SUR LES RÉSIDUS INTÉGRAUX

QUI DONNENT

DES VALEURS APPROCHÉES DES INTÉGRALES

PAR

P. TCHEBYCHEFF

à S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par I. Lyon.)

§ 1. Dans un mémoire *sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux,* communiqué à l'académie des sciences le 8 octobre 1885,[2] nous avons montré comment, d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx,\quad (a \text{ et } b \text{ réels, et } a < b)$$

on peut trouver les limites les plus étroites de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

si la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles

---

[1] Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ. Записки Импер. Академіи Наукъ. Томъ 55, книжка 1. Приложеніе, № 2. С.-Петербургъ. 1887.

[2] Traduction française, ce journal t. 9, p. 35.

de x entre $x = a$ et $x = b$, et si la valeur de v est comprise entre a et b. Ces limites, comme nous avons vu, sont données par les formules suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} \int\limits_a^v f(x)\,dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}\limits_{a-\omega}^{v+\omega} F(z), \\ \int\limits_a^v f(x)\,dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}\limits_{a-\omega}^{v-\omega} F(z), \end{cases}$$

où ω est une quantité positive infiniment petite, et $F(z)$ une fonction rationnelle qui s'obtient facilement en développant l'expression

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{z} + \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,dx}{z^2} + \ldots + \frac{\int\limits_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx}{z^{2m}}$$

en fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ddots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m} - \ddots$$

En effet, en posant

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ddots - \frac{1}{\alpha_{m-1} z + \beta_{m-1}},$$

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ddots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m},$$

elle est donnée par les formules

$$2)\qquad \begin{cases} F(z) = \dfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \dfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ddots - \dfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m} - \dfrac{1}{Z} \\[2ex] Z = \gamma(z - v) + \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)} \end{cases}$$

où γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]$$

$$\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]$$

En substituant à la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z+\beta_1}-\frac{1}{\alpha_2 z+\beta_2}-\cdots-\frac{1}{\alpha_m z+\beta_m}-\frac{1}{Z}$$

la fraction ordinaire qui lui est égale

$$\frac{\varphi_m(z)\,.\,Z-\varphi_{m-1}(z)}{\psi_m(z)\,.\,Z-\psi_{m-1}(z)}$$

et en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi_0(z)=\varphi_m(z)\,.\,Z-\varphi_{m-1}(z), \\ \Phi_1(z)=\psi_m(z)\,.\,Z-\psi_{m-1}(z), \end{cases}$$

on aura

$$F(z)=\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

En portant cette valeur de la fonction $F(z)$ dans les formules (1), nous trouvons

$$\int_a^v f(x)\,dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^v f(x)\,dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v-\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

ou bien

$$\int_a^v f(x)\,dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}+\sum_{v}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^v f(x)\,dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}-\sum_{v-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Or, les résidus intégraux

$$\sum_{v-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} \quad \text{et} \quad \sum_{v}^{v+\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

où ω désigne une quantité infiniment petite, s'étendent seulement sur les valeurs voisines de $z = v$; et comme cette valeur de z, qui annule $\Phi_1(z)$ en vertu de (2) et (3), coïncide avec l'une de leurs limites, on aura

$$\sum_{v-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \sum_{v}^{v+\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)},$$

et les dernières formules nous donnent

$$(4) \qquad \begin{cases} \int_a^v f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} + \frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)}, \\ \int_a^v f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - \frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)} \end{cases}$$

On voit par là que la différence entre le résidu intégral

$$\sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

et l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

est au plus égale à la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)}.$$

C'est la plus grande approximation avec laquelle la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

peut être déterminée d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx,$$

si par rapport à la fonction inconnue $f(x)$ on sait seulement qu'elle reste positive pour les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

Nous allons maintenant étudier la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

et quelques formules qui peuvent nous conduire à la détermination de sa limite supérieure. Dans un cas particulier très remarquable nous trouvons par ces formules la limite supérieure de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

sous la forme d'une fonction du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \int_a^b x^2f(x)dx\,,\ \ldots$$

et qui tend vers zéro quand ce nombre augmente indéfiniment.

§ 2. Nous profiterons ici de quelques résultats que nous avons obtenu dans notre mémoire *sur les fractions continues.* [1] Dans ce mémoire nous nous sommes occupé de la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \frac{1}{\alpha_3 z + \beta_3} -$$

qu'on obtient en développant la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i} = \frac{\theta^2(x_0)}{z - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)}{z - x_n},$$

où les quantités

$$x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n$$

sont toutes réelles et distinctes, et les

$$\theta^2(x_0)\,,\ \theta^2(x_1)\,,\ \ldots,\ \theta^2(x_n)$$

---

[1] О непрерывныхъ дробяхъ. Записки Академіи Наукъ, т. 3, выпускъ 5. — Traduction française, Journal de Liouville, tome 10.

des quantités positives quelconques. En désignant par

$$\frac{\varphi_0(z)}{\psi_0(z)}, \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varphi_2(z)}{\psi_2(z)}, \ldots$$

les réduites de la fraction continue, nous trouvons, en vertu des formules démontrées dans ce mémoire, les égalités suivantes:

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_1} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_0^2(x_i), \quad \frac{1}{\alpha_2} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_1^2(x_i), \quad \frac{1}{\alpha_3} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_2^2(x_i), \quad \ldots$$

qui montrent que les coefficients

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

sont tous positifs. Il résulte de là que les premières termes des fonctions

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$$
$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

ordonnées suivant les puissances décroissantes de z, auront des coefficients positifs.

