ÜBER DIE KLASSIFIKATION DER RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

VON

C. CONSTANTINESCU

Bukarest

Es sei R eine Riemannsche Fläche, der Kreis $|t| < 1$ ihre universelle Überlagerungsfläche, $z = \varphi(t)$ die Spurabbildung und (T) die Deckbewegungsgruppe: $T \in (T)$ dann und nur dann, wenn

$$\varphi(T(t)) = \varphi(t)$$

ist. Zwei Punkte t_1, t_2, aus $|t| < 1$ heissen äquivalent in Bezug auf (T), wenn man ein $T \in (T)$ finden kann, so dass

$$T(t_2) = t_1$$

ist. Notwendig und hinreichend für die Äquivalenz von t_1 und t_2 ist, dass

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$$

ist. Diese Äquivalenzrelation teilt die Punkte von $|t| < 1$ in Äquivalenzklassen, welche durch φ in einer eindeutigen Beziehung zu den Punkten von R stehen. Man kann sich sogar vorstellen, dass die Punkte von R nichts anderes als diese Äquivalenzklassen sind. Es wäre natürlich, durch Analogie die Äquivalenzklassen von $|t| = 1$ in Bezug auf (T) als Punkte des idealen Randes von R zu erklären. Eine solche Definition stösst aber auf verschiedene unannehmbare Schwierigkeiten; z. B. bekommen dadurch auch die geschlossenen Flächen einen idealen Rand. Bei einer gründlichen Untersuchung ergibt sich aber, dass die Anomalien, welche diese Definition mit sich bringt, von einigen Äquivalenzklassen hervorgerufen sind, denen man die Qualität, Punkte des idealen Randes R zu sein, nicht zuschreiben kann. Entfernen wir aber diese überflüssigen Klassen, so erhält man sofort eine annehmbare Definition des idealen Randes von R. Der erste Schritt, der in dieser Richtung gemacht werden muss, besteht also darin, dass man die „guten“ von den „schlechten“ Äquivalenzklassen unterscheidet. Das geschieht, indem man auf $|t|=1$ eine Menge $\mathfrak{F}$ einführt, welche aus jenen Punkten $e^{i\theta}$ besteht, die nicht „Winkelhäufungswerte" der Menge $\{t_\nu\}_{1\leqslant\nu<\infty}$ sind, $(\varphi(t_\nu)=z_0)$ und man als Punkte des idealen Randes von R nur jene Äquivalenzklassen erklärt, deren Punkte in $\mathfrak{F}$ enthalten sind. Die Menge $\mathfrak{F}$ besitzt einige wichtige Eigenschaften, die die Betrachtung von $\mathfrak{F}$ als die Besitzerin aller „guten" Äquivalenzklassen rechtfertigt. $\mathfrak{F}$ ist dann und nur dann leer, wenn R geschlossen ist; $\mathfrak{F}$ ist eine messbare Menge und zwar von Masse 2π oder 0, je nachdem R eine Greensche Funktion besitzt oder nicht. Ausserdem ist das μ-Mass der Komplementärmenge null, für jedes Mass $\mu(\theta)$, das einer positiven harmonischen Funktion entspricht, welche in Bezug auf die Deckbewegungsgruppe automorph ist. Diese letzte Eigenschaft weist auf eine Beziehung hin zwischen dem idealen Rand, wie er in dieser Arbeit eingeführt wurde, und der Menge Δ_1 des idealen Randes von R. S. Martin [7].

Jedem Punkte des idealen Randes von R wird eine ideale Randkomponente (élément-frontière im Sinne von Kérékjártó-Stoïlow) des idealen Randes von R zugeteilt, auf welcher dieser Punkt liegt. Auf jeder idealen Randkomponente liegt wenigstens ein Punkt des idealen Randes. Der so eingeführte ideale Rand scheint für die Einführung einer Topologie ungeeignet zu sein. Jedoch kann man auf ihn eine Massfunktion einführen, welche das harmonische Mass genannt wird. Sie fällt in der Tat mit dem gewöhnlichen harmonischen Masse in den einfacheren Fällen, in denen letzteres definiert ist, zusammen.

Für verschiedene Familien von harmonischen Funktionen, (z. B. HB, HD, etc.) werden bestimmte Mengen des idealen Randes als $\mathfrak{S}$-unteilbar erklärt. Es wurde bewiesen in [1], dass die Existenz einer $\mathfrak{S}$-unteilbaren Menge auf dem idealen Rande einer Riemannschen Fläche wichtige Folgen für die Eigenschaften dieser Riemannschen Fläche hat. Die Klasse $U_{\mathfrak{S}}$ der Riemannschen Flächen, die eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande hat, ist eine Verallgemeinerung der Klasse $O_{\mathfrak{S}}-O_G$. Vorliegende Arbeit ist der Untersuchung einiger Eigenschaften der Riemannschen Flächen aus der Klasse $U_{\mathfrak{S}}$ gewidmet. Sie ist eine Fortsetzung der von A. Cornea und dem Verfasser publizierten Arbeit [1], aus welcher auch die meisten Definitionen und Methoden stammen.

1. Es sei R eine Riemannsche Fläche, welche den Einheitskreis $|t|<1$ als universelle Überlagerungsfläche hat, und $z=\varphi(t)$ sei die Spurabbildung. Mit (T) werden wir die Deckbewegungsgruppe dieser Überlagerung bezeichnen; das ist die Gruppe jener eineindeutigen und konformen Selbstabbildungen T des Einheitskreises, für welche

$$\varphi(T(t))=\varphi(t)$$

ist. Es sei z_0 ein beliebiger Punkt auf R und t_ν jene Punkte für die

$$\varphi(t_\nu) = z_0$$

ist. Wir sagen, dass $e^{i\theta}$ ein Winkelhäufungspunkt der Menge $\{t_\nu\}$ ist, wenn man eine Folge $\{t_{\nu_k}\}_{1 \leqslant k < \infty}$ finden kann, so dass

$$\lim_{k \to \infty} t_{\nu_k} = e^{i\theta}$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \arg \frac{e^{i\theta} - t_{\nu_k}}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2}$$

ist. $\mathfrak{J}$ sei die Menge jener $e^{i\theta}$, welche nicht Winkelhäufungspunkte der Menge $\{t_\nu\}$ sind. Wegen der Automorphie der Menge $\{t_\nu\}$ folgt, dass die Menge $\mathfrak{J}$ auch automorph in Bezug auf (T) ist. Es sei z_0' ein anderer Punkt von R und t_ν' derjenige Punkt, für welchen

$$\varphi(t_\nu') = z_0'$$

$$[t_\nu, t_\nu'] = [z_0, z_0']$$

ist. $[t_1, t_2]$ (bzw. $[z_1, z_2]$) bedeutet hier die hyperbolische Entfernung zwischen den Punkten t_1, t_2 (bzw. z_1, z_2). Ist $e^{i\theta}$ ein Winkelhäufungspunkt der Menge $\{t_\nu\}$, so existiert eine Folge $\{t_{\nu_k}\}_{1 \leqslant k < \infty}$, welche die obigen Bedingungen erfüllt. Nun folgert man leicht daraus, dass

$$\lim_{k \to \infty} t_{\nu_k}' = e^{i\theta}$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \arg \frac{e^{i\theta} - t_{\nu_k}'}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2}$$

ist. Daraus sieht man, dass die Menge $\mathfrak{J}$ nicht von der Auswahl des Punktes z_0 abhängt.

Zwei Punkte $e^{i\theta}$, $e^{i\theta'}$ der Menge $\mathfrak{J}$ heissen äquivalent in Bezug auf (T), wenn man ein $T \in (T)$ finden kann, für welches

$$e^{i\theta'} = T(e^{i\theta})$$

ist. Diese Äquivalenzrelation teilt die Menge $\mathfrak{J}$ in Äquivalenzklassen. *Eine Äquivalenzklasse p wird Punkt des idealen Randes der Riemannschen Fläche genannt.* Eine Menge M von Punkten des idealen Randes ist eine Menge von Äquivalenzklassen, und die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte aus $\mathfrak{J}$, welche diesen Äquivalenzklassen angehören, heisst das Bild der Menge M. Die Menge aller Punkte des idealen Randes werden wir mit F bezeichnen; $\mathfrak{J}$ ist offenbar das Bild von F.

2. Jedem Punkte p des idealen Randes wird eine ideale Randkomponente a ([13], 85–87) zugeteilt. Das geschieht so: man nimmt einen beliebigen Punkt $e^{i\theta}$, welcher der Äquivalenzklasse p angehört, und eine Kurve

$$\lambda : t = t(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau < 1, \qquad |t(\tau)| < 1,$$

welche im Punkte $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang hat, das heisst, für welche

$$\lim_{\tau \to 1} t(\tau) = e^{i\theta}$$

$$\overline{\lim_{\tau \to 1}} \left| \arg \frac{e^{i\theta} - t(\tau)}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2}$$

ist. Wir bezeichnen mit Λ das Bild der Kurve $\lambda : z = \varphi(t(\tau))$, $0 \leqslant \tau < 1$. Falls Λ nicht gegen den idealen Rand von R strebt, so kann man eine Folge von Zahlen τ_n finden, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n = 1$$

$$[z_0, \varphi(t(\tau_n))] \leqslant d < \infty,$$

wo d eine Konstante ist. Nun kann man immer ein t_ν finden, das wir mit $t_{\nu(n)}$ bezeichnen werden, für welches

$$[t_{\nu(n)}, t(\tau_n)] = [z_0, \varphi(t(\tau_n))] \leqslant d$$

ist. Daraus folgt wie oben, durch eine einfache Rechnung,

$$\lim_{n \to \infty} t_{\nu(n)} = e^{i\theta}$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \arg \frac{e^{i\theta} - t_{\nu(n)}}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2}$$

entgegen der Voraussetzung, dass $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}$. Λ strebt also gegen den idealen Rand, und deshalb gegen eine bestimmte ideale Randkomponente a. Man sagt, dass der Punkt p auf a liegt. Es ist zu zeigen, dass a eindeutig durch p bestimmt ist, d. h. nicht von der Auswahl von $e^{i\theta}$ und λ abhängt. Es sei $e^{i\theta'}$ ein anderer Punkt aus der Äquivalenzklasse p, und λ' eine Kurve in $|t| < 1$, die in $e^{i\theta'}$ einen Winkeleingang hat. Wir werden zeigen, dass das Bild Λ' von λ' auf R gegen dieselbe ideale Randkomponente a des idealen Randes strebt. Da $e^{i\theta}$ und $e^{i\theta'}$ in Bezug auf (T) äquivalent sind, so kann man eine Deckbewegung $T \in (T)$ finden, so dass

$$e^{i\theta} = T(e^{i\theta'})$$

ist. Mittels T geht die Kurve λ' in eine neue Kurve $\lambda'' = T(\lambda')$ über, welche in $e^{i\theta}$ einen Winkeleingang hat. λ' und λ'' haben dasselbe Bild Λ' auf R. Da beide Kurven λ', λ'' einen Winkeleingang in $e^{i\theta}$ haben, so ist die hyperbolische Entfernung zwischen ihnen endlich und dasselbe gilt dann für Λ und Λ'. Daraus folgt sofort, dass Λ und Λ' gegen dieselbe ideale Randkomponente streben muss.

