

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS
D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

1^{er} Mémoire

PAR

VITO VOLTERRA

à PISE.

Introduction.

La représentation des fonctions de trois variables indépendantes par les *fonctions des points d'un espace à trois dimensions* est d'un usage très répandu parmi les analystes. Mais les points ne sont pas les seuls éléments géométriques de l'espace. Il y a aussi les lignes et les surfaces et l'on peut, de la même façon, faire correspondre à chaque point ou à chaque ligne ou à chaque surface les valeurs d'une variable. On obtient de la sorte des *fonctions des points* et aussi ce qu'on peut appeler des *fonctions des lignes* et des *fonctions des surfaces* de l'espace. On n'a appliqué jusqu'ici l'analyse qu'aux fonctions des points, mais il est bien intéressant aussi d'étudier les fonctions des lignes et les fonctions des surfaces. Ces fonctions se présentent dans plusieurs questions de physique. Par exemple l'énergie d'un courant qui parcourt un fil métallique qui peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique, est une fonction d'une ligne. Elles peuvent se rattacher aussi à des questions analytiques, par exemple on en trouve une application en généralisant la théorie des fonctions envisagée du point de vue de DIRICHLET¹ ou en

¹ Voir une Note que j'ai publiée: *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, Vol. 3. C'est en poursuivant ce but que j'ai été amené aux idées qui forment *Acta mathematica*. 12. Imprimé le 19 février 1889.

cherchant à étendre aux intégrales doubles la théorie JACOBI-HAMILTON sur le calcul des variations. A présent je me borne à montrer l'usage qu'on peut en faire dans la théorie des fonctions des variables imaginaires.

la base de ce mémoire. Je me permets donc d'exposer en peu de mots le point de départ de mes recherches sur la généralisation de la théorie des fonctions. D'après la définition de DIRICHLET, on dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, si à chaque valeur de cette quantité, entre des limites données, correspond une valeur de la première quantité. On est amené bien naturellement à cette définition, qui est indépendante de tout rapport analytique entre les variables, en considérant des phénomènes où il y a deux quantités qui changent simultanément de telle façon que les valeurs de l'une dépendent de celles de l'autre.

En se plaçant à un tel point de vue on est conduit aisément à généraliser l'idée de fonction parce que dans plusieurs questions de physique et d'analyse on trouve des *quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ordinaire ou de plusieurs fonctions ordinaires* tout à fait arbitraires. Par exemple la température dans un point d'une lame, qui est chauffée au bord, dépend de toutes les valeurs de la température au bord de la lame. Les fonctions des lignes offrent un autre exemple d'une telle dépendance. Il est bien clair que, lorsque on parle d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs variables, on entend quelque chose de bien différent d'une fonction de fonction.

J'ai tâché d'étudier la dépendance dont je viens de parler. En général on ne sait pas si, en partant de la fonction, on peut parvenir, par des procédés analytiques, à la quantité qui en dépend. Pourtant, sous certaines conditions, qui sont tout à fait semblables aux conditions nécessaires pour le développement en série de TAYLOR, on peut parvenir à généraliser cette série au cas que nous considérons. Par exemple, bornons-nous au cas le plus simple, c'est à dire d'une quantité y qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction $f(x)$, définie pour les valeurs de x comprises entre les limites a, b . Sous certaines conditions on peut donner pour y l'expression analytique

$$y = y_0 + \int_a^b f(t_1)\theta_1(t_1)dt_1 + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b f(t_1)f(t_2)\theta_2(t_1, t_2)dt_1dt_2 \\ + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_a^b \int_a^b \int_a^b f(t_1)f(t_2)f(t_3)\theta_3(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3 + \dots$$

où y_0 est une constante et les fonctions $\theta_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sont des fonctions symétriques des variables t_1, t_2, \dots, t_n .

La série qu'on vient d'écrire n'est autre chose que la généralisation de la série de TAYLOR.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, on suppose, en quelque sorte, que les valeurs des variables imaginaires sont étendues sur une surface, avec la condition que les rapports différentiels des variables ne dépendent que des points de la surface. C'est ainsi qu'on peut exprimer la condition de monogénéité établie par CAUCHY et que la théorie des variables imaginaires peut se rattacher à l'étude des paramètres différentiels et à l'étude des éléments caractéristiques.

Est-ce qu'on peut généraliser cette théorie en se rapportant à un espace à trois dimensions? Voilà le problème que je me suis proposé.

On peut résoudre la question, mais pour l'aborder il faut recourir à ce que je viens d'appeler les fonctions d'une ligne. En effet on obtient la généralisation en faisant correspondre à chaque ligne fermée de l'espace les valeurs de deux variables imaginaires liées entre elles par une condition différentielle tout à fait semblable à la condition de monogénéité de la théorie ordinaire.

Dans le mémoire qui va suivre je me suis borné à étendre la théorie aux espaces à trois dimensions, mais on peut aller plus loin dans la généralisation. La théorie des hyperespaces est depuis longtemps connue et beaucoup de mathématiciens sont à présent familiarisés avec les mots empruntés à la géométrie des espaces à n dimensions qui peuvent représenter d'une manière claire et frappante des propriétés analytiques. Cette considération m'a poussé à aborder même la théorie générale pour les hyperespaces dans un mémoire que je publierai plus tard. En se posant à un tel point de vue, les fonctions des lignes ne suffisent pas. Il faut recourir à une notion moins simple, c'est à dire aux *fonctions* des hyperespaces.

A quelle théorie connue va se rattacher la généralisation dont je viens de parler?

Il est bien aisé de montrer qu'elle se rattache à la théorie des fonctions de plusieurs variables imaginaires. Il y a presque une année M. POINCARÉ a publié dans ce journal un très beau mémoire sur la généralisation du théorème de CAUCHY pour les fonctions de deux variables imaginaires. Je vais montrer comment le remarquable théorème de M. POINCARÉ fait ressortir, tout de suite, une liaison entre la théorie que je me propose d'exposer et la théorie des fonctions de deux variables imaginaires.

Soit donnée une fonction de la variable $z = x + \sqrt{-1}y$ continue et uniforme dans une aire limitée par un seul contour. On déduit du théorème de CAUCHY que l'intégrale d'une telle fonction prise entre des limites imaginaires dépend des limites seulement. On obtient donc, par l'intégration d'une fonction des points du plan complexe, une nouvelle fonction des points. Est-ce la même chose pour les intégrales doubles?

M. POINCARÉ, en généralisant le théorème de CAUCHY, a démontré que l'intégrale d'une fonction uniforme de deux variables imaginaires prise sur une surface fermée est nulle, si l'on peut déformer et réduire la surface à un point sans rencontrer de singularités. On peut déduire de là que, si la surface d'intégration n'est pas fermée, l'intégrale dépend des lignes qui forment le contour de la surface. Donc on voit que l'intégration des fonctions de deux variables conduit aux fonctions des lignes. Les fonctions des lignes que j'ai étudiées, correspondent à tous les cas qui se présentent dans les intégrales doubles prises de la manière indiquée par M. POINCARÉ. Puisque ces fonctions des lignes dépendent seulement du bord de la surface d'intégration, j'ai donné *leur expression analytique par des éléments qui dépendent seulement du bord*, c'est à dire j'ai montré qu'elles peuvent s'exprimer par *des intégrales simples étendues à la ligne qui forme le bord*.

Il est bien aisé de voir que la généralisation de la théorie des intégrales abéliennes aux intégrales doubles, est une question liée aux principes fondamentaux que je vais exposer dans ce qui suit.

J'ai consacré le 1^{er} chapitre du Mémoire à la théorie des fonctions des lignes. Le 2^e chapitre est partagé en cinq articles. Dans le 1^{er} article, après avoir établi la généralisation de la condition de monogénéité pour les fonctions des lignes, je trouve une relation différentielle analogue à $\Delta_2 = 0$. Dans le 3^e et 6^e article, en étudiant cette relation j'essaie une théorie des propriétés caractéristiques des fonctions des lignes. Enfin le 5^e article contient la théorie des opérations différentielles.

Dans ce mémoire je n'ai pas abordé le cas d'un espace fermé d'une connexion multiple ni la généralisation du théorème d'ABEL qui en suit. Je remplirai cette lacune dans un autre mémoire.



Chapitre I.

Les fonctions des lignes.

Article 1^{er}.

1. Nous commencerons par quelques études générales sur les *fonctions des lignes* dans un espace à trois dimensions. Je me bornerai à considérer des lignes fermées qui n'ont pas de noeuds. Je ferai l'hypothèse que les coordonnées x, y, z des points de chaque ligne soient des fonctions continues de l'arc s de la courbe.

A chaque ligne L parcourue dans une direction donnée, correspondra la valeur d'une variable ϕ . On doit supposer qu'en général en changeant la direction de la ligne, même sans la déplacer, la valeur correspondante de la variable ϕ change aussi. Je désignerai cette correspondance par le *symbole*

$$\phi = \phi \llbracket L \rrbracket.$$

On va trouver des variables ψ dont les valeurs ne dépendent pas seulement des lignes L , mais aussi de la position d'un point variable A pris sur la ligne. On désignera une telle fonction par

$$\psi = \psi \llbracket L, A \rrbracket.$$

Si la position du point est définie par la longueur s de l'arc compris entre le point variable et un point fixé sur L , on écrira aussi

$$\psi = \psi \llbracket L, s \rrbracket.$$

2. Comment peut-on étendre aux fonctions des lignes les définitions de continuité et de dérivation?

C'est en poursuivant ce but, que je vais définir le *domaine* d'une ligne.

Une ligne fermée, enchaînée à L , en se déplaçant le long de L jusqu'à revenir dans sa première position, décrit une surface tubulaire. Le volume S compris dans une telle surface est ce que j'appelle un do-

maine de L . Toute ligne, comme L , qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal est une *ligne longitudinale* de S .¹ Je dirai que $\Phi[[L]]$ est *continue* si, quelque petite que soit la quantité ε , on peut toujours déterminer un domaine S de L , tel que, pour toute ligne longitudinale L' de S , on ait

$$\text{mod } |\Phi[[L']] - \Phi[[L]]| < \varepsilon.$$

Pour ce qui va suivre la condition de *continuité*, telle qu'on vient de la poser, n'est pas suffisante. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les aires comprises entre les projections des deux courbes sur les plans coordonnés, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$. Il faut supposer que le rapport

$$\frac{\text{mod } |\Phi[[L']] - \Phi[[L]]|}{\sigma}$$

ne surpasse jamais une limite finie M .

Lorsque on a affaire à une fonction $\Phi[[L, s]]$, il y aura à considérer la continuité par rapport à la variable s , c'est à dire en laissant fixe la courbe L et supposant que le point A se déplace. Mais il faudra examiner aussi la condition de continuité lorsque on change A et L à la fois. Si A est un point situé à l'intérieur d'un champ T à trois dimensions, nous appellerons T un domaine de A . Nous dirons qu'il y a continuité, si, quelque petite que soit ε , on peut toujours déterminer un domaine S de L et un domaine S' de A , tels que, pour toute ligne longitudinale L' de S et pour chaque point A' de L' situé à l'intérieur de S' on ait

$$\text{mod } |\Phi[[L', A']] - \Phi[[L, A]]| < \varepsilon.$$

3. Passons maintenant à la dérivation. Faisons passer par chaque point d'un arc $l = AB$ de L un segment de longueur Δx , parallèle à l'axe x . Le lieu des extrémités de ces segments est un arc CD . Soit

$$\Phi + \Delta_x \Phi$$

¹ Voilà ce que j'entends par une ligne fermée qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal. Soit σ une section transversale du tube. Déplaçons σ de sorte qu'elle vienne engendrer le tube S , et supposons que dans le même temps un point A , pris dans l'aire σ , se déplace jusqu'à revenir dans sa position initiale. Nous dirons que la ligne décrite par A est une ligne qui parcourt le tube dans le sens longitudinal.

la valeur de la fonction qui correspond à la ligne qu'on déduit de L en remplaçant l'arc AB par la ligne $ACDB$ formée des droites AC , BD et de l'arc CD . Supposons que Δx et l tendent vers zéro en laissant A fixe et que

$$(1) \quad \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \cdot l}$$

tende vers une limite X . On appellera une telle limite la *dérivée de Φ par rapport à x* . Nous supposons que cette limite ne dépende pas du côté de B par rapport à A ni de la manière dont Δx et l tendent vers zéro. Nous ferons encore l'hypothèse que, quelque petite que soit η , on peut déterminer une quantité ω , telle que pour toute ligne L et pour tout point A l'on ait

$$\text{mod} \left| \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \cdot l} - X \right| < \eta$$

pour toutes les valeurs de Δx et de l comprises entre $-\omega$ et ω . En un mot nous supposons que le rapport (1) tend vers la limite X avec *uniformité*.