D'autre part, comme nous avons vu dans ce même mémoire, pour toute fonction entière $f_0(z)$ d'un degré inférieur à μ on doit avoir l'équation

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} f_0(x_i)\psi_\mu(x_i)\theta^2(x_i) = 0.$$

De cette équation nous allons déduire quelques propriétés des fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

dont nous nous servirons après. Pour cela nous remarquons que la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

doit donner la valeur exacte de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i}$$

et son dénominateur $\psi_{n+1}(z)$ sera une fonction entière du degré $(n+1)$ de la forme

$$\psi_{n+1}(z) = C(z - x_0)(z - x_1)\ldots(z - x_n), \tag{7}$$

où C désigne un coefficient constant. L'expression

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{(z - x_\lambda)(z - x_{\lambda+1})} \qquad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$$

sera donc une fonction entière du degré $(n-1)$, et d'après (6) on devra avoir l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_{n+1}(x_i)}{(x_i - x_\lambda)(x_i - x_{\lambda+1})} \psi_n(x_i)\theta^2(x_i) = 0$$

qui se réduit en vertu de (7) à l'égalité

$$\frac{\psi'_{n+1}(x_\lambda)}{(x_\lambda - x_{\lambda+1})}\psi_n(x_\lambda)\theta^2(x_\lambda) + \frac{\psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})}{(x_{\lambda+1} - x_\lambda)}\psi_n(x_{\lambda+1})\theta^2(x_{\lambda+1}) = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\psi'_{n+1}(x_\lambda)\psi_n(x_\lambda)\theta^2(x_\lambda) = \psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})\psi_n(x_{\lambda+1})\theta^2(x_{\lambda+1}).$$

Or, les racines

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{de} \quad \psi_{n+1}(z)$$

sont toutes réelles et distinctes, et en les supposant disposées dans l'ordre de leurs grandeurs on voit que la dérivée

$$\psi'_{n+1}(z)$$

aura des signes contraires pour les deux racines consécutives x_λ et $x_{\lambda+1}$, et par conséquent la fonction

$$\psi_n(z)$$

aura aussi des signes opposés pour $z = x_\lambda$ et $z = x_{\lambda+1}$, c. à. d. entre deux racines consécutives quelconques de

$$\psi_{n+1}(z)$$

on aura au moins une racine de

$$\psi_n(z).$$

On voit par là que les n racines de

$$\psi_n(z)$$

seront toutes réelles, distinctes et situées respectivement dans les n intervalles des $(n+1)$ racines de

$$\psi_{n+1}(z).$$

En désignant par

$$x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$$

les racines de

$$\psi_n(z)$$

disposées dans l'ordre de leurs grandeurs, on aura la série de grandeurs croissantes

$$x_0, x'_0, x_1, x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n.$$

§ 3. Les n racines

$$x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1} \quad \text{de} \quad \psi_n(z)$$

étant inégales, la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en fractions simples nous donnera la somme

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)}\right)}{z - x'_0} + \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}\right)}{z - x'_1} + \cdots + \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})}\right)}{z - x'_{n-1}} \tag{8}$$

où, comme il est facile de voir, les numérateurs

$$\frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)}, \frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}, \ldots, \frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})}$$

sont tous positifs. En effet, les fonctions

$$\varphi_n(z), \varphi_{n+1}(z), \psi_n(z), \psi_{n+1}(z)$$

des réduites

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

sont liées par la relation

$$\varphi_{n+1}(z)\psi_n(z) - \varphi_n(z)\psi_{n+1}(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\psi_n(z)\psi_{n+1}(z)}{z - x'_\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

et en y faisant

$$z = x'_\mu$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} = -\frac{1}{\psi'_n(x'_\mu)\psi_{n+1}(x'_\mu)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera positif pour $z = \infty$, puisque les premiers termes des fonctions $\psi(z)$, ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de z, ont des coefficients positifs (§ 2).

Si maintenant on passe de $z = \infty$ à la plus grande racine $z = x'_{n-1}$ de $\psi_n(z)$, la fonction $\psi_{n+1}(z)$ changera son signe en passant par sa racine $z = x_n$, tandis que la dérivée $\psi'_n(z)$ n'ayant pas de racine entre $z = x'_{n-1}$ et $z = \infty$ conservera son signe. Le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera donc négatif pour $z = x'_{n-1}$, et il est facile de voir qu'il conservera sa valeur négative pour toutes les racines

$$z = x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1} \quad \text{de} \quad \psi_n(z),$$

car, d'après le § 2, entre deux racines consécutives de $\psi_n(z)$ on trouvera toujours une racine pour chacune des fonctions $\psi'_n(z)$ et $\psi_{n+1}(z)$, en vertu

de quoi leur produit doit avoir le même signe pour toutes les racines de $\psi_n(z)$. Ainsi, le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera négatif pour les valeurs de

$$z = x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$$

et la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)}$$

sera positive pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Posons

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} = \theta_1^2(x'_\mu)$$

et la somme (8) prendra la forme

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\theta_1^2(x'_0)}{z - x'_0} + \frac{\theta_1^2(x'_1)}{z - x'_1} + \ldots + \frac{\theta_1^2(x'_{n-1})}{z - x'_{n-1}}.$$

Ainsi, connaissant la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

en une somme de fractions simples de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i},$$

où les x_i sont toutes des quantités réelles et distinctes, et les $\theta^2(x_i)$ des quantites positives quelconques, on pourra aussi décomposer la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en une somme de la même forme

