

# SUR LES CONDITIONS DE STABILITÉ D'UNE DISCONTINUITÉ DANS UN MILIEU CONTINU.

[APPLICATION À LA THÉORIE DES CAVITATIONS.]

PAR

HENRI PONCIN

à BORDEAUX.

## Table des matières.

### *Chapitre I. Généralités.*

1. Hypothèses relatives au milieu continu en mouvement. — 2. Notations. — 3. Équations du problème. — 4. Note sur certaines relations fonctionnelles.

### *Chapitre II. Détermination des potentiels dont l'action peut conduire à des configurations stables.*

1. Notations. Étude de la projection du champ sur la direction  $X_2$ . — 2. Étude de la structure des potentiels  $U$  dans le cas où, ni la rotation instantanée ni la fonction  $q(t)$  ne sont constantes. — 3. Détermination exacte des potentiels  $U$  par la connaissance des fonctions qui réalisent la représentation conforme du domaine  $D_2$  sur un anneau circulaire. — 4. Détermination approchée des potentiels lorsque le domaine  $D_2$  est de faible étendue. — 5. Les potentiels qui correspondent au cas étudié dans les paragraphes précédents sont multiformes. — 6. Étude de la structure des potentiels dans le cas où la fonction  $q(t)$  est constante. Potentiels uniformes. — 7. Étude de la structure des potentiels dans le cas où la fonction  $q(t)$  est identiquement nulle et dans le cas où la rotation instantanée est constante. — 8. Résumé des résultats obtenus. Détermination des potentiels de stabilité dans les cas physiques.

### *Chapitre III. Étude d'un cas concret. Structure des potentiels de stabilité pour une surface du second ordre.*

1. Énoncé du problème. Propriétés fondamentales de la transformation  $I(L)$  pour une courbe du 2<sup>e</sup> ordre. — 2. Détermination du potentiel  $U_{21}(z)$ . — 3. Déter-

mination des potentiels  $U_{11}(z)$ ,  $U_{12}(z)$  et des fonctions  $h_i$ . — 4. Détermination rigoureuse d'un mouvement avec une discontinuité du 2<sup>e</sup> ordre. — 5. Détermination approchée du mouvement dans le cas d'un domaine fluide de faible étendue.

*Chapitre IV. Étude des systèmes associés d'ordre un et deux. Détermination des mouvements qui leur correspondent.*

1. Détermination des potentiels dans le cas du champ de pesanteur. — 2. Étude succincte des mouvements qui correspondent aux surfaces du second ordre. — 3. Détermination des potentiels dans le cas d'un champ de forces quelconque.

*Chapitre V. Étude des systèmes associés d'ordre trois.*

1. Étude du système  $G_3$ . Conséquences relatives au mouvement d'entraînement. — 2. Étude du système  $H_3$ .

*Chapitre VI. Détermination complète des mouvements d'une surface limite de cavitation.*

1. Équations du problème. — 2. 3. 4. Intégration qualitative. — 5. Conclusion.

*Chapitre VII. Étude des systèmes associés d'ordre supérieur à trois. Détermination complète du mouvement d'une discontinuité.*

1. Système d'ordre 4. — 2. Cas d'un mouvement de rotation. — 3. Cas d'une surface limite de cavitation. — 4. Systèmes d'ordre 5, 6 et 7.

*Chapitre VIII. Conclusion.*

### Introduction.

Dans une publication antérieure<sup>1</sup> nous avons étudié un groupe important de mouvements relatifs à un milieu continu. Ces mouvements se poursuivent dans des conditions telles qu'une cavitation produite à un instant donné au sein du fluide se déplace en conservant sa forme initiale. La recherche des conditions de stabilité d'une telle cavitation constitue une première étape dans l'étude des mouvements pour lesquels la déformation au cours du temps se révèle très lente. — Dans le travail en question nous avons en particulier obtenu le résultat suivant: Lorsque les lignes de flux du champ des vitesses sont invariantes relativement aux surfaces solides chacun de ces mouvements peut être considéré comme résultant de la composition d'un mouvement d'ensemble  $M_e$  et d'un mouvement avec déformation  $M_r$ . Les mouvements  $M_e$  se répartissent en deux groupes: 1<sup>o</sup> les mouvements  $R_0$  dans lesquels la rotation instantanée a une valeur constante  $\omega_0$ ; 2<sup>o</sup> les mouvements  $R_t$  dans lesquels la rotation à l'instant  $t$  a pour

<sup>1</sup> H. PONCIN, Sur les cavitations de forme permanente. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air n<sup>o</sup> 18. [G. V. 1933.]

valeur  $1/\lambda t$ . Les mouvements  $M_r$  dépendent à la fois des paramètres qui caractérisent le mouvement d'ensemble et d'une fonction liée à la forme de la surface qui limite la cavitation. — Mais l'aspect extérieur du mouvement — en l'absence de toute recherche expérimentale précise sur l'allure du champ hydrodynamique ne nous renseigne pas sur la variation possible des lignes de courant autres que celles qui correspondent à la limite de la cavitation. Pour étudier le problème dans toute sa généralité — ce qui permet de donner à la détermination des mouvements  $R_0$  et  $R_\lambda$  tout son intérêt — il était donc nécessaire d'abandonner l'hypothèse de l'invariance du champ hydrodynamique. C'est ce que nous avons fait dans la présente étude.

Nous nous proposons d'ailleurs un problème encore plus général: nous considérons un milieu continu incompressible limité extérieurement par une surface solide  $S$ . A un instant donné nous constatons l'absence de tourbillons<sup>1</sup> l'existence d'un plan directeur pour le champ hydrodynamique<sup>2</sup> et l'existence d'une surface de discontinuité  $L$  telle qu'au passage à travers cette surface la densité subit un saut brusque  $\Delta \rho$ . Nous nous proposons de déterminer les conditions dans lesquelles cette surface conserve sa forme initiale au cours du mouvement. Ces circonstances se rencontreront en particulier dans la considération de l'ensemble de deux fluides non miscibles et comme cas particulier dans l'étude des surfaces limites de cavitation (la variation  $\Delta \rho$  est dans ce dernier cas égale à la densité du fluide considéré).

Au chapitre I nous rappelons brièvement les principes de la détermination du champ hydrodynamique dans le cas où il existe une surface de discontinuité stationnaire, tels qu'ils résultent d'une étude récente.<sup>3</sup> Nous les appliquons au chapitre II à la recherche de la structure des potentiels dont l'action peut conduire à de telles configurations stables. Ces potentiels satisfont à certaines conditions que remplit en particulier le champ de la pesanteur ce qui nous permet de donner un sens physique aux questions que nous étudions. Cependant dans les paragraphes suivants nous abandonnons ce point de vue pour nous proposer la détermination de tous les potentiels de stabilité sans égard à leur

<sup>1</sup> Le cas des mouvements tourbillonnaires est envisagé dans une note qui paraîtra prochainement.

<sup>2</sup> Pour les mouvements dans l'espace qui mettent en œuvre des procédés de calcul tout différents de ceux que nous utiliserons ici. Cf. C. R. Académie des Sciences Paris, T. 196, p. 756.

<sup>3</sup> H. PONCIN, Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas de discontinuités stationnaires relatives à la densité. (Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris 1939.)

réalisation effective. Si nous étudions ce problème ce n'est pas par simple jeu analytique mais parce que cette étude nous permet de construire une méthode de calcul qui grâce à sa généralité même s'est révélée par la suite applicable à des problèmes en apparence très différents et qui, eux, ont un sens physique précis. L'existence des prolongements analytiques établis dans le mémoire déjà cité<sup>1</sup> et la transformation  $I(L)$  définie dans ce mémoire, joue un rôle prépondérant dans cette étude. Ceci montre la fécondité, en hydrodynamique, des méthodes que l'on peut déduire de cette notion.

Nous reprenons au chapitre IV l'étude des conditions de stabilité d'une surface de discontinuité lorsque le champ des forces extérieures est le champ de la pesanteur. Nous sommes conduits à distinguer plusieurs cas suivant le nombre de relations qui existent entre les fonctions du temps dont dépend le mouvement d'ensemble. Lorsque le nombre de ces relations est maximum les mouvements sont les mouvements  $R_0$  et  $R_\lambda$  précédemment étudiés<sup>2</sup> mais lorsque ce nombre est plus restreint les potentiels hydrodynamiques dépendent de deux fonctions qui sont liées par un système d'équations intégrales. La surface de discontinuité ne peut donc pas avoir dans ce cas une forme quelconque. Nous obtenons (chap. V. § 3, 4) l'équation intégrale qui la détermine. A priori il ne semble guère possible d'en tirer parti pour la détermination explicite des solutions mais une intégration qualitative de cette équation nous permet de résoudre complètement le problème que nous étudions. Nous remarquons en effet que, pour que ce problème ait un sens il ne suffit pas que les fonctions que nous avons introduites au cours des calculs satisfassent aux équations obtenues. Encore faut-il qu'elles conduisent à des surfaces acceptables c'est à dire à des surfaces dont les sections par les plans parallèles au plan directeur sont des courbes fermées sans point double. Or nous démontrons (chap. VI et VII) qu'il n'existe aucune solution de l'équation intégrale qui satisfait à ces conditions. Ceci nous prouve que les mouvements  $R_0$  et  $R_\lambda$  sont les seuls mouvements pour lesquels une surface de discontinuité relative à la densité du milieu continu (et en particulier une surface de cavitation) peut conserver sa forme initiale au cours du mouvement. Ce résultat montre tout l'intérêt qui s'attache à la détermination complète de ces mouvements dans l'étude des cavitations.

<sup>1</sup> H. PONCIN, Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas de discontinuités stationnaires relatives à la densité.

<sup>2</sup> H. PONCIN, Sur les cavitations de forme permanente. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air n° 18. [G. V. 1933.]

## CHAPITRE I.

### Généralités.

#### 1. Hypothèses relatives au milieu continu en mouvement.

Le milieu continu en mouvement est limité par une surface indéformable  $S$  animée d'un mouvement  $M_0$  et il existe à l'intérieur une surface  $L$  qui est une surface de discontinuité stationnaire relative à la densité. Cette surface partage le milieu continu en deux régions contigües  $D_1$  et  $D_2$ . Dans chacune de ces régions la densité peut être considérée comme constante et le mouvement, irrotationnel, admet un plan directeur. Lorsqu'on traverse la surface  $L$  la densité subit une variation brusque  $\mathcal{A}\rho$ .

#### 2. Notations.

1°. Les systèmes de référence utilisés seront:

a) un trièdre  $C_0(\vec{x})$  fixe.

b) un trièdre  $C_1(\vec{x})$  attaché à  $S$ .

c) une famille de trièdres  $C(M/t)$  attachés à l'instant  $t$  aux diverses particules fluides  $M$  et définis par les vecteurs unitaires  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$  respectivement dirigés suivant la tangente, la normale principale et la binormale à la ligne de flux qui passe en  $M$  à l'instant  $t$ .

2°. Éléments cinématiques: a) Mouvement  $M_e$ : point principal  $O$ , accélération principale  $\gamma(t)$ . Rotation instantanée  $\omega(t)$ .

b) mouvement  $M_r$ : champ de vecteurs vitesses  $\vec{u}(M/t)$ .

3°. Opérateurs différentiels:

$$D = S \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla(UV) = S \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla U = S \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\Delta U = S \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$$

La notation  $F'$  désigne la fonction imaginaire conjuguée de la fonction  $F$ . La notation  $\bar{\Omega}$  appliquée à une fonction harmonique  $\Omega(x_1, x_2)$  désigne la fonction associée définie par  $\text{grad } \bar{\Omega} = \vec{x}_3 \wedge \text{grad } \Omega$ .

### 3. Équations du problème.

Nous supposons que la fonction

$$(1) \quad z = H(u)$$

analytique en  $u$  pour les valeurs de module inférieur à l'unité représente la section de  $L$ , pour un déplacement de  $u$  sur l'axe réel dans les conditions précisées dans le mémoire déjà cité dans l'introduction.<sup>1</sup> Lorsque  $u$  prend des valeurs complexes de module inférieur à l'unité le point  $M$  défini par l'équation 1 et le point  $\mu$  défini par l'équation

$$(2) \quad \zeta = H'(u)$$

décrivent deux régions  $d, \delta$  contigues et séparées par un arc de  $L$ . Ces deux régions se correspondent de façon biunivoque. La transformation ainsi définie est la transformation par image à travers  $L$ , transformation que nous désignons par  $I(L)$ . Cette transformation conserve la grandeur des angles dont elle change le sens d'orientation et laisse la courbe  $L$  invariante. La relation géométrique entre les points homologues  $M$  et  $\mu$  est définie par

$$(3) \quad L \left[ \frac{\vec{M} + \vec{\mu}}{2} + i \frac{\vec{M} - \vec{\mu}}{2} \wedge \vec{x}_3 \right] = 0.$$

A l'intérieur du domaine  $D_1$  le champ hydrodynamique est défini par l'équation

$$(4) \quad \vec{u}(\vec{x}/t) = \omega_3(t) \text{grad } \bar{\Omega}_{11}(x) + q(t) \text{grad } \bar{\Omega}_{12}(x) + \vec{x} \wedge \omega_3(t) + 2 \vec{x}_3 \wedge \vec{\omega}(t)$$

et à l'intérieur de  $D_2$  par

$$(5) \quad \vec{u}(\vec{x}/t) = \omega_3(t) \text{grad } \Omega_{21}(x) + \vec{x} \wedge \omega_3(t) + 2 \vec{x}_3 \wedge \vec{\omega}(t).$$

Les fonctions  $\Omega_{mn}$  sont des fonctions harmoniques respectivement définies dans les domaines  $D_1$  et  $D_2$ . Sur la section de  $L$  considérée elles sont liées au champ de forces extérieur par la condition

$$(6) \quad u(M/t) - \sum h_i(x) g_i(t) = 0.$$

---

<sup>1</sup> H. PONCIN, Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas de discontinuités stationnaires relatives à la densité.

L'expression des fonctions  $g$  et  $h$  est donnée dans le tableau suivant:

Valeur de $i$	Fonction $g_i(t)$	Fonction associée $h_i(x)$
1	$g(t)$	1
2	$\omega^2(t)$	$\frac{1}{2 \mathcal{A} \varrho} [\varrho_1 \nabla \Omega_{11} - \varrho_2 \nabla \Omega_{21} + 2 \varrho_1 \vec{x} \vec{D} \Omega_{11} - 2 \varrho_2 \vec{x} \vec{D} \Omega_{21}]$
3	$2 \omega(t) q(t)$	$\frac{\varrho_1}{2 \mathcal{A} \varrho} [\nabla (\Omega_{11} \Omega_{12}) + \vec{x} \vec{D} \Omega_{12}]$
4	$q^2(t)$	$\frac{\varrho_1}{2 \mathcal{A} \varrho} \nabla \Omega_{12}$
5	$\frac{d \omega}{d t}$	$\frac{1}{\mathcal{A} \varrho} [\varrho_1 \bar{\Omega}_{11} - \varrho_2 \bar{\Omega}_{21}]$
6	$\frac{d q}{d t}$	$\frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \bar{\Omega}_{12}$
7	$\gamma_1(t)$	$x_1 [M(L)]$
8	$\gamma_2(t)$	$x_2 [M(L)]$
9	$\gamma_3(t)$	$x_3 [M(L)]$ .