Il est clair que la limite X dépendra en général de la ligne L et du point A . Nous la désignerons par

$$\Phi'_x[[L, s]].$$

On trouvera de même les dérivées de Φ par rapport à y et par rapport à z qu'on désignera par

$$\Phi'_y[[L, s]], \quad \Phi'_z[[L, s]].$$

Nous supposons les trois dérivées continues.

4. Soit $\xi(s)$ une fonction continue. Déplaçons chaque point d'une ligne L parallèlement à l'axe x d'une quantité

$$\delta x = \varepsilon \xi(s).$$

On trouvera une ligne L' . Nous allons chercher

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi[[L']] - \Phi[[L]]}{\varepsilon}.$$

Partageons la ligne L en $2n$ parties $h_1, k_1, h_2, k_2, \dots, h_n, k_n$ de sorte que tout intervalle $h_i = a_i b_i$ soit compris entre les intervalles k_{i-1}, k_i . Posons

$$\sum_1^n k_i = \delta.$$

Soit s_i la longueur de l'arc compris entre les points $a_i a_1$ compté dans la direction $(a_i a_{i+1} \dots a_1)$. Par chaque point de l'arc h_i conduisons un segment de longueur $\varepsilon \xi(s_i)$ parallèle à l'axe x . On trouvera un arc $h'_i = a'_i b'_i$. Remplaçons les arcs h_i ($i = 1, 2, \dots, p$) par les lignes formées des droites $a_i a'_i, b_i b'_i$ et de l'arc h'_i . On aura une ligne L_p . Il est clair qu'on peut écrire

$$\Phi[[L_n]] - \Phi[[L]] = \sum_1^n \{ \Phi[[L_p]] - [[L_{p-1}]] \}$$

où L_0 signifie L .

Mais

$$\Phi[[L_p]] - \Phi[[L_{p-1}]] = \varepsilon h_p \xi(s_p) \{ \Phi'_x[[L_{p-1}, s_p]] + \eta_p \}.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{\omega}{N}$, $h_p < \omega$, N étant le maximum de $\xi(s)$, pour que

$$\text{mod } \eta_p < \eta.$$

On aura aussi

$$\Phi'_x[[L_{p-1}, s_p]] = \Phi'_x[[L, s_p]] + \eta'_p$$

et, en prenant ω suffisamment petit, en vertu de la continuité de la dérivée, on aura

$$\text{mod } \eta'_p < \eta.$$

Par la condition qu'on a posée après la continuité de Φ (§ 2) on peut écrire

$$\text{mod } | \Phi[[L']] - \Phi[[L_n]] | < M \left(\delta \varepsilon N + \sum_1^n h_p D_p \right)$$

en désignant par D_p l'oscillation de la fonction $\xi(s)$ dans l'intervalle h_p . On en déduit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi[[L']] - \Phi[[L]]}{\varepsilon} = \int_L \xi(s) \Phi'_x[[L, s]] ds.$$

De même si on donne à chaque point de L un déplacement

$$\partial y = \varepsilon \eta(s)$$

parallèlement à l'axe y , en passant de la courbe L à la courbe L'' on trouvera

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi[[L'']] - \Phi[[L]]}{\varepsilon} = \int_L \eta(s) \Phi'_y[[L, s]] ds.$$

Enfin, en supposant que par des déplacements $\partial z = \varepsilon \zeta(s)$ parallèles à l'axe z on obtient la courbe L''' , nous pouvons écrire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi[[L''']] - \Phi[[L]]}{\varepsilon} = \int_L \zeta(s) \Phi'_z[[L, s]] ds.$$

5. Supposons maintenant que les déplacements des points de L aient pour composantes dans les directions des trois axes

$$\partial x = \varepsilon \xi(s), \quad \partial y = \varepsilon \eta(s), \quad \partial z = \varepsilon \zeta(s)$$

et qu'on trouve d'une telle façon une courbe L^{IV} . On peut démontrer bien aisément que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi[[L^{IV}]] - \Phi[[L]]}{\varepsilon} = \int_L (\Phi'_x \xi + \Phi'_y \eta + \Phi'_z \zeta) ds.$$

Le résultat que nous venons de trouver peut s'énoncer aussi de la manière suivante.

Soit

$$(A) \quad \delta \Phi = \int_L (\Phi'_x \partial x + \Phi'_y \partial y + \Phi'_z \partial z) ds,$$

la quantité

$$\delta \Phi - \{\Phi[[L^{IV}]] - \Phi[[L]]\}$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur à ε .

C'est pourquoi on appellera $\delta \Phi$ la *variation de Φ* .

6. Nous allons chercher maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées Φ'_x , Φ'_y , Φ'_z .

Si par le déplacement infiniment petit des points de la ligne L cette ligne ne change pas, on aura $\delta\Phi = 0$. En posant

$$\delta x = \lambda \frac{dx}{ds} ds, \quad \delta y = \lambda \frac{dy}{ds} ds, \quad \delta z = \lambda \frac{dz}{ds} ds,$$

on aura donc, pour une valeur arbitraire de λ

$$0 = \int_L \left(\Phi'_x \frac{dx}{ds} + \Phi'_y \frac{dy}{ds} + \Phi'_z \frac{dz}{ds} \right) \lambda ds.$$

On tirera de là

$$\Phi'_x \frac{dx}{ds} + \Phi'_y \frac{dy}{ds} + \Phi'_z \frac{dz}{ds} = 0,$$

c'est à dire, si t est la tangente de L ,

$$\alpha = \cos tx = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \cos ty = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \cos tz = \frac{dz}{ds},$$

on aura

$$(2) \quad \Phi'_x \alpha + \Phi'_y \beta + \Phi'_z \gamma = 0.$$

L'égalité qu'on vient de trouver n'est pas la seule condition à laquelle les trois dérivées doivent satisfaire, mais c'est la seule dont nous nous servirons dans le cours du mémoire. Il est bien intéressant de déterminer d'autres propriétés des dérivées par exemple celles qu'on trouve en introduisant les dérivées d'ordre supérieur.¹

Article 2.

1. L'égalité (2) de l'article 1^{er} permet de poser les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi'_x = \gamma B - \beta C, \\ \Phi'_y = \alpha C - \gamma A, \\ \Phi'_z = \beta A - \alpha B. \end{cases}$$

¹ Voir la Note citée et l'autre: *Sopra le funzioni dipendenti da Linee*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. 3.

Les inconnues A, B, C ne sont pas déterminées par les égalités (3). Si A_1, B_1, C_1 vérifient ces équations, les solutions générales sont

$$A = A_1 + k\alpha, \quad B = B_1 + k\beta, \quad C = C_1 + k\gamma,$$

k étant une quantité arbitraire.

D'après les égalités (3) on pourra remplacer (A) par

$$(A') \quad \delta\Phi = \int_L \{A(\beta\delta z - \gamma\delta y) + B(\gamma\delta x - \alpha\delta z) + C(\alpha\delta y - \beta\delta x)\} ds.$$

2. Par le déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$ l'arc ds décrit un parallélogramme infiniment petit.

Supposons qu'un point en parcourt le périmètre de sorte qu'il se déplace sur ds dans la direction positive. Soit $d\sigma$ l'aire du parallélogramme. Si l'on conduit la normale n au parallélogramme en prenant pour direction positive celle d'un observateur qui voit le point mobile se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre, on aura

$$\begin{cases} (\beta\delta z - \gamma\delta y) ds = \cos nx \cdot d\sigma, \\ (\gamma\delta x - \alpha\delta z) ds = \cos ny \cdot d\sigma, \\ (\alpha\delta y - \beta\delta x) ds = \cos nz \cdot d\sigma. \end{cases}$$

Examinons maintenant la bande infiniment petite σ décrite de la ligne L par le déplacement. n en sera la normale et $d\sigma$ la différentielle de l'aire. On aura donc

$$(4) \quad \delta\Phi = \int_{\sigma} (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma.$$

3. Soient L_1 et L_2 deux courbes. Si on déplace L_1 jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec L_2 , même en direction, L_1 décrira une surface Σ . J'appelle cette opération *mener une surface par L_1 et L_2* .

En suivant L_1 dans son mouvement, on peut déterminer pour tout point de la surface Σ des valeurs pour A, B, C . On peut supposer que le déplacement total soit résultant de déplacements infiniment petits.

Appliquant à chaque déplacement infiniment petit la formule (4), on trouvera

$$(5) \quad \Phi[[L_2]] - \Phi[[L_1]] = \int_{\Sigma} (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\Sigma.$$

Article 3.

1. Il faut maintenant distinguer deux cas qui se présentent dans l'étude des fonctions des lignes. Soient L_1 et L_2 deux lignes qui ont un arc l commun. Si on doit parcourir l en directions contraires en supposant qu'il appartienne aux deux lignes, on pourra retrancher l et obtenir une courbe L_3 dont la direction même sera déterminée. On écrira

$$L_3 = L_1 + L_2.$$

Le premier cas se présentera si l'égalité

$$(6) \quad \Phi[[L_3]] = \Phi[[L_1]] + \Phi[[L_2]]$$

est toujours réalisée. J'appelle dans un tel cas Φ une *fonction du 1^{er} degré*.

Le deuxième cas se présentera si l'égalité (6) n'est pas toujours vérifiée. Nous allons borner nos recherches aux fonctions du 1^{er} degré. Supposons que deux lignes L_1 et L_2 se coupent dans un point M . Soient ds_1, ds_2 les éléments linéaires des deux lignes en M . Posons

$$\begin{aligned} \Phi'_x[[L_1, M]] &= X_1, & \Phi'_y[[L_1, M]] &= Y_1, & \Phi'_z[[L_1, M]] &= Z_1, \\ \Phi'_x[[L_2, M]] &= X_2, & \Phi'_y[[L_2, M]] &= Y_2, & \Phi'_z[[L_2, M]] &= Z_2, \\ \cos(ds_1, x) &= \alpha_1, & \cos(ds_1, y) &= \beta_1, & \cos(ds_1, z) &= \gamma_1, \\ \cos(ds_2, x) &= \alpha_2, & \cos(ds_2, y) &= \beta_2, & \cos(ds_2, z) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

On donne à tout point de l'arc ds_1 un déplacement ds_2 . Nous nous proposons de chercher quelle est la variation de Φ . Si on appelle cette variation $\delta_{12}\Phi$, on aura

$$\delta_{12}\Phi = (X_1\alpha_2 + Y_1\beta_2 + Z_1\gamma_2)ds_2ds_1.$$

De même la variation de Φ correspondante au déplacement ds_1 des points de l'arc ds_2 sera donnée par

$$\delta_{21} \Phi = (X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1) ds_1 ds_2.$$

Je nomme λ le contour du parallélogramme dont les côtés sont ds_1 et ds_2 . Si Φ est du 1^{er} degré, on aura

$$-\delta_{12} \Phi = \delta_{21} \Phi = \Phi[[\lambda]]$$

d'où

$$(7) \quad 0 = X_1 \alpha_2 + Y_1 \beta_2 + Z_1 \gamma_2 + X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1.$$

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned} X_1 &= \gamma_1 B_1 - \beta_1 C_1, & Y_1 &= \alpha_1 C_1 - \gamma_1 A_1, & Z_1 &= \beta_1 A_1 - \alpha_1 B_1, \\ X_2 &= \gamma_2 B_2 - \beta_2 C_2, & Y_2 &= \alpha_2 C_2 - \gamma_2 A_2, & Z_2 &= \beta_2 A_2 - \alpha_2 B_2. \end{aligned}$$

Par suite l'égalité (7) pourra s'écrire

$$(8) \quad 0 = (A_1 - A_2)(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) \\ + (C_1 - C_2)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

d'où

$$(8') \quad (A_1 - A_2) \cos nx + (B_1 - B_2) \cos ny + (C_1 - C_2) \cos nz = 0,$$

n étant la normale aux lignes L_1, L_2 en M .