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \frac{\theta_1^2(x'_\mu)}{z - x'_\mu},$$

dans laquelle les quantités x'_μ sont aussi toutes réelles et distinctes, et les $\theta_1^2(x'_\mu)$ des quantités positives. De plus, les quantités x_i et x'_μ dans l'ordre de leurs grandeurs formeront, comme on a vu, la série suivante:

$$x_0\,,\ x'_0\,,\ x_1\,,\ x'_1\,,\ \ldots,\ x_\lambda\,,\ x'_\lambda\,,\ \ldots,\ x'_{n-1}\,,\ x_n.$$

En passant de même de la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

à la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\psi_{n-1}(z)}$$

et ainsi de suite, nous trouvons pour chacune d'elles une décomposition de la forme

$$\frac{\varphi_l(z)}{\psi_l(z)} = \frac{\theta_l^2(z_0)}{z - z_0} + \frac{\theta_l^2(z_1)}{z - z_1} + \ldots + \frac{\theta_l^2(z_{l-1})}{z - z_{l-1}}$$

où les racines $z_0\,,\ z_1\,,\ \ldots,\ z_{l-1}$ de $\psi_l(z)$ sont toutes réelles et distinctes, et les $\theta_l^2(z)$ des quantités positives. De plus, en désignant par

$$z'_0\,,\ z'_1\,,\ z'_2\,,\ \ldots,\ z'_{l-2}$$

les racines de $\psi_{l-1}(z)$ et en les disposant avec celles de $\psi_l(z)$ par l'ordre de leurs grandeurs croissantes, nous trouvons la série

$$z_0\,,\ z'_0\,,\ z_1\,,\ z'_1\,,\ \ldots,\ z_\lambda\,,\ z'_\lambda\,,\ z_{\lambda+1}\,,\ \ldots,\ z'_{l-2}\,,\ z_{l-1},$$

dont les termes sont tous compris entre x_0 et x_n.

§ 4. Revenons à la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ldots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m},$$

que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{z^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx}{z^{2m}}$$

en fraction continue et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite. Cette expression ne diffère de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

que par les termes

$$\frac{\int_a^b x^{2m} f(x)\,dx}{z^{2m+1}} + \frac{\int_a^b x^{2m+1} f(x)\,dx}{z^{2m+2}} + \cdots$$

et comme ces termes n'ont aucune influence sur les m premiers dénominateurs de la fraction continue, nous pouvons, en nous bornant aux m premiers termes, la regarder comme provenant du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx.$$

Or, cette intégrale, où, par hypothèse, la fonction $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b, peut être regardée comme la limite de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z-x_i},$$

dans laquelle les quantités x_i désignent une série de grandeurs croissantes de $x_0 = a$ à $x_n = b$, et les $\theta^2(x_i)$ des quantités positives choisies conformément aux valeurs correspondantes de $f(x)$; et nous en concluons, d'après le § 2, que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de la fraction continue en question auront des valeurs positives, définies par les formules

$$(9)\quad \alpha_1 = \frac{1}{\int_a^b \psi_0^2(x) f(x)\,dx}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\int_a^b \psi_1^2(x) f(x)\,dx}, \ldots, \alpha_m = \frac{1}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x) f(x)\,dx},$$

et que les dénominateurs $\psi_m(z)$ et $\psi_{m-1}(z)$ des réduites

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \quad \frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$$

auront toutes leurs racines réelles, distinctes et comprises entre a et b. De plus, en désignant par

$$z_0\,,\ z_1\,,\ z_2\,,\ \ldots\,,\ z_{m-1}$$

$$z'_0\,,\ z'_1\,,\ z'_2\,,\ \ldots\,,\ z'_{m-2},$$

les racines des fonctions $\psi_m(z)$ et $\psi_{m-1}(z)$, dans l'ordre de leurs grandeurs, on devra avoir la série suivante de grandeurs croissantes:

$$z_0\,,\ z'_0\,,\ z_1\,,\ z'_1\,,\ \ldots\,,\ z_\lambda\,,\ z'_\lambda\,,\ z_{\lambda+1}\,,\ \ldots\,,\ z'_{m-2}\,,\ z_{m-1}.$$

Tout ceci doit avoir lieu, bien entendu, si les intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots\,,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

peuvent prendre des valeurs données pour $f(x)$ positive entre a et b.

§ 5. Nous venons de voir que, si les valeurs données des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots\,,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

sont possibles pour $f(x)$ positive entre a et b, la fonction $\psi_m(z)$ déterminée par ces valeurs ne peut pas avoir des racines hors des limites a et b. Deux cas peuvent donc se présenter: 1) aucune des racines de $\psi_m(z)$ n'atteint ni la limite a, ni la limite b, et 2) l'une des limites a et b ou toutes les deux annulent la fonction $\psi_m(z)$. Nous allons d'abord examiner le second cas qui d'ailleurs se présente très rarement.