Es sei π_0 das metrische Fundamentalpolygon der Gruppe (T) in Bezug auf $t = 0$. Wir werden mit C_r den Rand des hyperbolischen Kreises bezeichnen, welcher den Mittelpunkt in $\varphi(0)$ und den hyperbolischen Radius gleich $\frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$ hat. C_r besteht im allgemeinen aus mehreren Kurven. Wir werden mit $C_r(a)$ diejenigen Kurven von C_r bezeichnen, welche den Punkt $\varphi(0)$ von der idealen Randkomponente a abtrennen. Es sei $\mathcal{E}_r(a)$ die Menge der Zahlen θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, für welche die Radien

$$\begin{cases} \arg t = \theta \\ |t| < r \end{cases}$$

in π_0 liegen und für welche $\varphi(r e^{i\theta}) \in C_r(a)$. $\mathcal{E}_r(a)$ ist eine abgeschlossene Menge und, da

$$\mathcal{E}_r(a) \supseteq \mathcal{E}_{r'}(a)$$

für $r' > r$ ist, so ist die Menge

$$\mathcal{E}(a) = \bigcap_{r<1} \mathcal{E}_r(a)$$

nicht leer. Für ein $\theta \in \mathcal{E}(a)$ nehmen wir den Radius λ, welcher in $e^{i\theta}$ endet. λ liegt in π_0 und, da $\varphi(r e^{i\theta}) \in C_r(a)$, so strebt ihr Bild Λ gegen a. Man sieht sofort, dass $e^{i\theta} \in \mathfrak{F}$ und dass der Punkt p des idealen Randes von R, welcher die Äquivalenzklasse von $e^{i\theta}$ ist, auf der idealen Randkomponente a liegt. Auf jeder idealen Randkomponente liegt somit wenigstens ein Punkt des Randes von R.

Aus der Tatsache, dass das Bild jeder Kurve, die in einem Punkte von $\mathfrak{F}$ einen Winkeleingang hat, gegen den idealen Rand von R strebt, folgt sofort, dass $\mathfrak{F}$ leer ist im Falle, dass R eine geschlossene Fläche ist. Es gilt aber auch die Umkehrung. Falls R eine offene Fläche ist, so besitzt sie wenigstens eine ideale Randkomponente und auf ihr liegt wenigstens ein Punkt des idealen Randes von R, d. h. $\mathfrak{F}$ ist nicht leer. $\mathfrak{F}$ ist dann und nur dann leer, wenn die Riemannsche Fläche R geschlossen ist.

Wenn R eine Greensche Funktion besitzt, so ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - |t_\nu|)$$

konvergent und es gibt

$$g(\varphi(t), z_0) = \log \frac{1}{|\pi(t)|},$$

wo $g(z, z_0)$ die Greensche Funktion von R, und $\pi(t)$ das Blaschke-Produkt mit den Nullstellen in t_ν ist ([9], 336–338). Da $\pi(t)$ fast überall auf $|t|=1$ einen Winkelgrenzwert von absolutem Betrag 1 hat, so folgt, dass $g(\varphi(t), z_0)$ fast überall auf $|t|=1$ den Winkelgrenzwert 0 hat. Ein Punkt $e^{i\theta}$, wo $g(\varphi(t), z_0)$ den Winkelgrenzwert 0 hat, kann nicht Winkelhäufungspunkt der Menge $\{t_\nu\}$ sein, und daraus sieht man, dass $\mathfrak{F}$ das Mass 2π hat.

Hat R keine Greensche Funktion, so hat $\mathfrak{F}$ das Mass 0. Der Beweis wird mittels einer Konstruktion von Priwaloff durchgeführt [6] (1). Wir werden annehmen, dass $\mathfrak{F}$ ein positives Mass hat ($\mathfrak{F}$ ist jedenfalls eine messbare Menge) und es sei $\mathfrak{P}$ eine perfekte Menge, welche in $\mathfrak{F}$ enthalten ist und positives Mass hat. Wir bezeichnen mit $\Delta(e^{i\theta}, r)$ die Menge jener Punkte t, für welche

$$\left|\arg \frac{e^{i\theta}-t}{e^{i\theta}}\right| < \frac{\pi}{4}$$

$$r < |t| < 1$$

ist und mit G das Gebiet. welches aus dem Kreis

$$|t| < \frac{1+r}{2}$$

und aus der Menge

$$\bigcup_{e^{i\theta} \in \mathfrak{P}} \Delta(e^{i\theta}, r)$$

besteht. Man kann leicht zeigen, [6], dass G ein Jordansches Gebiet mit rektifizierbarem Rande ist. Wir bezeichnen weiter mit G_0 das Gebiet, das aus G entsteht, wenn man die nichteuklidischen Kreise mit den Mittelpunkten in t_ν und die hyperbolischen Radien d entfernt. Nur endlich viele solche Kreise haben einen nichtleeren Durchschnitt mit G. Es sei $\omega(t, \mathfrak{P}, G_0)$ das harmonische Mass der Menge $\mathfrak{P}$ in Bezug auf G_0. ω ist nicht null, da $\mathfrak{P}$ ein positives Mass hat und der Rand von G_0 rektifizierbar ist. Es sei $\{R_n\}$ eine Ausschöpfung der Fläche R, so dass R_0 der nichteuklidische Kreis mit dem Mittelpunkt in z_0 und mit dem hyperbolischen Radius d ist, und $\omega(z, \gamma_n, R_n - \bar{R}_0)$ sei das harmonische Mass des Randes γ_n von R_n in Bezug auf $R_n - \bar{R}_0$. Die Funktion

$$\omega(\varphi(t), \gamma_n, R_n - \bar{R}_0) - \omega(t, \mathfrak{P}, G_0)$$

ist harmonisch in $G_0 \cap \varphi^{-1}(R_n)$ und nichtnegativ auf dem Rand. Daraus folgt

(1) Diesen Beweis verdanke ich meinem Kollegen Aurel Cornea. Dass $\mathfrak{F}$ das Mass 0 hat, folgt auch aus [14], [15].

$$\omega(\varphi(t),\ \gamma_n,\ R_n - \bar{R}_0) \geqslant \omega(t,\ \mathfrak{P},\ G_0)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \omega(\varphi(t),\ \gamma_n,\ R_n - \bar{R}_0) \geqslant \omega(t,\ \mathfrak{P},\ G_0) > 0$$

was der Voraussetzung $R \in O_G$ widerspricht ([9], 209). Daher folgert man, dass $\mathfrak{J}$ das Mass null haben muss.

3. Es sei

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + t}{e^{i\theta} - t}.$$

Ist $T(t)$ eine eineindeutige Selbstabbildung des Einheitskreises, so ist $P(\theta, T(t))$ eine auf $|t| \leqslant 1$ harmonische Funktion, welche auf $|t| = 1$ verschwindet mit Ausnahme des Punktes $T^{-1}(e^{i\theta})$, wo sie $+\infty$ wird. Deshalb hat sie die Form

$$P(\theta,\ T(t)) = c\, P(T^{-1}(\theta),\ t),$$

in der c eine reelle Konstante ist und $T(\theta)$ an Stelle der Abbildung $T(e^{i\theta})$ geschrieben wurde. Für $t = 0$ folgt

$$\frac{1}{2\pi} c = P(\theta,\ T(0)),$$

so dass

$$P(\theta,\ T(t)) = 2\pi P(\theta,\ T(0))\, P(T^{-1}(\theta),\ t)$$

ist.

Es sei $\mu(\theta)$ eine in $[0, 2\pi]$ reelle beschränkte nichtabnehmende Funktion. Wie bekannt ist, entspricht der Funktion $\mu(\theta)$ ein Mass auf $|t| = 1$, das wir auch mit $\mu(\theta)$ bezeichnen werden, und umgekehrt, jedem endlichen Mass auf $|t| = 1$ entspricht eine in $[0, 2\pi]$ reelle beschränkte nichtabnehmende Funktion $\mu(\theta)$.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mu(\theta)$ ein Mass auf $|t| = 1$ und $T(t)$ eine eineindeutige Selbstabbildung des Einheitskreises. Damit die Funktion*

$$u(t) = \int_0^{2\pi} P(\theta, t)\, d\mu(\theta)$$

invariant in Bezug auf T sei,

$$u(T(t)) = u(t),$$

ist notwendig und hinreichend, dass das Mass $\mu(T(\theta))$ vollstetig in Bezug auf $\mu(\theta)$ sei und

$$\frac{d\mu(T(\theta))}{d\mu(\theta)} = \frac{1}{2\pi P(T(\theta),\ T(0))}\ ^{(1)}$$

ist, mit Ausnahme einer Menge von μ-Mass null.

---

(1) Für den Begriff der Vollstetigkeit und der „Ableitung" $\dfrac{d\mu(T(\theta))}{d\mu(\theta)}$ siehe z. B. [2].

Es ist

$$u(T(t)) = \int_0^{2\pi} P(\theta, T(t))\, d\mu(\theta) = 2\pi \int_0^{2\pi} P(\theta, T(0))\, P(T^{-1}(\theta), t)\, d\mu(\theta) =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} P(T(\theta), T(0))\, P(\theta, t)\, d\mu(T(\theta)).$$

Ist $\mu(T(\theta))$ vollstetig in Bezug auf $\mu(\theta)$ und

$$\frac{d\mu(T(\theta))}{d\mu(\theta)} = \frac{1}{2\pi P(T(\theta), T(0))} : [\mu]\,(^1),$$

so ist ([2])

$$u(T(t)) = \int_0^{2\pi} P(\theta, t)\, d\mu(\theta) = u(t),$$

was die eine Hälfte des Hilfssatzes beweist.