2. Cela posé, prenons trois lignes L_x, L_y, L_z qui se coupent en M , dont les tangentes en M sont parallèles aux axes coordonnées. On aura

$$\begin{aligned} \Phi'_y[[L_x, M]] &= C_x, & \Phi'_z[[L_x, M]] &= -B_x, \\ \Phi'_z[[L_y, M]] &= A_y, & \Phi'_x[[L_y, M]] &= -C_y, \\ \Phi'_x[[L_z, M]] &= B_z, & \Phi'_y[[L_z, M]] &= -A_z. \end{aligned}$$

L'égalité (8') appliquée aux couples de lignes $(L_y, L_z), (L_z, L_x), (L_x, L_y)$ donne

$$A_y = A_z, \quad B_z = B_x, \quad C_x = C_y.$$

Nous posons

$$A_y = A_z = p, \quad B_z = B_x = q, \quad C_x = C_y = r.$$

Soit L une ligne arbitraire qui passe par M . Supposons réalisées les égalités (3) et posons

$$\cos(L, x) = \alpha, \quad \cos(L, y) = \beta, \quad \cos(L, z) = \gamma.$$

En appliquant l'égalité (8') aux couples de lignes $(L, L_x), (L, L_y), (L, L_z)$, il est bien clair qu'on trouve

$$(B - q)\gamma - (C - r)\beta = 0,$$

$$(C - r)\alpha - (A - p)\gamma = 0,$$

$$(A - p)\beta - (B - q)\alpha = 0,$$

d'où

$$p = A + k\alpha, \quad q = B + k\beta, \quad r = C + k\gamma.$$

Nous pouvons donc remplacer A, B, C par p, q, r dans les équations (3). On en déduit le théorème:

Soit Φ une fonction du 1^{er} degré des lignes, on peut déterminer pour tout point M de l'espace trois quantités p, q, r telles que les conditions

$$\Phi_x[[L, M]] = q\gamma - r\beta,$$

$$\Phi_y[[L, M]] = r\alpha - p\gamma,$$

$$\Phi_z[[L, M]] = p\beta - q\alpha$$

soient remplies pour toute ligne qui passe par M .

3. Par deux lignes L_1, L_2 , menons une surface Σ . On tire de l'égalité (5)

$$(B) \quad \Phi[[L_2]] - \Phi[[L_1]] = \int_{\Sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\Sigma.$$

Si L_1 en décroissant indéfiniment tend vers un point, on aura

$$\lim \Phi[[L_1]] = 0,$$

d'où

$$(B') \quad \Phi[[L_2]] = \int_{\Sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\Sigma.$$

Dans un tel cas L_2 est le contour de la surface Σ . Pour déterminer la direction positive de n par rapport à L_2 imaginons, comme on fait en électrodynamique, L_2 personnifié par une poupée qui regarde la surface. n ira de la droite à la gauche. Supposons de nouveau que la surface Σ en décroissant tende vers un point M . On aura

$$\lim \frac{\Phi|[L_2]}{\Sigma} = p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz,$$

en prenant les valeurs p, q, r qui correspondent au point M . On appellera $\lim \frac{\Phi|[L_2]}{\Sigma}$ la *dérivée de Φ par rapport à Σ* et on la représentera par $\frac{d\Phi}{d\Sigma}$. Il est évident que le signe dont la dérivée est affectée n'est déterminé que lorsque on connaît la direction positive de la normale à la surface Σ . Prenons la dérivée de Φ par rapport à une surface Σ normale à l'axe x en M ; on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma} = p.$$

De même si Σ_1 et Σ_2 sont des surfaces normales aux axes y et z , on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma_1} = q, \quad \frac{d\Phi}{d\Sigma_2} = r.$$

C'est pourquoi on peut désigner p, q, r par

$$\frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi}{d(x, y)},$$

et on peut les appeler les *dérivées de Φ par rapport aux plans coordonnés*.

4. A quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées p, q, r ?
Conduisons une surface σ limitée par un contour L . On aura

$$\Phi|[L] = \int_{\sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma.$$

Si l'on fait diminuer L jusqu'à devenir un point, σ devient une surface

fermée. D'ailleurs $\Phi[|L|]$ tend vers zéro. On aura donc, si σ est une surface fermée

$$\int_{\sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma = 0.$$

Soit S le volume limité par σ , on aura par une transformation bien connue,

$$\int_{\sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma = \pm \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) dS$$

et en conséquence

$$(C) \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Réciproquement il est bien clair que si l'on suppose l'égalité (C) réalisée par p, q, r , on peut trouver, dans toute portion de l'espace limitée par un seul contour où p, q, r n'ont pas de singularités, une fonction de 1^{er} degré dont p, q, r sont les dérivées prises par rapport aux plans coordonnées.

Par les symboles introduits dans cet article on peut donc écrire

$$(C') \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\Phi}{d(y, z)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\Phi}{d(z, x)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{d\Phi}{d(x, y)} = 0.$$

Article 4.

1. Proposons-nous la question de la transformation des dérivées

$$\frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

par le changement des coordonnées.

Supposons que, par les équations

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

on établisse une correspondance continue et univoque entre deux espaces limités ou illimités. A chaque ligne L du premier espace (x, y, z)

correspond une ligne Λ dans l'autre (ξ, η, ζ) . Par suite à une fonction $\Phi[[L]]$ de 1^{er} degré dans l'espace (x, y, z) correspond une fonction $\Phi[[\Lambda]]$ de 1^{er} degré dans l'autre (ξ, η, ζ) . Il faut chercher les relations qui ont lieu entre

$$p = \frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad q = \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad r = \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

et

$$\frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)}, \quad \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \quad \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}$$

A cet effet prenons une surface S limitée par L et la surface correspondante Σ dans l'autre espace qui sera limitée par Λ . Individualisons les points de la surface par deux paramètres u, v . On aura

$$\Phi[[L]] = \int_S [p \cos(nx) + q \cos(ny) + r \cos(nz)] dS.$$

Posons ¹

$$\frac{d(y, z)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{d(z, x)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

On trouvera

$$\Phi[[L]] = \int_S \left\{ p \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + q \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + r \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right\} du dv.$$

Soit

$$\tilde{\omega} = p \frac{d(y, z)}{d(\eta, \zeta)} + q \frac{d(z, x)}{d(\eta, \zeta)} + r \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)},$$

$$\chi = p \frac{d(y, z)}{d(\zeta, \xi)} + q \frac{d(z, x)}{d(\zeta, \xi)} + r \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)},$$

$$\rho = p \frac{d(y, z)}{d(\xi, \eta)} + q \frac{d(z, x)}{d(\xi, \eta)} + r \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}.$$

¹ Dans ce mémoire nous représenterons toujours le déterminant fonctionnel des variables $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n par $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

L'équation (B') peut s'écrire

$$\Phi|[L]| = \int_s \left\{ \tilde{\omega} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \chi \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)} + \rho \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} \right\} du dv.$$

Mais on a

$$\Phi|[L]| = \Phi|[A]|;$$

par suite, si ν est normale à Σ , on aura

$$\Phi|[A]| = \int_{\Sigma} \{ \tilde{\omega} \cos(\nu\xi) + \chi \cos(\nu\eta) + \rho \cos(\nu\zeta) \} d\Sigma,$$

d'où

$$\tilde{\omega} = \frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)}, \quad \chi = \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \quad \rho = \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}.$$

Voilà donc les relations qu'on cherchait:

$$(D) \quad \begin{cases} \frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)} = \frac{d\Phi}{d(y, z)} \frac{d(y, z)}{d(\eta, \zeta)} + \frac{d\Phi}{d(z, x)} \frac{d(z, x)}{d(\eta, \zeta)} + \frac{d\Phi}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)}, \\ \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)} = \frac{d\Phi}{d(y, z)} \frac{d(y, z)}{d(\zeta, \xi)} + \frac{d\Phi}{d(z, x)} \frac{d(z, x)}{d(\zeta, \xi)} + \frac{d\Phi}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)}, \\ \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)} = \frac{d\Phi}{d(y, z)} \frac{d(y, z)}{d(\xi, \eta)} + \frac{d\Phi}{d(z, x)} \frac{d(z, x)}{d(\xi, \eta)} + \frac{d\Phi}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}. \end{cases}$$

Article 5.

1. On sait qu'en posant

$$p = \frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad q = \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad r = \frac{d\Phi}{d(x, y)},$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Il sera donc possible de trouver deux fonctions λ, μ par les conditions

$$(9) \quad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(y, z)} = p, \quad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(z, x)} = q, \quad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(x, y)} = r.$$

A cet effet il suffit d'employer la méthode donnée par JACOBI dans la théorie du *multiplicateur*. On prend μ de sorte que

$$p \frac{\partial \mu}{\partial x} + q \frac{\partial \mu}{\partial y} + r \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

et puis

$$\lambda = \int \frac{1}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)} (pdy - qdx) + F(\mu),$$

F étant une fonction arbitraire. (Voir JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, page 78). Si on prend des variables ξ, η, ζ au lieu de x, y, z , on trouvera

$$\frac{d(\lambda, \mu)}{d(\eta, \zeta)} = \frac{d(\lambda, \mu) d(y, z)}{d(y, z) d(\eta, \zeta)} + \frac{d(\lambda, \mu) d(z, x)}{d(z, x) d(\eta, \zeta)} + \frac{d(\lambda, \mu) d(x, y)}{d(x, y) d(\eta, \zeta)} = \tilde{\omega}.$$

De même

$$\frac{d(\lambda, \mu)}{d(\zeta, \xi)} = \chi = \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \quad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(\xi, \eta)} = \rho = \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}.$$

On en déduit que les relations entre λ, μ et les dérivées de Φ ne changent pas par un changement de variables.

2. Sur une surface σ prenons les coordonnées curvilignes u, v . Soit $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ le carré de l'élément linéaire. On aura

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(\lambda, \mu)}{d(u, v)}.$$

Il est évident que sur une surface où $\lambda = \text{const.}$ on a $\frac{d\Phi}{d\sigma} = 0$.

3. Posons

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} = a, \quad \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} = b, \quad \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} = c,$$

on aura

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = p, \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = q, \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = r.$$

Soit L le contour d'une surface σ , on peut écrire

$$\Phi[L] = \int_{\sigma} (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma,$$

d'où, par le théorème de STOKES

$$(E) \quad \Phi[L] = \int_L (adx + bdy + cdz) = \int_L \lambda d\mu.$$

Chapitre II.

Liaison d'isogénéité.

Article 1^{er}.

1. Pour généraliser la théorie ordinaire des fonctions monogènes aux espaces à trois dimensions, supposons que nous ayons deux variables imaginaires qui soient des fonctions de 1^{er} degré des lignes de l'espace. Nous allons établir une condition tout à fait semblable à la condition de *monogénéité*. A cet effet soient F et Φ les valeurs des deux fonctions correspondantes à une ligne L . Déformons un arc AB de L et désignons par ΔF et $\Delta \Phi$ les variations de F et de Φ . Si en diminuant indéfiniment la déformation et la distance entre B et le point fixe A , le rapport $\frac{\Delta F}{\Delta \Phi}$ tend vers une limite qui dépend seulement du point A , on dira que les deux variables ont une *liaison d'isogénéité*, ou qu'elles sont *isogènes*.

Il est bien clair que si Φ et Ψ ont une liaison d'isogénéité avec F , Φ et Ψ sont isogènes.

2. Il faut chercher maintenant les propriétés qu'on peut déduire de la définition qu'on a posée.

Les relations qu'on va trouver sont tout à fait semblables à celles qu'on a dans le cas de deux variables imaginaires liées par la condition ordinaire de monogénéité. On trouvera même une relation différentielle

qui est analogue à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$. Je vais rappeler en peu de mots la méthode qu'on peut suivre dans le cas ordinaire, pour trouver ces relations, pour en montrer l'analogie avec la marche que je suivrai dans le cas des fonctions des lignes.