En regardant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$$

comme la limite de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z-x_i},$$

où l'on a $x_0 = a\,,\ x_n = b$, et en remarquant que, d'après le § 2, le dénominateur de la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)},$$

égale à cette somme, est le seul qui peut s'annuler pour $z = x_0 = a$ et $z = x_n = b$, nous en concluons que, dans le cas consideré, la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i},$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z - x},$$

doivent être égales à la réduite

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Or, cette fraction se décompose en une somme de fractions simples de la forme

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \frac{\varphi_m(z_\mu)}{\psi'_m(z_\mu)} \frac{1}{z - z_\mu},$$

et pour que cette somme puisse être égale à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x}\,dx,$$

il faut que la fonction $f(x)$ s'annule pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, qui ne sont pas dans le voisinage de

$$x = z_\mu, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

et que pour les valeurs de x infiniment voisines de

$$x = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1},$$

elle ait des valeurs telles que les intégrales

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(x)\,dx, \int_{z_1-\omega}^{z_1+\omega} f(x)\,dx, \ldots, \int_{z_{m-1}-\omega}^{z_{m-1}} f(x)\,dx$$

se ramènent, lorsque ω devient nulle, aux valeurs

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)}, \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots, \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})}.$$

Avec une telle fonction $f(x)$ l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

se ramène au résidu intégral

$$\int_{a-\omega}^{v} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

pour toutes les valeurs de v entre les limites a et b, différentes de $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$. Quant aux valeurs de $v = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, on voit que pour ces valeurs de v l'intégrale reçoit des accroissements brusques, égaux respectivement à

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)}, \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots, \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})},$$

et par conséquent pour $v = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ sa valeur ne peut pas être complètement déterminée.

§ 6. Passons au cas général lorsque ni a, ni b ne satisfont pas à l'équation

$$\psi_m(z) = 0.$$

Nous allons d'abord montrer que la quantité γ qui figure dans nos formules est une quantité positive. En effet, d'après le § 1 on doit avoir les inégalités

$$\gamma \geqq \frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\gamma \geqq \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

En les multipliant respectivement par les quantités positives $v-a$, $b-v$ et en les ajoutant ensuite membre à membre, nous trouvons l'inégalité

$$\gamma(b-a) \geqq \frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}.$$

Or, les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ ayant des coefficients positifs, on devra avoir

$$\frac{\psi_{m-1}(\infty)}{\psi_m(\infty)} > 0, \qquad \frac{\psi_{m-1}(-\infty)}{\psi_m(-\infty)} < 0,$$

et comme toutes les racines des fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ sont plus grandes que a et plus petites que b, on aura aussi

$$\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} > 0, \qquad \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} < 0,$$

en vertu de quoi l'inégalité précédente nous donne

$$\gamma(b-a) > 0; \quad \text{d'où} \quad \gamma > 0.$$

La quantité γ, comme on a vu dans le § 1, sert à déterminer la fonction $\Phi_1(z)$ qui, en vertu de (2) et (3), sera donnée par la formule

$$\Phi_1(z) = \left[\gamma(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]\psi_m(z) - \psi_{m-1}(z),$$

dans laquelle, comme on vient de le voir, la quantité γ est positive; et comme de plus les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_m(z)$, $\psi_{m-1}(z)$ ont des coefficients positifs, cette formule nous donnera

$$\Phi_1(\infty) = +, \qquad \Phi_1(-\infty) = \mp,$$

où le signe supérieur correspond au cas de m pair et le signe inférieur au cas de m impair. Si maintenant on fait dans cette formule $z = z_0$, $z_1, \ldots, z_{m-1}$, on aura, d'après le § 4,

$$\Phi_1(z_i) = -\psi_{m-1}(z_i), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

$$\psi_{m-1}(z_{m-1}) = +, \qquad \psi_{m-1}(z_{m-2}) = -, \quad \ldots, \quad \psi_{m-1}(z_0) = \mp,$$

de sorte que pour la fonction $\Phi_1(z)$ nous trouvons

$$\Phi_1(\infty) = +, \qquad \Phi_1(z_{m-1}) = -, \ \ldots, \ \Phi_1(z_0) = \pm, \qquad \Phi_1(-\infty) = \mp.$$

On voit par là que les $m+1$ racines de la fonction

$$\Phi_1(z)$$

sont toutes réelles, distinctes et séparées par les m racines de la fonction

$$\psi_m(z).$$

§ 7. En désignant par

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$$

les racines de la fonction

$$\Phi_1(z),$$

nous trouvons pour la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

la décomposition suivante en fractions simples:

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \frac{1}{z-\zeta_i},$$

où, comme il est facile de voir, les facteurs

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

sont tous positifs. En effet, des formules (3) on déduit facilement l'égalité

$$\Phi_0(z)\psi_m(z) - \Phi_1(z)\varphi_m(z) = \varphi_m(z)\psi_{m-1}(z) - \varphi_{m-1}(z)\psi_m(z).$$

Comme le second membre, d'après une propriété bien connue des réduites, est égal à l'unité, nous aurons l'égalité

$$\Phi_0(z)\psi_m(z) - \Phi_1(z)\varphi_m(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\Phi_1(z)\psi_m(z)}{z-\zeta_i} \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

et en y faisant

$$z = \zeta_i,$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{\psi_m(\zeta_i)\Phi_1'(\zeta_i)}. \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m)$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi_m(z)\Phi_1'(z)$$

sera positif pour $z = \infty$, puisque les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ ont des coefficients positifs; et comme les racines de $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ sont toutes plus petites que la plus grande racine ζ_m de $\Phi_1(z)$ (§ 6), on voit que ce produit sera aussi positif pour $z = \zeta_m$. Il est facile de voir que ce signe $+$ le produit le conservera pour toutes les racines

$$z = \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \quad \text{de} \quad \Phi_1(z),$$

car, entre deux racines consécutives quelconques de $\Phi_1(z)$ chacune des fonctions $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ aura toujours une racine seulement (§ 6), en vertu de quoi leur produit aura le même signe pour toutes les racines de $\Phi_1(z)$. On aura donc bien