Umgekehrt, nehmen wir an, dass

$$u(T(t)) = u(t)$$

ist und es sei

$$\nu(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi P(T(\psi), T(0))}\, d\mu(\psi).$$

Das Mass $\nu(\theta)$ ist in Bezug auf $\mu(\theta)$ vollstetig und es ist

$$\frac{d\nu(\theta)}{d\mu(\theta)} = \frac{1}{2\pi P(T(\theta), T(0))} : [\mu].$$

Daher folgt

$$\nu(t) = 2\pi \int_0^{2\pi} P(T(\theta), T(0))\, P(\theta, t)\, d\nu(\theta) = \int_0^{2\pi} P(\theta, t)\, d\mu(\theta) = u(t) = u(T(t))$$

und

$$0 = \nu(t) - u(T(t)) = 2\pi \int_0^{2\pi} P(T(\theta), T(0))\, P(\theta, t)\, d(\nu(\theta) - \mu(T(\theta))).$$

Wenn wir

$$\nu_*(\theta) = 2\pi \int_0^{\theta} P(T(\psi), T(0))\, d(\nu(\psi) - \mu(T(\psi)))$$

setzen, so ist

$$\int_0^{2\pi} P(\theta, t)\, d\nu_*(\theta) = 0$$

woraus

$$\nu_*(\theta) = 0$$

(1) d. h. mit Ausnahme einer Menge von μ-Mass null.

folgt. Daraus folgert man, dass die Masse $\nu(\theta)$ und $\mu(T(\theta))$ zusammenfallen. $\mu(T(\theta))$ ist somit in Bezug auf $\mu(\theta)$ vollstetig und wir haben

$$\frac{d\mu(T(\theta))}{d\mu(\theta)} = \frac{d\nu(\theta)}{d\mu(\theta)} = \frac{1}{2\pi P(T(\theta), T(0))} : [\mu],$$

was die zweite Hälfte des Hilfssatzes beweist.

Satz I. *Es sei $u(z)$ eine auf $R \notin O_G$ positive harmonische Funktion und*

$$u(\varphi(t)) = \int_0^{2\pi} P(\theta, t)\, d\mu(\theta).$$

Das Komplement $\complement \mathfrak{F}$ der Menge $\mathfrak{F}$ hat das μ-Mass null.

Wir bezeichnen mit A_σ die Menge derjenigen $e^{i\theta}$, für welche man eine Folge $\{t_{\nu_k}\}$ finden kann, derart, dass

$$\lim_{k\to\infty} t_{\nu_k} = e^{i\theta}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \arg \frac{e^{i\theta} - t_{\nu_k}}{e^{i\theta}} \right| < \frac{\pi}{2} - \sigma$$

ist. Da

$$\complement \mathfrak{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$$

ist, so genügt zu beweisen, dass jede Menge A_σ das μ-Mass null hat. Es sei $t_\nu = r_\nu e^{i\theta_\nu}$, λ_ν der Radius durch t_ν und λ_ν', λ_ν'' die Halbgeraden

$$\begin{aligned} \lambda_\nu' &: t = t_\nu + \varrho\, e^{i(\theta_\nu - \pi/2 + \sigma/2)} \\ \lambda_\nu'' &: t = t_\nu + \varrho\, e^{i(\theta_\nu + \pi/2 - \sigma/2)}. \end{aligned} \qquad (0 \leq \varrho < \infty)$$

I_ν sei der Bogen auf $|t| = 1$, der von den Halbgeraden λ_ν' und λ_ν'' herausgeschnitten ist. Jeder Punkt $e^{i\theta} \in A_\sigma$ befindet sich auf unendlich vielen Bogen I_ν. Hat man gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(I_\nu)$$

konvergiert, wo $\mu(I_\nu)$ das Mass des Bogens I_ν ist, so ist auch schon bewiesen, dass μ-Mass von A_σ null ist, denn $\mu(A_\sigma)$ ist kleiner als jeder Rest dieser Reihe. Für jedes σ findet man ein $h > 0$, so dass I_ν im Intervall $[\theta_\nu - h(1 - r_\nu), \theta_\nu + h(1 - r_\nu)]$ enthalten ist. (1) Es ist also hinreichend zu beweisen, dass die Reihe

(1) Man kann z. B. $h = \operatorname{ctg} \sigma$ nehmen.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(\theta_\nu + h(1-r_\nu)) - \mu(\theta_\nu - h(1-r_\nu))] \tag{1}$$

konvergiert. Laut Hilfssatz 1 ist

$$\mu(\theta'') - \mu(\theta') = \mu(T(T^{-1}(\theta''))) - \mu(T(T^{-1}(\theta'))) =$$

$$= \int_{T^{-1}(\theta')}^{T^{-1}(\theta'')} \frac{1}{2\pi P(T(\theta), T(0))} d\mu(\theta) \leqslant \frac{u(\varphi(0))}{2\pi\, \varepsilon_T(\theta', \theta'')},$$

wo

$$\varepsilon_T(\theta', \theta'') = \inf_{T^{-1}(\theta') \leqslant \theta \leqslant T^{-1}(\theta'')} P(T(\theta), T(0)) = \inf_{\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''} P(\theta, T(0))$$

ist. Für

$$\theta' = \theta_\nu - h(1-r_\nu)$$

$$\theta'' = \theta_\nu + h(1-r_\nu)$$

folgt

$$2\pi\, \varepsilon_T(\theta', \theta'') = \inf_{\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''} \frac{1-r_\nu^2}{1 - 2r_\nu \cos(\theta - \theta_\nu) + r_\nu^2} =$$

$$= \inf_{|\psi| \leqslant h(1-r_\nu)} \frac{1-r_\nu^2}{(1-r_\nu)^2 + 4r_\nu \sin^2 \frac{1}{2}\psi} = \frac{1-r_\nu^2}{(1-r_\nu)^2 + 4r_\nu \sin^2 \frac{1}{2} h(1-r_\nu)}$$

$$\geqslant \frac{1-r_\nu^2}{(1-r_\nu)^2 + h^2(1-r_\nu)^2} \geqslant \frac{1}{(1+h^2)(1-r_\nu)}.$$

Es ist also

$$\mu(\theta_\nu + h(1-r_\nu)) - \mu(\theta_\nu - h(1-r_\nu)) \leqslant (1+h^2)\, u(\varphi(0))\, (1-r_\nu).$$

Weil $R \notin O_G$ ist, so ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1-r_\nu)$$

konvergent und aus der obigen Beziehung folgt sofort, dass auch die Reihe (1) konvergiert, was zu beweisen war.

4. Es sei M eine Menge von Punkten des idealen Randes und $\mathfrak{M}$ ihr Bild auf $|t|=1$. Wir sagen, dass M eine messbare Menge ist, wenn $\mathfrak{M}$ im Lebesgueschen Sinne messbar ist. Weiter sagen wir, dass M nulles oder positives Mass hat, je nachdem das Lebesguesche Mass von $\mathfrak{M}$ null oder positiv ist. Es sei M eine messbare Menge. Die Funktion

$$u^*(t) = \int_{\mathfrak{M}} P(\theta, t)\, d\theta$$

ist automorph in Bezug auf (T), so dass

$$\omega(z, M, R) = u^*(\varphi^{-1}(z))$$

eine auf R eindeutige und harmonische Funktion ist. Wir nennen sie das harmonische Mass der Menge M. Es ist

$$\omega(\varphi(t), M, R) = \int_{\mathfrak{M}} P(\theta, t)\, d\theta,$$

so dass $\omega(\varphi(t), M, R)$ fast überall auf $\mathfrak{M}$ den Winkelgrenzwert 1 und fast überall auf dem Komplement $\complement\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$ den Winkelgrenzwert 0 hat.

Es sei γ eine geschlossene analytische Jordankurve auf R, welche die Fläche R in zwei Teile R' und R'' zerlegt. Wir nennen ein Gebiet, dessen relativer Rand aus einer einzigen analytischen Jordankurve besteht, „Ende" einer Riemannschen Fläche; R' ist also ein Ende der Riemannschen Fläche R. Es sei β die Menge jener idealen Randkomponenten, welche auf dem idealen Rand von R' enthalten sind. Wir nennen β die von R' bestimmte Portion des idealen Randes von R. Weiter bezeichnen wir mit B die Menge der Punkte des idealen Randes, die auf den idealen Randkomponenten aus β liegen.

Es sei $\{R_n\}$ eine Ausschöpfung der Fläche R, derart dass der Rand γ_n von R_n aus endlich vielen analytischen Jordankurven besteht und $\gamma \subset R_1$ ist, und es sei $\omega(z, \gamma_n \cap R', R_n)$ das harmonische Mass von $\gamma_n \cap R'$ in Bezug auf R_n. Ist $R \notin O_G$ so folgt ([1])

$$\lim_{n\to\infty} \omega(z, \gamma_n \cap R', R_n) = \omega(z, B, R);$$

wir werden manchmal $\omega(z, B, R)$ als das harmonische Mass der Portion β benennen.

Es sei jetzt a eine ideale Randkomponente, A die Menge der Punkte des idealen Randes, die auf a liegen, $\{\beta_n\}$ eine Folge der Portionen des idealen Randes, für die

$$\beta_n \supset \beta_{n+1}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \beta_n = a$$

gilt und B_n die Menge der Punkte des idealen Randes, die auf idealen Randkomponenten aus β_n liegen. Es ist offenbar

$$\omega(z, A, R) = \lim_{n\to\infty} \omega(z, B_n, R);$$

wir werden $\omega(z, A, R)$ auch das harmonische Mass der idealen Randkomponente a nennen.