Soient f et φ deux variables imaginaires fonctions des points d'une surface. On supposera les points de cette surface rapportés à des coordonnées curvilignes u et v . Décomposons f et φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$f = f_1 + if_2, \quad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u} = p_1, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = q_1; & \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = p_2, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = q_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \tilde{\omega}_1, & \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \chi_1; & \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \tilde{\omega}_2, & \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \chi_2. \end{aligned}$$

En prenant les dérivées de f et de φ dans une direction quelconque s on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (p_1 + ip_2) \frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2) \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= (\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2) \frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2) \frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

Si maintenant φ est une fonction homogène de f , le rapport

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} : \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2) \frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2) \frac{\partial v}{\partial s}}{(p_1 + ip_2) \frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2) \frac{\partial v}{\partial s}}$$

doit être indépendant de la direction s . On en déduit

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2}.$$

On tire de là par des calculs bien simples

$$(2^*) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \frac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1q_1 + p_2q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2q_1 - p_1q_2}, \\ \chi_2 = \frac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (p_1q_1 + p_2q_2)\chi_1}{p_2q_1 - p_1q_2}. \end{cases}$$

En posant pour abrégé

$$(3^*) \quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, & p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12}, & q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, \\ & p_2 q_1 - p_1 q_2 = D, \end{cases}$$

on aura

$$(A_1^*) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D}, \\ \chi_2 = -\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D}. \end{cases}$$

De même on trouve

$$(A_2^*) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \frac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D}, \\ \chi_1 = -\frac{E_{12}\chi_2 - E_{22}\tilde{\omega}_2}{D}. \end{cases}$$

Les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2$ satisfont à la condition

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial v} - \frac{\partial \chi_2}{\partial u} = 0;$$

c'est pourquoi on aura

$$(5^*) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D} \right] = 0,$$

c'est à dire

$$(C^*) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}}{D} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}}{D} \right] = 0.$$

Cette équation est la condition $\Delta_2 \varphi_1 = 0$. De même on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{E_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - E_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}}{D} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E_{11} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - E_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}}{D} \right] = 0,$$

c'est à dire $\Delta_2 \varphi_2 = 0$.

Il est bien facile de démontrer que, si φ_1 est une fonction qui satisfait à l'équation (C*), on peut toujours déterminer une fonction φ_2 , telle que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$.

Les coefficients E_{11} , E_{12} , E_{22} sont en général des fonctions de u et v , mais il est toujours possible, par un changement des coordonnées u , v , de rendre ces coefficients constants. En particulier on peut ramener l'équation (C*) à la forme $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} = 0$.

3. Passons maintenant aux calculs analogues pour les deux variables imaginaires F et Φ qui ont une liaison d'isogénéité.

A cet effet décomposons F et Φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$\Phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad F = F_1 + iF_2.$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{d(y, z)} &= p_1, & \frac{dF_1}{d(z, x)} &= q_1, & \frac{dF_1}{d(x, y)} &= r_1, \\ \frac{dF_2}{d(y, z)} &= p_2, & \frac{dF_2}{d(z, x)} &= q_2, & \frac{dF_2}{d(x, y)} &= r_2, \\ \frac{d\phi_1}{d(y, z)} &= \tilde{\omega}_1, & \frac{d\phi_1}{d(z, x)} &= \chi_1, & \frac{d\phi_1}{d(x, y)} &= \rho_1, \\ \frac{d\phi_2}{d(y, z)} &= \tilde{\omega}_2, & \frac{d\phi_2}{d(z, x)} &= \chi_2, & \frac{d\phi_2}{d(x, y)} &= \rho_2. \end{aligned}$$

Pour réaliser la condition de monogénéité, il faut que le rapport

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = \frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2) \cos nx + (\chi_1 + i\chi_2) \cos ny + (\rho_1 + i\rho_2) \cos nz}{(p_1 + ip_2) \cos nx + (q_1 + iq_2) \cos ny + (r_1 + ir_2) \cos nz}$$

soit indépendant de la direction n . C'est pourquoi il faut poser

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2},$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} q_1 \tilde{\omega}_1 - q_2 \tilde{\omega}_2 = p_1 \chi_1 - p_2 \chi_2, & q_2 \tilde{\omega}_1 + q_1 \tilde{\omega}_2 = p_2 \chi_1 + p_1 \chi_2, \\ r_1 \chi_1 - r_2 \chi_2 = q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2, & r_2 \chi_1 + r_1 \chi_2 = q_2 \rho_1 + q_1 \rho_2, \\ p_1 \rho_1 - p_2 \rho_2 = r_1 \tilde{\omega}_1 - r_2 \tilde{\omega}_2, & p_2 \rho_1 + p_1 \rho_2 = r_2 \tilde{\omega}_1 + r_1 \tilde{\omega}_2. \end{cases}$$

4. En résolvant ces équations par rapport à $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$, on trouve

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \frac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1q_1 + p_2q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2q_1 - p_1q_2} = -\frac{(p_1^2 + p_2^2)\rho_1 - (p_1r_1 + p_2r_2)\tilde{\omega}_1}{r_2p_1 - p_2r_1}, \\ \chi_2 = \frac{(q_1^2 + q_2^2)\rho_1 - (q_1r_1 + q_2r_2)\chi_1}{q_2r_1 - q_1r_2} = -\frac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (q_1p_1 + q_2p_2)\chi_1}{p_2q_1 - q_2p_1}, \\ \rho_2 = \frac{(r_1^2 + r_2^2)\tilde{\omega}_1 - (r_1p_1 + r_2p_2)\rho_1}{r_2p_1 - r_1p_2} = -\frac{(r_1^2 + r_2^2)\chi_1 - (r_1q_1 + r_2q_2)\rho_1}{q_2r_1 - r_2q_1}. \end{cases}$$

Posons pour abrégé

$$(3) \quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, & q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, & r_1^2 + r_2^2 = E_{33}, \\ q_1r_1 + q_2r_2 = E_{23} = E_{32}, & r_1p_1 + r_2p_2 = E_{31} = E_{13}, \\ p_1q_1 + p_2q_2 = E_{12} = E_{21}, \\ q_2r_1 - q_1r_2 = D_1, & r_2p_1 - r_1p_2 = D_2, & p_2q_1 - p_1q_2 = D_3, \end{cases}$$

on aura

$$(4) \quad \begin{cases} E_{11}D_1 + E_{12}D_2 + E_{13}D_3 = 0, \\ E_{21}D_1 + E_{22}D_2 + E_{23}D_3 = 0, \\ E_{31}D_1 + E_{32}D_2 + E_{33}D_3 = 0, \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} D_1^2 = E_{22}E_{33} - E_{23}^2, \\ D_2^2 = E_{33}E_{11} - E_{31}^2, \\ D_3^2 = E_{11}E_{22} - E_{12}^2, \end{cases} \quad (4'') \quad \begin{cases} D_2D_3 = E_{12}E_{13} - E_{11}E_{23}, \\ D_3D_1 = E_{23}E_{21} - E_{22}E_{31}, \\ D_1D_2 = E_{31}E_{32} - E_{33}E_{12}. \end{cases}$$

Substituons les valeurs (3) dans les formules (2), on trouvera

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 &= \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3} = -\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\tilde{\omega}_1}{D_2}, \\ \chi_2 &= \frac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = -\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\chi_1}{D_3}, \\ \rho_2 &= \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = -\frac{E_{31}\chi_1 - E_{33}\rho_1}{D_1}. \end{aligned}$$

En employant les équations (4) on pourra écrire

$$(A_1) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{13}\tilde{\omega}_1 - E_{11}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3}, \\ \chi_2 = \frac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{21}\chi_1 - E_{22}\tilde{\omega}_1}{D_3}, \\ \rho_2 = \frac{E_{32}\rho_1 - E_{33}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}. \end{cases}$$

On a de même

$$(A_2) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \frac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{11}\rho_2 - E_{13}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D_3}, \\ \chi_1 = \frac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{22}\tilde{\omega}_2 - E_{21}\chi_2}{D_3}, \\ \rho_1 = \frac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{31}\rho_2 - E_{33}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2}{D_3}. \end{cases}$$

On déduit des égalités (A₂)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 D_1 &= E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2 \\ \chi_1 D_2 &= E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2, \\ \rho_1 D_3 &= E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2, \end{aligned}$$

d'où

$$(B_1) \quad D_1\tilde{\omega}_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0.$$

De même on a

$$(B_2) \quad D_1\tilde{\omega}_2 + D_2\chi_2 + D_3\rho_2 = 0.$$

5. On a démontré (voir Chap. I, article 3) que les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent remplir les conditions

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0;$$

on aura donc d'après (A₁)

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \right) = 0.$$

Par les égalités (A₁) on voit que cette équation peut s'écrire d'autres façons équivalentes. De même les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent satisfaire à une équation analogue à l'équation (5).

L'équation (5) peut s'écrire, par les symboles du premier chapitre,

$$(C) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12} \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} - E_{13} \frac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23} \frac{d\Phi_1}{d(y,z)} - E_{21} \frac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{D_2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31} \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} - E_{32} \frac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{D_3} \right) = 0$$

et Φ_2 remplira la même condition. On peut donc énoncer la proposition:

Si Φ et F ont une liaison d'isogénéité, en décomposant Φ en ses parties réelle et imaginaire, on trouve deux fonctions qui remplissent les mêmes conditions. Ces conditions sont les suivantes

$$(D) \quad D_1 \frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0,$$

$$(C) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12} \frac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13} \frac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23} \frac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21} \frac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31} \frac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32} \frac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3} \right) = 0.$$

Réciproquement:

Si Ψ est une fonction réelle des lignes qui remplit les conditions (D), (C) on peut déterminer une fonction réelle F des lignes, telle que $\Psi + iP$ et F soient isogènes.

En effet, en vertu de l'égalité (C) on pourra poser

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d(y, z)} &= \frac{E_{12} \frac{d\psi}{d(x, y)} - E_{13} \frac{d\psi}{d(z, x)}}{D_1}, \\ \frac{dP}{d(z, x)} &= \frac{E_{23} \frac{d\psi}{d(y, z)} - E_{21} \frac{d\psi}{d(x, y)}}{D_2}, \\ \frac{dP}{d(x, y)} &= \frac{E_{31} \frac{d\psi}{d(z, x)} - E_{32} \frac{d\psi}{d(y, z)}}{D_3}. \end{aligned}$$

On tire de là, en vertu de l'équation (D),

$$\frac{\frac{d\psi}{d(y, z)} + i \frac{dP}{d(y, z)}}{p_1 + ip_2} = \frac{\frac{d\psi}{d(z, x)} + i \frac{dP}{d(z, x)}}{q_1 + iq_2} = \frac{\frac{d\psi}{d(x, y)} + i \frac{dP}{d(x, y)}}{r_1 + ir_2};$$

par conséquent le rapport

$$\frac{\frac{dA}{d(y, z)} \cos nx + \frac{dA}{d(z, x)} \cos ny + \frac{dA}{d(x, y)} \cos nz}{\frac{dF}{d(y, z)} \cos nx + \frac{dF}{d(z, x)} \cos ny + \frac{dF}{d(x, y)} \cos nz}$$

est indépendant de la direction n , A étant égal à $\psi + iP$.

C. Q. F. D.

On voit donc que la théorie que nous venons d'exposer est liée à celle des équations (D) et (C), de même que la théorie ordinaire se rapporte à celle de l'équation $\Delta_2 = 0$.

6. Soit maintenant ϕ_1 une fonction des lignes du 1^{er} degré telle que la condition (D) soit réalisée.

Supposons qu'on ne sache pas si elle remplit la condition (C). Quelles sont les formules des paragraphes précédents qu'on pourra toujours conserver? Posons

$$\frac{d\phi_1}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_1, \quad \frac{d\phi_1}{d(z, x)} = \chi_1, \quad \frac{d\phi_1}{d(x, y)} = \rho_1.$$

Il est bien clair que toutes les formules des §§ 3 et 4 peuvent être conservées.

Il faut remarquer seulement qu'on ne saura pas si les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ qui se trouvent dans ces formules sont les dérivées d'une fonction des lignes prises par rapport aux plans coordonnées. Si, au contraire la condition (C) est remplie, alors seulement la condition de l'intégrabilité

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0$$

sera remplie aussi, et par suite $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ seront les dérivées d'une fonction Φ_2 telle que $\Phi_1 + i\Phi_2$ et F aient une liaison d'isogénéité. Nous allons employer cette remarque dans les articles suivants.

Article 2.

1. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire il y a deux paramètres différentiels du premier ordre qui jouent un rôle bien important.

Si on se rapporte aux notations du § 2, article 1^{er}, les deux paramètres sont les suivants

$$\Delta_1 \psi = \frac{E_{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 - 2E_{12} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + E_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2}{D^2},$$

$$\Delta_1 \psi \theta = \frac{E_{22} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} - E_{12} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) + E_{11} \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v}}{D^2}.$$

Les propriétés de ces paramètres sont bien connues. En supposant, comme dans le § 2, article 1^{er}, que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$, on a

$$\Delta_1 \varphi_1 = \Delta_1 \varphi_2.$$

Il est aussi bien connu que le problème suivant du calcul des variations: déterminer la fonction ψ , dont les valeurs sont connues au contour du champ σ , en sorte que $I = \frac{1}{2} \int_{\sigma} D \Delta_1 \psi du dv$ soit minimum,

conduit à l'équation

$$\Delta_2 \psi = 0$$

lorsque le problème peut se résoudre par une fonction ψ finie dont les dérivées secondes sont intégrables.