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} > 0$$

pour les valeurs de $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Ainsi, la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

qui, comme on a vu dans le § 1, est égale à la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \ldots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m} - \frac{1}{Z},$$

se ramène à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m} \frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \frac{1}{z - \zeta_i},$$

dans laquelle les quantités ζ_i sont toutes réelles et distinctes, et les $\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}$ des quantités positives. Comme cette somme ne diffère que par les notations de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i},$$

que nous avons étudiée dans le mémoire précité *sur les fractions continues*,

on trouve, d'après la formule donnée à la fin du § 5 de ce mémoire, l'égalité suivante:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{\psi_\mu^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}}{\sum\limits_{i=0}^{i=m} \psi_\mu^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}} = 1.$$

D'après les formules (5) nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=m} \psi_\mu^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{a_{\mu+1}};$$

en vertu de quoi l'égalité précédente peut s'écrire

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} \alpha_{\mu+1}\psi_\mu^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = 1, \qquad (i=0,1,\ldots,m)$$

d'où l'on tire la formule

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} a_{\mu+1}\psi_\mu^2(\zeta_i)}, \qquad (i=0,1,2,\ldots,m)$$

dans laquelle le dernier coefficient α_{m+1} sera égal à γ, coefficient de z dans le dernier dénominateur Z. Ainsi pour toutes les racines $z=\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ de $\Phi_1(z)$ on aura

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1'(z)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} a_{\mu+1}\psi_\mu^2(z)},$$

et comme, en vertu de (2) et (3), $z = v$ annule la fonction $\Phi_1(z)$, on obtient la formule

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} a_{\mu+1}\psi_\mu^2(v)} = \frac{1}{a_1\psi_0^2(v) + a_2\psi_1^2(v) + \ldots + a_m\psi_{m-1}^2(v) + \gamma\psi_m^2(v)}.$$

§ 8. Dans le § 1 nous avons montré que les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\int_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

sont données par

$$-\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)},$$

et l'on voit d'après la valeur trouvée de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

que le degré d'approximation avec laquelle le résidu intégral

$$\int_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

donne la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

sera déterminé par la fraction

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{a_1\psi_0^2(v) + a_2\psi_1^2(v) + \ldots + a_m\psi_{m-1}^2(v) + \gamma\psi_m^2(v)},$$

dans laquelle la quantité γ seule dépend des limites a, b des intégrales considérées. Cette fraction augmente lorsque γ diminue, et elle diminue lorsque γ augmente. Comme la valeur de γ qui est toujours positive sera nulle pour $a = -\infty$, $b = \infty$, et deviendra infiniment grande pour $\psi_m(a) = 0$ ou $\psi_m(b) = 0$ (§§ 1 et 6), on voit que la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\int_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

tendra vers zéro si a ou b s'approche indéfiniment de la valeur d'une racine de $\psi_m(z)$ et si v n'est pas racine de cette fonction, ce qui est

bien conforme aux résultats auxquels nous sommes arrivés dans le § 5. La limite (10) de cette différence atteindra au contraire sa plus grande valeur pour $a = -\infty$, $b = \infty$ et se réduira pour ces valeurs des limites a, b à la fraction

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m\psi_{m-1}^2(v)}.$$

Il est facile de voir que la valeur de cette fraction diminue lorsque le nombre m augmente, et qu'elle deviendra nulle, pour $m = \infty$, si la série

$$\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \alpha_3\psi_2^2(v) + \ldots$$

est divergente. Cette fraction dépend évidemment de v aussi, et par conséquent, selon la valeur de v, le résidu intégral

$$\sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

avec une approximation plus ou moins grande. Il est cependant facile de montrer que pour certaines valeurs de v la valeur de la fraction (11), et par conséquent aussi la valeur de la fraction (10) dont elle est la limite supérieure, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En effet, en désignant par D la plus grande valeur du dénominateur de la fraction (11) pour $a < v < b$, nous trouvons l'inégalité

$$\int_a^b [\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m\psi_{m-1}^2(v)]f(v)\,dv < D\int_a^b f(x)\,dx,$$

et comme d'après les formules (9) le premier membre de cette inégalité se réduit à m, on aura l'inégalité

$$m < D\int_a^b f(x)\,dx$$

ou bien

$$\frac{1}{2D} < \frac{1}{2m} \int_a^b f(x)\,dx.$$

On voit par là que $\frac{1}{2D}$ qui, conformément à notre notation, représente la plus petite valeur de la fraction (11) pour les valeurs de v comprises entre a et b, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Donc, quelles que soient les limites a et b, la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

ne peut pas surpasser la valeur de la fraction (11)

$$\frac{1}{2} \frac{1}{a_1 \psi_0^2(v) + a_2 \psi_1^2(v) + \ldots + a_m \psi_{m-1}^2(v)}$$

ou bien de la fraction

$$(12) \qquad \frac{1}{2} \frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x) f(x)\,dx} + \dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_b^b \psi_1^2(x) f(x)\,dx} + \dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x) f(x)\,dx}},$$

qu'on obtient en remplaçant dans (11) les coefficients α par leurs valeurs tirées de (9).

