2^k - 1)\\ &< 2n^2 + 3n - 5 + (3n-3)n = 5n^2 - 5 < 5n^2,\end{aligned}$$

$$\frac{n}{\sqrt{\omega(n)}} > \sqrt{\frac{3}{5}},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Um den Beweis des am Anfang dieses Teils dargelegten Satzes zu vollenden, wird ein allgemeiner Satz über reelle Zahlenfolgen vorausgeschickt.

SATZ 20. *Seien* $\kappa(n)$ *und* $\lambda(n)$, $n \geq 1$, *zwei Folgen von reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

$$\kappa(n) \geq 0, \quad n \geq 1,$$

$$\lambda(1) > 0,$$

$$\lambda(n+1) \geq \lambda(n), \quad n \geq 1,$$

$$\kappa(n+1) = \kappa(n) + o(\lambda(n)).$$

Sind dann α, β *zwei Häufungspunkte der Folge* $\{\kappa(n)/\lambda(n)\}$, *so ist auch jede Zahl des Intervalls* $[\alpha, \beta]$ *ein Häufungspunkt dieser Folge.*

Beweis. Es sei $\alpha < \xi < \beta$, und sei $\delta > 0$ und $N > 0$ gegeben. Behauptet wird: es gibt ein $n > N$ mit

$$\left| \frac{\kappa(n)}{\lambda(n)} - \xi \right| < \delta.$$

Man wähle $\mu > N$ und $\nu > \mu$, so daß $\kappa(\mu)/\lambda(\mu) < \xi < \kappa(\nu)/\lambda(\nu)$, während für $n \geq \mu$, $|\kappa(n+1) - \kappa(n)| \leq \delta\lambda(n)$. Dann leistet ein n mit $\mu \leq n \leq \nu$ das Gewünschte. Gäbe es dagegen kein n mit $\mu \leq n \leq \nu$ und

$$\xi - \delta < \kappa(n)/\lambda(n) < \xi + \delta,$$

so gäbe es ein größtes $n_1 < \nu$ mit $\kappa(n_1)/\lambda(n_1) \leq \xi - \delta$, somit auch

$$\frac{\kappa(n_1 + 1)}{\lambda(n_1 + 1)} \geq \xi + \delta,$$

was wegen

$$2\delta = \xi + \delta - (\xi - \delta) \leq \frac{\kappa(n_1 + 1)}{\lambda(n_1 + 1)} - \frac{\kappa(n_1)}{\lambda(n_1)} \leq \frac{\kappa(n_1 + 1) - \kappa(n_1)}{\lambda(n_1)} \leq \delta$$

einen Widerspruch liefert.

Der Beweis von Satz 20 ist ein Verallgemeinerung des ursprünglichen Beweises folgenden J. S. Lomont zu verdankenden Satzes.

SATZ 21. *Die Folgen* $\{s(n)/\sqrt{n}\}$, $\{t(n)/\sqrt{n}\}$, $n \geq 1$, *sind dicht in den Intervallen* $[\sqrt{3/5}, \sqrt{6}]$ *bzw.* $[0, \sqrt{3}]$.

Beweis. Wenn $m_k = (5 \cdot 2^{2k} - 2)/3$ und $n_k = 2(2^{2k+2} - 1)/3$, $k \geq 1$, gesetzt werden, so folgt aus Satz 9, daß

$$\lim_{k=\infty} \frac{s(m_k)}{\sqrt{m_k}} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{s(n_k)}{\sqrt{n_k}} = \sqrt{6}.$$

Dann sind die Bedingungen des vorigen Satzes mit $\kappa(n) = s(n)$, $\lambda(n) = \sqrt{n}$ wegen $|s(n+1) - s(n)| = 1 = o(\sqrt{n})$ erfüllt. Für $m_k = 2^{2k+1} - 1$ und $n_k = 4(2^{2k} - 1)/3$, $k \geq 1$, folgt andererseits aus Beispiel 9 und Satz 12(a)

$$\lim_{k=\infty} \frac{t(m_k)}{\sqrt{m_k}} = 0, \quad \lim_{k=\infty} \frac{t(n_k)}{\sqrt{n_k}} = \sqrt{3},$$

und die Bedingungen des vorigen Satzes sind in diesem Falle mit $\kappa(n) = t(n)$, $\lambda(n) = \sqrt{n}$ erfüllt.