2. Nous allons examiner deux paramètres différentiels qui dans notre théorie jouent le rôle des paramètres différentiels du 1^{er} ordre dans la théorie ordinaire. A cet effet supposons que les deux fonctions réelles ϕ_1, ϕ'_1 remplissent les conditions

$$(6) \quad D_1 \frac{d\phi_1}{d(y, z)} + D_2 \frac{d\phi_1}{d(z, x)} + D_3 \frac{d\phi_1}{d(x, y)} = 0,$$

$$(6') \quad D_1 \frac{d\phi'_1}{d(y, z)} + D_2 \frac{d\phi'_1}{d(z, x)} + D_3 \frac{d\phi'_1}{d(x, y)} = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d(y, z)} &= \tilde{\omega}_1, & \frac{d\phi_1}{d(z, x)} &= \chi_1, & \frac{d\phi_1}{d(x, y)} &= \rho_1, \\ \frac{d\phi'_1}{d(y, z)} &= \tilde{\omega}'_1, & \frac{d\phi'_1}{d(z, x)} &= \chi'_1, & \frac{d\phi'_1}{d(x, y)} &= \rho'_1. \end{aligned}$$

En vertu de ce qu'on vient de dire à la fin de l'article précédent, on pourra écrire toutes les formules des §§ 3 et 4 et même celles qu'on obtient de ces formules en posant un suffixe aux lettres $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$.

Posons

$$H_{\phi_1, \phi'_1} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi'_2, \rho'_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix}.$$

Nous aurons par les formules (A₁)

$$\begin{aligned} (E') \quad H &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{D_1 E_{23} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}'_1 + D_2 E_{31} \chi_1 \chi'_1 + D_3 E_{12} \rho_1 \rho'_1\} \\ &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{D_1 E_{23} \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}'_2 + D_2 E_{31} \chi_2 \chi'_2 + D_3 E_{12} \rho_2 \rho'_2\}. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi'_2, \rho'_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} \rho'_2, \tilde{\omega}'_2 \\ \rho_1, \tilde{\omega}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}'_2, \chi'_2 \\ \tilde{\omega}_1, \chi_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi_2, \rho_2 \\ \chi'_1, \rho'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} \rho_2, \tilde{\omega}_2 \\ \rho'_1, \tilde{\omega}'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_2, \chi_2 \\ \tilde{\omega}'_1, \chi'_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Par suite on trouve

$$\begin{aligned}
 (\text{E}') \quad H &= \frac{1}{2D_1 D_2 D_3} \{D_1 E_{11}(\rho_1 \chi'_1 + \rho'_1 \chi_1) + D_2 E_{22}(\tilde{\omega}_1 \rho'_1 + \tilde{\omega}'_1 \rho_1) + D_3 E_{33}(\chi_1 \tilde{\omega}'_1 + \chi'_1 \tilde{\omega}_1)\} \\
 &= \frac{1}{2D_1 D_2 D_3} \{D_1 E_{11}(\rho_2 \chi'_2 + \rho'_2 \chi_2) + D_2 E_{22}(\tilde{\omega}_2 \rho'_2 + \tilde{\omega}'_2 \rho_2) + D_3 E_{33}(\chi_2 \tilde{\omega}'_2 + \chi'_2 \tilde{\omega}_2)\} \\
 &= \frac{E_{22} \rho_1 \rho'_1 - E_{23}(\rho_1 \chi'_1 + \chi_1 \rho'_1) + E_{33} \chi_1 \chi'_1}{D_1^2} = \frac{E_{33} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}'_1 - E_{31}(\tilde{\omega}_1 \rho'_1 + \rho_1 \tilde{\omega}'_1) + E_{11} \rho_1 \rho'_1}{D_2^2} \\
 &= \frac{E_{11} \chi_1 \chi'_1 - E_{12}(\chi_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_1 \chi_1) + E_{22} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}'_1}{D_3^2} = \frac{E_{22} \rho_2 \rho'_2 - E_{23}(\rho_2 \chi'_2 + \chi_2 \rho'_2) + E_{33} \chi_2 \chi'_2}{D_1^2} \\
 &= \frac{E_{33} \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}'_2 - E_{31}(\tilde{\omega}_2 \rho'_2 + \rho_2 \tilde{\omega}'_2) + E_{11} \rho_2 \rho'_2}{D_2^2} = \frac{E_{11} \chi_2 \chi'_2 - E_{12}(\chi_2 \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_2 \chi_2) + E_{22} \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}'_2}{D_3^2} \\
 &= \frac{(q_1 \rho'_1 - r_1 \chi'_1)(q_1 \rho_1 - r_1 \chi_1) + (q_2 \rho'_1 - r_2 \chi'_1)(q_2 \rho_1 - r_2 \chi_1)}{D_1^2} \\
 &= \frac{(r_1 \tilde{\omega}'_1 - p_1 \rho'_1)(r_1 \tilde{\omega}_1 - p_1 \rho_1) + (r_2 \tilde{\omega}'_1 - p_2 \rho'_1)(r_2 \tilde{\omega}_1 - p_2 \rho_1)}{D_2^2} \\
 &= \frac{(p_1 \chi'_1 - q_1 \tilde{\omega}'_1)(p_1 \chi_1 - q_1 \tilde{\omega}_1) + (p_2 \chi'_1 - q_2 \tilde{\omega}'_1)(p_2 \chi_1 - q_2 \tilde{\omega}_1)}{D_3^2} \\
 &= \frac{(q_1 \rho'_2 - r_1 \chi'_2)(q_1 \rho_2 - r_1 \chi_2) + (q_2 \rho'_2 - r_2 \chi'_2)(q_2 \rho_2 - r_2 \chi_2)}{D_1^2} \\
 &= \frac{(r_1 \tilde{\omega}'_2 - p_1 \rho'_2)(r_1 \tilde{\omega}_2 - p_1 \rho_2) + (r_2 \tilde{\omega}'_2 - p_2 \rho'_2)(r_2 \tilde{\omega}_2 - p_2 \rho_2)}{D_2^2} \\
 &= \frac{(p_1 \chi'_2 - q_1 \tilde{\omega}'_2)(p_1 \chi_2 - q_1 \tilde{\omega}_2) + (p_2 \chi'_2 - q_2 \tilde{\omega}'_2)(p_2 \chi_2 - q_2 \tilde{\omega}_2)}{D_3^2}
 \end{aligned}$$

En employant les symboles introduits dans le 1^{er} chapitre on pourra écrire

$$\begin{aligned}
 &H_{\phi_1 \phi'_1} \\
 &= \frac{E_{22} \frac{d\phi_1}{d(x, y)} \frac{d\phi'_1}{d(x, y)} - E_{23} \left(\frac{d\phi_1}{d(x, y)} \frac{d\phi'_1}{d(z, x)} + \frac{d\phi_1}{d(z, x)} \frac{d\phi'_1}{d(x, y)} \right) + E_{33} \frac{d\phi_1}{d(z, x)} \frac{d\phi'_1}{d(z, x)}}{D_1^2} \\
 &= \text{etc.}
 \end{aligned}$$

3. Posons maintenant $\Phi'_1 = \Phi_1$ et remplaçons H par θ_{Φ_1} . On trouvera

$$\begin{aligned}
 (F) \quad \theta_{\Phi_1} &= \frac{1}{D_1} \left| \begin{matrix} \chi_2, \rho_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{D_2} \left| \begin{matrix} \rho_2, \tilde{\omega}_2 \\ \rho_1, \tilde{\omega}_1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{D_3} \left| \begin{matrix} \tilde{\omega}_2, \chi_2 \\ \tilde{\omega}_1, \chi_1 \end{matrix} \right| \\
 &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{23} \tilde{\omega}_1^2 + D_2 E_{31} \chi_1^2 + D_3 E_{12} \rho_1^2 \} \\
 &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{23} \tilde{\omega}_2^2 + D_2 E_{31} \chi_2^2 + D_3 E_{12} \rho_2^2 \} \\
 &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{11} \chi_1 \rho_1 + D_2 E_{22} \rho_1 \tilde{\omega}_1 + D_3 E_{33} \tilde{\omega}_1 \chi_1 \} \\
 &= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{11} \chi_2 \rho_2 + D_2 E_{22} \rho_2 \tilde{\omega}_2 + D_3 E_{33} \tilde{\omega}_2 \chi_2 \} \\
 &= \frac{E_{23} \rho_1^2 - 2E_{23} \rho_1 \chi_1 + E_{33} \chi_1^2}{D_1^2} = \frac{E_{33} \tilde{\omega}_1^2 - 2E_{31} \tilde{\omega}_1 \rho_1 + E_{11} \rho_1^2}{D_2^2} = \frac{E_{11} \chi_1^2 - 2E_{12} \chi_1 \tilde{\omega}_1 + E_{22} \tilde{\omega}_1^2}{D_3^2} \\
 &= \frac{E_{22} \rho_2^2 - 2E_{23} \rho_2 \chi_2 + E_{33} \chi_2^2}{D_1^2} = \frac{E_{33} \tilde{\omega}_2^2 - 2E_{31} \tilde{\omega}_2 \rho_2 + E_{11} \rho_2^2}{D_2^2} = \frac{E_{11} \chi_2^2 - 2E_{12} \chi_2 \tilde{\omega}_2 + E_{22} \tilde{\omega}_2^2}{D_3^2} \\
 &= \frac{(q_1 \rho_1 - r_1 \chi_1)^2 + (q_2 \rho_1 - r_2 \chi_1)^2}{D_1^2} = \frac{(r_1 \tilde{\omega}_1 - p_1 \rho_1)^2 + (r_2 \tilde{\omega}_1 - p_2 \rho_1)^2}{D_2^2} \\
 &= \frac{(p_1 \chi_1 - q_1 \tilde{\omega}_1)^2 + (p_2 \chi_1 - q_2 \tilde{\omega}_1)^2}{D_3^2} = \frac{(q_1 \rho_2 - r_1 \chi_2)^2 + (q_2 \rho_2 - r_2 \chi_2)^2}{D_1^2} \\
 &= \frac{(r_1 \tilde{\omega}_2 - p_1 \rho_2)^2 + (r_2 \tilde{\omega}_2 - p_2 \rho_2)^2}{D_2^2} = \frac{(p_1 \chi_2 - q_1 \tilde{\omega}_2)^2 + (p_2 \chi_2 - q_2 \tilde{\omega}_2)^2}{D_3^2}
 \end{aligned}$$

Il est évident, par les dernières formules, que θ_{Φ_1} est une quantité positive.

A l'aide des symboles du premier chapitre on peut écrire

$$\theta_{\Phi_1} = \frac{E_{22} \left(\frac{d\Phi_1}{d(x, y)} \right)^2 - 2E_{23} \frac{d\Phi_1}{d(x, y)} \frac{d\Phi_1}{d(z, x)} + E_{33} \left(\frac{d\Phi_1}{d(z, x)} \right)^2}{D_1^2} = \text{etc.}$$

4. Il faut démontrer maintenant que H et θ ne changent pas par un changement de variables. Soient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les nouvelles variables. Désignons les quantités relatives aux nouvelles variables par les mêmes lettres qui désignent les quantités analogues qui ont rapport aux variables x, y, z , en plaçant un trait horizontal au dessus de chaque lettre.

Des formules trouvées dans le 1^{er} chapitre, article 4, on déduira par un calcul très simple

$$(7) \quad \begin{cases} \bar{D}_1 = \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(D_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right), \\ \bar{D}_2 = \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(D_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right), \\ \bar{D}_3 = \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(D_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \right). \end{cases}$$

De même en posant

$$\begin{aligned} M_1 &= \chi'_2 \rho_1 - \rho'_2 \chi_1, & M_2 &= \rho'_2 \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}'_2 \rho_1, & M_3 &= \tilde{\omega}'_2 \chi_1 - \chi'_2 \tilde{\omega}_1, \\ A_1 &= \chi_2 \rho_1 - \rho_2 \chi_1, & A_2 &= \rho_2 \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \rho_1, & A_3 &= \tilde{\omega}_2 \chi_1 - \chi_2 \tilde{\omega}_1, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right), \\ \bar{M}_2 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right), \\ \bar{M}_3 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \right), \\ \bar{A}_1 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + A_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + A_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right), \\ \bar{A}_2 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + A_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + A_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right), \\ \bar{A}_3 &= \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + A_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + A_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned}$$

Par suite, en vertu des relations (E') on aura

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{\bar{M}_1}{\bar{D}_1} = \frac{M_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}}{D_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}} = \frac{M_1}{D_1} = H, \\ \bar{\theta} &= \frac{\bar{A}_1}{\bar{D}_1} = \frac{A_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + A_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + A_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}}{D_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}} = \frac{A_1}{D_1} = \theta. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

5. Si Φ_1 et Φ'_1 remplissent la condition (C) on peut déterminer Φ_2, Φ'_2 de manière que $\Phi_1 + i\Phi_2, \Phi'_1 + i\Phi'_2, F$ aient une liaison d'isogénéité. On a, lorsque ce cas se présente,

$$H_{\Phi_1\Phi'_1} = H_{\Phi_2\Phi'_2}, \quad H_{\Phi_1\Phi_2} = -H_{\Phi_2\Phi'_1}.$$

$$\theta_{\Phi_1} = \theta_{\Phi_2}.$$

Article 3.