Certaines propriétés de la transformation  $I(L)$  nous ont permis de définir le prolongement analytique des fonctions  $\Omega_{mn}$  en dehors des domaines où elles sont liées au champ hydrodynamique. Cette étude nous a conduit à leur associer 3 fonctions analytiques en  $z$  définies par:

$$(7) \quad 2 \Omega_{11} = - \left[ \frac{z \zeta}{2} + U_{11} \right] - \left[ \frac{z' \zeta'}{2} + U'_{11} \right]$$

$$(8) \quad 2 \Omega_{12} = - [U_{12} + U'_{12}]$$

$$(9) \quad 2 \Omega_{21} = - \left[ \frac{z \zeta}{2} + U_{21} \right] - \left[ \frac{z' \zeta'}{2} + U'_{21} \right].$$

Nous avons démontré que dans tout leur domaine d'existence ces fonctions satisfont aux équations suivantes:

$$\varrho_1 U_{11}(z) - \varrho_2 U_{21}(z) + i \mathcal{A} \varrho h_5 [G_{-1}(z + \zeta(z))] = 0$$

$$\varrho_1 U_{12}(z) - i \mathcal{A} \varrho h_6 [G_{-1}(z + \zeta(z))] = 0$$

$$\varrho_2 \left[ \frac{d U_{21}}{d z} + \frac{z}{2} \frac{d \zeta}{d z} - \frac{\zeta}{2} \right]^2 - \varrho_1 \left[ \frac{d U_{11}}{d z} + \frac{z}{2} \frac{d \zeta}{d z} - \frac{\zeta}{2} \right]^2 \\ + 2 \mathcal{A} \varrho \frac{d \zeta}{d z} h_2 [G_{-1}(z + \zeta(z))] + \mathcal{A} \varrho \cdot z \zeta \frac{d \zeta}{d z} = 0$$

$$\left[ \frac{d U_{12}}{d z} \right]^2 = \frac{2 \mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \frac{d \zeta}{d z} h_4 [G_{-1}(z + \zeta(z))]$$

$$\frac{d U_{12}}{d z} \left[ \frac{\zeta}{2} \frac{d z}{d \zeta} - \frac{z}{2} - \frac{d U_{11}}{d z} \frac{d z}{d \zeta} \right] + \frac{2 \mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} h_3 [G_{-1}(z + \zeta(z))] = 0$$

où  $G_{-1}$  désigne la fonction inverse de la fonction  $H(\cdot) + H'(\cdot)$ .

#### 4. Note sur certaines relations fonctionnelles.

Au cours de ce travail nous aurons plusieurs fois l'occasion d'utiliser certaines propriétés de l'ensemble des fonctions

$$F(\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{i=1}^n f_i(\vec{x}) g_i(\vec{y})$$

les groupes de variables  $\vec{x}(x_1 x_2 \dots x_k)$  et  $\vec{y}(y_1 y_2 \dots y_j)$  étant indépendants. Nous supposons que les fonctions  $f$  et  $g$  admettent une suite de dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $n$  et que la condition

$$F(\vec{x}/\vec{y}) = 0$$

est identiquement vérifiée à l'intérieur de certains domaines des espaces  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , dont aucun ne se réduit à un point. Or en prenant les dérivées successives par rapport à  $\vec{x}$  nous obtenons, pour calculer les fonctions  $g$  à l'intérieur du domaine  $(y)$  un système d'équations linéaires et homogènes qui donneront pour ces

fonctions des valeurs nulles à moins que les déterminants  $\left\| \frac{\partial^p f_i}{\partial x_k^p} \right\|$  ne soient

identiquement nuls, on reconnaît la condition nécessaire qui exprime que les fonctions  $f(x)$  ne sont pas linéairement distinctes. Pour qu'elles se réduisent à  $p$  fonctions linéairement distinctes il faut et il suffit que les déterminants formés avec  $(p+1)$  de ces fonctions soient nuls, l'un au moins des déterminants formés avec  $p$  fonctions étant différent de zéro. En amenant les fonctions ainsi définies aux  $p$  premiers rangs des fonctions  $f$  on peut donc écrire un système  $F^{(p)}$  relatif à ces fonctions dans l'espace  $\vec{x}$ :

$$(10) \quad F^{(p)} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, (n-p) \end{cases} f_{(p+k)}(\vec{x}) - \sum_i a_i^{(p+k)} f_i(\vec{x}) = 0$$

auquel est associé dans l'espace  $\vec{y}$  le système:

$$(11) \quad G^{(p)} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, (n-p) \end{cases} g_i(\vec{y}) + \sum_k a_i^{(p+k)} g_{(p+k)}(\vec{y}) = 0.$$

Les systèmes  $F^{(p)}$  et  $G^{(p)}$  seront dits systèmes associés d'ordre  $p$ . En donnant à  $p$  toutes les valeurs entières de 1 à  $n$  nous obtiendrons ainsi un groupe de  $n$  systèmes associés intéressant respectivement les espaces  $(x)$  et  $(y)$ .

## CHAPITRE II.

### Détermination des potentiels dont l'action peut conduire à des configurations stables.

#### 1. Notations. Étude de la projection du champ sur la direction $\vec{X}_3$ .

Considérons sur la surface de discontinuité  $L$  une section droite déterminée  $\lambda_0$ . Prenons le plan de cette section comme plan de référence  $x_3 = 0$  et étudions le mouvement de cette section  $\lambda_0$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . A l'instant initial elle occupe la position  $\lambda_0(t_0)$ , puis le paramètre  $t$  variant, elle occupe diverses positions dont l'ensemble constitue une surface tubulaire  $\sigma_0$ . Les sections de  $\sigma_0$  par des plans parallèles au plan  $x_3$  sont des courbes égales, que l'on déduit de  $\lambda_0(t_0)$  par un déplacement décomposable en une translation  $\vec{O}O_1$  suivie d'une rotation  $\int_{t_0}^t \omega(t) dt \cdot \vec{x}_3$ . Considérons maintenant le plan  $x_3 = h$  et la section de  $L$  par ce plan soit  $\lambda_h$ . Dans son mouvement  $\lambda_h$  décrit une surface tubulaire  $\sigma_h$  qui se déduit de  $\sigma_0$  par la translation  $h\vec{x}_3$ . Si  $h$  varie de façon continue entre les limites 0,  $H$ , nous obtiendrons par la construction précédente une famille de surfaces à un paramètre, qui remplit un certain volume  $V$  de l'espace  $X$ .

Dans le cas particulier où le point  $O$  se déplace normalement à  $\vec{x}_3$  [cas d'un entraînement par rotation, par exemple] les courbes  $\lambda_0(t)$  forment une famille de courbes à un paramètre, toutes situées dans un même plan. Si elles admettent une enveloppe  $E_0$  la surface  $\sigma_0$  est constituée par la portion de plan limitée par

certaines arcs de  $E_0$  et certains arcs appartenant aux courbes  $\lambda_0(t_0)$  et  $\lambda_0(t_1)$ . Le domaine  $V$  est constitué par l'ensemble des points intérieurs au cylindre droit de base  $\sigma_0$  et de hauteur  $H$ .

Chaque point  $M$  intérieur au volume  $V$  est atteint par un point (au moins) de la surface de discontinuité dans son déplacement entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  et les équations :

$$(1) \quad X_1(M) = a_1(t) + \frac{H(u)}{2} e^{-i \int \omega(t) dt} + \frac{H'(u)}{2} e^{i \int \omega(t) dt} = \pi_1(u/t)$$

$$(2) \quad X_2(M) = a_2(t) - \frac{i H(u)}{2} e^{i \int \omega(t) dt} + i \frac{H'(u)}{2} e^{-i \int \omega(t) dt} = \pi_2(u/t)$$

permettent de calculer en fonction des coordonnées du point  $M$  l'instant du passage de  $L$  en ce point et la valeur du paramètre  $u$  qui définit sur  $L$  la position du point coïncidant. La résolution des équations (1), (2) conduit aux formules :

$$(3) \quad u = \pi_{-1}(X_1, X_2)$$

$$(4) \quad t = \pi_{-2}(X_1, X_2)$$

de telle sorte que l'on peut écrire :

$$(5) \quad X_1 \equiv \pi_1[\pi_{-1}(X_1, X_2), \pi_{-2}(X_1, X_2)]$$

$$(6) \quad X_2 \equiv \pi_2[\pi_{-1}(X_1, X_2), \pi_{-2}(X_1, X_2)].$$

Dans le plan de cote  $h$  ( $h < H$ ) l'empreinte de l'ensemble  $V$  constitue un ensemble analogue au précédent mais les valeurs des paramètres qui correspondent aux courbes frontières sont respectivement 0 et  $a_3(h)$ . Dans le plan de cote  $h$  ( $h > H$ ) les courbes frontières correspondront aux valeurs  $a_3(h - H)$  et  $a_3(H)$ .

L'enveloppe  $E$  pouvant être considérée comme lieu de points caractéristiques, il existe en général une région  $R$  en partie limitée par des arcs de cette enveloppe et dont tous les points sont atteints à deux instants distincts (au moins) par la surface  $L$ . Pour les points de cette région  $R$  les équations (1) admettent deux solutions distinctes  $u_i, t_i$  et  $u_k, t_k$ . Les surfaces  $L(t_i)$  et  $L(t_k)$  se coupent suivant un segment de droite

$$M_i M_k = [H + a_3(t_k) - a_3(t_i)] \vec{x}_3.$$

Le potentiel  $U$  étant une fonction du point  $M$  les forces qui en dérivent sont les mêmes aux instants  $t_i$  et  $t_k$  en tous les points du segment  $M_i M_k$ . En projection sur l'axe  $X_3$  nous avons donc:

$$(7) \quad \gamma(t_i) = \gamma(t_k)$$

et nous aurons une relation analogue pour tous les points de  $L(t)$  intérieurs à la région  $R$ . Nous obtiendrons donc:

$$(8) \quad \gamma(t_i) = \gamma(t)$$

pour toutes les valeurs de  $t$  comprises dans un certain intervalle d'amplitude finie. Si nous faisons maintenant varier  $t_i$  entre les limites  $t_0$  et  $t_1$  nous déduisons de l'étude qui précède la conclusion d'après laquelle  $\gamma(t)$  conserve une valeur constante dans tout cet intervalle. D'où le résultat suivant:

*En tout point de l'ensemble  $V$  précédemment défini le champ qui dérive du potentiel  $U$  est uniforme en projection sur l'axe  $X_3$ .*

L'expression de ce potentiel peut donc être mis sous la forme:

$$(9) \quad U(X_1, X_2, X_3) = \gamma X_3 + U_1(X_1, X_2)$$

et d'après les résultats du chap. I:

$$(10) \quad U_1(X_1, X_2) = \sum_i h_i [\pi_{-1}(X_1, X_2)] \cdot g_i [\pi_{-2}(X_1, X_2)].$$

Pour préciser la structure de ces potentiels nous serons conduit à distinguer les cas suivants

- 1°. Aucune des fonctions  $g_5(t)$ ,  $g_6(t)$ ,  $h_6(u)$  n'est identiquement nulle.
- 2°. La fonction  $g_6(t)$  est identiquement nulle. [ $q(t)$  se réduit alors à une constante.]
- 3°. La fonction  $g_4(t)$  est identiquement nulle. [Les fonctions  $\Omega_{mn}$  se réduisent alors aux seules fonctions  $\Omega_{11}$  et  $\Omega_{21}$ .]

**2. Structure des potentiels  $U$  dans le cas où ni la rotation instantanée  $\omega(t)$  ni la fonction  $q(t)$  ne sont constantes.**

Au point  $u$  dans le plan ( $u$ ) correspond dans le domaine fluide le point  $z$  tel que l'on ait:

$$(11) \quad u = G_{-1} [z + \zeta(z)].$$

Nous calculerons les valeurs des fonctions  $U_{11}$  et  $U_{12}$  au moyen des relations établis au chapitre I. et nous obtiendrons ainsi:

$$(12) \quad U_{12}(z) = i \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} h_6 \cdot [G_{-1}[z + \zeta(z)]].$$

Dans les hypothèses faites la fonction  $h_6(u)$  est une fonction de  $u$  analytique en tout point de l'axe réel de module inférieur à l'unité. Soit  $S_1$  un point singulier de la fonction  $U_{12}$ . En traçant les cercles  $C_1$  et  $C'_1$  de centres  $(1)$  et  $(-1)$  qui passent par  $S_1$  nous mettons en évidence une région du plan  $u$  qui possède la propriété suivante: Si  $M$  est un point de cette région il existe un ensemble de points intérieurs au segment  $(-1, +1)$  tels que le cercle qui a pour centre un point de cet ensemble et qui passe par  $M$  ne contienne pas le point  $S_1$ . En effectuant cette construction pour tous les points singuliers  $S_i$  de la fonction  $U_{12}$  nous définissons une certaine région contigue à l'axe réel telle qu'à chacun de ses points  $M$  correspond un segment intérieur au segment  $(-1, +1)$  constitué par les centres des cercles passant par  $M$  et ne contenant aucun des points singuliers  $S$ . En particulier nous pouvons considérer la région limitée par les parallèles à l'axe imaginaire  $u_1 = +1$  et  $u_1 = -1$ , et par l'hyperbole équilatère de sommet  $S$  et d'axe  $u_2 = 0$ . [Cette hyperbole se réduit à deux droites si le point singulier est réel]. Pour tout point  $M$  intérieur à cette région le point  $m$  projection de  $M$  sur l'axe réel fait partie de l'ensemble et  $U_{12}$  est holomorphe à l'intérieur du cercle de centre  $m$  de rayon  $mM$ . On peut donc définir le prolongement analytique de  $U_{12}$  à partir du point  $m$  sur la normale à l'axe réel passant en ce point au moyen du développement de Taylor:

$$(13) \quad U_{12} = \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \sum_m \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{d^{2m+1} h_6}{d u_1^{2m+1}} u_2^{2m+1}.$$

Lorsque le point  $u$  est l'image d'un point de la surface  $S$ , on pourra écrire, d'après la condition aux limites relative à cette surface:

$$(14) \quad \sum_m \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{d^{2m+1} h_6}{d u_1^{2m+1}} u_2^{2m+1} - \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} = 0.$$

D'après l'étude que nous venons de faire nous sommes certains de la convergence du développement qui figure dans le premier membre de cette relation. Nous désignerons par  $F(u_1, u_2)$  la fonction qu'il représente.