5. Es sei R' ein Ende der Riemannschen Fläche $R \notin O_G$. R' ist selbst eine Riemannsche Fläche und deshalb kann man für sie einen idealen Rand genau wie für R einführen. Es sei $|t'| < 1$ die universelle Überlagerungsfläche von R' und $z = \varphi'(t')$ die

Spurabbildung. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}'$ die Menge jener $e^{i\theta'}$ welche keine Winkelhäufungspunkte der Menge $\{\varphi'^{-1}(z_0)\}$ sind. Ist (T') die Deckbewegungsgruppe, so sind die Punkte des idealen Randes von R' die Äquivalenzklassen von $\mathfrak{F}'$ in Bezug auf (T'). Es sei β die von R' bestimmte Portion des idealen Randes von R; β ist zu gleicher Zeit eine Portion des idealen Randes von R' und, als eine solche betrachtet, werden wir sie mit β' bezeichnen. Weiter bezeichnen wir mit B (bzw. B') die Menge der Punkte des idealen Randes von R (bzw. R'), die auf den idealen Randkomponenten aus β (bzw. β') liegen. Es ist anzunehmen, dass die Mengen B und B' nicht als ganz verschieden betrachtet werden müssen, sondern dass man ihre Punkte irgendwie identifizieren muss. Diese Identifizierung wird mittels der Extremisierungstheorie [4], [3] (siehe auch [1]) durchgeführt.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}$ die Familie der auf R harmonischen positiven beschränkten Funktionen und mit $\mathfrak{U}'$ die Familie der harmonischen positiven beschränkten Funktionen auf $\bar{R}'$, welche auf γ verschwinden. Für $u' \in \mathfrak{U}'$ bezeichnen wir

$$E\,u'(z) = \inf_{\substack{u \geqslant u' \\ u \in \mathfrak{U}}} u(z)$$

und nennen E den Extremisierungsoperator in Bezug auf das Paar (R', R). Für $u \in \mathfrak{U}$ bezeichnen wir

$$I\,u(z) = \sup_{\substack{u' \leqslant u \\ u' \in \mathfrak{U}'}} u'(z)$$

und nennen I den Inextremisierungsoperator in Bezug auf das Paar (R', R).

Es wurde bewiesen in [1], dass jeder messbaren Menge $E' \subset B'$ eine messbare Menge $E^* M' \subset B$ entspricht, derart dass

$$E\,\omega(z, M', R') = \omega(z, E^* M', R)$$

ist. Ähnlicherweise entspricht jeder messbaren Menge $M \subset B$ eine messbare Menge $I^* M \subset B'$, derart, dass

$$I\,\omega(z, M, R) = \omega(z, I^* M, R')$$

ist. Die Mengen $E^* M'$ und $I^* M$ sind durch M', bzw. M, eindeutig bis auf eine Menge vom Masse null bestimmt, und es gilt

$$E^* I^* M = M$$

$$I^* E^* M' = M'.$$

Die obenerwähnte Identifikation besteht darin, dass man sich die Mengen M und $I^* M$ als identisch vorstellt. Folgender Hilfssatz wird zeigen, dass die Mengen M und

$I^* M$ vom Standpunkt des Verhaltens der quasibeschränkten harmonischen Funktionen in der Tat als identisch angesehen werden dürfen. Eine harmonische Funktion u heisst quasibeschränkt [11] (quasiborné), wenn sie als Differenz zweier harmonischer positiver Funktionen darstellbar ist,

$$u = u^+ - u^-,$$

wo u^+, u^- Grenzfunktionen monoton wachsender Folgen von beschränkten harmonischen Funktionen sind. u ist quasibeschränkt dann und nur dann, wenn $u(\varphi(t))$ fast überall auf $|t| = 1$ Winkelgrenzwerte besitzt, und

$$u(\varphi(t)) = \int_0^{2\pi} u(\varphi(e^{i\theta}))\, P(\theta, t)\, d\theta$$

ist.

HILFSSATZ 2. *Es sei $u(z)$ eine harmonische quasibeschränkte Funktion auf R und M eine messbare Menge in B. Ist*

$$u(\varphi(e^{i\theta})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$, so ist

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$, $M' = I^* M$, und umgekehrt, ist

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$, so ist

$$u(\varphi(e^{i\theta})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$.

Es sei $c' < c$,

$$\xi_{c'}(e^{i\theta}) = \max \{u(\varphi(e^{i\theta})), c'\}$$

und

$$u_{c'}^*(t) = \int_0^{2\pi} \xi_{c'}(e^{i\theta})\, P(\theta, t)\, d\theta.$$

Da $u_{c'}^*(t)$ automorph in Bezug auf (T) ist, so ist

$$u_{c'}(z) = u_{c'}^*(\varphi^{-1}(z))$$

eine auf R eindeutige harmonische Funktion. Es ist offenbar

$$u_{c'}^*(t) - c' \geqslant (c - c')\, \omega(\varphi(t), M, R)$$

und deshalb ist

$$u_{c'}(z) - c' \geqslant (c - c')\, \omega(z, M, R) \geqslant (c - c')\, I\, \omega(z, M, R) = (c - c')\, \omega(z, M', R').$$

Daraus folgert man

$$u_{c'}(\varphi'(e^{i\theta'})) \geqslant c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$. Da

$$\lim_{c' \to -\infty} u_{c'}(z) = u(z)$$

und da $u(z)$ auch auf R' quasibeschränkt ist, so folgt

$$\int_0^{2\pi} u(\varphi'(e^{i\theta'}))\, P(\theta', t')\, d\theta' = u(\varphi'(t')) = \lim_{c' \to -\infty} u_{c'}(\varphi'(t')) = \lim_{c' \to -\infty} \int_0^{2\pi} u_{c'}(\varphi'(e^{i\theta'}))\, P(\theta', t')\, d\theta'$$

und

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = \lim_{c' \to -\infty} u_{c'}(\varphi'(e^{i\theta'}))$$

fast überall. Es ist also fast überall auf $\mathfrak{M}'$

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) \geqslant c.$$

Ähnlicherweise beweist man die umgekehrte Ungleichung und also ist

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$, was den ersten Teil des Satzes beweist.

Wir nehmen jetzt an, dass

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$ ist. Da

$$u_{c'}(z) \geqslant u(z), c'$$

ist, so ist auch

$$u_{c'}(\varphi'(e^{i\theta'})) \geqslant c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$ und

$$u_{c'}(\varphi'(e^{i\theta'})) \geqslant c'$$

fast überall auf $\mathfrak{F}'$. Daraus folgt

$$u_{c'}(\varphi'(t')) - c' \geqslant (c - c')\, \omega(\varphi'(t'), M', R')$$

und

$$u_{c'}(z) - c' \geqslant (c - c')\, \omega(z, M', R').$$

Aus der Definition von E folgt unmittelbar

$$u_{c'}(z) - c' \geqslant (c - c')\, E\, \omega(z, M', R') = (c - c')\, \omega(z, M, R).$$

Es ist also

$$u_{c'}(\varphi(e^{i\theta})) \geqslant c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$ und deshalb ist, gerade wie oben

$$u(\varphi(e^{i\theta})) \geqslant c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$. Ähnlicherweise erhält man die umgekehrte Ungleichung und also ist

$$u(\varphi(e^{i\theta})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$, was zu beweisen war.

6. Es sei $\mathfrak{S}(R)$ eine Familie von quasibeschränkten harmonischen Funktionen auf R. Im allgemeinen schreiben wir $\mathfrak{S}$ anstatt $\mathfrak{S}(R)$.

DEFINITION. [1] *Eine Menge von Punkten des idealen Randes M heisst $\mathfrak{S}$-unteilbar, wenn sie messbar und von positivem Masse ist, und wenn für jedes $u(z) \in \mathfrak{S}$, $u(\varphi(t))$ fast überall auf dem Bild $\mathfrak{M}$ von M denselben Winkelgrenzwert c_u hat. Eine Riemannsche Fläche gehört der Klasse $U_{\mathfrak{S}}$ an, wenn ihr idealer Rand, wenigstens eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge enthält.*

Die Riemannschen Flächen aus der Klasse O_G haben keine $\mathfrak{S}$-unteilbaren Mengen in ihrem Rande und damit ist

$$O_G \cap U_{\mathfrak{S}} = \phi.$$

Es ist offenbar

$$O_{\mathfrak{S}} - O_G \subseteq U_{\mathfrak{S}},$$

wo $O_{\mathfrak{S}}$ die Klasse jener Riemannschen Flächen R ist, für welche $\mathfrak{S}(R)$ nur konstante Funktionen enthält. Wir werden uns mit den Familien H, K, B, D^α $(-1 < \alpha \leqslant 1)$ und ihren Durchschnitten beschäftigen. Hier ist K die Familie der harmonischen Funktionen, für welche die konjugierte harmonische Funktion auf jeder Jordankurve, welche die Fläche zerlegt, verschwindende Perioden hat, B die Familie der beschränkten Funktionen und D^α die Familie der Funktionen $u(z)$, für welche das Integral

$$\iint_R |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy$$

endlich ist; $g(z, z_0)$ ist die Greensche Funktion der Fläche R. Für $\alpha = 0$ geht das Integral in das Dirichletsche Integral über. Man sieht leicht, dass die Konvergenz des Integrals unabhängig von z_0 ist.

Es sei HM_α $(\alpha \geqslant 1)$ die von Parreau [10] und Nevanlinna [8] eingeführte Familie: $u(z) \in HM_\alpha$, wenn die subharmonische Funktion $|u(z)|^\alpha$ eine harmonische Majorante besitzt.

HILFSSATZ 3. *Es ist*

$$HM_2 = HD^1.$$

Beweis: Sei $u(z) \in HD^1$ und

$$I(z) = \iint_R |\operatorname{grad} u(\zeta)|^2\, g(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta.$$

Da

$$\Delta I(z) = -2\pi\, |\operatorname{grad} u(z)|^2$$

und

$$\Delta u^2(z) = 2\, |\operatorname{grad} u(z)|^2$$

ist, so ist

$$v(z) = u^2(z) + \frac{1}{\pi} I(z)$$

eine harmonische Funktion. Sie ist grösser als $u^2(z)$, da $I(z)$ positiv ist, und somit $u(z) \in HM_2$.

Umgekehrt, sei $u(z) \in HM_2$, und $\{R_n\}$ sei eine Ausschöpfung von R. Wir werden mit $g_n(z, z_0)$ die Greensche Funktion von R_n, mit $v_n(z)$ die in R_n harmonische Funktion, welche auf dem Rande γ_n von R_n gleich $u^2(z)$ ist, und mit $I_n(z)$ die Funktion

$$I_n(z) = \iint_{R_n} |\operatorname{grad} u(\zeta)|^2 g_n(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta$$

bezeichnen. $I_n(z)$ verschwindet auf dem Rande von R_n wie leicht zu beweisen ist, und deshalb ist

$$v_n(z) = u^2(z) + \frac{1}{\pi} I_n(z).$$

Weil $u(z) \in HM_2$, existiert eine auf R harmonische Funktion, $v(z)$, so dass

$$v(z) \geqslant u^2(z)$$

ist, und daher ist

$$v(z) \geqslant v_n(z) \geqslant \frac{1}{\pi} I_n(z)$$

in R_n. Daraus folgert man

$$\begin{aligned} I(z_0) &= \iint_R |\operatorname{grad} u(z)|^2 g(z, z_0)\, dx\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g(z, z_0)\, dx\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \iint_{R_n} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g_m(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant \lim_{m\to\infty} \iint_{R_m} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g_m(z, z_0)\, dx\, dy \\ &= \lim_{m\to\infty} I_m(z_0) \leqslant \pi v(z_0) < \infty \end{aligned}$$

und $u(z) \in HD^1$, was zu beweisen war.