Les fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{m-1}(z)$$

sont déterminées, comme on a vu, à l'aide du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x}\,dx$$

en fraction continue de la forme

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \frac{1}{\alpha_3 z + \beta_3} - -$$

Et comme la valeur de la fraction (12) ne change pas lorsqu'on multiplie les fonctions ψ par des facteurs constants quelconques, nous pouvons y prendre pour les fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{m-1}(z)$$

les fonctions que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x} dx$$

en fraction continue de la forme

$$\frac{\rho_1}{\alpha' z + \beta'} - \frac{\rho_2}{\alpha'' z + \beta''} - \frac{\rho_3}{\alpha''' z + \beta'''} - \ldots$$

les ρ étant des quantités constantes quelconques; car, le changement des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots$ équivaut, comme il est facile de le voir, à l'introduction de facteurs constants dans ces fonctions.

Nous venons de montrer comment on détermine les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x) dx$$

et le résidu intégral

$$\sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

dans le cas où l'on donne les $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b x f(x) dx, \ldots, \int_a^b x^{2m-1} f(x) dx$$

et si l'on sait que la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b. Il est facile d'en déduire les limites de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)dx\,,\ \int_a^v f_1(x)dx,$$

si l'on a les égalités

$$(13)\qquad \int_a^b x^i f_1(x)dx = \int_a^b x^i f(x)dx \qquad (i=0,1,2,\ldots,2m-1)$$

et si la fonction $f_1(x)$ reste aussi positive pour les valeurs de x entre $x=a$, $x=b$. En effet, dans ce cas on aura les mêmes résidus intégraux et les mêmes limites des différences entre les intégrales et les résidus intégraux, et par conséquent la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^v f_1(x)dx$$

ne pourra pas surpasser le double de la limite de la différence entre chacune de ces intégrales et le résidu intégral

$$\sum_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Donc, si les égalités (13) ont lieu pour deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ qui restent positives pour les valeurs de x entre a et b, la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)dx\,,\ \int_a^v f_1(x)dx$$

ne pourra pas surpasser la valeur de la fraction

$$(14)\qquad \frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x)f(x)dx} + \dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_a^b \psi_1^2(x)f(x)dx} + \cdots + \dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x)f(x)dx}},$$

quelles que soient les limites a et b.

§ 9. Comme exemple de l'application de nos formules nous allons maintenant considérer le cas où l'on a

$$a = -\infty, \qquad b = \infty, \qquad f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}.$$

Dans ce cas, comme on va le voir, la limite supérieure de la fraction (14) pourra être déterminée quelle que soit la valeur de v, et il en résulte un théorème qui peut avoir des applications utiles dans la Théorie des Probabilités.

D'après les formules données dans notre mémoire *Sur le développement des fonctions à une seule variable,*[1] dans lequel nous avons étudié le développement de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-ku^2}}{x-u} du$$

en fraction continue et les réduites

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots,$$

nous trouvons que, dans le cas que nous considérons maintenant, les fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

pourront être représentées par la formule

$$\psi_i(z) = e^{\frac{q^2}{2}z^2} \frac{d^i e^{-\frac{q^2}{2}z^2}}{dz^i}$$

et qu'on pourra les calculer successivement à l'aide de la formule

$$(15) \qquad \psi_i(z) = -q^2 z \psi_{i-1}(z) - (i-1) q^2 \psi_{i-2}(z)$$

et l'égalité

$$\psi_0(z) = 1.$$

[1] Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, T. I. 1859.

D'autre part nous trouvons d'après ce même mémoire la formule

$$\int_a^b \psi_i^2(x) f(x)\,dx = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots i \,.\, q^{2i}$$

pour le cas de

$$a = -\infty, \qquad b = \infty, \qquad f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}$$

En vertu de cette formule la fraction (14) qui détermine les limites de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,dx\,,\ \int_a^v f_1(x)\,dx$$

se ramène pour le cas que nous examinons à la fraction

$$\frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{1} + \dfrac{\psi_1^2(v)}{1 \,.\, q^2} + \ldots + \dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-1) q^{2m-2}}},$$

dans laquelle les fonctions $\psi(v)$ seront déterminées par (15).

Pour déterminer la limite supérieure de cette fraction nous chercherons la limite inférieure de son dénominateur

$$\frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1 \,.\, q^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}^2(v)}{1 \,.\, 2 \ldots (m-1) q^{2m-2}}.$$

En posant

$$(16) \qquad \frac{\psi_i^2(v)}{\Gamma(i+1) q^{2i}} = T_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

nous remarquons que ce dénominateur est égal à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i.$$

Pour trouver la limite inférieure de cette somme nous allons d'abord déterminer la fonction $\theta(t)$ définie par

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

où t désigne une variable quelconque.

§ 10. Pour déterminer la fonction $\theta(t)$ nous remarquons que d'après (15) on aura

$$\psi_i(v) = -q^2 v\psi_{i-1}(v) - q^2(i-1)\psi_{i-2}(v),$$
$$\psi_{i-1}(v) = -q^2 v\psi_{i-2}(v) - q^2(i-2)\psi_{i-3}(v),$$

d'où l'on tire

$$\psi_i^2(v) = q^4v^2\psi_{i-1}^2(v) + 2(i-1)q^4v\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v) + (i-1)^2q^4\psi_{i-2}^2(v),$$
$$q^4(i-2)^2\psi_{i-3}^2(v) = q^4v^2\psi_{i-2}^2(v) + 2q^2v\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v) + \psi_{i-1}^2(v),$$

et en éliminant entre ces deux équations le produit $\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v)$ nous trouvons la relation

$$\psi_i^2(v) - q^2(q^2v^2 - i + 1)[\psi_{i-1}^2(v) - (i-1)q^2\psi_{i-2}^2(v)]$$
$$-(i-1)(i-2)^2q^6\psi_{i-3}^2(v) = 0.$$