Les points singuliers de la fonction  $H(u) = K(u) + iL(u)$  ont été déterminés par la donnée de la courbe  $L$ . A partir de ces points singuliers nous pourrons définir par des considérations analogues à celles que nous avons faites relativement à la fonction  $U_{12}$  une certaine région dans laquelle nous sommes certains de la convergence des développements:

$$(15) \quad x_1 = K(u_1) + \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{d^{2m+1} L}{d u_1^{2m+1}} + \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m}}{2m!} \frac{d^{2m} K}{d u_1^{2m}}$$

$$(16) \quad x_2 = L(u_1) + \sum (-1)^{m+1} \frac{u_2^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1} L}{d u_1^{2m-1}} + \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m}}{2m!} \frac{d^{2m} L}{d u_1^{2m}}.$$

Pour simplifier l'écriture posons:

$$(17) \quad G_1 = K(u_1) + \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m}}{2m!} \frac{d^{2m} K}{d u_1^{2m}}$$

$$(18) \quad G_2 = \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1} K}{d u_1^{2m-1}}$$

$$(19) \quad G_3 = L(u_1) + \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m}}{2m!} \frac{d^{2m} L}{d u_1^{2m}}$$

$$(20) \quad G_4 = \sum (-1)^m \frac{u_2^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1} L}{d u_1^{2m-1}}.$$

La fonction  $U_{11}$  sera définie par: [ch. I, § 3]

$$(21) \quad U_{11}(z) = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} U_{21}(z) + i \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} h_5(u)$$

et sur la frontière  $S$  du domaine  $D$  on aura.

$$(22) \quad 2 \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} [G_2(G_2 - G_3) + G_4(G_4 + G_1)] + \sum \frac{(-1)^m}{(2m-1)!} u_2^{2m-1} \frac{d^{2m-1}}{d u_1^{2m-1}} h_5 \\ - i \frac{\varrho_2}{\mathcal{A} \varrho} \left[ u_2 \frac{d U_{21}}{d u_1} + \dots \right] = 0.$$

Comme précédemment la convergence des développements qui figurent au premier membre de cette relation est assurée, dans la région  $R$ . Soit  $G(u_1, u_2)$  la fonction des 2 variables réelles  $(u_1, u_2)$  définie par le premier membre de (22). Les deux équations:

$$(23) \quad F(u_1, u_2) = 0$$

$$(24) \quad G(u_1, u_2) = 0$$

représentent dans le plan  $u$  le même arc de courbe image dans ce plan de la frontière  $S$  du domaine  $D$ . On en conclut que le Jacobien de ces fonctions est identiquement nul. Cette relation:

$$(25) \quad \frac{D(F, G)}{D(u_1, u_2)} = 0$$

développée conduit à une condition relative aux fonctions  $h_5(u)$  et  $h_6(u)$ : une seule de ces fonctions peut être prise arbitrairement, l'autre s'en déduit par la considération de l'équation (25) ou simplement en écrivant la compatibilité des équations (23), (24) considérées comme équations en  $u_2$ . Les deux fonctions  $h_5$  et  $h_6$  étant ainsi choisies les autres fonctions  $h$  s'en déduisent par la considération des équations générales (I). Cette seconde partie du calcul sera dans tous les cas susceptible d'une résolution effective. Le seul point délicat est la recherche de la liaison qui existe entre les fonctions  $h_5$  et  $h_6$ . L'existence des solutions de l'équation aux différences qui résout le problème envisagé résulte des considérations qui précèdent mais la détermination effective des fonctions qui correspondent à des données mécaniques déterminées peut être dans certains cas plus délicate. Citons un cas où elle peut être effectuée de façon rigoureuse: celui où l'on connaît les fonctions qui réalisent la représentation conforme du domaine  $D_2$  sur un anneau circulaire et un cas où elle peut être effectuée de façon approchée: celui où le domaine  $D_2$  est constitué par une bande de faibles dimensions.

### 3. Détermination exacte des potentiels $U$ par la connaissance des fonctions qui réalisent la représentation conforme du domaine $D_2$ sur un anneau circulaire.

Soit

$$(26) \quad Z = X_1(x_1, x_2) + i X_2(x_1, x_2)$$

la transformation qui réalise la représentation conforme du domaine  $D_2$  sur le domaine du plan  $Z$  compris dans l'aire annulaire limitée par les cercles de rayon un et  $a$ . Considérons deux fonctions réelles  $P(u)$  et  $Q(u)$  de la variable réelle  $u$  continues dans l'intervalle  $(-1, +1)$  telles que:

$$(27) \quad |Z|^2 = P^2(u)$$

aux points qui se correspondent sur  $L$  au moyen des relations:

$$\begin{cases} Z = x_1 + i x_2 \\ (O X_1, O M) = \pi u \end{cases}$$

et

$$(28) \quad |Z|^2 = Q^2(u)$$

aux points qui se correspondent sur  $S$ . Notons que la variation des fonctions  $P(u)$  et  $Q(u)$  dans l'intervalle où elles sont définies résulte de l'allure géométrique des profils ( $L$ ) et ( $S$ ) et de la position du point principal  $O$  dans leur plan. Nous pouvons le supposer intérieur à  $L$  pour fixer les idées. La fonction

$$(29) \quad z' = \log z = x'_1(x_1, x_2) + i x'_2(x_1, x_2)$$

où l'on prend une détermination quelconque pour le logarithme que l'on s'astreint à suivre par continuité à partir de  $M_0$  devient par l'intermédiaire de la transformation conforme ( $z \rightarrow Z$ ) une fonction analytique de  $Z$  admettant la constante cyclique  $2i\pi$  relative à un circuit entourant le cercle de rayon  $a$ . On a donc

$$(30) \quad \log a = \int_{-1}^{+1} \log \left| \frac{P(u)}{Q(u)} \right| du.$$

Les fonctions  $\Omega_{11}(x_1, x_2)$  et  $\Omega_{12}(x_1, x_2)$  deviennent par la transformation (26) des fonctions de  $X_1, X_2$  qui satisfont aux conditions:

$$(31) \quad \Omega_{11}(\cos \pi u, \sin \pi u) = -\frac{1}{2} Q^2(u)$$

$$(32) \quad \Omega_{11}(a \cos \pi u, a \sin \pi u) = -\frac{1}{2} P^2(u)$$

$$(33) \quad \Omega_{12}(\cos \pi u, \sin \pi u) = 1$$

$$(34) \quad \Omega_{12}(a \cos \pi u, a \sin \pi u) = 0.$$

En introduisant les fonctions elliptiques dont les  $1/2$  périodes sont  $\omega_1 = 1$  et  $\omega_2 = \frac{i}{\pi} \log a$  on peut donc écrire:

$$(35) \quad \bar{\Omega}_{11}(a \cos \pi u, a \sin \pi u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} P^2(\sigma) \zeta(u - \sigma) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} Q^2(\sigma) \zeta_3(u - \sigma) d\sigma.$$

L'intégrale relative à  $\zeta$  étant considérée comme égale à sa valeur principale au sens de Cauchy. D'autre part on a :

$$(36) \quad \bar{\Omega}_{12} = -\frac{\pi}{\log a} u.$$

D'où il résulte que la constante cyclique  $K_2$  a pour valeur  $K_2 = \frac{2\pi}{\log a}$ . Entre les dérivées  $\frac{\partial}{\partial n}$  et  $\frac{\partial}{\partial N}$  respectivement prises suivant les normales aux courbes qui se correspondent dans les plans  $z$  et  $Z$  existe la relation :

$$(37) \quad |dz| \cdot \frac{\partial}{\partial n} = |dZ| \frac{\partial}{\partial N}.$$

Plaçons nous en un point de  $L$ . La dérivée tangentielle de la fonction  $x'(X_1 X_2)$  a pour valeur  $\frac{1}{\pi} \frac{dP}{P du}$  et la dérivée normale :

$$(38) \quad \frac{dx'}{dN} = h(u) = \frac{2\eta_1}{\pi^2} P(\sigma) + \frac{1}{\pi a} \int_{-1}^{+1} \zeta(u - \sigma) \frac{dP(\sigma)}{P(\sigma)} + \frac{1}{\pi^2 a} \int_{-1}^{+1} \log Q(\sigma) \cdot \varphi(u - \sigma + \tau) d\sigma.$$

On a donc

$$(39) \quad |dz|^2 = |z|^2 |dz'|^2$$

$$|dz|^2 = P^2(u) \left[ \frac{1}{a^2 \pi^2} \frac{dP^2}{P^2 du^2} + h^2(u) \right] \cdot |dZ|^2$$

et par suite :

$$(40) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial N} \left[ \frac{dP^2}{P^2 du^2} + P^2(u) h^2(u) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci nous permet de calculer les valeurs que prennent les fonctions  $h_2(u)$ ,  $h_3(u)$ ,  $h_4(u)$ ,  $h_5(u)$  et  $h_6(u)$  aux différents points de  $L$ . Les deux dernières de ces fonctions se calculent directement au moyen des relations :

$$(41) \quad h_6(u) = \frac{-\pi \varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \cdot \frac{u}{\log a}$$

$$(42) \quad h_5(u) = \frac{\varrho_1}{2\pi \mathcal{A} \varrho} \int_{-1}^{+1} P^2(\sigma) \zeta(u - \sigma) d\sigma - \frac{\varrho_1}{2\pi \mathcal{A} \varrho} \int_{-1}^{+1} Q^2(\sigma) \zeta_3(u - \sigma) d\sigma - \frac{\varrho_2}{\mathcal{A} \varrho} \bar{\Omega}_{21}(u).$$

Quant aux 3 premières leur connaissance exige le calcul préalable des expressions  $\nabla \Omega_{11}$ ,  $\nabla \Omega_{12}$ ,  $\nabla(\Omega_{11} \Omega_{12})$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{11}$  et  $\vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{12}$ . Or nous pouvons écrire:

$$(43) \quad \nabla \Omega_{11} = \left(\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n}\right)^2 = \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 \left[\left(\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial N}\right)^2\right]$$

$$(44) \quad \nabla \Omega_{12} = \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 \left[\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial N}\right]^2.$$

$$(45) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{11} = e^{2x'} \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 \left[\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial N} \frac{\partial x'}{\partial N} - e^{2x'} \left(\frac{\partial x'}{\partial S}\right)^2\right]$$

$$(46) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{21} = e^{2x'} \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 \left[\frac{\partial \Omega_{21}}{\partial N} \frac{\partial x'}{\partial N} - e^{2x'} \left(\frac{\partial x'}{\partial S}\right)^2\right]$$

$$(47) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{12} = e^{2x'} \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial N} \frac{\partial x'}{\partial N}$$

$$(48) \quad \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial N} = H_{11}(u) = -\frac{\eta_1}{\pi^2} P^2(\sigma) - \frac{1}{a\pi^2} \int_{-1}^{+1} P(\sigma) \zeta(u - \sigma) dP(\sigma) - \frac{1}{2a\pi^2} \int_{-1}^{+1} Q^2(\sigma) \wp(u - \sigma + v) d\sigma.$$

D'où l'on déduit l'expression des fonctions  $h$  sous la forme:

$$(49) \quad h_2(u) = \frac{a^2 \pi^2}{2 \Delta \varrho [dP^2 + a^2 \pi^2 P^2 h^2 du^2]} \left[ \varrho_1 H_{11}^2(u) - \frac{\varrho_1}{a^2 \pi^2} P^2 \frac{dP^2}{du^2} + \frac{\varrho_2}{a^2 \pi^2} Q^2 \frac{dQ^2}{du^2} - \varrho_2 H_{21}^2(u) + 2 \varrho_1 P^2 h H_{11}(u) - 2 \varrho_2 P^2 h H_{21}(u) \right]$$

$$(50) \quad h_3(u) = - \frac{a^2 \pi^2 \varrho_1}{2 \mathcal{A} \varrho} \frac{d u^2}{d P^2 + a^2 \pi^2 P^2 h^2 d u^2} \frac{1}{a \log a} [H_{11}(u) + P^2 h(u)]$$

$$(51) \quad h_4(u) = \frac{a^2 \pi^2 \varrho_1}{2 \mathcal{A} \varrho} \frac{d u^2}{d P^2 + a^2 \pi^2 P^2 h^2 d u^2} \frac{1}{a^2 (\log a)^2}.$$

Le potentiel  $U$  est ainsi complètement déterminé par la donnée des fonctions  $P(u)$  et  $Q(u)$  et par les conditions mécaniques du mouvement d'entraînement.

#### 4. Détermination approchée des potentiels lorsque le domaine $D_2$ est de faible étendue.

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il est possible de négliger à partir d'un certain ordre les puissances de la portion de vecteur  $\vec{S}_2(L)$  intérieur à  $D_2$ . S'il en est ainsi nous pourrions définir  $S$  à partir de  $L$  par la longueur  $dn$  qu'il faut porter à partir de  $L$  sur le vecteur  $\vec{S}_2$  pour obtenir le point correspondant de  $S$ . L'hypothèse faite nous permet de réduire à leurs premiers termes les développements dont la convergence a été établie au § 2. On aura dans ces conditions:

$$(52) \quad F(u_1, u_2) = \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \frac{d h_6}{d u} - 1.$$

$h_5(u)$  sera définie en fonction de  $h_6(u)$  et des éléments géométriques de la courbe  $L$  (arc  $s$ , rayon de courbure  $R$ ) par l'équation:

$$(53) \quad h_5(u) = \int_u \left[ i \varrho_2 d U_{21} - \frac{2 \varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \frac{d s^2}{d h_6} + 2 \varrho_1 \frac{M^2}{R} d s \right].$$

De la connaissance des fonctions  $h_5$  et  $h_6$  on déduira comme il a été dit au § 2 l'expression des fonctions  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$ .

#### 5. Les potentiels qui correspondent à ce premier cas sont multiformes.

Pour les valeurs entières de  $n$  on a:

$$(54) \quad h_5(u + 2n) = h_5(u) + \frac{n \varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} K_1$$

$$(55) \quad h_6(u + 2n) = h_6(u) + n \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} K_2$$

mais à deux valeurs de  $u$  qui diffèrent d'un nombre pair correspondent les mêmes valeurs de  $X_1, X_2$  c'est à dire le même point du domaine  $V$ . Comme nous avons vu que la constante  $K_2$  était nécessairement différente de zéro, il en résulte que les potentiels ainsi déterminés ne peuvent pas être uniformes. Les fonctions  $q$  qui conduisent à un potentiel uniforme ne sont donc pas linéairement distinctes. La conclusion subsiste si l'un des mineurs du premier ordre du déterminant principal est nul à moins que l'on ait:

$$(56) \quad \frac{d q}{d t} = m \frac{d \omega}{d t}$$

car dans ce cas la fonction  $h_5 + m h_6$  sera périodique si les constantes cycliques satisfont à la condition

$$(57) \quad K_1 + m K_2 = 0$$

l'existence d'un potentiel uniforme entraîne donc une relation de la forme

$$(58) \quad q(t) = m \omega(t) + q$$

où  $m$  et  $q$  sont deux constantes. Une substitution linéaire convenablement choisie conduit alors à un problème dont toutes les équations sont analogues à celles que nous avons écrites mais pour lequel la fonction  $g_6(t)$  est identiquement nulle de sorte que la fonction  $h_6(u)$  n'a plus d'existence effective. La relation (12) ne peut plus être écrite et les conséquences qui en ont été déduites ne subsistent pas

## 6. Étude de la structure des potentiels qui correspondent au cas où la fonction $q(t)$ est constante [Potentiels uniformes].