1. On tire des formules (7)

$$(8) \quad \bar{D}_1 d\bar{x} + \bar{D}_2 d\bar{y} + \bar{D}_3 d\bar{z} = \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} (D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz).$$

Cette égalité démontre que si l'équation

$$(9) \quad D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = 0$$

est intégrable, cette propriété se maintient après le changement des variables.

Nous nous proposons d'examiner dans cet article le cas général. Nous examinerons dans l'article suivant le cas qui se présente si l'équation (9) est intégrable.

2. Supposons réalisées les conditions (6) et (6') du 1^{er} paragraphe de l'article précédent. Posons les équations différentielles

$$(10) \quad \begin{cases} E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\tilde{\omega}_1, \\ E_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\chi_1, \\ E_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\rho_1, \end{cases}$$

k étant une fonction que nous laisserons indéterminée. Il est bien clair (voir form. (4) et (B₁)) que la troisième équation est une conséquence des deux premières. Bornons-nous à examiner une portion T de l'espace où, si $k, \tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1$, sont des fonctions monodromes finies et continues,

même les intégrales φ_1 et φ_2 des équations (10) jouissent de ces propriétés. On déduit des formules (10), par les formules (A₁), (4), (4'')

$$(10') \quad \begin{cases} E_{11} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = k\bar{\omega}_2, \\ E_{21} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + D_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = k\bar{\chi}_2, \\ E_{31} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + D_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = k\bar{\rho}_2. \end{cases}$$

3. Si on remplace les variables x, y, z par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et que l'on suppose

$$k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = k(x, y, z) \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})},$$

on trouve que les fonctions φ_1 et φ_2 sont liées aux quantités $\bar{\omega}_1, \bar{\chi}_1, \bar{\rho}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\chi}_2, \bar{\rho}_2$, par des équations analogues aux équations (10), (10').

4. A quelles conditions doivent satisfaire φ_1 et φ_2 ? Posons

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{k} \left(E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{k} \left(E_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{k} \left(E_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Éliminant $\bar{\omega}_1, \bar{\chi}_1, \bar{\rho}_1$ entre les équations (10) on trouve

$$(G) \quad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Réciproquement, si la condition (G) est vérifiée, les quantités $\bar{\omega}_1, \bar{\chi}_1, \bar{\rho}_1$ remplissent les conditions du 1^{er} paragraphe de l'article précédent.

5. Supposons maintenant que les équations (10), (10') soient vérifiées par les fonctions φ'_1, φ'_2 en remplaçant à droite $\bar{\omega}_1, \bar{\chi}_1, \bar{\rho}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\chi}_2, \bar{\rho}_2$ par $\bar{\omega}'_1, \bar{\chi}'_1, \bar{\rho}'_1, \bar{\omega}'_2, \bar{\chi}'_2, \bar{\rho}'_2$. En employant les formules (E) on trouve par un calcul très simple

$$\begin{aligned}
 (11) \quad H &= \frac{1}{k} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \tilde{\omega}'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \chi'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \rho'_2 \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho'_1 \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{k} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} \tilde{\omega}_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} \chi_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z} \rho_2 \right) + \left(\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \chi_1 + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} \rho_1 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Evaluons $\int_S kHdS$ en supposant que le champ S de l'intégration soit compris dans la région T . Nous aurons

$$\begin{aligned}
 \int_S kHdS &= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \tilde{\omega}'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \chi'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \rho'_2 \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho'_1 \right) \right\} dS \\
 &= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} \tilde{\omega}_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} \chi_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z} \rho_2 \right) + \left(\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \chi_1 + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} \rho_1 \right) \right\} dS.
 \end{aligned}$$

Appliquons aux dernières intégrales le procédé de l'intégration par parties. Supposant que S soit limité par la surface σ et que n soit la normale à σ dirigée au dehors de S , on aura

$$\begin{aligned}
 \int_S kHdS &= \int_\sigma \left\{ \varphi_2 (\tilde{\omega}'_2 \cos nx + \chi'_2 \cos ny + \rho'_2 \cos nz) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma \\
 &\quad - \int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} \right) dS \\
 &= \int_\sigma \left\{ \varphi'_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) + \varphi'_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma \\
 &\quad - \int_S \varphi'_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.
 \end{aligned}$$

Cette formule peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \int_S k H dS &= \int_{\sigma} \left\{ \varphi_2 \left(\frac{E_{12}\rho'_1 - E_{13}\chi'_1}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}'_1 - E_{21}\rho'_1}{D_2} \cos ny \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{E_{31}\chi'_1 - E_{32}\tilde{\omega}'_1}{D_3} \cos nz \right) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma \\
 &- \int_S \varphi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12}\rho'_1 - E_{13}\chi'_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}'_1 - E_{21}\rho'_1}{D_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31}\chi'_1 - E_{32}\tilde{\omega}'_1}{D_3} \right) \right\} dS \\
 &= \int_{\sigma} \left\{ \varphi'_2 \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \cos ny \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \cos nz \right) + \varphi'_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma \\
 &- \int_S \varphi'_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \right) \right\} dS.
 \end{aligned}$$

La formule qu'on vient de trouver est tout à fait analogue à la formule de Green.

Prenons $\Phi_1 = \Phi'_1$. On trouvera $H = \theta$ et

$$\begin{aligned}
 \text{(K)} \quad \int_S k \theta dS &= \int_{\sigma} \left\{ \varphi_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma \\
 &- \int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.
 \end{aligned}$$

6. Cherchons ce que deviennent les formules qu'on vient de trouver, lorsque les fonctions Φ_1 et Φ'_1 remplissent la condition (C). On aura lorsque ce cas se présente

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 &= \frac{d\Phi_2}{d(y, z)}, & \chi_2 &= \frac{d\Phi_2}{d(z, x)}, & \rho_2 &= \frac{d\Phi_2}{d(x, y)}; \\ \tilde{\omega}'_2 &= \frac{d\Phi'_2}{d(y, z)}, & \chi'_2 &= \frac{d\Phi'_2}{d(z, x)}, & \rho'_2 &= \frac{d\Phi'_2}{d(x, y)}; \\ (12) \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} &= 0, & (12') \quad \frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$(I) \quad \int_S k H dS = \int_{\sigma} \left(\varphi_2 \frac{d\Phi'_2}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi'_1}{d\sigma} \right) d\sigma = \int_{\sigma} \left(\varphi'_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi'_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right) d\sigma,$$

$$(K') \quad \int_S k \theta dS = \int_{\sigma} \left(\varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right) d\sigma.$$

Nous allons donner tout de suite une application de la dernière formule en démontrant le théorème suivant:

Supposons que $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ et F soient isogènes et que Φ soit sans singularités en S . Si on connaît les valeurs de $\Phi_1 + i\Phi_2$ pour les lignes de la surface σ , cette fonction est déterminée pour toutes les lignes du champ S .

En effet soient Φ' et Φ'' deux fonctions qui remplissent les conditions posées pour Φ . Posons

$$\Phi' - \Phi'' = \Phi''' = \Phi'''_1 + i\Phi'''_2.$$

On aura

$$\frac{d\Phi'''_1}{d\sigma} = 0, \quad \frac{d\Phi'''_2}{d\sigma} = 0.$$

C'est pourquoi (form. (K'))

$$\int_S k \theta_{\Phi'''} dS = 0.$$

k est arbitraire, par suite, on peut supposer qu'il soit positif, θ est toujours positif.

Il faut donc qu'on ait

$$\theta_{\phi_1''} = 0,$$

d'où

$$\Phi_1'' = 0.$$

C. Q. F. D.

7. Supposons que ϕ_1 vérifie l'égalité (C), on aura l'équation (12) et par suite en éliminant $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ entre les équations (10') on trouve que les fonctions φ_1, φ_2 doivent vérifier les équations différentielles

$$(G) \quad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad (G') \quad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0.$$

Réciproquement si φ_1, φ_2 remplissent les conditions (G), (G') les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ obtenues par les équations (10), (10') satisfont aux équations

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0.$$

Cela posé nous allons démontrer que les équations (G), (G') dépendent d'un problème du calcul des variations.

On obtiendra aisément par ce qui précède l'expression de H et de θ par les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$. Nous désignons ces expressions par $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2')$, $\theta(\varphi_1, \varphi_2)$. Laissons les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ tout à fait arbitraires. On pourra écrire

$$\theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) = \theta(\varphi_1, \varphi_2) + 2H(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) + \theta(\psi_1, \psi_2)$$

et par suite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S k \theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) dS \\ &= \frac{1}{2} \int_S k \theta(\varphi_1, \varphi_2) dS + \int_S k H(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) dS + \frac{1}{2} \int_S k \theta(\psi_1, \psi_2) dS. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ sur la surface σ qui forme la limite de S . Par le procédé de l'intégration par parties, on peut écrire

$$(13) \quad \int_S k H(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) dS = - \int_S [\psi_1 \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_2 \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)] dS$$

d'où

$$(14) \quad \frac{1}{2} \int_S k \theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) dS \\ = \frac{1}{2} \int_S k \theta(\varphi_1, \varphi_2) dS + \frac{1}{2} \int_S k \theta(\psi_1, \psi_2) dS - \int_S [\psi_1 \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_2 \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)] dS.$$

Soit k une quantité toujours affectée du même signe. Proposons-nous le problème:

Etant données les valeurs de φ_1 et φ_2 sur la surface σ , déterminer ces fonctions de sorte que l'intégrale

$$I = \frac{1}{2} \int_S k \theta(\varphi_1, \varphi_2) dS$$

soit maximum ou minimum.

Pour résoudre cette question, employons la formule (14). Il faudra prendre

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0$$

et I sera maximum si k est négatif, minimum, si k est positif.

8. Si les fonctions φ_1 et φ_2 sont assujetties aux équations (G), (G') et qu'on en donne les valeurs sur σ , est-ce que les fonctions ψ_1, ψ_2 seront déterminées? Il est bien aisé de démontrer qu'elles seront déterminées pour toutes les lignes fermées qui peuvent se réduire à un point par déformation continue, sans sortir de la région S . Mais si le champ S n'est pas simplement connexe, il y a aussi des groupes de lignes fermées qui ne peuvent pas se réduire à un point sans sortir de la région S . Les valeurs des fonctions ψ_1 et ψ_2 pour les lignes de ces groupes renferment une constante arbitraire. Pour démontrer cette proposition il suffit de prouver que les conditions données suffisent pour déterminer $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. En effet supposons que les conditions énoncées soient remplies par les fonctions φ'_1 et φ'_2 , de même que par les fonctions φ''_1 et φ''_2 . En posant $\varphi'_1 - \varphi''_1 = \varphi'''_1, \varphi'_2 - \varphi''_2 = \varphi'''_2$, on aura $\Gamma(\varphi'''_1, \varphi'''_2) = 0, \Gamma(\varphi'''_2, -\varphi'''_1) = 0$ et sur la surface $\sigma, \varphi'''_1 = \varphi'''_2 = 0$. En employant la formule (13) où l'on doit supposer

$$\varphi_1 = \psi_1 = \varphi'''_1, \quad \varphi_2 = \psi_2 = \varphi'''_2,$$

on trouve donc

$$\int_S k \theta dS = 0$$

et par suite

$$\theta = 0.$$

C. Q. F. D.

Article 4.