Si maintenant on y remplace les fonctions

$$\psi_i^2(v)\,,\ \psi_{i-1}^2(v)\,,\ \psi_{i-2}^2(v)\,,\ \psi_{i-3}^2(v)$$

par leurs valeurs tirées de (16), on aura l'équation

$$iT_i - (q^2v^2 - i + 1)T_{i-1} + (q^2v^2 - i + 1)T_{i-2} - (i-2)T_{i-3} = 0.$$

Multiplions tous les termes par t^i et faisons la somme pour toutes les valeurs de i, de $i = 0$ à $i = \infty$; nous aurons alors l'égalité

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} iT_it^i - \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-1}t^i + \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-2}t^i - \sum_{i=0}^{i=\infty}(i-2)T_{i-3}t^i = 0.$$

En remarquant que d'après (16) on a

$$T_{-1} = T_{-2} = T_{-3} = 0,$$

nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-1}t^i = \sum_{i=1}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-1}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i)T_it^{i+1},$$
$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-2}t^i = \sum_{i=2}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)T_{i-2}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i - 1)T_it^{i+2},$$
$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(i-2)T_{i-3}t^i = \sum_{i=3}^{i=\infty}(i-2)T_{i-3}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(i+1)T_it^{i+3},$$

en vertu de quoi l'égalité précédente se ramène à l'égalité

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^i - \sum_{i=0}^{i=\infty} (q^2v^2 - i) T_i t^{i+1} + \sum_{i=0}^{i=\infty} (q^2v^2 - i - 1) T_i t^{i+2} - \sum_{i=0}^{i=\infty} (i+1) T_i t^{i+3} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(1 + t - t^2 - t^3) \sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^{i-1} = [q^2v^2 - (q^2v^2 - 1)t + t^2] \sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i.$$

Comme d'après notre notation on a

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t), \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^{i-1} = \theta'(t),$$

cette égalité se réduit à l'équation différentielle

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{q^2v^2 - (q^2v^2 - 1)t + t^2}{1 + t - t^2 - t^3} = \frac{q^2v^2}{(1+t)^2} + \frac{t}{1 - t^2}$$

qui, intégrée, donne

$$\theta(t) = C \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

La constante d'intégration C se trouve facilement en remarquant que la fonction $\theta(t)$ se réduit pour $t = 0$ à $T_0 = \phi_0^2(v) = 1$. De sorte que l'on aura

$$C = 1,$$

et par conséquent

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1 - t^2}}. \tag{17}$$

§ 11. D'après l'expression trouvée de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

où t désigne une quantité variable, la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

pourra être déterminée à l'aide des formules données dans notre mémoire mentionné plus haut *sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux.* Pour appliquer les formules, données dans ce mémoire pour des intégrales, à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

nous allons la présenter sous la forme de l'intégrale

$$\int_0^\infty Y t^x dx,$$

en désignant par Y une fonction de x qui s'annule pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas dans le voisinage de $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ et qui pour les valeurs de x infiniment voisines de $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a des valeurs telles que les intégrales

$$\int_0^\omega Y dx, \int_{1-\omega}^1 Y dx, \int_{2-\omega}^2 Y dx, \ldots$$

tendent respectivement vers les valeurs

$$T_0, T_1, T_2, \ldots$$

lorsque ω tend vers zéro. Pour une fonction Y ainsi déterminée on aura évidemment

$$\int_0^\infty Y t^x dx = \sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t).$$

Comme la fonction $Y t^x$ ne devient pas négative entre les limites 0 et ∞, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v Y t^x dx,$$

d'après les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^\infty Y t^x dx, \int_0^\infty x Y t^x dx, \int_0^\infty x^2 Y t^x dx,$$

seront déterminées par les formules données dans les §§ 6 et 7 de notre

mémoire mentionné plus haut. En faisant dans ces formules $a = 0, b = \infty$ nous trouvons que pour

$$v = \frac{\int_0^\infty x^2 Y t^x \, dx}{\int_0^\infty x Y t^x \, dx}$$

la limite inférieure de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^v Y t^x \, dx$$

sera

$$\int_0^\infty Y t^x \, dx - \frac{\left[\int_0^\infty x Y t^x \, dx\right]^2}{\int_0^\infty x^2 Y t^x \, dx}.$$

En remarquant que d'après l'égalité

$$\int_0^\infty Y t^x dx = \theta(t)$$

on aura

$$\int_0^\infty x Y t^x \, dx = t\theta'(t),$$

$$\int_0^\infty x^2 Y t^x \, dx = t\theta'(t) + t^2\theta''(t),$$

nous en déduisons l'inégalité

$$\int_0^{\frac{t\theta''(t)}{\theta'(t)}+1} Y t^x \, dx \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)}$$

En prenant ici pour t une racine quelconque de l'équation

$$\frac{t\theta''(t)}{\theta'(t)} + 1 = m - 1, \tag{18}$$

nous trouvons l'inégalité

$$\int_0^{m-1} Yt^x dx \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)}.$$

Cumme d'après les propriétés de la fonction Y on aura

$$\int_0^{m-1} Yt^x dx = \sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i,$$

l'inégalité précédente se réduit à celle-ci:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)},$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de t satisfaisant à (18). Donc, en se bornant aux valeurs de t comprises entre 0 et 1 et remarquant que pour ces valeurs de t on aura

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i,$$

on devra avoir l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)} \tag{19}$$

d'après laquelle nous pouvons trouver une limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

en prenant pour t une racine de (18) comprise entre 0 et 1.