Si la rotation  $\omega(t)$  n'est pas constante (le cas particulier où  $\omega$  est constant sera envisagé au § 7) la fonction  $U_{11}(z)$  peut être déterminée en fonction de  $h_5(u)$  et de  $U_{21}(z)$  au moyen des équations générales (I). Nous pouvons écrire:

$$(59) \quad U_{11}(z) = \frac{q_2}{q_1} U_{21}(z) + i \frac{A q}{q_1} h_5(u)$$

et la condition relative à  $S$  s'écrit en conservant les notations du § 2:

$$(60) \quad G(u_1, u_2) = 0.$$

Si d'autre part la constante  $q$  est différente de zéro ( $q = 0$  sera envisagé au § 7) nous déterminerons  $U_{12}$  au moyen de l'équation différentielle:

$$(61) \quad \left[ \frac{d U_{12}}{d z} \right]^2 = - \frac{d \zeta}{d z} \frac{2 \mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} h_4$$

et nous écrivons comme au § 2 la condition relative à cette fonction sur  $S$  ce qui nous conduira à :

$$(62) \quad H(u_1, u_2) = 0$$

qui doit être compatible avec (60). Les fonctions  $h_4$  et  $h_5$  dépendent donc l'une de l'autre. On écrira par exemple

$$(63) \quad \frac{D(G, H)}{D(u_1, u_2)} = 0.$$

L'une d'entre elles,  $h_4$  par exemple, étant prise comme fonction de base, on en déduira  $h_5$  par l'équation (63) et  $h_2, h_3$  seront définies, d'après les équations générales  $I$  par un simple calcul de substitution.

Dans les cas envisagés aux § 3 et 4 le procédé de calcul exposé sera applicable, au moins dans son principe. Si par exemple le domaine  $D_2$  satisfait aux conditions du § 4 nous déterminerons  $U_{12}$  par l'intégration de l'équation différentielle le long d'un segment rectiligne du plan  $u$  normal en  $M$  à l'axe réel. Posons

$$(64) \quad \begin{cases} h_4(u) + h'_4(u) = 2 R(h_4) \\ h_4(u) - h'_4(u) = 2 i J(h_4) \end{cases}$$

$$(65) \quad A d u_2^2 = R(h_4) [(d G_1^2 + d G_3^2) - (d G_2^2 + d G_4^2)] + 2 J(h_4) [d G_1 d G_2 + d G_3 d G_4]$$

$$(66) \quad B^2 d u_2^4 = [R^2(h_4) + J^2(h_4)] [(d G_1^2 + d G_2^2)^2 + (d G_3^2 + d G_4^2)^2] + 2 (d G_1^2 - d G_2^2) (d G_3^2 + d G_4^2).$$

Dans le cas général la fonction  $H(u_1, u_2)$  a pour expression :

$$(67) \quad H(u_1, u_2) = \left[ \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \right]^{\frac{1}{2}} - \int_{(u)} [A(u_1, u_2) + B(u_1, u_2)]^{\frac{1}{2}} d u_2$$

et si nous pouvons, dans les conditions du § 4 réduire les développements à leur premier terme la fonction  $G(u_1, u_2)$  devient :

$$(68) \quad G(u_1, u_2) = \varrho_1 u_2 \frac{d s^2}{d u_1^2} - \varrho_1 \frac{d s}{R(u) d u} - \varrho_2 A_{21} + \mathcal{A} \varrho \frac{d h_5}{d u}$$

on a donc:

$$(69) \quad h_5(u) = \left[ \frac{\varrho}{\mathcal{A}\varrho} \right]^{\frac{3}{2}} \int \frac{ds(u)}{[h_4 + (h_4^2 + h_4'^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} - \left[ \frac{\varrho}{\mathcal{A}\varrho} \right]^{\frac{1}{2}} \int \frac{ds(u)}{R(u)} - \frac{\varrho_2 A_{21}}{\mathcal{A}\varrho} u.$$

**7. Structure des potentiels qui correspondent aux cas où la fonction  $q(t)$  est identiquement nulle et où la rotation  $\omega(t)$  est constante.**

Si la fonction  $q(t)$  est identiquement nulle, les fonctions  $g(t)$  d'indices 3, 4 et 6 sont identiquement nulles. Du système différentiel fondamental ne subsistent plus que les relations:

$$(70) \quad \varrho_1 U_{11}(z) - \varrho_2 U_{21}(z) + i \mathcal{A}\varrho h_5(u) = 0$$

$$(71) \quad \varrho_1 \left[ dU_{11} + \frac{z}{2} d\zeta - \frac{\zeta}{2} dz \right]^2 - \varrho_2 \left[ dU_{21} + \frac{z}{2} d\zeta - \frac{\zeta}{2} dz \right]^2 + 2 \mathcal{A}\varrho dz d\zeta \left[ h_2(u) + \frac{z\zeta}{2} \right] = 0.$$

La première de ces relations, jointe à la condition aux limites relative à la fonction  $U_{11}$  conduit comme précédemment à la condition:

$$G(u_1, u_2) = 0$$

et la seconde condition nous permet de calculer  $h_2(u)$  en fonction de  $h_5(u)$  et de  $H(u)$ . Enfin si la rotation instantanée  $\omega(t)$  est la même à chaque instant, la relation (71) subsiste seule et la fonction  $h_2(u)$  peut être prise arbitrairement.

**8. Résumé des résultats obtenus. Détermination des potentiels dans les cas physiques.**

Nous avons ainsi obtenu, indépendamment de toute considération sur leur possibilité physique l'expression générale des potentiels  $U$  qui peuvent conduire à des configurations stables pour l'ensemble de deux fluides non miscibles. Cette expression générale mise sous la forme:

$$(72) \quad U(X_1, X_2, X_3) = \gamma X_3 + \sum_i g_i[\pi_{-1}(X_1, X_2)] h_i[\pi_{-2}(X_1, X_2)]$$

dépend de la donnée de sept fonctions dont deux caractérisent les surfaces frontières et trois le déplacement sans déformation  $M_c$ . De la donnée des

fonctions  $h$  et  $H$  qui caractérisent le domaine fluide nous déduirons toutes les fonctions  $h_i$  par les procédés que nous venons d'indiquer. Les fonctions  $\pi_{-1}$  et  $\pi_{-2}$  seront déterminées par la résolution en  $u$  et  $t$  des équations

$$(73) \quad X_1 = a_1(t) + K(u) \cos \alpha(t) - L(u) \sin \alpha(t)$$

$$(74) \quad X_2 = a_2(t) + K(u) \sin \alpha(t) + L(u) \cos \alpha(t)$$

$$(75) \quad K(u) = \frac{1}{2} [H(u) + H'(u)] \quad L(u) = \frac{i}{2} [H'(u) - H(u)].$$

Les fonctions  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$  caractérisent le mouvement  $M_c$ . (On pourrait d'ailleurs prendre  $\alpha$  comme paramètre au lieu de  $t$ ). Au moyen de ces données les fonctions  $g$  ont pour expression:

$$(76) \quad g_1(t) = g(t) \qquad (77) \quad g_2(t) = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$(78) \quad g_3(t) = 2g(t) \frac{d\alpha}{dt} \qquad (79) \quad g_4(t) = g^2(t)$$

$$(80) \quad g_5(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \qquad (81) \quad g_6(t) = \frac{dg}{dt}$$

$$(82) \quad g_7(t) = \frac{d^2 a_1}{dt^2} \qquad (83) \quad g_8(t) = \frac{d^2 a_2}{dt^2}.$$

Elles introduisent deux arbitraires  $g(t)$  et  $q(t)$  qui ne sont liées qu'à la structure des potentiels considérés.

Les raisonnements qui précèdent supposent essentiellement que le point  $M$  considéré appartient au domaine  $V$  qui a été défini au § 1 et les potentiels ne sont déterminés que dans ce domaine mais les circonstances physiques dans lesquelles se produisent les mouvements que l'on étudie fourniront en général — ne serait-ce que par des considérations de continuité — la façon naturelle de les prolonger en dehors de ce volume.

Cherchons par exemple parmi le groupe obtenu, les potentiels dont la valeur au point  $M(X_1, X_2, X_3)$  ne dépend que de la distance de ce point  $M$  à un plan fixe à une droite fixe ou à un plan fixe: Si les variables d'espace ne s'introduisent dans l'expression du potentiel que par l'intermédiaire de la distance  $\delta$  du point  $M$  à un plan fixe il est naturel de prendre ce plan comme plan de référence et de choisir l'axe  $OX_1$  dans ce plan. Soit dans ces conditions  $\alpha$  l'angle que fait la normale au plan de référence avec la direction de la rotation in-

stantanée  $\vec{\omega}$ . D'après les résultats obtenus au § 1 le potentiel est uniforme en projection sur  $\omega$ . On en déduit:

$$(84) \quad U = \frac{\gamma}{\cos \alpha} \cdot \delta.$$

D'où les 2 cas suivants:

1° les forces qui dérivent du potentiel  $U$  sont d'intensité constante.

2° l'accélération  $\gamma$  est nulle et la rotation  $\vec{\omega}$  est dans le plan de référence  $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ . Si les variables d'espace ne s'introduisent que par l'intermédiaire de la distance à une droite fixe nous choisirons pour  $O X_1$  une direction à la fois normale à la rotation  $\vec{\omega}$  et à cette droite. En utilisant toujours la propriété du potentiel en projection sur  $\vec{\omega}$  nous obtenons:

$$(85) \quad \gamma \delta - \sin \alpha (X_2 \cos \alpha + X_3 \sin \alpha) \frac{dU}{d\delta} = 0$$

et cette relation entraîne:

$$(86) \quad \gamma = \sin \alpha = 0.$$

Les forces qui dérivent du potentiel  $U$  sont donc normales à la direction de la rotation  $\vec{\omega}$  et le mouvement du point principal est uniforme en projection sur cette direction.

Enfin si les variables d'espace ne s'introduisent que par l'intermédiaire de la distance du point  $M$  à un point fixe  $O$  nous choisirons ce point comme origine du trièdre de référence  $X$ . En raisonnant comme dans les cas précédents nous obtenons:

$$(87) \quad \gamma \delta - X_3 \frac{dU}{d\delta} = 0 \text{ avec } \delta^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

et le problème n'admet aucune solution effective.

La première condition à laquelle doit satisfaire le potentiel conduit dans les cas envisagés soit à des champs de force uniformes tel le champ de la pesanteur au voisinage de la surface terrestre, soit à des forces normales à la direction  $\vec{\omega}$  avec la condition  $\gamma = 0$ . Il faut enfin tenir compte de la forme du potentiel  $U_1(X_1, X_2)$ . Dans un champ de direction constante le potentiel  $U_1$  ne dépend que de la variable  $X_2$  si bien que l'on a une identité de la forme:

$$\begin{aligned}
(88) \quad & \sum_i h_i(u) dx_1(u) \cos \alpha(t) \frac{dg_i}{dt} - \sum_i h_i(u) \sin \alpha(t) dx_2(u) \frac{dg_i}{dt} \\
& + \sum_i g_i(t) \frac{da_1}{dt} \frac{dh_i}{du} + \sum_i x_1(u) \frac{dh_i}{du} \omega(t) \sin \alpha(t) \\
& + \sum_i x_2(u) \frac{dh_i}{du} \omega(t) \cos \alpha(t) = 0.
\end{aligned}$$

et comme nous l'avons vu au chapitre I une telle identité entraîne l'existence de deux groupes de relations linéaires entre les fonctions de  $u$  qui figurent au premier membre de la relation (88) et les fonctions de  $t$  qui figurent dans cette même relation.

Nous obtiendrons un résultat analogue dans le cas où les forces qui dérivent du potentiel  $U$  rencontrent l'axe  $X_3$ . En exprimant que le potentiel  $U_1$  n'est fonction que de la somme  $X_1^2 + X_2^2$  nous obtenons:

$$\begin{aligned}
(89) \quad & \sum_i [a_2 \cos \alpha(t) - a_1 \sin \alpha] \left[ \omega(t) g_i(t) x_1(u) \frac{dh_i}{du} - \frac{dg_i}{dt} h_i(u) \frac{dx_2}{du} \right] \\
& - \sum_i [a_2 \sin \alpha + a_1 \cos \alpha] \left[ \omega(t) g_i(t) x_2(u) \frac{dh_i}{du} + \frac{dg_i}{dt} h_i(u) \frac{dx_1}{du} \right] \\
& - r \frac{dr}{du} \sum_i h_i(u) \frac{dg_i}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

Les fonctions de  $t$  qui figurent dans les expressions (88) et (89) sont définis par la connaissance des fonctions qui caractérisent le mouvement du point  $M$  en projection sur le plan  $X_1 X_2$  et la fonction  $g(t)$ . Cette circonstance exclut a priori certains groupes de relations linéaires entre ces fonctions. La possibilité du déplacement conduit ainsi à un certain nombre de combinaisons linéaires entre les fonctions de  $u$  mais l'étude que nous venons de faire nous montre qu'il n'existe en réalité que deux fonctions distinctes. Nous obtiendrons donc un certain nombre de conditions qui expriment la compatibilité des relations que nous avons obtenues dans les paragraphes précédents et celles que nous venons d'obtenir ici par la considération de la réalité physique. La discussion de ce point sera poussée complètement dans les chapitres suivants.

CHAPITRE III.