5. Die Anzahl der k mit $s(k) = n$

Definition 3 betrachtet die größte Lösung $\omega(n)$ der Gleichung $s(k) = n$. Wieviele Lösungen hat diese Gleichung überhaupt?

Tafel 2 gibt Anlaß zum folgenden

SATZ 22. *Es bezeichne $\mu(n)$ die Anzahl der Lösungen $k \geq 0$ der Gleichung*

$$s(k) = n, \quad n \geq 1. \tag{37}$$

Dann ist $\mu(n) = n$.

Beweis. Es sei $\lambda(n)$ die Anzahl der Lösungen k von (37) mit $a(k) = 1$. Folgende drei Tatsachen werden bewiesen:

(i) $\mu(2n) = 2\mu(n)$.
(ii) $\lambda(2n) = \mu(n)$.
(iii) $\mu(2n+1) = \mu(n) + \mu(n+1)$.

Mit (i) und (iii) ist auch der Satz bewiesen. Denn für $n = 1$ ist er klar, da $s(0) = 1$ und, nach Satz 9, $s(k) \geq 2$ für $k \geq 1$ ist. Wird die Richtigkeit des Satzes für alle natürlichen Zahlen $< n$, $n \geq 2$, angenommen, so schließt man weiter induktiv folgendermaßen:

TAFEL 2

Lösungen von $s(k) = n$

n	k									
1	0									
2	1	3								
3	2	4	6							
4	5	7	13	15						
5	8	12	14	16	26					
6	9	11	17	19	25	27				
7	10	18	20	22	24	28	30			
8	21	23	29	31	53	55	61	63		
9	32	50	52	54	56	60	62	64	106	
10	33	35	49	51	57	59	65	67	105	107

Für $n = 2m$ ergibt (i), daß $\mu(n) = \mu(2m) = 2\mu(m) = 2m = n$ ist.

Für $n = 2m + 1$ ergibt (iii), daß $\mu(n) = \mu(2m + 1) = \mu(m) + \mu(m + 1) = m + m + 1 = n$ ist.

(i), (ii), (iii) ergeben sich wie folgt:

(i) Die Lösungen von

$$s(k) = 2n \tag{38}$$

müssen ungerade sein. Wegen $s(4k + 1) = s(4k + 3)$ ist $\mu(2n)$ die doppelte Anzahl der Lösungen von

$$s(4k + 1) = 2n. \tag{39}$$

Letztere Anzahl ist aber $\mu(n)$, da wegen (9) die Beziehung (39) mit $2s(k) = 2n$ gleichbedeutend ist.

(ii) In (38) ist k ungerade, also $\lambda(2n)$ die Anzahl der k mit

$$s(2k + 1) = 2n \quad \text{und} \quad a(2k + 1) = (-1)^k a(k) = 1. \tag{40}$$

Ist $k = 2m$, so ist (40) gleichbedeutend mit

$$s(4m + 1) = 2s(m) = 2n, \quad a(m) = 1, \tag{41}$$

was $\lambda(n)$ Lösungen besitzt. Ist $k = 2m + 1$, so ist (40) gleichbedeutend mit

$$s(4m + 3) = 2s(m) = 2n, \quad a(2m + 1) = -1, \quad \text{oder}$$

$$s(m) = n, \quad a(m) = (-1)^{m+1}. \tag{42}$$

Falls n gerade ist, muß m ungerade sein, folglich $a(m) = 1$. In diesem Falle ist die Anzahl der Lösungen m von (42) gleich $\lambda(n)$. Falls n ungerade ist, muß m gerade sein, also $a(m) = -1$. In diesem Falle ist die betrachtete Anzahl gleich $\mu(n) - \lambda(n)$.