1. Examinons maintenant le cas qui se présente lorsque l'équation (9) est intégrable.¹ On pourra poser

$$D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = \lambda d\mu.$$

Il est aisé de démontrer que dans ce cas on peut satisfaire aux équations (10) en prenant $\varphi_1 = 0$, $k = \lambda$. En effet ces équations deviennent

$$(15) \quad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_1, \quad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(z, x)} = \chi_1, \quad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(x, y)} = \rho_1.$$

Mais on a

$$D_1 \tilde{\omega}_1 + D_2 \chi_1 + D_3 \rho_1 = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y} \chi_1 + \frac{\partial \mu}{\partial z} \rho_1 = 0;$$

on peut donc (voir chapitre I, article 5) satisfaire aux équations (15). On voit aisément que μ et φ_2 ne changent pas en changeant les variables x, y, z . De même on peut prendre $\varphi'_1 = 0$ et l'on peut écrire

$$(15') \quad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}'_1, \quad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(z, x)} = \chi'_1, \quad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(x, y)} = \rho'_1.$$

¹ C'est dans ce cas seulement qu'on pourra rendre constants les coefficients $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{33}, D_1, D_2, D_3$ par un changement des variables. (Voir § I, article 3.)

2. Qu'est-ce que deviennent les équations (I1), (I), (K) de l'article précédent? On trouve

$$(16) \quad H = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \tilde{\omega}'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \chi'_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \rho'_2 \right\} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} \tilde{\omega}_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} \chi_2 + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z} \rho_2 \right\},$$

$$(L) \quad \int_s \lambda H dS$$

$$= \int_{\sigma} \varphi_2 (\tilde{\omega}'_2 \cos nx + \chi'_2 \cos ny + \rho'_2 \cos nz) d\sigma - \int_s \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} \right) dS$$

$$= \int_{\sigma} \varphi'_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma - \int_s \varphi'_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

$$(M) \quad \int_s \lambda \theta dS$$

$$= \int_{\sigma} \varphi_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma - \int_s \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

Si la condition (C) est réalisée, lorsque nous remplaçons Ψ par Φ_1 et Φ'_1 on a

$$(L') \quad \int_s \lambda H_{\Phi_1, \Phi'_1} dS = \int_{\sigma} \varphi_2 \frac{d\Phi'_2}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma} \varphi'_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma,$$

$$(M') \quad \int_s \lambda \theta_{\Phi_1} dS = \int_{\sigma} \varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma.$$

3. Dans le cas qui se présente si Φ_1 remplit la condition (C), il y a aussi d'autres formules que nous allons trouver.

En effet si l'on a

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0$$

on peut satisfaire aux équations (10), (10') en prenant $\varphi_2 = 0$, $k = \lambda$.
On a

$$\begin{aligned} E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \lambda \tilde{\omega}_1, & \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(y, z)} &= \tilde{\omega}_2, \\ E_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \lambda \chi_1, & \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(z, x)} &= \chi_2, \\ E_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \lambda \rho_1, & \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(x, y)} &= \rho_2, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} H_{\varphi_1, \varphi_1'} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho_1' \right), \\ \theta_{\varphi_1} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho_1 \right). \end{aligned}$$

d'où

$$(L'') \quad \int_S \lambda H_{\varphi_1, \varphi_1'} dS = \int_{\sigma} \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} d\sigma,$$

$$(M'') \quad \int_S \lambda \theta_{\varphi_1} dS = \int_{\sigma} \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} d\sigma.$$

Voilà une application de la dernière formule.

Si la fonction Ψ , sans singularités dans le champ T , remplit les conditions

$$\begin{aligned} D_1 \frac{d\Psi}{d(y, z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z, x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x, y)} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{E_{12} \frac{d\Psi}{d(x, y)} - E_{13} \frac{d\Psi}{d(z, x)}}{D_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{E_{23} \frac{d\Psi}{d(y, z)} - E_{21} \frac{d\Psi}{d(x, y)}}{D_2} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{E_{31} \frac{d\Psi}{d(z, x)} - E_{32} \frac{d\Psi}{d(y, z)}}{D_3} \right\} &= 0, \end{aligned}$$

et que l'on connaisse les valeurs de Ψ pour les lignes de σ , la fonction Ψ

est déterminée pour toute ligne du champ S (compris dans T) en supposant que λ soit toujours affecté du même signe en S .

En effet si Ψ' et Ψ'_1 réalisent ces conditions, posons $\Psi'_1 - \Psi' = \Phi_1$. On pourra appliquer la formule (M''). Mais sur la surface σ on a

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma} = 0;$$

par suite on aura

$$\int_S \lambda \theta dS = 0,$$

d'où

$$\theta = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Psi' = \Psi'_1.$$

C. Q. F. D.

On tire de là:

Si $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ et F ont une liaison d'isogénéité il suffit de connaître les valeurs de Φ_1 ou de Φ_2 sur la surface limite de S , pour que Φ soit déterminé en S .

4. On déduit aisément la formule

$$(N) \quad \theta_{\phi_1 + \phi_1'} = \theta_{\phi_1} + 2H_{\phi_1, \phi_1'} + \theta_{\phi_1'};$$

par suite on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1 + \phi_1'} dS &= \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS + \int_S \lambda H_{\phi_1, \phi_1'} dS + \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1'} dS \\ &= \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS + \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1'} dS + \int_{\sigma} \varphi_2' (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma \\ &\quad - \int_S \varphi_2' \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS. \end{aligned}$$

Si on prend sur la surface σ , $\varphi_2' = 0$, on a sur σ , $\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1$, et la formule précédente devient

$$\frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1 + \phi_1'} dS = \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS + \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1'} dS - \int_S \varphi_2' \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

On en déduit:

Pour que $\int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS$ soit maximum ou minimum lorsque les valeurs de Φ_1 sont données pour les lignes de la surface σ , il faut que

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{E_{12} \frac{d\Phi_1}{d(x, y)} - E_{13} \frac{d\Phi_1}{d(z, x)}}{D_1} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{E_{23} \frac{d\Phi_1}{d(y, z)} - E_{21} \frac{d\Phi_1}{d(x, y)}}{D_2} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{E_{31} \frac{d\Phi_1}{d(z, x)} - E_{32} \frac{d\Phi_1}{d(y, z)}}{D_3} \right\} = 0;$$

Φ_1 étant une fonction qui réalise la condition (6).

Réciproquement supposons vérifiée les conditions (6), (17), et que Φ_1 soit une fonction qui n'a pas de singularités dans le champ T .

En appliquant la formule (N) on aura

$$\frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1 + \phi_1'} dS = \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS + \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1'} dS - \int_{\sigma} \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} d\sigma.$$

Pour que l'on ait sur la surface σ

$$\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1,$$

il faut et il suffit que

$$\frac{d\Phi_1'}{d\sigma} = 0.$$

On aura donc lorsque cette condition est réalisée

$$\frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1 + \phi_1'} dS = \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1} dS + \frac{1}{2} \int_S \lambda \theta_{\phi_1'} dS.$$

On en déduit:

Il suffit que la condition (17) soit remplie et que Φ_1 n'ait pas de singularités dans le champ T , pour que l'intégrale

$$\int_S \lambda \theta_{\psi} dS$$

soit un maximum ou un minimum entre toutes les intégrales $\int_S \lambda \theta_{\psi} dS$, ψ étant une fonction qui vérifie la condition (6) et qui est égale à Φ_1 sur σ . On aura un maximum si λ est négatif et un minimum si λ est positif.

5. Supposons que $\Phi_1 + i\Phi'_1$ et F aient une liaison d'isogénéité c'est à dire que

$$\tilde{\omega}'_1 = \tilde{\omega}_2, \quad \chi'_1 = \chi_2, \quad \rho'_1 = \rho_2; \quad -\tilde{\omega}'_2 = \tilde{\omega}_1, \quad -\chi'_2 = \chi_1, \quad -\rho'_2 = \rho_1.$$

D'après les équations (10') de l'article précédent on aura

$$(18) \quad \begin{cases} D_2 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} = E_{11} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \\ D_3 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z} = E_{21} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \\ D_1 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} = E_{31} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = E_{11} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z}, \\ D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = E_{21} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z}, \\ D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = E_{31} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi'_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Les fonctions φ_2 et φ'_2 doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\lambda} \left(E_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\lambda} \left(E_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\lambda} \left(E_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] = 0.$$

6. Soit $F = F_1 + iF_2$; les quantités

$$p_1 = \frac{dF_1}{d(y, z)}, \quad q_1 = \frac{dF_1}{d(z, x)}, \quad r_1 = \frac{dF_1}{d(x, y)}, \\ p_2 = \frac{dF_2}{d(y, z)}, \quad q_2 = \frac{dF_2}{d(z, x)}, \quad r_2 = \frac{dF_2}{d(x, y)}$$

jouissent des propriétés suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial z} = 0, \\ D_1 p_1 + D_2 q_1 + D_3 r_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial r_2}{\partial z} = 0, \\ D_1 p_2 + D_2 q_2 + D_3 r_2 = 0. \end{cases}$$

On peut donc déterminer deux fonctions f_2, f_2' , telles que

$$\begin{aligned} \frac{d(\mu, f_2)}{d(y, z)} = p_1, & \quad \frac{d(\mu, f_2)}{d(z, x)} = q_1, & \quad \frac{d(\mu, f_2)}{d(x, y)} = r_1, \\ \frac{d(\mu, f_2')}{d(y, z)} = p_2, & \quad \frac{d(\mu, f_2')}{d(z, x)} = q_2, & \quad \frac{d(\mu, f_2')}{d(x, y)} = r_2; \end{aligned}$$

par suite

$$\lambda = - \frac{d(f_2, f_2', \mu)}{d(x, y, z)},$$

$$D_1 = - \frac{d(f_2, f_2', \mu) \partial \mu}{d(x, y, z) \partial x}, \quad D_2 = - \frac{d(f_2, f_2', \mu) \partial \mu}{d(x, y, z) \partial y}, \quad D_3 = - \frac{d(f_2, f_2', \mu) \partial \mu}{d(x, y, z) \partial z}.$$

En changeant les variables x, y, z et en prenant $\bar{x} = f_2, \bar{y} = f_2', \bar{z} = \mu$, on trouve

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} = 1, \quad \bar{E}_{22} = 1, \quad \bar{E}_{33} = 0; \quad \bar{E}_{23} = 0, \quad \bar{E}_{31} = 0, \quad \bar{E}_{12} = 0; \\ \bar{D}_1 = 0, \quad \bar{D}_2 = 0, \quad \bar{D}_3 = -1. \end{aligned}$$

Les équations (18), (18') deviendront

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial f_2} = \frac{\partial \varphi_2'}{\partial f_2'}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_2'} = - \frac{\partial \varphi_2'}{\partial f_2},$$

d'où

$$(20) \quad \varphi_2 + i\varphi_2' = G(f_2 + if_2', \mu).$$

Employons la formule (E) du 1^{er} chapitre.

On aura

$$F_1[[L]] = \int_{\sigma} (p_1 \cos nx + q_1 \cos ny + r_1 \cos nz) d\sigma = - \int_L f_2 d\mu,$$

$$F_2[[L]] = \int_{\sigma} (p_2 \cos nx + q_2 \cos ny + r_2 \cos nz) d\sigma = - \int_L f_2' d\mu,$$

$$\Phi_1[[L]] = \int_{\sigma} (\tilde{\omega}_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz) d\sigma = - \int_L \varphi_2 d\mu,$$

$$\Phi_2[[L]] = \int_{\sigma} (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma = - \int_L \varphi_2' d\mu,$$

L étant le contour de σ . On en déduit

$$F[[L]] = - \int_L (f_2 + if_2') d\mu, \quad \Phi[[L]] = - \int_L G d\mu.$$

Réciproquement si $F[[L]]$ et $\Phi[[L]]$ sont données par les formules (21), l'égalité (20) étant satisfaite, elles ont une liaison d'isogénéité.

7. Proposons-nous la question: *quelles conditions doivent être remplies pour qu'on puisse poser dans les équations (10) de l'article précédent $\varphi_1 = 0$ en prenant φ_2 arbitrairement?*

On peut démontrer aisément, par des considérations bien simples, que la condition de l'intégrabilité de l'équation (9) est nécessaire. En effet, soit

$$D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\tilde{\omega}_1, \quad D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\chi_1, \quad D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\rho_1$$

on aura

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_2}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{D_3}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D_3}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{D_1}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{D_1}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{D_2}{k} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]$$

et par suite

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \left[\frac{\partial D_3}{\partial y k} - \frac{\partial D_2}{\partial z k} \right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \left[\frac{\partial D_1}{\partial z k} - \frac{\partial D_3}{\partial x k} \right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \left[\frac{\partial D_2}{\partial x k} - \frac{\partial D_1}{\partial y k} \right] = 0$$

d'où

$$\frac{\partial D_3}{\partial y k} - \frac{\partial D_2}{\partial z k} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial z k} - \frac{\partial D_3}{\partial x k} = 0, \quad \frac{\partial D_2}{\partial x k} - \frac{\partial D_1}{\partial y k} = 0.$$

C. Q. F. D.

Article 5.