**Étude d'un cas concret. Structure des potentiels de stabilité pour une surface du second ordre.**

**1. Énoncé du problème. Propriétés fondamentales de la transformation  $I(L)$  pour une courbe du second ordre.**

Quelques exemples concrets où nous allons conduire complètement le développement des calculs indiqués au chapitre II vont nous permettre de préciser certains points du raisonnement. Nous nous proposons de déterminer les potentiels de stabilité relatifs à une surface  $L$  du 2<sup>o</sup> ordre. La section de cette surface par le plan  $x_3 = 0$  sera caractérisée par la distance focale  $FF' = 2c$  et par l'excentricité  $k = \frac{1}{\text{ch } \alpha}$ . Le point principal sera pris au centre de  $L$  et le paramètre sera l'anomalie excentrique que nous représenterons par  $\pi u$ . Dans ces conditions la transformation  $I(L)$  sera définie par les formules:

$$(1) \quad z = c \cos (\pi u + i \alpha)$$

$$(2) \quad \zeta = c \cos (\pi u - i \alpha).$$

Lorsque  $u$  décrit le segment  $(-1, +1)$  du plan complexe  $u$  le point  $M$  d'affixe  $z$  défini par la relation 1 décrit la courbe  $L$ . En chacun des points de cette courbe les fonctions  $z$  et  $\zeta$  prennent des valeurs imaginaires conjuguées. Lorsque  $u$  prend la valeur imaginaire  $u_1 + i u_2$  les points  $M$  et  $\mu$  images à travers  $L$ , ont leurs coordonnées cartésiennes définies par les formules suivantes:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = c \cos \pi u_1 \text{ch} (\alpha - \pi u_2) \\ x_2 = c \sin \pi u_1 \text{sh} (\alpha - \pi u_2) \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = c \cos \pi u_1 \text{ch} (\alpha + \pi u_2) \\ \xi_2 = c \sin \pi u_1 \text{sh} (\alpha + \pi u_2). \end{cases}$$

Il nous sera commode dans la suite de repérer les points du plan au moyen de leurs coordonnées elliptiques relatives aux points  $F$  et  $F'$ . On trouve facilement l'expression des coordonnées  $(e_1, e_2)$  du point  $M$  et des coordonnées  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  du point  $\mu$  en fonction de  $u_1, u_2$  sous la forme:

$$(5) \quad \begin{cases} e_1 = c^2 \operatorname{sh} \pi u_2 \operatorname{sh} (\pi u_2 - 2\alpha) \\ e_2 = \frac{c^2}{2} [\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u_1] \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = c^2 \operatorname{sh} \pi u_2 \operatorname{sh} (\pi u_2 + 2\alpha) \\ \varepsilon_2 = \frac{c^2}{2} [\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u_1]. \end{cases}$$

Les points  $M$  et  $\mu$  sont donc situés sur une même branche d'hyperbole dont les foyers  $F$  et  $F'$  sont confondus avec les foyers de  $L$ . Si nous désignons par  $M_1$ ,  $M_2$  les points de rencontre de cette branche d'hyperbole et de la courbe  $L$  on vérifie aisément que la droite  $M\mu$  est parallèle à l'un des vecteurs  $\vec{S}_2(M_1)$  ou  $\vec{S}_2(M_2)$ . La fonction  $\zeta(z)$  est une fonction algébrique en  $z$  définie par l'équation:

$$(7) \quad [k^2 \zeta + (k^2 - 2)z]^2 - 4[1 - k^2][z^2 - c^2] = 0.$$

Elle admet donc deux déterminations. Les points de ramification sont les foyers  $F$  et  $F'$  de  $L$ . La surface de Riemann  $\Sigma$  associée à une courbe du second ordre se compose donc de 2 feuillets  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  reliés l'un à l'autre par une ligne de croisement tracés le long du segment qui joint les foyers. La correspondance entre les projections sur le plan simple des points associés sur cette surface de Riemann sera définie par une construction géométrique très simple où nous utiliserons la propriété de parallélisme des droites  $M\mu$  et  $\vec{S}_2(M_1)$ . Une fois construit le faisceau des coniques homofocales définies par les points  $F$  et  $F'$  il nous suffira d'établir par la propriété signalée la correspondance entre les points d'une des hyperboles du faisceau pour obtenir la correspondance entre les diverses ellipses.

Supposons tracé un chemin  $l$  le long de l'hyperbole qui passe par le point  $M_1$  de la courbe  $L$  sur le feuillet  $\mathcal{F}_1$  de  $\Sigma$ . Le point associé décrira à partir de  $M_1$  un chemin  $\lambda$  tracé sur le feuillet  $\mathcal{F}_1$  et se projetant à l'intérieur de  $L$ .

Lorsque le chemin  $l$  traverse l'ellipse du faisceau  $(F, F')$  d'excentricité  $\frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha}$  le point  $\mu$  passe du feuillet  $\mathcal{F}_1$  sur le feuillet  $\mathcal{F}_2$ . Lorsque  $M$  se déplace sur  $L$  dans un sens déterminé, le point associé, restant sur  $\mathcal{F}_2$  traverse (en projection sur le plan simple) le contour de  $L$  puis s'éloigne à l'infini.

## 2. Détermination du potentiel $U_{21}(z)$ .

Au point  $M$  du feuillet  $\mathcal{F}_1$  de  $\Sigma$  qui se projette sur le plan simple en un point  $m$  intérieur à  $L$  est associé un point  $\mu$  de  $\mathcal{F}_1$  qui se projette à l'extérieur de  $L$ . A ce point  $\mu$  est associé un point  $\mu'$ , au point  $\mu'$  un point  $\mu''$  et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi à partir du point  $M$  une suite de points  $\mu, \mu', \mu'', \dots$  et d'après les propriétés du potentiel  $U_{21}$  établies dans les chapitres précédents nous pouvons écrire:

$$(8) \quad U_{21}(M) = -U'_{21}(\mu) = U_{21}(\mu') = -U_{21}(\mu'') = \dots$$

Ces formules nous permettent de prolonger analytiquement la fonction  $U_{21}(z)$  sur la surface  $\Sigma$  toute entière à partir des valeurs que prend cette fonction aux points intérieurs à  $L$ . On trouve ainsi son expression sous la forme

$$(9) \quad U_{21}(z) = \frac{z^2}{2 \operatorname{ch} 2\alpha} - \frac{z\zeta}{2} + \frac{c^2 \operatorname{sh}^2 2\alpha}{4 \operatorname{ch} 2\alpha}.$$

Comme le paramètre  $u$  définit de façon simple les différents points du plan repérés au moyen de leurs coordonnées elliptiques nous écrirons l'expression du potentiel  $U_{21}$  en fonction de  $u$ . Nous obtenons ainsi:

$$(10) \quad U_{21}(u) = -\frac{ic^2}{4} \operatorname{th} 2\alpha \cdot \sin 2\pi u.$$

Lorsque le point  $M$  décrit un chemin quelconque  $l$  situé à l'intérieur du domaine  $D_2$  le point associé  $\mu$  est parfaitement déterminé par continuité à partir du point de rencontre de  $l$  et de  $L$ . La fonction  $\zeta$  est donc parfaitement définie et la valeur de  $U_{21}$  l'est également.

## 3. Détermination des potentiels $U_{11}$ et $U_{12}$ et des fonctions $h_i$ .

a) *Potentiels multiformes*: Les fonctions de base dans le cas des potentiels multiformes sont, comme nous l'avons vu, les fonctions  $h_5(u)$  et  $h_6(u)$ . Soient  $K_1$  et  $K_2$  les constantes cycliques relatives aux potentiels  $U_{11}$  et  $U_{12}$  pour une circulation directe sur  $L$ . Les fonctions  $[h_5(u) - K_1 u]$  et  $[h_6(u) - K_2 u]$  sont deux fonctions du paramètre  $u$ , définies et continues pour les valeurs réelles de  $u$  de

module inférieur à l'unité. Elles admettent la période 2. Nous définirons ces fonctions par l'ensemble  $[a_p, b_p]$  des constantes de Fourier qui leurs sont attachées dans l'intervalle  $(-1, +1)$ , ensemble défini par:

$$(11) \quad \begin{cases} a_5(p) = \int_{-1}^{+1} [h_5(u) - K_1 u] \sin p \pi u \cdot du \\ b_5(p) = \int_{-1}^{+1} [h_5(u) - K_1 u] \cos p \pi u \cdot du \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} a_6(p) = \int_{-1}^{+1} [h_6(u) - K_2 u] \sin p \pi u \cdot du \\ b_6(p) = \int_{-1}^{+1} [h_6(u) - K_2 u] \cos p \pi u \cdot du. \end{cases}$$

Avec ces données le potentiel  $U_{11}$  est défini pour toute valeur de  $u$  par:

$$(13) \quad \begin{aligned} U_{11} = i \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} & \left[ a_5(0) + K_1 u + a_5(1) \sin \pi u + b_5(1) \cos \pi u \right. \\ & + \left( a_5(2) - \frac{\varrho_2}{\mathcal{A} \varrho} \frac{c^2}{4} \operatorname{th} 2 \alpha \right) \sin 2 \pi u + b_5(2) \cos 2 \pi u \\ & \left. + \sum_{p=3}^{\infty} (a_5(p) \sin p \pi u + b_5(p) \cos p \pi u) \right]. \end{aligned}$$

Le potentiel  $U_{12}$  est de même défini par:

$$(14) \quad U_{12} = i \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \left[ a_6(0) + K_2 u + \sum_1^{\infty} (a_6(p) \sin p \pi u + b_6(p) \cos p \pi u) \right].$$

A l'intérieur de  $D_2$  le champ hydrodynamique se déduit immédiatement des variations des potentiels  $U_{11}$  et  $U_{12}$ . Quant à  $U$ , il dépend, ainsi que nous l'avons vu au chapitre II, des fonctions  $h_2(u)$ ,  $h_3(u)$ ,  $h_4(u)$ . Dans le cas qui nous occupe ces fonctions sont liées aux données  $h_5(u)$ ,  $h_6(u)$  par l'intermédiaire des relations:

$$\begin{aligned}
 (15) \quad h_2(u) &= \frac{c^2 \varrho_2}{8 \varrho_1} \operatorname{th}^2 2\alpha + \frac{c^2}{4} \operatorname{sh}^2 2\alpha - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2\alpha \\
 &\quad - \left[ \frac{c^2}{2} + \frac{\varrho_2 c^2 \operatorname{sh}^2 2\alpha}{\mathcal{A} \varrho \cdot \operatorname{ch} 2\alpha} \right] \cos 2\pi u - \frac{c^2 \varrho_2}{8 \varrho_1} \operatorname{th}^2 2\alpha \cos 4\pi u \\
 &\quad + \frac{\operatorname{th} 2\alpha}{\pi} \left[ \operatorname{ch} 2\alpha - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cos 2\pi u \right] \frac{d h_5}{d u} + \frac{\mathcal{A} \varrho}{\pi \varrho_1} c^2 \left( \frac{d h_5}{d u} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad h_3(u) &= \frac{d h_6}{\pi (\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u) d u} \left[ \operatorname{sh} 2\alpha + 2 \frac{\mathcal{A} \varrho}{\pi c^2 \varrho_1} \frac{d h_5}{d u} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{th} 2\alpha \cos 2\pi u \right]
 \end{aligned}$$

$$(17) \quad h_4(u) = \frac{\mathcal{A} \varrho}{\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u} \cdot \left( \frac{d h_6}{d u} \right)^2.$$

b) *Potentiels uniformes*: Les fonctions de base sont les fonctions  $h_4(u)$  et  $h_5(u)$ .  $U_{11}$  et  $U_{12}$  ont pour expressions:

$$(18) \quad U_{11} = i \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} h_5(u) - \frac{i c^2 \varrho_2}{4 \varrho_1} \operatorname{th} 2\alpha \sin 2\pi u$$

$$(19) \quad U_{12} = i c \left[ \frac{\pi \mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{(n)} [(\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u) h_4(u)]^{\frac{1}{2}} d u$$

et les fonctions  $h_2(u)$  et  $h_3(u)$  attachées à  $U$  s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad h_2(u) &= \frac{c^2 \varrho_2}{8 \varrho_1} \operatorname{th}^2 2\alpha + \frac{c^2}{4} \operatorname{sh}^2 2\alpha - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2\alpha \\
 &\quad - \left[ \frac{c^2}{2} + c^2 \frac{\varrho_2 \operatorname{sh}^2 2\alpha}{\mathcal{A} \varrho \operatorname{ch} 2\alpha} \right] \cos 2\pi u - \frac{\varrho_2 c^2 \operatorname{th}^2 2\alpha}{8 \varrho_1} \cos 4\pi u \\
 &\quad + \frac{\operatorname{th} 2\alpha}{\pi} \left[ \operatorname{ch} 2\alpha - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cos 2\pi u \right] \frac{d h_5}{d u} + \frac{1}{\pi c^2} \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \left( \frac{d h_5}{d u} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad h_3(u) &= \frac{c}{2} \left[ \frac{\pi \varrho}{\mathcal{A} \varrho} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{h_4(u)}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\pi c^2} \frac{\mathcal{A} \varrho}{\varrho_1} \frac{d h_5}{d u} \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sh} 2\alpha - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{th} 2\alpha \cos 2\pi u \right].
 \end{aligned}$$

Si le flux relatif est indépendant du temps la fonction  $h_3(u)$  est identiquement nulle. Enfin si la rotation instantanée est uniforme il ne subsiste plus qu'une fonction  $h$ : la fonction  $h_2(u)$  et le potentiel  $U_{11}$  a pour expression:

$$(22) \quad U_{11} = -i \frac{\pi}{2} c^2 \operatorname{sh} 2\alpha \cdot u + \frac{\pi}{2} c^2 [q_1]^{-\frac{1}{2}} \int_u N_{11}(u) du.$$

$$N_{11} = (\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u)^{\frac{1}{2}} \left[ 4 \frac{\mathcal{A} \varrho}{c^2} h_2(u) + (2q_1 - 2q_2 + q_3 \operatorname{th}^2 2\alpha) \cos 2\pi u \right. \\ \left. + 2 \mathcal{A} \varrho \operatorname{ch} 2\alpha - q_2 \frac{\operatorname{sh}^2 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Les fonctions de base sont liées comme on sait par:  $\frac{D(F, G)}{D(u_1, u_2)} = 0$  et dans le cas particulier qui nous occupe on trouve, tous calculs faits:

$$(23) \quad F(u_1, u_2) = \frac{q_1}{\mathcal{A} \varrho} - K_2 u_2 - \sum a_6(p) \operatorname{sh} p \pi u_2 \cos p \pi u_1 \\ + \sum b_6(p) \operatorname{sh} p \pi u_2 \sin p \pi u_1$$

$$(24) \quad G(u_1, u_2) = \frac{q_1}{\mathcal{A} \varrho} \left[ \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2\alpha + \frac{c^2}{2} \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{sh} 2\pi u_2 - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{ch} 2\pi u_2 \right] - 2 K_1 u_2 \\ - 2 a_5(1) \cos \pi u_1 \operatorname{sh} \pi u_2 + 2 b_5(1) \sin \pi u_1 \operatorname{sh} \pi u_2 + \left[ \frac{c^2}{2} \frac{q_1}{\mathcal{A} \varrho} \operatorname{ch} 2\pi u_2 \right. \\ \left. + \frac{c^2}{2} \frac{q_2}{\mathcal{A} \varrho} \operatorname{th} 2\alpha \operatorname{sh} 2\pi u_2 - \frac{c^2}{2} \frac{q_1}{\mathcal{A} \varrho} - 2 a_5(2) \operatorname{sh} 2\pi u_2 \right] \cos 2\pi u_1 \\ + 2 b_5(2) \operatorname{sh} 2\pi u_2 \sin 2\pi u_1 - 2 \sum a_5(p) \operatorname{sh} p \pi u_2 \cos p \pi u_1 \\ + 2 \sum b_5(p) \operatorname{sh} p \pi u_2 \sin p \pi u_1.$$

Nous allons utiliser ces expressions pour résoudre complètement dans le cas des surfaces du second ordre les problèmes étudiés au § 3 et 4 du chapitre précédent.