§ 12. En portant dans (18) et (19) les valeurs de $\theta(t)$, $\theta'(t)$, $\theta''(t)$ tirées de (17), on trouve

$$m - 1 = \frac{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2v^2 + t\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]^2}{(1-t^2)\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}} \frac{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2v^2}{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2v^2 + t\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]^2}. \tag{21}$$

La dernière inégalité nous donne la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

en fonction de la racine t de (20) comprise entre 0 et 1. Il est facile de voir que pour $m > 1$, comme nous le supposons toujours, l'équation (20) admettra bien une racine entre 0 et 1; mais la détermination exacte de cette racine est très difficile. Comme il ne s'agit ici que de trouver une quantité qui reste constamment plus petite que $\sum_0^{m-1} T_i$, nous pouvons y arriver sans résoudre l'équation (20). Pour cela nous tirons de (20) la valeur de $\sqrt{m-1}$ et nous divisons par elle l'inégalité (21), ce qui nous donne une inégalité qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}\left(t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(2t+\frac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2\right)^2}+\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

En remarquant que la valeur de t dans cette inégalité doit être plus grande que zéro et plus petite que l'unité, nous trouvons

$$e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}} > 1,$$

$$t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2 < 1+q^2v^2,$$

$$2t+\frac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2 < 2+q^2v^2 < 2(1+q^2v^2),$$

$$t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2 > t+\frac{1-t}{2}q^2v^2,$$

$$\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2} < \frac{1}{2},$$

en vertu de quoi l'inégalité précédente nous donne

$$(22)\qquad \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{(q^2v^2+1)^{-3}}{\sqrt{2}\left[\dfrac{1}{\left(t+\dfrac{1-t}{2}q^2v^2\right)^2}+\dfrac{1}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Passant à la détermination d'une limite inférieure de

$$t+\frac{1-t}{2}q^2v^2 \quad \text{pour} \quad 0<t<1,$$

nous remarquons que l'équation (20) peut s'écrire

$$(m-1)(1-t^2) = t^2 + \frac{(1-t)t}{1+t}q^2v^2 + \frac{2t+\dfrac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2}{t+\dfrac{1-t}{1+t}q^2v^2}.$$

Comme t est comprise entre 0 et 1, tous les termes seront positifs et l'on aura

$$(m-1)(1-t^2) > t^2,$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2) > 1,$$

ce qui donne

$$1-t > \frac{1}{m(1+t)} > \frac{1}{2m}.$$

D'autre part, en cherchant les maxima des fonctions

$$\frac{(1-t)t}{1+t}, \quad \frac{2t+\dfrac{(1-t)^3}{1+t}q^2v^2}{t+\dfrac{1-t}{1+t}q^2v^2}$$

pour $0<t<1$, nous trouvons qu'ils s'obtiennent pour $t=\sqrt{2}-1$, $t=1$ et qu'ils sont respectivement égaux à

$$3-\sqrt{8},\ 2,$$

en vertu de quoi l'équation précédente nous donne

$$(m-1)(1-t^2) < t^2 + 2 + (3-\sqrt{8})q^2v^2,$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2) < 3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2,$$

$$1 - t < \frac{3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2}{m(1+t)} < \frac{3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2}{m},$$

ce qui donne

$$t > 1 - \frac{3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2}{m}.$$

Ainsi, nous trouvons que

$$t > 1 - \frac{3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2}{m},$$

$$1 - t > \frac{1}{2m},$$

et l'on aura par conséquent

$$t + \frac{1-t}{2}q^2v^2 > 1 - \frac{3}{m} + \frac{\sqrt{8} - \frac{11}{4}}{m}q^2v^2 > 1 - \frac{3}{m}$$

De sorte que l'inégalité (22), en y remplaçant

$$t + \frac{1-t}{2}q^2v^2 \quad \text{par} \quad 1 - \frac{3}{m} = \frac{m-3}{m},$$

nous donnera

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{2(m-3)^3}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}$$

ou bien

$$\sum_0^{m-1} T_i > \frac{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}.$$

En remarquant que, conformément à notre notation, on a

$$\sum_0^{m-1} T_i = \sum_0^{m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i \cdot q^{2i}} = \frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1 \cdot q^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}^2(v)}{1 \cdot 2 \ldots (m-1) q^{2m-2}},$$

nous en concluons que la fraction

$$\frac{1}{\sum_0^{m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i \cdot q^{2i}}}$$

sera plus petite que

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2 - 2m + 3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

Comme d'après le § 9 cette fraction donne les limites de la différence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{v} f_1(x)dx\,, \int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} dx$$

si l'on a les égalités

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i e^{-\frac{q^2x^2}{2}} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$$

la fonction $f_1(x)$ restant constamment positive, et comme on a

$$\int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i e^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (i-1)}{q^{2i}} \quad \text{pour } i \text{ pair},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i l^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = 0 \quad \text{pour } i \text{ impair},$$

nous en déduisons le théorème suivant:

Théorème.

Si la fonction $f_1(x)$ reste constamment positive et si l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \frac{1}{q}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_1(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,dx = 0,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}$$

pour toutes les valeurs réelles de v.