Weil nun $\lambda(2n)$ gleich der gesamten Anzahl der Lösungen von (41) und (42) ist, ergibt sich

$$\lambda(2n) = \lambda(n) + \lambda(n) = 2\lambda(n) \quad \text{für gerades } n, \tag{43}$$

und

$$\lambda(2n) = \lambda(n) + \mu(n) - \lambda(n) = \mu(n) \quad \text{für ungerades } n. \tag{44}$$

Damit ist (ii). für ungerades n bewiesen. Ist n gerade, und setzt man $n = 2^\alpha r$, $\alpha \geq 1$, $2 \nmid r$, so folgt durch wiederholte Anwendung von (43), (44) und (i)

$$\lambda(2n) = 2\lambda(n) = 2\lambda(2^\alpha r) = 2^\alpha \lambda(2r) = 2^\alpha \mu(r) = \mu(2^\alpha r) = \mu(n).$$

(iii) Die Lösungen der Gleichung $s(k) = 2n + 1$ müssen gerade sein. Daher ist $\mu(2n + 1)$ die Lösungszahl von

$$s(2k) = 2n + 1. \tag{45}$$

(a) Ist $k = 2m$, so ist (45) gleichbedeutend mit

$$s(4m) = 2s(m) - a(m) = 2n + 1. \tag{46}$$

Weiter ist die Lösungszahl von (46) gleich der Lösungszahl von $s(m) = n$, $a(m) = -1$, nebst der Anzahl der Lösungen von $s(m) = n + 1$, $a(m) = 1$. Die Gleichung (46) hat somit

$$[\mu(n) - \lambda(n)] + \lambda(n + 1) \tag{47}$$

Lösungen.

(b) Ist $k = 2m + 1$, so ist (45) gleichbedeutend mit

$$s(4m + 2) = 2s(m) + (-1)^m a(m) = 2n + 1. \tag{48}$$

Weiter ist die Lösungszahl von (48) gleich der Lösungszahl von

$$s(m) = n, \quad a(m) = (-1)^m \tag{49}$$

nebst der Lösungszahl von

$$s(m) = n + 1, \quad a(m) = (-1)^{m+1}. \tag{50}$$

Wenn n gerade ist, so muß in (49) m ungerade sein, also $a(m) = -1$; mithin ist die Lösungszahl von (49) gleich $\mu(n) - \lambda(n)$. In diesem Falle muß in (50) m gerade sein, also $a(m) = -1$. Somit hat (50) $\mu(n + 1) - \lambda(n + 1)$ Lösungen. Daher hat in diesem Falle (48)

$$\mu(n) - \lambda(n) + \mu(n + 1) - \lambda(n + 1) \tag{51}$$

Lösungen.

Ist n ungerade, so kann man ähnlich schließen, daß (48) die Lösungszahl

$$\lambda(n) + \lambda(n + 1) \tag{52}$$

hat.

(c) Für gerades n erhält man aus (47), (51) nebst (ii) und (i):

$$\begin{aligned} \mu(2n + 1) &= 2\mu(n) - 2\lambda(n) + \mu(n + 1) \\ &= 2\mu(n) - 2\mu(n/2) + \mu(n + 1) \\ &= 2\mu(n) - \mu(n) + \mu(n + 1) \\ &= \mu(n) + \mu(n + 1). \end{aligned}$$

Für ungerades n erhält man aus (47), (52), nebst (2) und (1):

$$\begin{aligned} \mu(2n + 1) &= \mu(n) + 2\lambda(n + 1) \\ &= \mu(n) + 2\mu((n + 1)/2) \\ &= \mu(n) + \mu(n + 1). \end{aligned}$$

Damit ist (3), und somit der Satz, vollständig bewiesen.

Einen für $t(n)$ entsprechenden Satz gibt es nicht, da nach Beispiel 9 für alle $k \geq 0$, $t(2^{2k+1} - 1) = 0$, $t(2^{2k+2} - 1) = 2^{k+1}$ ist; also hat $t(m) = n$ für jedes n unendlich viele Lösungen.

Zum Schluß möchten wir Don Speray für seine rechnerische Hilfe und H. Hasse für seine sprachliche Hilfe unseren Dank aussprechen. Auch danken wir L. Carlitz für seine Bemerkungen bezüglich einer früheren Fassung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

1. J. Brillhart and L. Carlitz, *Note on the Shapiro polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 25 (1970), S. 114–118.
2. J. Brillhart, *On the Rudin-Shapiro polynomials*, Duke Math. J., vol. 40 (1973), S. 335–353.
3. J. Brillhart, J. S. Lomont, and P. Morton, *Cyclotomic properties of the Rudin-Shapiro polynomials*, J. Reine Angew. Math., Band 288 (1976), S. 37–65.
4. W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 10 (1959), S. 855–859.
5. H. S. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, Master's Thesis, MIT, Cambridge, Mass., 1951.

University of Arizona
Tucson, Arizona