#### 4. Détermination rigoureuse d'un mouvement pour lequel existe une surface de discontinuité du second ordre.

Si la fonction  $h_6(u)$  est une fonction linéaire de  $u$ :

$$(25) \quad h_6(u) = K_2 u$$

la fonction  $F(u_1, u_2)$  s'écrit :

$$(26) \quad F(u_1, u_2) = \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} - K_2 u_2.$$

Sur  $S$ , frontière extérieure du domaine  $D_2$  on aura :

$$(27) \quad u_2 = \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \cdot \frac{1}{K_2}.$$

L'image de  $S$  dans le plan  $u$  est un segment parallèle à l'axe réel.  $S$  est donc une ellipse du faisceau  $(F, F')$ . D'autre part  $G(u_1, u_2)$  est définie par :

$$(28) \quad G(u_1, u_2) = e^2 \varrho_1 [\operatorname{ch} 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{sh} 2\pi u_2 - \operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{ch} 2\pi u_2] - 2 K_1 \mathcal{A} \varrho \cdot u_2.$$

Si le potentiel  $U_{11}$  est uniforme ( $K_1 = 0$ ) la condition  $G(u_1, u_2) = 0$  deviendra :

$$(29) \quad \pi u_2 - 2\alpha = 0.$$

Les fonctions  $h$  sont des fonctions périodiques en  $u$  et les mouvements étudiés dépendent des paramètres qui définissent l'excentricité de  $L$  (paramètre  $\alpha$ ), le rapport des densités  $\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$  et la section  $S$  (paramètre  $K_2$ ). Tout calcul fait il vient :

$$(30) \quad h_2(u) = A_2 + A'_2 \cos 2\pi u + A''_2 \cos 4\pi u$$

$$(31) \quad h_3(u) = A_3 \frac{\operatorname{sh} 2\alpha + \cos 2\pi u}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u}$$

$$(32) \quad h_4(u) = A_4 \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u}$$

$$(33) \quad h_5(u) = A_5 \sin 2\pi u.$$

Les constantes  $A$  sont définies en fonction des paramètres choisis par les expressions :

$$(34) \quad A_2 = \frac{c^2}{2 \varrho \mathcal{A} \varrho \operatorname{sh}^2 4\alpha} [\varrho_1^2 \operatorname{ch}^2 2\alpha (\operatorname{ch}^2 2\alpha - 4 \operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{sh}^2 2\alpha + 2 \operatorname{sh}^4 4\alpha) \\ + \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{sh}^2 2\alpha (4 \operatorname{ch}^3 2\alpha - 2 \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{ch}^2 2\alpha + \operatorname{sh}^3 2\alpha) \\ - 2 \varrho_2^2 \operatorname{sh}^4 2\alpha]$$

$$A'_2 = \frac{c^2}{2 \operatorname{ch} 2\alpha} \left[ \operatorname{ch}^2 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha - \frac{\varrho_2}{\mathcal{A} \varrho} \right]$$

$$A_2'' = \frac{c^2}{2 \mathcal{A} \rho \operatorname{sh}^2 4 \alpha} [\varrho_1 \operatorname{ch}^4 2 \alpha - \varrho_2 \operatorname{sh}^4 2 \alpha]$$

$$A_3 = \frac{\varrho_1}{2 \mathcal{A} \rho} \frac{\operatorname{ch} 2 \alpha}{\alpha \operatorname{sh} 2 \alpha}$$

$$A_4 = \frac{\varrho_1^2}{4 c^2 \mathcal{A} \rho \cdot a^2}$$

$$A_5 = \frac{c^2}{4} \left[ 1 + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \operatorname{coth} 4 \alpha \right].$$

Le potentiel  $U$  est défini par la connaissance des fonctions  $h$  et dépend en outre de la nature du mouvement d'entraînement. Supposons par exemple, pour fixer les idées, que ce mouvement d'entraînement soit un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de  $L$  et de rotation  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . La région  $V$  est alors la zone comprise entre les plans de cotes 0 et  $H$  et les cylindres coaxiaux d'axe  $O X_3$  et de rayons  $c \operatorname{sh} \alpha$  et  $c \operatorname{ch} \alpha$ . Dans cette région les paramètres  $u$  et  $t$  sont définies par:

$$(35) \quad \cos 2 \pi u = \frac{2}{c^2} (X_1^2 + X_2^2) - \operatorname{ch} 2 \alpha$$

$$(36) \quad \operatorname{tg}^2 \varphi \left[ \frac{X_2^2}{a^2} + \frac{X_1^2}{b^2} - 1 \right] - \frac{2 c^2}{a^2 b^2} X_1 X_2 \operatorname{tg} \varphi + \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - 1 = 0.$$

En portant la valeur de  $u$  tirée de l'équation (35) dans les expressions des fonctions  $h$  et la valeur de  $t$  tirée de (36) dans les expressions de  $g$  nous obtiendrons le potentiel  $U$  aux différents points  $(X_1, X_2)$  du domaine  $V$ .

##### 5. Détermination approchée du mouvement dans le cas où l'un des fluides remplit un domaine annulaire de faible étendue.

Considérons un point  $M$  de la surface de discontinuité et construisons en ce point le vecteur  $\vec{S}_2$ . Ce vecteur rencontre  $S$  en un point  $N$ . La longueur  $MN = \delta n$  est une fonction connue des coordonnées elliptiques  $(e_1, e_2)$  qui fixent la position du point  $N$  dans le plan, ces paramètres étant liées par une équation  $F(e_1, e_2) = 0$  qui constitue l'équation de  $S$  en coordonnées elliptiques. Avec les notations définies ci-dessus nous aurons:

$$(37) \quad \delta n^2 = \frac{e_1^2 e_2}{c^4 \operatorname{sh}^2 2\alpha} \frac{1}{\delta n}$$

et au degré d'approximation précisé au chapitre II nous pourrons écrire:

$$(38) \quad h_6(u_1) = \frac{\pi \varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \int_{(u)} [e_2(u)]^{\frac{1}{2}} \frac{d u}{\delta n}$$

$$(39) \quad h_5(u) = -\varrho_1 c^2 \operatorname{sh} 2\alpha \cdot u + \varrho_1 \frac{c^2 \operatorname{sh} 4\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} [2 \operatorname{ch} 2\alpha]^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{\operatorname{ch} 2\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} \pi u}{\operatorname{sh} \alpha} \right] \\ + \varrho_2 \frac{c^2}{4} \operatorname{th} 2\alpha \sin 2\pi u - 2\pi \int [e_2(u)]^{\frac{1}{2}} \delta n d u$$

$$(40) \quad h_4(u) = \frac{\varrho_1^2}{2 \mathcal{A} \varrho} \frac{1}{\delta n(u)}$$

Dans le cas d'un potentiel uniforme la fonction  $G(u_1, u_2)$  s'écrit:

$$(41) \quad G(u_1, u_2) = \varrho_1 \operatorname{ch} 2\alpha \cdot e_1 e_2 + c^2 \varrho_2 \operatorname{sh}^2 2\alpha \cdot e_2 - \frac{\mathcal{A} \varrho}{2} c^2 \operatorname{sh} 4\alpha \left[ \frac{d h_5}{\pi d u} - \frac{c^2}{2} \operatorname{sh} 2\alpha \right]$$

et la fonction  $H(u_1, u_2)$ :

$$(42) \quad H(u_1, u_2) = \pi c^2 \mathcal{A} \varrho h_4(u_1) [\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\pi u_1] u_2^2 - \varrho_1.$$

On obtiendra l'équation qui lie les fonctions  $h_4(u)$  et  $h_5(u)$  en éliminant la variable

$u_2$  entre les équations:  $H(u_1, u_2) = 0$  en tenant compte des équations (5) et (6).  
 $G(u_1, u_2) = 0$

#### CHAPITRE IV.

### Étude des systèmes associés d'ordre un et deux. Détermination des mouvements qui leur correspondent.

#### 1. Détermination des potentiels dans le cas du champ de la pesanteur.

Nous avons vu que si les forces extérieures se réduisent aux forces de pesanteur la stabilité de  $L$  ne peut être obtenue que par les mouvements dans lesquels le vecteur rotation  $\vec{\omega}(t)$  a constamment une direction verticale. La condition de stabilité s'écrit alors sous la forme:

$$(1) \quad \sum_i g_i(t) h_i(u) = 0.$$

D'autre part au chapitre II (§ 6) nous avons montré qu'une telle relation entraîne l'existence de deux systèmes associés relatifs, le premier aux fonctions  $g$  et le second aux fonctions  $h$ .

Considérons d'abord les systèmes d'ordre un. Si l'on prend la fonction  $\omega(t)$  comme fonction de base le système  $G_1$  se présente sous la forme très simple:

$$(2) \quad \begin{aligned} g(t) &= a_1 \omega^2(t) \\ 2q(t)\omega(t) &= a_2 \omega^2(t) \\ q^2(t) &= a_3 \omega^2(t) \\ \frac{d\omega}{dt} &= a_4 \omega^2(t) \\ \frac{dq}{dt} &= a_5 \omega^2(t) \\ \gamma_1(t) &= a_6 \omega^2(t) \\ \gamma_2(t) &= a_7 \omega^2(t). \end{aligned}$$

On en conclut que les fonctions  $\omega(t)$  et  $q(t)$  prennent des valeurs proportionnelles.<sup>1</sup> D'après l'expression de la fonction  $\Omega$  qui définit le champ hydrodynamique nous pouvons supposer la fonction  $\Omega_{12}$  identiquement nulle. Le mouvement d'entraînement est alors défini par:

$$(3) \quad d\omega = -\lambda \omega^2 dt$$

$$(4) \quad \vec{\gamma}(t) = [a_6 \vec{x}_1 + a_7 \vec{x}_2] \omega^2(t).$$

Si  $\lambda = 0$  on trouve une rotation uniforme [mouvements  $R_0$ ]. Si  $\lambda \neq 0$  la rotation instantanée à l'instant  $t$  a pour valeur

$$(5) \quad \omega(t) = \frac{1}{\lambda t} \text{ [mouvements } R_\lambda].$$

Le système  $H_1$  se réduit à l'unique équation en  $u$ :

$$(6) \quad h_2(u) - \lambda h_5(u) + a_6 x_1(u) + a_7 x_2(u) + a_1 = 0.$$

Désignons par  $\mu$  le rapport  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  des densités, par  $a$  le nombre complexe  $a_6 + i a_7$ .

---

<sup>1</sup> Il résulte de la forme des fonctions  $g(t)$  [chapitre I] que les systèmes d'ordre deux conduisent au même résultat et que par suite, il n'y aura pas lieu de les étudier.

En tenant compte de l'expression des fonctions  $h(u)$  en fonction de  $U_{11}$  et de  $U_{21}$ , nous pouvons écrire la relation précédente sous la forme:

$$(7) \quad \left[ \frac{dU_{11}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2} \right]^2 \frac{dz}{d\zeta} - [az + \bar{a}\zeta + a_1 - z\zeta] - 2i\lambda U_{11} \\ + \mu \left[ az + \bar{a}\zeta + 2c_0 - z\zeta - \frac{dz}{d\zeta} \left( \frac{dU_{21}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2} \right)^2 \right] \\ + 2i\lambda\mu U_{21} = 0.$$

Posons:

$$(8) \quad V_1(z) = \frac{dU_{11}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2}$$

$$(9) \quad V_2(z) = \frac{dU_{21}}{dz} + \frac{z}{2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{2}.$$

En éliminant les fonctions  $U_{11}(z)$  et  $U_{21}(z)$  entre les relations (7), (8), (9) nous obtenons:

$$(10) \quad \frac{dV_1}{d\zeta} + \frac{1}{2} V_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{dz}{d\zeta} \right) + \frac{(\zeta - a)dz + (z - \bar{a})d\zeta}{2V_1 dz} \\ + i\lambda \left[ \frac{d(z\zeta)}{2V_1 dz} - 1 \right] - \frac{\mu}{V_1} \left[ V_2 \frac{dV_2}{d\zeta} + V_2^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{dz}{d\zeta} \right) + \frac{(\zeta - a)dz + (z - \bar{a})d\zeta}{dz} \right] \\ - \frac{i\lambda\mu}{V_1} \left[ \frac{d(z\zeta)}{2dz} + V_2(z) \right] = 0.$$

Le mouvement sera entièrement déterminé par la donnée de  $L$  et du vecteur vitesse en un point de cette surface. Les questions qu'il faudra résoudre pour arriver à la solution seront les suivantes:

1°. Détermination de la fonction  $\Omega_{21}(x_1, x_2)$ : Cette fonction est une fonction harmonique régulière en tout point du domaine  $D_1$  intérieur à  $L$  et définie par la succession des valeurs  $-\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$  qu'elle prend sur  $L$ .

2°. Détermination de la fonction  $\zeta(z)$  et recherche du domaine de régularité de cette fonction. — Cette partie du problème revient, comme nous l'avons vu, à l'étude de la correspondance  $I(L)$ . Il est bon de noter à ce sujet que la relation des points correspondants se conserve dans une représentation conforme faisant passer d'une courbe algébrique à une autre courbe algébrique. Il résulte de cette

remarque que la solution des questions (1) et (2) sera immédiate si l'on connaît la fonction qui réalise la représentation conforme de la région intérieure à  $L$  sur le cercle de rayon unité. On pourra par exemple prendre comme fonction auxiliaire pour réaliser cette représentation la fonction  $D(u)$  liée à la variation de l'angle  $(\vec{x}_1, \vec{S}_1)$  lorsque  $M$  décrit la courbe  $L$  dans un sens déterminé [cf. H. Villat, Leçons sur l'hydrodynamique, G. V. 1930, p. 38]. La courbe  $L$  et tous les éléments du mouvement seront déterminés en fonction de  $\theta(u)$ .

3°. Détermination de la fonction  $U_{21}(z)$  par la condition

$$U_{21}(z) = -\frac{z\bar{\zeta}}{2} - (\Omega_{21} + i\bar{\Omega}_{21})$$

et étude du prolongement analytique de cette fonction à l'extérieur de  $L$  suivant les principes exposés au chapitre II.