Es ist offenbar auch

$$KM_2 = KD^1.$$

Parreau hat bewiesen ([11], 143), dass die Funktionen $u \in HM_2$ quasibeschränkt sind; aus dem Hilfssats 3 folgt, dass die Funktionen $u \in HD^\alpha$ $(\alpha \leqslant 1)$ auch quasibeschränkt sind. Aus dem Hilfssatz 3 und Satz 2 aus [1] folgt

$$O_{HB} = O_{HD^1} \subseteq O_{HD^\alpha} \subseteq O_{HD^0} = O_{HD} \subseteq O_{HD^{\alpha'}}$$

für $\alpha' \leqslant 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Gerade wie in [1] beweist man, dass für jede Familie $\mathfrak{S}$, die die harmonische Masse der Portionen enthält, die $\mathfrak{S}$-unteilbaren Mengen auf einer idealen Randkomponente, mit Ausnahme einer Menge von Masse null, liegen.

Die Familien HB und $HD = HD^0$ enthalten, wie bekannt, die harmonischen Masse der Portionen. Wir wollen dasselbe auch für die Familien HD^α, $-1 < \alpha \leqslant 1$, beweisen. Es sei γ eine geschlossene Jordankurve, welche die Fläche R in zwei Teile R', R'' teilt, β', β'' die von R', R'' bestimmten Portionen, $\{R_n\}$ eine Ausschöpfung von R, γ_n der Rand von R_n, der aus endlich vielen analytischen Jordankurven besteht und

$$\gamma_n' = \gamma_n \cap R'$$

$$\gamma_n'' = \gamma_n \cap R''.$$

Es ist, wie oben bewiesen wurde,

$$\omega(z, B', R) = \lim_{n\to\infty} \omega(z, \gamma_n', R_n),$$

wo B' die Menge der Punkte des idealen Randes ist, welche auf den idealen Randkomponenten aus β' liegen. Es sei

$$m = \inf_{z\in\gamma} g(z, z_0) > 0.$$

Dann ist in $R_n \cap R''$

$$g(z, z_0) \geqslant m\, \omega(z, \gamma_n', R_n) = m\, \omega_n(z)$$

und, für $-1 < \alpha < 0$,

$$\iint\limits_{R_n\cap R''} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant m^\alpha \iint\limits_{R_n} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 \omega_n^\alpha(z)\, dx\, dy$$

$$= m^\alpha \int_0^1 \tau^\alpha \Bigl(\int\limits_{C_\tau^{(n)}} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 |dz| \Big/ \frac{\partial \omega_n(z)}{\partial n} \Bigr) d\tau = m^\alpha \int_0^1 \tau^\alpha \Bigl(\int\limits_{C_\tau^{(n)}} \frac{\partial \omega_n(z)}{\partial n} |dz| \Bigr) d\tau$$

$$= m^\alpha D_{R_n}(\omega_n) \int_0^1 \tau^\alpha\, d\tau = m^\alpha D_{R_n}(\omega_n)/(1+\alpha),$$

wo $C_\tau^{(n)}$ die Niveaulinie

$$\omega_n(z) = \tau$$

und

$$D_\Omega(u) = \iint\limits_\Omega |\operatorname{grad} u(z)|^2\, dx\, dy$$

ist. Dieselbe Abschätzung findet man für das Integral über $R_n \cap R'$, so dass

$$\iint\limits_{R_n} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant 2\, m^\alpha D_{R_n}(\omega_n)/(1+\alpha)$$

gilt. Nun ist

$$\iint_R |\operatorname{grad} \omega(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy = \lim_{m\to\infty} \iint_{R_m} |\operatorname{grad} \omega(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy$$

$$= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \iint_{R_m} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} |\operatorname{grad} \omega_n(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy$$

$$\leqslant \frac{2\, m^\alpha}{1+\alpha} \lim_{n\to\infty} D_{R_n}(\omega_n) = \frac{2\, m^\alpha}{1+\alpha} D_R(\omega) < \infty$$

und also $\omega(z, B', R) \in D^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$. Für $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ folgt $\omega(z, B', R) \in D^\alpha$ von $D^0 \subseteq D^\alpha$.

7. Es sei R' ein Ende einer Riemannschen Fläche R. Wir wollen untersuchen, wie sich die $\mathfrak{S}$-unteilbaren Mengen in Bezug auf die Operatoren E^* und I^* verhalten. Für welche Familien $\mathfrak{S}$ ist eine Menge M, aus dem gemeinsamen Teil des idealen Randes von R und R', gleichzeitig $\mathfrak{S}$-unteilbar auf R und R'? Nächstfolgende Paragraphen sind diesem Problem gewidmet.

Satz 2. *Es sei M' eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R', $M' \subseteq B'$. Ist jede Funktion $u(z) \in \mathfrak{S}(R)$ als Funktion auf R in $\mathfrak{S}(R')$ enthalten, so ist $M = E^* M'$ eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R.*

Es sei $u(z) \in \mathfrak{S}(R)$. Da $u(z) \in \mathfrak{S}(R')$ und M' eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge ist, so ist

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$. Nach dem Hilfssatz 4 ist

$$u(\varphi(e^{i\theta})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$, und $M = E^* M'$ ist somit eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge.

Folgesatz 1. *Ist M' eine XY-unteilbare Menge ($X = H, K$; $Y = B, D^\alpha$, $-1 < \alpha \leqslant 1$) auf dem idealen Rande von R', $M' \subseteq B'$, so ist $M = E^* M'$ ebenfalls eine XY-unteilbare Menge.*

Es ist nur zu zeigen, dass für jedes $u(z) \in XY(R)$, $u(z) \in XY(R')$ ist. Das ist offenbar für H, K und B. Es sei $u(z) \in D^\alpha(R)$ und $g(z, z_0)$, bzw. $g'(z, z_0)$, die Greensche Funktion von R, bzw. R'. Es ist

$$g'(z, z_0) \leqslant g(z, z_0)$$

auf R' und daraus folgt, für $\alpha \geqslant 0$,

$$\iint_{R'} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g'^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant \iint_{R'} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy$$

$$\leqslant \iint_R |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy < \infty$$

und also ist $u(z) \in D^\alpha(R')$. Es sei γ' eine Jordansche Kurve auf R', welche γ von β' trennt, R_0 das Gebiet zwischen γ und γ', und

$$M = \sup_{z \in \gamma'} g(z, z_0) < \infty$$

$$m' = \inf_{z \in \gamma'} g'(z, z_0) > 0,$$

dann ist auf $R - R_0$

$$\frac{g'(z, z_0)}{m'} \geqslant \frac{g(z, z_0)}{M}.$$

Deshalb ist für $-1 < \alpha < 0$,

$$\iint_{R'-R_0} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g'^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant (m'/M)^\alpha \iint_{R'-R_0} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (m'/M)^\alpha \iint_R |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy < \infty.$$

Wir stellen

$$\omega(z) = \omega(z, \gamma', R_0),$$

und C_λ sei die Niveaulinie

$$\omega(z) = \lambda.$$

Auf R_0 ist

$$\omega(z) \leqslant g'(z, z_0)/m'$$

und deshalb ist für $-1 < \alpha < 0$,

$$\iint_{R_0} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g'^\alpha(z, z_0)\, dx\, dy \leqslant m'^\alpha \iint_{R_0} |\operatorname{grad} u(z)|^2 \omega^\alpha(z)\, dx\, dy =$$

$$= m'^\alpha \int_0^1 \lambda^\alpha \left(\int_{C_\lambda} |\operatorname{grad} u(z)|^2 \left(\frac{\partial \omega(z)}{\partial n}\right)^{-1} |dz| \right) d\lambda < C m'^\alpha \int_0^1 \lambda^\alpha\, d\lambda = \frac{C m'^\alpha}{1+\alpha} < \infty,$$

wo

$$C = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \int_{C_\lambda} |\operatorname{grad} u(z)|^2 \left(\frac{\partial \omega(z)}{\partial n}\right)^{-1} |dz| < \infty$$

ist. Daher ist $u(z) \in D^\alpha(R')$. Der Folgesatz folgt sofort aus dem Satz 2.

8. Es sei M, $M \subseteq B$, eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge. Wir wollen hinreichende Bedingungen dafür angeben, dass $M' = I^* M$ auch eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge ist. Dafür benutzen wir die Methode des Linearoperators von Sario [12]. Es sei $s(z)$ eine auf γ harmonische Funktion und L ein Operator, der der Funktion $s(z)$ eine auf $\bar{R}'$ harmonische Funktion $Ls(z)$ anschliesst. Wir nehmen an, dass L ein Linearoperator ist:

$$L(c_1 s_1 + c_2 s_2) = c_1 L s_1 + c_2 L s_2,$$

wo c_1, c_2 reelle Zahlen und s_1, s_2 auf γ harmonische Funktionen sind. L wird normal genannt [12], wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

$$L_1 : Ls(z) = s(z) \text{ auf } \gamma$$

$$L_2 : \int_\gamma \frac{\partial Ls(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

$$L_3 : L1 \equiv 1$$

$$L_4 : \inf_{\zeta \in \gamma} s(\zeta) \leqslant Ls(z) \leqslant \sup_{\zeta \in \gamma} s(\zeta).$$

Wir sagen, dass der Operator L für die Familie $\mathfrak{S}$ geeignet ist, wenn er noch folgende Bedingungen erfüllt:

$$L_5 : Ls(z) \in \mathfrak{S}(R')$$

$$L_6 : Ls(\varphi'(e^{i\theta'})) = \xi_s(a')$$

fast überall auf $\mathfrak{A}'$. Hier ist a' eine ideale Randkomponente aus β', A' die Menge der Punkte des idealen Randes von R', welche auf a' liegen; $\mathfrak{A}'$ ist das Bild von A' und $\xi_s(a')$ eine beliebige reelle Zahl, die von $s(z)$ und a' abhängt. Also muss $Ls(\varphi'(t'))$ fast überall auf $\mathfrak{A}'$ einen konstanten Winkelgrenzwert haben.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{S}$ eine Familie von quasibeschränkten harmonischen Funktionen, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1° *Aus $u \in \mathfrak{S}(R)$ folgt $u \in \mathfrak{S}(R')$ für jedes R und jedes Ende R' auf R.*

2° *Ist u harmonisch auf R und $u \in \mathfrak{S}(R')$, $u \in \mathfrak{S}(R-R')$, so ist auch $u \in \mathfrak{S}(R)$ für jedes Ende R'.*

3° *$I\,1(z) \in \mathfrak{S}(R')$ für jedes Ende R' oder $\mathfrak{S}(R') \subseteq K$.*(1)

4° *$\mathfrak{S}$ ist ein linearer Raum.*

5° *Es gibt einen Linearoperator, der für die Familie $\mathfrak{S}$ geeignet ist.*

Ist R' ein Ende auf R und M eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R, welche auf einer idealen Randkomponente liegt, $M \subset B$, so ist I^*M eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R'.