1. Nous allons maintenant examiner les opérations de dérivation et d'intégration sur les fonctions des lignes qui ont une liaison d'isogénéité. C'est par là qu'on va voir comment ces recherches se rattachent à celles de M. POINCARÉ. A cet effet il faut introduire des fonctions des points de l'espace liées aux fonctions des lignes. Remarquons que la définition des fonctions des variables imaginaires peut se donner de la façon suivante: soient φ et ψ deux variables imaginaires fonctions des points d'un plan; l'une sera fonction de l'autre, si

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial (-x)} = 0.$$

Généralisons cette définition pour l'espace. Soit F une fonction des lignes et f une fonction des points de l'espace. On dira que F et f ont une liaison d'isogénéité si

$$(22) \quad \frac{dF}{d(y, z)} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dF}{d(z, x)} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dF}{d(x, y)} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On désignera toujours par des lettres majuscules les fonctions des lignes et par des lettres minuscules les fonctions des points.

2. Cela posé, il est bien aisé de démontrer les propositions suivantes:

1°) Si entre f et F , et entre F et Φ il y a une liaison d'isogénéité, f et Φ ont aussi une liaison d'isogénéité.

2°) Si l'on a des fonctions f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qui ont une liaison d'isogénéité avec F , il faut que

$$(23) \quad \frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0. \quad (i, r, s = 1, 2, \dots, n)$$

Lorsque on aura des fonctions f_i qui remplissent les conditions (23) on dira qu'elles ont une liaison d'isogénéité entre elles.

3. Supposons que les fonctions Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) soient isogènes et que f ait une liaison d'isogénéité avec Φ_i , on aura

$$\frac{d\Phi_i}{d(y, z)} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\Phi_i}{d(z, x)} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\Phi_i}{d(x, y)} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On pourra donc (voir chap. I, art. 5) déterminer des fonctions φ_i , telles que

$$(24) \quad \frac{d\Phi_i}{d(y, z)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi_i}{d(z, x)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi_i}{d(x, y)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(x, y)}$$

et il y aura une liaison d'isogénéité entre φ_i et Φ_i .

Réciproquement soient φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) des fonctions ayant une liaison d'isogénéité. Posons

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_{i,s}, \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(z, x)} = \chi_{i,s}, \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(x, y)} = \rho_{i,s},$$

on aura

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{i,s}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{i,s}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{i,s}}{\partial z} = 0.$$

Par suite on pourra déterminer des fonctions $\Phi_{i,s}$ telles qu'elles satisfassent aux conditions

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{i,s}, \quad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(z,x)} = \chi_i, \quad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(x,y)} = \rho_{i,s}.$$

Il est bien clair que les fonctions $\Phi_{i,s}$ ont entre elles et avec φ_i une liaison d'isogénéité.

4. Lorsque on a les égalités (24) on appellera la fonction Φ_i conjuguée à f et φ_i , et réciproquement les fonctions f et φ_i conjuguées à Φ_i .

Si L est une ligne dans un champ où f et φ_i sont des fonctions monodromes, on aura

$$\Phi_i|[L]| = \int_L \varphi_i df.$$

Supposons fixée la direction positive de la normale n à une surface σ ; on aura

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \tilde{\omega}_{i,s} \cos nx + \chi_{i,s} \cos ny + \rho_{i,s} \cos nz.$$

Prenons sur σ des coordonnées curvilignes, telles que les directions u, v, n soient disposées comme les directions x, y, z . Si le carré de l'élément linéaire est $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, on aura

$$(25) \quad \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix}$$

5. Cela posé on peut examiner les opérations de dérivation et d'intégration. Supposons que Φ et F soient isogènes. Posons

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d(y,z)} &= p, & \frac{dF}{d(z,x)} &= q, & \frac{dF}{d(x,y)} &= r, \\ \frac{d\Phi}{d(y,z)} &= \tilde{\omega}, & \frac{d\Phi}{d(z,x)} &= \chi, & \frac{d\Phi}{d(x,y)} &= \rho; \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\left(\frac{d\Phi}{d\sigma}\right)}{\left(\frac{dF}{d\sigma}\right)} = \frac{\tilde{\omega}}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\rho}{r},$$

σ étant une surface arbitraire. Nous désignerons le rapport qu'on vient de trouver et qui ne dépend pas de la direction $d\sigma$ par le symbole $\frac{d\Phi}{dF}$ et nous l'appellerons *la dérivée de Φ par rapport à F* . Cette dérivée est une fonction des points de l'espace. On peut démontrer que *la dérivée de Φ par rapport à F et les fonctions F et Φ ont une liaison d'isogénéité*.

En effet posons

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi,$$

on aura

$$p \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \varphi \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial q}{\partial y}, \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \varphi \frac{\partial r}{\partial z};$$

par suite

$$p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \varphi \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) = 0.$$

6. Supposons que f et F aient une liaison d'isogénéité. Soit σ une surface. Lorsque on a établi la direction de la normale n , le signe de $\frac{dF}{d\sigma}$ est déterminé. La quantité

$$\int_{\sigma} f \frac{dF}{d\sigma} d\sigma$$

est donc tout à fait définie. Nous la désignerons par le symbole

$$\int f dF.$$

Si on change la direction positive de la normale, le signe dont est affectée l'intégrale change aussi. Si la surface n'est pas fermée nous conserverons entre la direction de la normale et les directions des contours la relation établie au 1^{er} chapitre. Dans ce cas, par conséquent, la direction des contours donne le signe de l'intégrale.

Si, au contraire, σ est une surface fermée formant la limite d'un champ S dans lequel ni f ni F n'ont de singularités, nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f dF &= \int_{\sigma} f \left(\frac{dF}{d(y, z)} \cos nx + \frac{dF}{d(z, x)} \cos ny + \frac{dF}{d(x, y)} \cos nz \right) d\sigma \\ &= \int_{\sigma} \left\{ f \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{dF}{d(y, z)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dF}{d(z, x)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dF}{d(x, y)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dF}{d(y, z)} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dF}{d(z, x)} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dF}{d(x, y)} \right\} dS = 0. \end{aligned}$$

On a donc le théorème exprimé par la formule

$$(26) \quad \int_{\sigma} f dF = 0.$$

Si le champ S n'est pas limité par une seule surface, mais par les surfaces σ_i ($i = 1, \dots, n$), on aura

$$(26') \quad \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} f dF = 0.$$

Le théorème exprimé par les formules (26), (26') est une généralisation du théorème de Cauchy.

7. Supposons que les fonctions φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) aient une liaison d'isogénéité. On pourra écrire

$$(27) \quad I = \int_{\sigma} \varphi_r d\Phi_{i,s} = \int_{\sigma} \varphi_r \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma} \varphi_r \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_s}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du dv,$$

u, v étant des coordonnées curvilignes dont les directions par rapport à celle de la normale n sont disposées comme on a établi au § 4. En posant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} du &= d\varphi_i, & \frac{\partial \varphi_s}{\partial u} du &= d\varphi_s, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} dv &= \delta\varphi_i, & \frac{\partial \varphi_s}{\partial v} dv &= \delta\varphi_s, \end{aligned}$$

on aura

$$I = \int_{\sigma} \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i & d\varphi_s \\ \delta\varphi_i & \delta\varphi_s \end{vmatrix}.$$

Si σ est une surface fermée qui renferme un champ S où il n'y a pas de singularités des fonctions φ_i , on aura

$$(28) \quad \int_{\sigma} \varphi_r \left| \begin{array}{c} d\varphi_i, d\varphi_s \\ \partial\varphi_i, \partial\varphi_s \end{array} \right| = 0.$$

Voilà une nouvelle expression du théorème de Cauchy généralisé.

8. Retranchons par des surfaces fermées les parties du champ où les fonctions f et F ont des singularités. Par des *sections linéaires* on restitue au champ la connection superficielle simple. Cela posé; il est clair que toute surface fermée sera la limite d'un champ où f et F n'ont pas de singularités. Soient L_0 et L_1 deux lignes fermées dont la direction est connue. Appelons $-L_0$ une ligne qui coïncide avec L_0 mais qui est prise dans la direction contraire de L_0 . Supposons que, dans l'espace *sectionné*, on puisse mener une surface par $-L_0$ et L_1 . (Voir chap. I, art. 2, § 3.)

Prenons la direction de la normale n à σ par rapport aux directions des lignes $-L_0$ et L_1 de la manière qu'on l'a établi (voir chap. I, art. 3, § 3). L'intégrale

$$(29) \quad \int_{\sigma} f dF$$

sera déterminée. Il est aisé de démontrer que *la valeur de l'intégrale (29) ne dépend pas de la surface σ , mais dépend seulement des lignes L_0 et L_1* . En effet si l'on mène par $-L_0$ et L_1 une surface σ_1 qui ne coïncide pas avec σ , les surfaces σ et σ_1 formeront une ou plusieurs surfaces fermées. Par suite

$$\int_{\sigma + \sigma_1} f dF = 0,$$

d'où résulte la propriété énoncée. C'est pourquoi l'intégrale (29) peut être désignée par

$$(30) \quad \int_{L_0}^{L_1} f dF.$$

En changeant la direction de la normale n on change aussi le signe de l'intégrale. Par suite

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = - \int_{L_1}^{L_0} f dF.$$

Supposons qu'on rend la courbe L_0 fixe, en laissant L_1 variable; l'intégrale (30) deviendra une fonction de la ligne L_1 . On pourra donc écrire

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = \Phi[[L_1]].$$

Φ et F ont une liaison d'isogénéité et on aura

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Cela démontre que *la dérivation et de l'intégration*, telles qu'on vient de les définir, *sont deux opérations inverses*.

De même si les fonctions φ_i ont une liaison d'isogénéité, on aura

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi_i \left| \begin{array}{c} d\varphi_s, d\varphi_r \\ \partial\varphi_s, \partial\varphi_r \end{array} \right| = \Psi[[L_1]]$$

et $\Psi[[L_1]]$ aura une liaison d'isogénéité avec les fonctions φ_i .

Soient f et φ deux fonctions conjuguées à la fonction F , on pourra écrire

$$F[[L_1]] - F[[L_0]] = \int_{L_0}^{L_1} \left| \begin{array}{c} df, d\varphi \\ \partial f, \partial\varphi \end{array} \right|.$$

Nous avons achevé le mémoire en montrant dans le dernier article que, lorsqu'on a un système de fonctions de lignes qui ont une liaison d'isogénéité, on obtient par le procédé de la dérivation des fonctions de points f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qui sont liées par les relations

$$\frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0.$$

C'est pour cela que les variables f_i, f_r, f_s doivent étre liées par des relations

$$(P) \quad \varphi_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0.$$

Réciproquement si on a des variables liées par des relations (P), il est bien aisé de voir qu'il y a entre elles une liaison d'isogénéité. Voilà le point par où ces recherches se rattachent à celles de M. POINCARÉ. Le théorème que nous avons énoncé au § 7, de l'article 5 est équivalent au théorème donné par M. POINCARÉ dans le mémoire sur les résidus des intégrales doubles.

On voit même aisément comment les fonctions des lignes peuvent se rattacher à une généralisation des intégrales abéliennes. Mais je crois qu'avant d'aborder une telle question il est utile, pour n'être pas obligé de traiter des cas particuliers, d'étendre aux hyperespaces les considérations que je viens d'exposer. Ce n'est pas là une généralisation où il n'y aurait qu'un pas à faire pour atteindre le but. On trouve au contraire quelques difficultés. En premier lieu, dans un espace à n dimensions on doit considérer des fonctions des espaces à $1, 2, \dots, n-1$ dimensions. En second lieu, tandis que les systèmes d'équations (9) (chap. I, art. 5) peuvent toujours s'intégrer, les systèmes analogues qu'on trouve lorsqu'on étend la question aux hyperespaces n'ont pas toujours des intégrales communes. Pour traiter la question dans le cas général, il faut recourir à la théorie des intégrales communes aux systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Il faut que certaines conditions soient remplies, afin que les fonctions du 1^{er} degré des hyperespaces puissent s'obtenir par l'intégration des fonctions des points, tandis que pour les fonctions des lignes dans l'espace les formules du § 8 sont toujours vérifiées. On voit donc que, dans le cas des hyperespaces, on doit trouver des catégories de fonctions qui ne se présentent pas dans le cas des espaces ordinaires.