4°. Détermination de la fonction  $V_1(z)$  par l'intégration de l'équation (10) et étude des intégrales de cette équation suivant les valeurs initiales.

5°. Construction des lignes de vecteurs du champ hydrodynamique au moyen de la condition:

$$\omega(t) V_1(z) = iw + \omega(t)\bar{z}.$$

Détermination des surfaces  $S$  acceptables et, par la construction des points singuliers limitation de la plus grande masse fluide qui peut être entraînée dans un mouvement qui conserve la stabilité de  $L$ .

En dernière analyse, nous sommes ainsi conduits à l'étude des intégrales et des points critiques de l'équation (10). — Rappelons que d'après la signification des paramètres cette équation se simplifie dans les cas suivants:

a) le mouvement est un mouvement de rotation [ $a = 0$ ],

b) la rotation  $\vec{\omega}(t)$  est uniforme [ $\lambda = 0$ ],

c) la densité  $\rho_2$  est nulle.  $L$  est surface de cavitation [ $\mu = 0$ ]. Dans le cas b) l'intégration de l'équation (10) est immédiate et conduit à l'expression suivante:

$$(11) \quad [V_1(z)]^2 = \mu [V_2(z)]^2 + (\mu - 1) [z\bar{\zeta} - az - \bar{a}\zeta - a_1] \frac{d\bar{\zeta}}{dz}$$

Le cas c) a été étudié en détail dans la publication citée dans l'introduction: Sur les cavitations de forme permanente. Dans le cas général la marche des calculs ne diffère pas notablement de celle qui a été indiquée dans ce cas particulier. Aussi nous rapporterons nous à cette étude en nous contentant d'indiquer ici un résumé des résultats obtenus:

La fonction  $V_1$  est une fonction multiforme à une infinité de branches. Nous la considérerons comme fonction d'un point qui se déplace sur une surface de Riemann  $\Sigma$  formée de feuillets superposés reliés par des lignes de croisement sur lesquels on a tracé un certain nombre de coupures que le point ne doit pas franchir. Nous commencerons donc par déterminer les points singuliers des intégrales et le mécanisme suivant lequel les différentes branches de la fonction s'échangent dans le voisinage de ces points. Cette étude nous permettra de construire la surface  $\Sigma$ . Si la courbe  $L$  est une courbe ordinaire de cette surface nous pourrons suivre à partir d'un point initial quelconque  $M_0$  pris sur cette courbe le prolongement analytique de la fonction  $V_1$  le long des chemins directs issus de  $M_0$  qui se déduisent de  $L$  par déformation continue sans rencontrer ni coupure ni ligne de croisement. La topographie de la surface  $\Sigma$  permet donc indépendamment de tout autre renseignement d'avoir une idée suffisamment précise des mouvements possibles et de la masse fluide maxima qui peut être entraînée sans que la stabilité de la surface de discontinuité en soit altérée. Les points remarquables de cette surface  $\Sigma$  peuvent être classés en 3 groupes :

1° les points  $(\xi_1)$  qui dépendent uniquement de  $L$  et non de la vitesse moyenne du fluide. Ce sont les points singuliers des fonctions  $z$  et  $\zeta$  et les points de Briot-Bouquet de l'équation (10).

2° les points  $(\xi_2)$  qui dépendent à la fois de  $L$  et de la vitesse moyenne du fluide. Ils correspondent aux racines de l'équation :

$$V_1(z/\lambda, \mu, V_0) = 0.$$

Ce sont des points critiques algébriques. Au voisinage de chacun d'eux la surface  $\Sigma$  possède deux feuillets reliés par une ligne de croisement issue du point considéré.

3° les points  $(\xi_3)$  qui correspondent aux points où la vitesse complexe  $w$  s'annule. Pour certains d'entre eux les lignes  $S$  ne satisferont pas aux conditions d'analysis situs nécessaires. On tracera donc sur les feuillets correspondants de la surface de Riemann des coupures partant de ces points qui seront infranchissables pour les images des particules fluides.

On peut remarquer que, pour définir un mouvement qui correspond à une classe déterminée de courbes algébriques on peut prendre comme donnée, l'ensemble des points  $(\xi_1)$ . On obtiendra par exemple très simplement, par cette méthode, les mouvements pour lesquels la discontinuité a une section circulaire ou elliptique.

Nous avons vu que lorsque le paramètre  $\lambda$  est nul (mouvements  $R_0$ ) les équations du problème se simplifient de façon notable. Dans ce cas nous connaissons la fonction  $V_1$  de façon explicite. Une seule intégration déterminera les lignes  $S$  et la constante cyclique du mouvement.

## 2. Étude succincte des mouvements qui correspondent aux surfaces du second ordre.

Nous avons obtenu, dans le chapitre III les éléments qui correspondent aux surfaces du second ordre. D'autre part la détermination complète des mouvements  $R(\lambda/c)$  qui correspondent au cas des cavitations a été faite dans la publication déjà citée. En adoptant les notations de cette étude nous obtenons :

$$(12) \quad \Omega_{21} + i \bar{\Omega}_{21} = -\frac{1}{2(1+k'^2)} [k^2 z^2 + (k'^2 x_1(c) - i x_2(c)) z - k'^2 (x_1^2(c) - a^2) - x_2^2(c)]$$

$$(13) \quad V_2(z) = -\frac{k^2}{1+k'^2} z - \frac{k'^2 x_1(c) - i x_2(c)}{2(1+k'^2)}$$

Nous obtenons alors l'expression de  $V_1(z)$  d'après les formules du § 1. On pourra en déduire les éléments du mouvement et la détermination des surfaces de Riemann qui leur correspondent par une discussion analogue en tous points à celle qui a été faite à propos des cavitations. On utiliserait à ce propos, la représentation sur un rectangle du domaine extérieur à  $L$  muni, sur l'axe réel, d'une coupure qui joint au point à l'infini les points images des foyers de  $L$  par rapport au cercle de Monge. La suite du calcul s'effectuerait à l'aide des transcendentes elliptiques. L'introduction dans le problème du paramètre  $\mu$  et de la fonction  $V_2(z)$  n'introduisant pas de changement notable nous ne répéterons pas ce calcul qui suivrait de façon trop servile celui qui a été développé dans l'étude des cavitations elliptiques.

## 3. Détermination des potentiels dans le cas d'un champ d'attraction quelconque.

Nous avons vu au chapitre II que la stabilité de  $L$  pouvait être assurée par un champ de forces d'attraction lorsque ces forces admettent un plan directeur et que la direction de la rotation  $\vec{\omega}(t)$  est normale à ce plan. La condition

$$u(M/t) - \sum_i h_i(u) g_i(t) = 0$$

montre par la considération des systèmes associés qui s'en déduisent qu'il est nécessaire dans ce cas que le mouvement d'entraînement soit un mouvement de rotation uniforme. L'équation qui définit le mouvement relatif prend alors la forme:

$$(14) \quad \omega_0^2 h_2(u) + g_0 - F(z\zeta) = 0$$

la fonction  $F(r)$  dépend du potentiel extérieur. À ce dernier terme près, l'équation est la même que celle que nous avons rencontrée dans le cas du champ de la pesanteur. L'équation différentielle à laquelle elle conduit, donne lieu par suite à des considérations analogues.

## CHAPITRE V.

### Étude des systèmes associés d'ordre trois.

#### I. Étude du système $G_3$ . Conséquences relatives au mouvement d'entraînement.

Prenons comme fonctions de base les fonctions  $q(t)$  et  $\omega(t)$ . Le système  $G_3$  prend dans ces conditions la forme suivante:

$$(1) \quad \begin{cases} d\omega = Q_1(\omega, q) dt \\ dq = Q_2(\omega, q) dt \end{cases}$$

$$(2) \quad g(t) = Q_3(\omega, q) dt$$

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_1(t) = Q_4(\omega, q) dt \\ \gamma_2(t) = Q_5(\omega, q) dt. \end{cases}$$

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  et  $Q_5$  représentent des formes quadratiques homogènes relativement à  $\omega(t)$  et  $q(t)$ , dont l'ensemble est défini par le tableau matriciel:

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{array} \right\|.$$

Le système  $H$  associé s'écrit sous la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} (a) & h_2(s) + a_{11} h_5(s) + a_{21} h_6(s) + [a_{31} + a_{41} x_1(s) + a_{51} x_2(s)] = 0 \\ (b) & 2 h_3(s) + a_{12} h_5(s) + a_{22} h_6(s) + [a_{32} + a_{42} x_1(s) + a_{52} x_2(s)] = 0 \\ (c) & h_4(s) + a_{13} h_5(s) + a_{23} h_6(s) + [a_{33} + a_{43} x_1(s) + a_{53} x_2(s)] = 0. \end{cases}$$

Mais nous avons montré que les fonctions  $h_2(s)$ ,  $h_3(s)$  et  $h_4(s)$  sont des fonctions périodiques.  $l$  désignant la longueur de la courbe  $L$  (nécessairement fermée) on a :

$$(6) \quad \begin{cases} h_2(s + l) = h_2(s) \\ h_3(s + l) = h_3(s) \\ h_4(s + l) = h_4(s). \end{cases}$$

Pour les fonctions  $h_5$  et  $h_6$  on a :

$$(7) \quad h_5(s + l) = h_5(s) + \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} K_1$$

$$(8) \quad h_6(s + l) = h_6(s) + \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} K_2,$$

$K_1$  et  $K_2$  étant deux constantes réelles dont la seconde est nécessairement différente de zéro. Or d'après (5 a) on a :

$$(9) \quad h_2(s + l) - h_2(s) + a_{11} [h_5(s + l) - h_5(s)] + a_{21} [h_6(s + l) - h_6(s)] = 0$$

et par suite :

$$(10) \quad a_{11} K_1 + a_{21} K_2 = 0.$$

On trouverait de la même façon :

$$(11) \quad a_{12} K_1 + a_{22} K_2 = 0$$

$$(12) \quad a_{13} K_1 + a_{23} K_2 = 0.$$

On a donc [ $m$  étant une constante de valeur finie] :

$$(13) \quad \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = -\frac{K_1}{K_2} = m.$$

Les coefficients des deux premières lignes du tableau matriciel (4) sont donc proportionnels. On déduit de là que les fonctions  $q(t)$  et  $\omega(t)$  sont liées l'une à l'autre par la condition :

$$(14) \quad q(t) = m \omega(t) + q$$

où  $q$  représente une constante. En changeant la définition des fonctions  $\Omega$  on peut, sans modifier le résultat final, supposer que la constante  $m$  est nulle et la constante  $q$  égale à l'unité, si bien que la fonction  $\omega(t)$  est une intégrale de l'équation différentielle du premier ordre:

$$(15) \quad d\omega = Q_1(\omega, t) dt.$$

Si le discriminant:  $\Delta = a_{12}^2 - 4 a_{11} a_{13}$  de la forme quadratique  $Q_1$  est négatif on voit que la rotation instantanée  $\omega(t)$  augmente indéfiniment dans le voisinage de certaines valeurs de  $t$ , ce qui constitue une impossibilité physique. Il est donc nécessaire de supposer les paramètres liés par la condition:

$$(16) \quad a_{12}^2 - 4 a_{11} a_{13} \geq 0$$

et en désignant par  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les racines (réelles) de l'équation:

$$(17) \quad Q_1(\omega, t) = 0$$

on a:

$$(18) \quad d\omega = a_{11}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) dt$$

et en choisissant convenablement l'origine des temps:

$$(19) \quad \omega(t) = \frac{\omega_1 - \omega_2 e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda t}}$$

$$(20) \quad \lambda = a_{11}(\omega_1 - \omega_2).$$

La rotation instantanée tend donc asymptotiquement vers une valeur finie. Les conditions relatives à l'accélération du point principal:

$$21) \quad \gamma_1(t) = Q_4(\omega, t)$$

$$(22) \quad \gamma_2(t) = Q_5(\omega, t)$$

achève la détermination des mouvements d'entraînement, qui comprennent en particulier les mouvements de rotation qui correspondent au cas où les formes  $Q_4$  et  $Q_5$  sont identiquement nulles. La recherche de ces mouvements se révélant inutile, à cause des conséquences que l'on tire de la considération du système associé  $H$ , nous n'effectuons pas le calcul, nous contentant de vérifier que ces mouvements ne se heurtent a priori à aucune impossibilité physique.

Lorsque les paramètres satisfont à la condition :

$$a_{12}^2 - 4 a_{11} a_{13} = 0$$

la rotation instantanée à l'instant  $t$  est de la forme :

$$(23) \quad \omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{\lambda t}$$

Elle tend asymptotiquement vers une rotation uniforme. Les mouvements correspondants peuvent être considérés comme résultant de la superposition d'un mouvement  $M_0$  et d'un des mouvements  $M_\lambda$  précédemment étudiés.