Es sei $u' \in \mathfrak{S}(R')$. Wir notieren

$$s(z) = u'(z) - \frac{\int_\gamma \frac{\partial u'(\zeta)}{\partial n} |d\zeta|}{\int_\gamma \frac{\partial I\,1(\zeta)}{\partial n} |d\zeta|} I\,1(z).$$

(1) $I\,1(z)$ ist die inextremisierte Funktion der Funktion $u(z) \equiv 1$; sie ist gleich $\omega(z, B', R')$.

$I\,1(z)$ ist nicht identisch null, denn $B' \supseteq M' = I^* M$ und $I^* M$ hat positives Mass. Da $u'(z)$ und $I\,1(z)$ harmonisch auf γ sind, so ist auch $s(z)$ harmonisch auf γ. Nach 3° ist $I\,1(z) \in \mathfrak{S}(R')$ oder $\mathfrak{S}(R') \subseteq K$. Im ersten Fall ist wegen 4° $s(z) \in \mathfrak{S}(R')$. Im zweiten Fall ist

$$\int_\gamma \frac{\partial u'(\zeta)}{\partial n} |d\zeta| = 0$$

und

$$s(z) = u'(z) \in \mathfrak{S}(R').$$

Da

$$\int_\gamma \frac{\partial s(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

ist, so kann man mittels der Methode des Linearoperators von Sario ([12] Satz 1) eine auf R harmonische Funktion konstruieren, welche auf R' die Gleichheit

$$u(z) = s(z) + L(u(z) - s(z))$$

und auf $R - R'$ die Gleichheit

$$u(z) = L\,u(z)$$

erfüllt. Nach L_5 ist $L(u(z) - s(z)) \in \mathfrak{S}(R')$ und $u(z) = L\,u(z) \in \mathfrak{S}(R - R')$. Aus 4° folgt $u(z) \in \mathfrak{S}(R')$ und nach 2°, $u(z) \in \mathfrak{S}(R)$. Da M eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge ist, so ist

$$u(\varphi(e^{i\theta})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}$. Aus dem Hilfssatz 2 folgt dann

$$u(\varphi'(e^{i\theta'})) = c$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$, $M' = I^* M$. Die ideale Randkomponente a gehört der Portion β an, welche von R' bestimmt ist, so dass sie gleichzeitig eine ideale Randkomponente aus dem idealen Rande von R' ist. Als solche werden wir sie mit a' bezeichnen. Es sei A' die Menge der Punkte des idealen Randes von R', welche auf a' liegen, und $\mathfrak{A}'$ das Bild von A'. Nach der Bedingung L_6 ist

$$L(u(\varphi'(e^{i\theta'})) - s(\varphi'(e^{i\theta'}))) = \xi_{u-s}(a')$$

fast überall auf $\mathfrak{A}'$ und da $M' \subseteq A'$ ist, so gilt dieselbe Gleichheit auch fast überall auf $\mathfrak{M}'$. Daraus folgt

$$s(\varphi'(e^{i\theta'})) = c - \xi_{u-s}(a')$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$. Da

$$I\,1(\varphi'(e^{i\theta'})) = 1$$

fast überall auf $B' \supseteq M'$ ist, so folgt daher

$$u'(\varphi'(e^{i\theta'})) = c_1 = c - \xi_{u-s}(a') + \frac{\int\limits_\gamma \frac{\partial u'(\zeta)}{\partial n} |d\zeta|}{\int\limits_\gamma \frac{\partial I 1(\zeta)}{\partial n} |d\zeta|}$$

fast überall auf $\mathfrak{M}'$. Die Menge M' ist somit $\mathfrak{S}$-unteilbar.

FOLGESATZ 2. *Es sei $\mathfrak{S}$ eine Familie von Funktionen, welche die Bedingungen des Satzes* 3 *erfüllt, R eine Riemannsche Fläche, welche eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf einer idealen Randkomponente besitzt und Q eine kompakte Menge auf R. Wenigstens eine Komponente der offenen Menge $R - Q$ gehört der Klasse $U_{\mathfrak{S}}$ an.*

Es sei M eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge, welche auf einer idealen Randkomponente a von R liegt und R'' sei jene Komponente der offenen Menge $R - Q$, welche a auf dem idealen Rand enthält. Man kann immer ein Ende R' finden, $R' \subseteq R''$, das a auf dem idealen Rand enthält. Bezeichnen wir mit I den Inextremisierungsoperator in Bezug auf das Paar (R', R) und E' den Extremisierungsoperator in Bezug auf das Paar (R', R''), so ist nach dem Satze 3 $I^* M$ eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R' und nach dem Satze 2 $E'^* I^* M$ eine $\mathfrak{S}$-unteilbare Menge auf dem idealen Rande von R''. Es ist also $R'' \in U_{\mathfrak{S}}$, was zu beweisen war.

9. Wir konstruieren jetzt einen Operator L, welcher für die von uns betrachteten Familien geeignet ist. Es sei $s(z)$ eine auf γ harmonische Funktion. Mit $H s(z)$ werden wir die auf R' normierte Lösung bezeichnen ([9], 320). Diese wird folgendermassen konstruiert: $H_n s(z)$ sei die auf $\overline{R}'_n$ $(\overline{R}'_n = R_n \cap R')$ harmonische Funktion für die

$$H_n s(z) = \begin{cases} s(z) & \text{auf } \gamma \\ 0 & \text{»} \ \ \gamma'_n = \gamma_n \cap R' \end{cases}$$

ist. Die Folge $\{H_n s(z)\}$ ist konvergent ([9] 320–325), und wir bezeichnen

$$H s(z) = \lim_{n \to \infty} H_n s(z).$$

Es ist

$$H_1 : H s(z) = s(z) \text{ auf } \gamma.$$

Auf $\overline{R}'_n$ ist

$$m(1 - I_n 1(z)) \leqslant H_n s(z) \leqslant M(1 - I_n 1(z)),$$

wo

$$m = \inf_{z \in \gamma} s(z)$$

$$M = \sup_{z \in \gamma} s(z).$$

Daraus folgt

$$m\,(1 - I\,1\,(z)) \leqslant H\,s\,(z) \leqslant M\,(1 - I\,1\,(z)),$$

und daher folgert man

$$H_2 : H\,s\,(\varphi'\,(e^{i\theta'})) = 0$$

fast überall auf B'. Wir benötigen folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 4. *Es sei $\{G_n\}$ eine Folge von (nicht unbedingt kompakten) Gebieten auf R,*

$$G_n \subseteq G_{n+1}$$

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

u_n eine harmonische Funktion auf G_n mit

$$D_{G_n}(u_n) \leqslant d < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und v eine auf G harmonische Funktion mit endlichem Dirichlet-Integral. Konvergiert u_n gleichmässig auf jeder kompakten Menge aus G gegen eine harmonische Funktion u, so hat u endliches Dirichlet-Integral auf G und es gilt:

$$D_G(u, v) = \lim_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n, v).$$

Es sei Q eine kompakte Menge in G; dann kann man ein so grosses m finden. so dass

$$Q \subseteq G_m$$

ist. Es ist

$$D_Q(u) = \lim_{n\to\infty} D_Q(u_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup D_{G_n}(u_n) \leqslant d < \infty$$

und daraus

$$D_G(u) = \sup D_Q(u) \leqslant d < \infty.$$

u hat somit endliches Dirichlet-Integral auf G.

Es sei $\{Q_\nu\}$ eine Folge von kompakten Mengen

$$Q_\nu \subseteq Q_{\nu+1}$$

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = G\,.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$|D_{G_n - Q_\nu}(u_n, v)|^2 \leqslant D_{G_n - Q_\nu}(u_n)\, D_{G_n - Q_\nu}(v) \leqslant d\, D_{G - Q_\nu}(v).$$

Daraus und aus

$$D_{G_n}(u_n, v) = D_{G_n \cap Q_\nu}(u_n, v) + D_{G_n - Q_\nu}(u_n, v)$$

o t

$$D_{G_n \cap Q_\nu}(u_n, v) - [d\, D_{G - Q_\nu}(v)]^{\frac{1}{2}} \leqslant D_{G_n}(u_n, v) \leqslant D_{G_n \cap Q_\nu}(u_n, v) + [d\, D_{G - Q_\nu}(v)]^{\frac{1}{2}}.$$

Für ein genügend grosses n ist

$$Q_\nu \subseteq G_n$$

und für $n \to \infty$ erhält man

$$D_{Q_\nu}(u, v) - [d\, D_{G - Q_\nu}(v)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \liminf_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n, v) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n, v) \leqslant D_{Q_\nu}(u, v) + [d\, D_{G - Q_\nu}(v)]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir lassen jetzt ν gegen unendlich streben und erhalten

$$D_G(u, v) \leqslant \liminf_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n, v) \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} D_{G_n}(u_n, v) \leqslant D_G(u, v),$$

das heisst, dass die Folge $\{D_{G_n}(u_n, v)\}$ konvergiert gegen $D_G(u, v)$, was zu beweisen war.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein: mit $\{\gamma_{ki}\}_{1 \leqslant i \leqslant N_k}$ notieren wir die Jordankurven, aus denen γ'_k besteht:

$$\gamma'_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} \gamma_{ki}$$

und nehmen an, dass jede die Fläche R' zerlegt, und es sei R'_{ki} jene Komponente der Menge $R' - R_k$ welche γ_{ki} als relativen Rand hat. β'_{ki} sei die Portion des idealen Randes von R', die von R'_{ki} bestimmt wird, und für $n > k$ stellen wir

$$\gamma_n(\beta'_{ki}) = \gamma'_n \cap R'_{ki} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N_k)$$
$$\omega_{ni}^{(k)}(z) = \omega(z, \gamma_n(\beta'_{ki}), R'_n).$$

Es sei

$$L_n^{(k)} s(z) = H_n s(z) + \sum_{j=1}^{N_k} \xi_{ni}^{(k)} \omega_{ni}^{(k)}(z),$$

wo $\xi_{ni}^{(k)}$ reelle Zahlen sind, und zwar so gewählt, dass

$$\int\limits_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L_n^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

ist für $1 \leqslant i \leqslant N_k$. Die $\xi_{ni}^{(k)}$ hängen auch von $s(z)$ ab; da wir aber diese besondere Bezeichnung nicht benötigen werden, lassen wir den Index $s(z)$ weg. Wie bekannt ist ([9], 278–280), ist es immer möglich, solche reellen Zahlen $\xi_{ni}^{(k)}$ zu finden, und sie sind eindeutig bestimmt. $L_n^{(k)} s(z)$ ist ein Linearoperator, der folgende Eigenschaften besitzt:

$$L_1': L_n^{(k)} s(z) = s(z) \text{ auf } \gamma$$

$$L_2': \int_\gamma \frac{\partial L_n^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

$$L_3': L_n^{(k)} 1 \equiv 1$$

$$L_4': \inf_{\zeta \in \gamma} s(\zeta) \leqslant L_n^{(k)} s(z) \leqslant \sup_{\zeta \in \gamma} s(\zeta).$$

Die letzte Ungleichung wird folgendermassen bewiesen. $L_n^{(k)} s(z)$ ist eine harmonische Funktion auf $\bar{R}_n'$ und laut dem Maximum- und Minimumprinzip erreicht sie ihr Maximum und Minimum auf dem Rande vom $\bar{R}_n$. Auf γ ist $L_n^{(k)} s(z)$ gleich $s(z)$, und auf $\gamma_{ni}^{(k)}$ ist $L_n^{(k)} s(z)$ gleich $\xi_{ni}^{(k)}$, da $H_n s(z)$ auf γ_n' gleich null ist. Es ist also nur zu beweisen, dass

$$\inf_{\zeta \in \gamma} s(\zeta) \leqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant N_k} \xi_{ni}^{(k)} \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant N_k} \xi_{ni}^{(k)} \leqslant \sup_{\zeta \in \gamma} s(\zeta).$$

Es sei i_0 dasjenige $i \, (1 \leqslant i \leqslant N_k)$, für welches

$$\xi_{ni_0}^{(k)} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N_k} \xi_{ni}^{(k)}$$

ist. Falls

$$\xi_{ni_0}^{(k)} > \sup_{\zeta \in \gamma} s(\zeta)$$

ist, so gilt

$$L_n^{(k)} s(z) \leqslant \xi_{ni_0}^{(k)}$$

überall auf R_n', und da

$$L_n^{(k)} s(z) = \xi_{ni_0}^{(k)}$$

auf $\gamma_{ni_0}^{(k)}$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial L_n^{(k)} s(z)}{\partial n} \leqslant 0$$

auf $\gamma_{ni_0}^{(k)}$, und das Gleichheitszeichen kann nur in isolierten Punkten vorkommen. Das widerspricht aber obiger Bedingung

$$\int_{\gamma_{ni_0}^{(k)}} \frac{\partial L_n^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0.$$

Es ist also

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant N_k} \xi_{ni}^{(k)} \leqslant \sup_{\zeta \in \gamma} s(\zeta).$$

Ähnlicherweise wird der Beweis für

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant N_k} \xi_{ni}^{(k)} \geqslant \inf_{\zeta \in \gamma} s(\zeta)$$

durchgeführt.

$L_n^{(k)}$ ist also ein Normaloperator in Bezug auf R'_n. Es sei $v(z)$ eine harmonische Funktion auf R'_n, für die

$$\int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial v}{\partial n} |dz| = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant N_k)$$

ist. Dann ist

$$D_{R'_n}(v, L_n^{(k)} s) = \int_{\gamma'_n} L_n^{(k)} s(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz| - \int_{\gamma} L_n^{(k)} s(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \xi_{ni}^{(k)} \int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz| - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz| = - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz|$$

(mit Normalableitungen in der Richtung des idealen Randes). Für $v(z) = L_n^{(k)} s(z)$ erhält man

$$D_{R'_n}(L_n^{(k)} s) = - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L_n^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Aus der Eigenschaft L'_4 ist zu ersehen, dass die Folge $\{L_n^{(k)} s(z)\}$ normal ist. Wir können also eine Teilfolge $\{L_{n_\nu}^{(k)} s(z)\}_{1 \leqslant \nu < \infty}$ finden, welche auf jeder kompakten Menge aus $\bar{R}'$ gleichmässig gegen die harmonische Funktion $L^{(k)} s(z)$ konvergiert:

$$L^{(k)} s(z) = \lim_{\nu \to \infty} L_{n_\nu}^{(k)} s(z).$$

Für $n > k$ haben wir

$$\int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L_{n_\nu}^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\gamma_{r_\nu}(\beta'_{ki})} \frac{\partial L_{n_\nu}^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0,$$

da auf R'_{n_ν}, $\gamma_n(\beta'_{ki})$ und $\gamma_{n_\nu}(\beta'_{ki})$ homolog sind. In der obigen Formel können wir also $v(z) = L^{(k)} s(z)$ stellen; dann erhalten wir

$$D_{R'_n}(L^{(k)} s, L_n^{(k)} s) = - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Wir bemerken, dass

$$\lim_{\nu \to \infty} D_{R'_{n_\nu}}(L_{n_\nu}^{(k)} s) = \lim_{\nu \to \infty} \left\{ - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L_{n_\nu}^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| \right\} = - \int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| < \infty.$$

Aus dem Hilfssatz 4 mit $u_\nu = L^{(k)}_{n_\nu} s$, $v = L^{(k)} s$ folgt dann

$$D_{R'}(L^{(k)} s) = D_{R'}(L^{(k)} s, L^{(k)} s) = \lim_{\nu\to\infty} D_{R'_{n_\nu}}(L^{(k)}_{n_\nu} s, L^{(k)} s) = -\int_\gamma s(z) \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Wir nehmen an, dass man aus der Folge $\{L^{(k)}_n s(z)\}_{1\leqslant n<\infty}$ eine andere Teilfolge

$$\{L^{(k)}_{m_\nu} s(z)\}_{1\leqslant \nu<\infty}$$

herausnehmen kann, welche auf jeder kompakten Menge aus $\bar{R}'$ gegen die harmonische Funktion $\bar{L}^{(k)} s(z)$ konvergiert. Aus dem Hilfssatz 4 folgt

$$D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s, L^{(k)} s) = \lim_{\nu\to\infty} D_{R'_{n_\nu}}(\bar{L}^{(k)} s, L^{(k)}_{n_\nu} s) = -\int_\gamma s(z) \frac{\partial \bar{L}^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s).$$

Indem man die Rollen von $\bar{L}^{(k)} s$, $L^{(k)} s$ vertauscht, erhält man

$$D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s, L^{(k)} s) = D_{R'}(L^{(k)} s)$$

und also

$$D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s - L^{(k)} s) = D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s) - 2\, D_{R'}(\bar{L}^{(k)} s, L^{(k)} s) + D_{R'}(L^{(k)} s) = 0,$$

was

$$\bar{L}_{(k)} s(z) = L_{(k)} s(z)$$

bedeutet. Die Folge $\{L^{(k)}_n s(z)\}_{1\leqslant n<\infty}$ ist also konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} L^{(k)}_n s(z) = L^{(k)} s(z).$$

Aus den Eigenschaften der Operatoren $L^{(k)}_n$ folgen die ähnlichen Eigenschaften des Operators $L^{(k)}$. Dieser ist ein Linearoperator, für welchen

$$L_1'' : L^{(k)} s(z) = s(z) \text{ auf } \gamma$$

$$L_2'' : \int_\gamma \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

$$L_3'' : L^{(k)} 1 \equiv 1$$

$$L_4'' : \inf_{\zeta\in\gamma} s(\zeta) \leqslant L^{(k)} s(z) \leqslant \sup_{\zeta\in\gamma} s(\zeta).$$

$L^{(k)}$ ist also ein Normaloperator auf R'. Es sei $v(z)$ eine auf R' harmonische Funktion mit endlichem Dirichlet-Integral, für welche

$$\int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

für jedes $n > k$ und $1 \leqslant i \leqslant N_k$ gilt. Mittels des Hilfssatzes 4 erhält man

$$D_{R'}(v, L^{(k)} s) = \lim_{n\to\infty} D_{R'_n}(v, L_n^{(k)} s) = -\int_\gamma s(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n} |dz|.$$

Nimmt man $v = L^{(k)} s$, so ist

$$D_{R'}(L^{(k)} s) = -\int_\gamma s(z) \frac{\partial L^{(k)} s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Aus L'_4 folgt

$$\inf_{\zeta\in\gamma} s(\zeta) \leqslant \xi_{ni}^{(k)} \leqslant \sup_{\zeta\in\gamma} s(\zeta).$$

Die Folgen $\{\xi_{ni}^{(k)}\}_{1\leqslant n<\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, N_k)$ enthalten somit konvergente Teilfolgen $\{\xi_{n_\nu i}^{(k)}\}_{1\leqslant\nu<\infty}$

$$\lim_{\nu\to\infty} \xi_{n_\nu i}^{(k)} = \xi_i^{(k)}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{ni}^{(k)}(z) = \omega(z, B'_{ki}, R')$$

ist, wo B'_{ki} die Menge der Punkte ist, die auf topologischen Komponenten aus β'_{ki} liegen, so folgt

$$L^{(k)} s(z) = \lim_{\nu\to\infty} L_{n_\nu}^{(k)} s(z) = \lim_{\nu\to\infty} H_{n_\nu} s(z) + \sum_{i=1}^{N_k} \lim_{\nu\to\infty} \xi_{n_\nu i}^{(k)} \omega_{n_\nu i}^{(k)}(z)$$
$$= H s(z) + \sum_{i=1}^{N_k} \xi_i^{(k)} \omega(z, B'_{ki}, R').$$

Aus dieser Gleichheit und H_2 folgt

$$L''_6 : L^{(k)} s(\varphi'(e^{i\theta'})) = \xi_i^{(k)}$$

fast überall auf B'_{ki}. Daraus sieht man ebenfalls, dass die Folgen $\{\xi_{ni}^{(k)}\}_{1\leqslant n<\infty}$ konvergent sind.

Aus L''_4 ist zu ersehen, dass die Folge $\{L^{(k)} s(z)\}$ normal ist. Sie enthält also eine Teilfolge $\{L^{(k_\nu)} s(z)\}_{1\leqslant\nu<\infty}$, welche auf jeder kompakten Menge aus $\bar{R}'$ gleichmässig gegen eine harmonische Funktion $L s(z)$ konvergiert. Für jedes k, n $(n > k)$ und i $(1 \leqslant i \leqslant N_k)$ ist

$$\int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L s(z)}{\partial n} |dz| = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L^{(k_\nu)} s(z)}{\partial n} |dz| = 0.$$

Anderseits ist

$$D_{R'}(L s) \leqslant \lim_{\nu\to\infty} D_{R'}(L^{(k_\nu)} s) = -\int_\gamma s(z) \frac{\partial L s(z)}{\partial n} |dz| < \infty$$

und also, wenn man in der obigen Gleichheit $v = L s$ stellt, so findet man

$$D_{R'}(L s, L^{(k)} s) = -\int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Aus dem Hilfssatz 4 folgt

$$D_{R'}(L s) = \lim_{\nu\to\infty} D_{R'}(L s, L^{(k_\nu)} s) = -\int_{\gamma} s(z) \frac{\partial L s(z)}{\partial n} |dz|.$$

Ist $\{L^{(l_\nu)} s(z)\}_{1\leqslant\nu<\infty}$ eine andere Teilfolge von $\{L^{(k)} s(z)\}$, die gegen $\bar{L} s(z)$ konvergiert, so findet man genau wie oben

$$D_{R'}(L s, \bar{L} s) = D_{R'}(L s) = D_{R'}(\bar{L} s),$$

was

$$D_{R'}(L s - \bar{L} s) = 0$$

$$L s(z) = \bar{L} s(z)$$

als Folge hat. Die Folge $\{L^{(k)} s(z)\}$ ist somit konvergent:

$$\lim_{k\to\infty} L^{(k)} s(z) = L s(z).$$

L ist ein Normaloperator, wie aus $L_1'' - L_4''$ leicht zu ersehen ist. Er erfüllt noch die Bedingung

$$L_5 : L s(z) \in K B D^{\alpha} \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Aus L_4 folgt nämlich $L s(z) \in B$. Wir haben gesehen, dass $L s(z)$ ein endliches Dirichlet-Integral hat. Es ist also $L s(z) \in D \subseteq D^{\alpha}$ für $\alpha \geqslant 0$. Da

$$\int_{\gamma_n(\beta'_{ki})} \frac{\partial L s(z)}{\partial n} |dz| = 0$$

für jedes k, $n\,(n > k)$ und i $(1 \leqslant i \leqslant N_k)$, und da $\gamma_n(\beta'_{ki})$ eine Homologiebasis auf R' bildet ([9], 311–313), so folgt $L s(z) \in K$. Es sei a' eine ideale Randkomponente von R', A' die Menge der Punkte, welche auf a' liegen. Wir nehmen an, dass A' ein positives harmonisches Mass hat. Es sei i_k jenes i, $1 \leqslant i \leqslant N_k$, für welches $a' \in \beta'_{ki_k}$. Aus

$$m = \inf_{\zeta\in\gamma} s(\zeta) \leqslant \xi_{i_k}^{(k)} \leqslant \sup_{\zeta\in\gamma} s(\zeta) = M$$

ist zu ersehen, dass man eine Teilfolge $\{\xi_{i_{k_\nu}}^{(k_\nu)}\}_{1\leqslant\nu<\infty}$ finden kann, die konvergent ist

$$\xi_s(a') = \lim_{\nu\to\infty} \xi_{i_k}^{(k_\nu)}.$$

Aus L_4 folgt

$$\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}\,\omega(z, A', R') + m\,\omega(z, F'-A', R') \leqslant L^{(k_\nu)} s(z) \leqslant \xi_{ik_\nu}^{(k_\nu)}\,\omega(z, A', R') + M\,\omega(z, F'-A', R').$$

Für $\nu \to \infty$ erhält man

$$\xi_s(a')\,\omega(z, A', R') + m\,\omega(z, F'-A', R') \leqslant L\,s(z) \leqslant \xi_s(a')\,\omega(z, A', R') + M\,\omega(z, F'-A', R')$$

und also

$$L_6 : L\,s(\varphi'(e^{i\theta'})) = \xi_s(a')$$

fast überall auf A'. Der Operator L ist somit für die betrachteten Familien

$$H, K, B, D^\alpha \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

und ihre Durchschnitte geeignet.

10. SATZ 4. *Es sei R eine Riemannsche Fläche und a eine ideale Randkomponente von R, auf welcher eine XY-unteilbare Menge liegt ($X = H, K$; $Y = B, D^\alpha, BD^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Jede zusammenhängende Umgebung von a gehört der Klasse U_{XY} an.*

Es ist nur zu beweisen, dass XY die Bedingungen des Satzes 3 erfüllt. Im vorangehenden Absatz wurde das für die Bedingung $5°$ gezeigt. Im Laufe der Arbeit hat man auch gesehen, dass XY die Bedingungen $1°$ und $3°$ erfüllt. Es sei jetzt $u(z)$ harmonisch auf R. Da jede Jordankurve, die die Fläche R zerlegt, einer linearen Kombination von Jordankurven auf R' und $R-R'$, welche diese Gebiete zerlegen, homolog ist, so folgt aus $u(z) \in K(R')$ und $u(z) \in K(R-R')$, $u(z) \in K(R)$. Es ist auch offenbar, dass aus $u(z) \in B(R')$, $u(z) \in B(R-R')$ auch $u(z) \in B(R)$ folgt. Es bleibt nur die Familie D^α. Es sei Δ ein Gebiet, dass γ enthält und $g(z, z_0)$, $g'(z, z_0)$, $g''(z, z_0)$ seien die Greenschen Funktionen von R, R', $R-R'$. Ist $z_0 \in \Delta$, so kann man zwei positive Zahlen c', c'' finden, derart, dass

$$g(z, z_0) \leqslant c'\,g'(z, z_0) \text{ für } z \in R' - \Delta$$
$$g(z, z_0) \leqslant c''\,g''(z, z_0) \text{ für } z \in R - R' - \Delta.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\iint_R |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy &= \iint_\Delta |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy \\
&+ \iint_{R'-\Delta} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy + \iint_{R-R'-\Delta} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy \\
&\leqslant \iint_\Delta |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy + c' \iint_{R'-\Delta} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g'^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy \\
&+ c''^\alpha \iint_{R-R'-\Delta} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g''^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy \leqslant \iint_\Delta |\operatorname{grad} u(z)|^2 g^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy \\
&+ c'^\alpha \iint_{R'} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g'^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy + c''^\alpha \iint_{R-R'} |\operatorname{grad} u(z)|^2 g''^\alpha(z, z_0)\,dx\,dy < \infty.
\end{aligned}$$

Die Familie erfüllt also auch die Bedingung 2°. Es bleibt nur zu beweisen, dass XY ein Linearraum ist. Das ist offenbar für H, K, B. Für D^α folgt das, wie gewöhnlich, mittels der Schwarzschen Ungleichung. Damit ist der Satz 4 bewiesen.

FOLGESATZ 3. *Durch Entfernung einer kompakten Menge aus einer Riemannschen Fläche der Klasse* U_{XY} ($X=H, K$; $Y=B, D^\alpha, BD^\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$), *welche eine* XY*-unteilbare Menge auf einer idealen Randkomponente hat (was immer der Fall für* $X=H$; $Y=B, D^\alpha, BD^\alpha$; $0\leqslant\alpha\leqslant1$ *ist), gehört wenigstens eine Komponente der gebliebenen offenen Menge der Klasse* U_{XY} *an.*

Wenn wir $X=H$ und $Y=B, D$ in diesem Folgesatz nehmen und die in [1] gefundenen Relationen

$$O_{HB}-O_G\subseteq U_{HB}\subseteq O_{AB}-O_G$$

$$O_{HD}-O_G\subseteq U_{HD}\subseteq O_{AD}-O_G$$

betrachten, so folgt der

SATZ VON KURAMOCHI ([5] Satz 1) *Wenn man eine kompakte Menge aus einer Riemannschen Fläche* $R\in O_{HB}-O_G$ *(bzw.* $R\in O_{HD}-O_G$*) entfernt, derart, dass die gebliebene offene Menge zusammenhängend ist, so gehört sie der Klasse* O_{AB} *(bzw.* O_{AD}*) an.*

Literatur

[1]. C. CONSTANTINESCU & A. CORNEA, Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen. *Nagoya Math. J.* 13 (1958), 169–233.

[2]. P. HALMOS, *Measure Theory*. D. Van Nostrand Company (1951).

[3]. M. HEINS, On the Lindelöf principle. *Ann. of Math.* 61 (1955), 440–473.

[4]. Z. KURAMOCHI, Relations between harmonic dimensions. *Proc. Jap. Acad.* 30 (1954), 576–580.

[5]. ——, On the behaviour of analytic functions on abstract Riemann surfaces. *Osaka Math. J.* 7 (1955), 109–127.

[6]. N. LUSIN & I. I. PRIWALOFF, Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 3° S. 42 (1925), 143–191.

[7]. R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 49 (1941), 137–171.

[8]. R. NEVANLINNA, Beschränktartige Potentiale. *Math. Nachr.* 4 (1950–1951), 489–501.

[9]. ——, *Uniformisierung*. Springer Verlag (1953).

[10]. M. PARREAU, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et la classification des surfaces de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 231 (1950), 679–681.

[11]. ——, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. *Ann. Inst. Fourier* 3 (1952), 103–198.

[12]. L. SARIO, A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces.. *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), 281–295.

[13]. S. STOÏLOW, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* Deuxième édition. Gauthier-Villars (1956).

[14]. M. TSUJI, Some metrical theorems on Fuchsian groups. *Kōdai Math. Sem. Rep.* 4 and 5 (1950), 89–93.

[15]. Z. YÛJÔBÔ, A theorem on Fuchsian groups. *Math. Jap.* 1 (1949), 168–169.