## 2. Étude du système $H_3$ .

Avant d'aborder l'étude du système associé  $H_3$  nous modifierons légèrement la forme des fonctions  $L$  données explicitement au chapitre I de façon à mettre en évidence les valeurs que prennent les dérivées normales des fonctions  $\Omega$  aux différents points de la courbe  $L$ . En désignant par  $V(s)$  l'angle :

$$(24) \quad V = (\vec{M}, \vec{S}_1)$$

et en tenant compte des conditions aux limites :

$$(25) \quad \Omega_{11} = -\frac{1}{2} M^2 \quad \Omega_{21} = -\frac{1}{2} M^2 \quad \Omega_{12} = 0$$

relatives à  $(L)$  on trouve sans peine :

$$(26) \quad \nabla \Omega_{11} = \left( \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} \right)^2 + M^2 \cos^2 V$$

$$(27) \quad \nabla \Omega_{12} = \left( \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \right)^2$$

$$(28) \quad \nabla (\Omega_{11} \Omega_{12}) = \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}$$

$$(29) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{11} = -M^2 \cos^2 V - |M| \sin V \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n}$$

$$(30) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{21} = -M^2 \cos^2 V - |M| \sin V \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n}$$

$$(31) \quad \vec{x} \cdot \vec{D} \Omega_{12} = - |M| \sin V \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}.$$

En introduisant les expressions des fonctions  $h_i$  que l'on déduit de ces formules, dans les équations du système  $H_3$  nous obtenons:

$$(32) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 - \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 \\ = \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 + 2 a_{11} [\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}] - 2 \mathcal{A} \varrho [a_{31} + a_{41} x_1 + a_{51} x_2]$$

$$(33) \quad 2 \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \right] = 2 a_{12} [\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}] \\ - 2 \mathcal{A} \varrho [a_{32} + a_{42} x_1 + a_{52} x_2]$$

$$(34) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \right]^2 = 2 a_{13} [\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}] - 2 \mathcal{A} \varrho [a_{33} + a_{43} x_1 + a_{53} x_2].$$

*1<sup>er</sup> cas: Le discriminant de la forme quadratique  $Q_1$  est positif.*

Nous conduirons, dans ce cas le calcul de la façon suivante: Par addition membre à membre des équations (32), (33) et (34) après multiplication par les facteurs  $1, \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, 1, \frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_2}, 1, \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right), \frac{1}{\omega_1 \omega_2}$  dont le déterminant égal à  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^3$  est différent de zéro nous obtiendrons le système équivalent

$$(35) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 \\ + \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 - 2 \mathcal{A} \varrho \left[ Q_3 \left( 1, \frac{1}{\omega_1} \right) + Q_4 \left( 1, \frac{1}{\omega_1} \right) x_1 + Q_5 \left( 1, \frac{1}{\omega_1} \right) x_2 \right]$$

$$(36) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 \\ + \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 - 2 \mathcal{A} \varrho \left[ Q_3 \left( 1, \frac{1}{\omega_2} \right) + Q_4 \left( 1, \frac{1}{\omega_2} \right) x_1 + Q_5 \left( 1, \frac{1}{\omega_2} \right) x_2 \right]$$

$$(37) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right] \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right] \\ = \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 - \frac{2 \mathcal{A} \varrho}{a_1^3} \left[ \left( a_{13} a_{31} - \frac{1}{2} a_{12} a_{32} + a_{11} a_{33} \right) \right]$$

$$+ \left( a_{13} a_{41} - \frac{1}{2} a_{12} a_{42} + a_{11} a_{43} \right) x_1 + \left( a_{13} a_{51} - \frac{1}{2} a_{12} a_{52} + a_{11} a_{53} \right) x_2 \Big] \\ + \frac{a_{12}^2 - 4 a_{11} a_{13}}{a_{13}} [\varrho_1 \overline{\Omega}_{11} - \varrho_2 \overline{\Omega}_{21}].$$

Posons pour simplifier l'écriture:

$$(38) \quad M_1(s) = 2 \mathcal{A} \varrho \left[ Q_3 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_1} \right) + Q_4 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_1} \right) x_1 + Q_5 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_1} \right) x_2 \right]$$

$$(39) \quad M_2(s) = 2 \mathcal{A} \varrho \left[ Q_3 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_2} \right) + Q_4 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_2} \right) x_1 + Q_5 \left( \mathbb{I}, \frac{\mathbb{I}}{\omega_2} \right) x_2 \right]$$

$$(40) \quad M_3(s) = \frac{2}{a_1} \mathcal{A} \varrho \left[ \left( a_{13} a_{31} - \frac{1}{2} a_{12} a_{32} + a_{11} a_{33} \right) + \left( a_{13} a_{41} - \frac{1}{2} a_{12} a_{42} + a_{11} a_{43} \right) x_1 \right. \\ \left. + \left( a_{13} a_{51} - \frac{1}{2} a_{12} a_{52} + a_{11} a_{53} \right) x_2 \right] + \frac{a_{12}^2 - 4 a_{11} a_{13}}{a_{13}} [\varrho_1 \overline{\Omega}_{11} - \varrho_2 \overline{\Omega}_{21}].$$

En écrivant que le produit des deux fonctions qui figurent aux premiers membres des équations (35) et (36) est égal au carré de la fonction qui figure au premier membre de l'équation (37) nous obtenons:

$$(41) \quad \mathcal{A} \varrho \cdot M^2(s) + \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{M_3^2(s) - M_1(s) M_2(s)}{M_1(s) + M_2(s) - 2 M_3(s)}$$

et en portant la valeur ainsi trouvée de  $M^2 \mathcal{A} \varrho + \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2$  dans le 2<sup>e</sup> membre des équations (35) et (36) nous trouvons:

$$(42) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{\mathbb{I}}{\omega_1} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{[M_3(s) - M_1(s)]^2}{M_1(s) + M_2(s) - 2 M_3(s)}$$

$$(43) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{\mathbb{I}}{\omega_2} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{[M_3(s) - M_2(s)]^2}{M_1(s) + M_2(s) - 2 M_3(s)}$$

et par suite [ $\varepsilon = \pm \mathbb{I}$ ]:

$$(44) \quad \frac{\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{\mathbb{I}}{\omega_1} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V}{\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{\mathbb{I}}{\omega_2} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V} = \varepsilon \frac{M_3(s) - M_1(s)}{M_3(s) - M_2(s)}.$$

Les dérivées normales des fonctions  $\Omega_{11}$  et  $\Omega_{12}$  sont donc liées par l'une ou l'autre des conditions suivantes:

$$(45) \quad \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} = |M| \sin V - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \frac{1}{M_1(s) - M_2(s)} \left[ \frac{1}{\omega_2} M_1(s) - \frac{1}{\omega_1} M_2(s) + \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) M_3(s) \right]$$

$$(46) \quad \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} = |M| \sin V + \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \frac{1}{2 M_3(s) - M_1(s) - M_2(s)} \left[ \frac{1}{\omega_2} M_1(s) + \frac{1}{\omega_1} M_2(s) - \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) M_3(s) \right].$$

Nous examinerons successivement ces deux hypothèses.

1<sup>re</sup> hypothèse  $\varepsilon = + 1$  [Relation (45)]. On a dans ce cas:

$$(47) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{[\omega_1 M_1(s) - \omega_2 M_2(s) + (\omega_2 - \omega_1) M_3(s)]^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2 [M_1(s) + M_2(s) - 2 M_3(s)]}$$

mais si nous différencions la relation (40) en tenant compte du fait que les fonctions  $\overline{\Omega}_{11}$  et  $\overline{\Omega}_{12}$  sont les fonctions conjuguées de  $\Omega_{11}$  et  $\Omega_{12}$  et en nous déplaçant sur  $L$  nous obtenons:

$$(48) \quad \varrho_1 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} = \varrho_2 \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \frac{a_{13}}{\Delta} \frac{d M_3}{d s}$$

où  $\vec{A}$  représente le vecteur:

$$(49) \quad \frac{2 \mathcal{A} \varrho}{\Delta} \left[ \left( a_{13} a_{41} - \frac{1}{2} a_{12} a_{42} + a_{11} a_{43} \right) \vec{x}_1 + \left( a_{13} a_{51} - \frac{1}{2} a_{12} a_{52} + a_{11} a_{53} \right) \vec{x}_2 \right]$$

et par suite:

$$(50) \quad \left[ \varrho_1 |M| \sin V + \frac{a_{13}}{\Delta} \frac{d M_3}{d s} - \varrho_2 \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - \vec{A} \cdot \vec{s}_1 \right]^2 = \frac{\varrho_1 [\omega_1 M_1(s) - \omega_2 M_2(s) + (\omega_2 - \omega_1) M_3(s)]^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2 [M_1(s) + M_2(s) - 2 M_3(s)]}$$

D'autre part, en dérivant par rapport à  $s$  les deux membres de l'équation (41) et après quelques simplifications nous pouvons écrire:

$$(51) \quad \frac{dM_3}{ds} = \frac{[M_1 + M_2 - 2M_3]^2}{[M_3 - M_1][M_3 - M_2]} \left[ (\varrho_2 - \varrho_1) |M| \cos V - \frac{\varrho_2}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - M \sin V \right)^2 \right] \\ - \frac{1}{2} \frac{dM_1}{ds} \frac{M_3 - M_2}{M_3 - M_1} - \frac{1}{2} \frac{dM_2}{ds} \frac{M_3 - M_1}{M_3 - M_2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (50) nous obtenons finalement:

$$(52) \quad \left[ \varrho_1 |M| \sin V - \varrho_2 \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \frac{a_{13}}{\Delta} \frac{(M_1 + M_2 - 2M_3)^2}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \mathcal{A} \varrho \cdot |M| \cos V \right. \\ \left. - \frac{a_{13} \varrho_2}{2 \Delta} \frac{(M_1 + M_2 - 2M_3)^2}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_1}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \right]^2 \\ = \frac{\varrho_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \frac{[\omega_1 M_1 - \omega_2 M_2 + (\omega_2 - \omega_1) M_3]^2}{M_1 + M_2 - 2M_3}.$$

Les composantes du vecteur  $\vec{B}$  sont des expressions quadratiques homogènes relativement à  $M_1, M_2, M_3$  dont les coefficients s'expriment facilement en fonction des coefficients du tableau matriciel (4).

À la condition (52) nous adjoignons la condition:

$$(53) \quad M^2(s) = - \frac{\varrho_2}{\mathcal{A} \varrho} \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \frac{1}{\mathcal{A} \varrho} \frac{M_3^2 - M_1 M_2}{M_1 + M_2 - 2M_3}.$$

Si le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation les fonctions  $M_1(s)$  et  $M_2(s)$  se réduisent à des constantes et le vecteur  $\vec{B}$  est nul. Plaçons nous dans ce cas et supposons en outre que le centre de rotation soit extérieur à  $L$ , pour fixer les idées. La fonction  $z' = \log z$  sera régulière dans le domaine  $D_1$ . Supposons réalisée une représentation conforme du domaine  $D_1$  sur l'intérieur du cercle de rayon unité et soit  $f(\sigma)$  la valeur que prend sur ce cercle au point d'argument  $\sigma$  la partie réelle de la fonction  $z'$ . En utilisant des résultats classiques sur l'expression des dérivées normales en un point du cercle on trouvera les formules suivantes, où la fonction  $f(\sigma)$  est supposée satisfaire à des conditions de Lipschitz:

$$(54) \quad \operatorname{tg} V = \frac{1}{2\pi f'(\sigma)} \int_0^{2\pi} \frac{f'(u) - f'(\sigma)}{\operatorname{tg} \frac{\sigma - u}{2}} du$$

$$(55) \quad \frac{d \Omega_{21}}{d \nu} = - \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{f(u) f'(u) - f(\sigma) f'(\sigma)}{\operatorname{tg} \frac{\sigma - u}{2}} d u$$

$$(56) \quad d s = e^{f(\sigma)} f'(\sigma) \frac{d \sigma}{\cos V}.$$

Les équations du problème se présentent sous forme de 2 équations intégrales différentielles relativement aux fonctions  $f(s)$  et  $M_3(s)$ . Sans doute, semble-t-il compliqué d'obtenir ces fonctions sous forme explicite et de déterminer ainsi les courbes  $L$  mais nous pouvons néanmoins sans faire cette résolution, résoudre les problèmes qui se posent. Tout d'abord remarquons qu'il nous est très facile de constater si une courbe  $L$  déterminée satisfait ou non au problème. Pour cette courbe nous connaissons en effet la fonction  $f(\sigma)$ . Les équations du problème deviennent alors deux équations algébriques en  $M_3$ . L'étude de la compatibilité de ces équations constitue un simple calcul algébrique, qui nous montrera de façon évidente si l'équation obtenue est ou n'est pas une identité relativement à la variable  $\sigma$ . Dans le 1<sup>er</sup> cas la courbe  $L$  serait solution du problème, dans le 2<sup>e</sup> cas elle ne saurait convenir. — Ce procédé de recherche ne nous conduit pas à la détermination des courbes  $L$  mais nous savons que, pour que le problème ait un sens il ne suffit pas que les fonctions introduites au cours des calculs satisfassent aux équations écrites. Encore faut-il qu'elles conduisent à des courbes  $L$  acceptables, c'est à dire à des courbes fermées sans point double. Par exemple toute fonction qui conduit à une courbe  $L$  présentant des branches infinies est à rejeter. Cette restriction explique comment l'étude qualitative des solutions du système intégral suffit au but que nous poursuivons actuellement. En effet la fonction  $f(\sigma)$  doit être une fonction périodique, de période  $2 \pi$ , bornée dans l'intervalle  $0, 2 \pi$ . Avant d'entreprendre cette étude qualitative, nous établirons les équations qui correspondent aux cas que nous n'avons pas encore examinés et qui pourront être envisagées sous le même point de vue.

2<sup>e</sup> hypothèse  $\varepsilon = - 1$  [Relation (46)].

Un calcul en tout point analogue à celui que nous avons développé dans le 1<sup>er</sup> cas nous conduit à :

$$(57) \quad \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{1}{\varrho_1 (\omega_2 - \omega_1)^2} \frac{[\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 - (\omega_1 + \omega_2) M_3]^2}{M_1 + M_2 - 2 M_3}$$

et les équations du problème sont les suivantes:

$$(58) \quad \left[ \varrho_1 |M| \sin V - \varrho_2 \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \frac{a_{13}}{\Delta} \frac{(M_1 + M_2 - 2M_3)^2}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \mathcal{A} \varrho \cdot |M| \cos V \right. \\ \left. - \varrho_2 \frac{a_{13}}{2 \Delta} \frac{(M_1 + M_2 - 2M_3)^2}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_1}{(M_3 - M_1)(M_3 - M_2)} \right]^2 \\ = \frac{\varrho_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \frac{[\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 - (\omega_1 + \omega_2) M_3]^2}{M_1 + M_2 - 2M_3}$$

$$(59) \quad M^2(s) = - \frac{\varrho_1}{\mathcal{A} \varrho} \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \frac{1}{\mathcal{A} \varrho} \frac{M_3^2 - M_1 M_2}{M_1 + M_2 - 2M_3}.$$

2<sup>e</sup> cas: *Le discriminant de la forme quadratique  $Q_1$  est nul:*

Soit  $\omega$  la racine double de l'équation:

$$(60) \quad Q_1(\omega, 1) = 0.$$

Cette racine est également solution des 2 équations

$$(61) \quad \left[ \frac{\partial Q_1}{\partial \omega} \right]_{\omega, 1} = 0$$

$$(62) \quad \left[ \frac{\partial Q_1}{\partial q} \right]_{\omega, 1} = 0.$$

Nous multiplierons les relations (32), (33) et (34) par les facteurs  $1$ ,  $\frac{1}{2\omega}$ ,  $\frac{1}{\omega^2}$  et  $0$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{\omega}$  et nous ajouterons membre à membre les équations obtenues en tenant compte des conditions (60) et (62). Nous obtiendrons ainsi les équations:

$$(63) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right] \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V \right] = \\ \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 - \mathcal{A} \varrho \left[ \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + \frac{\partial Q_4}{\partial \omega} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial \omega} x_2 \right]$$

$$(64) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V \right] \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} = \mathcal{A} \varrho \left[ \frac{\partial Q_3}{\partial q} + \frac{\partial Q_4}{\partial q} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial q} x_2 \right]$$

auxquelles nous adjoindrons, pour former un système équivalent au système fonda-

mental l'équation obtenue en divisant membre à membre les égalités (33) et (34).

Nous savons en effet que  $\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}$  est nécessairement différent de zéro.

$$(65) \quad \frac{\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V}{\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}} = \frac{a_{12}(\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}) + (\varrho_2 - \varrho_1)(a_{32} + a_{42} x_1 + a_{52} x_2)}{2 a_{13}(\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}) + 2(\varrho_2 - \varrho_1)(a_{33} + a_{43} x_1 + a_{53} x_2)}$$

L'expression  $\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} - |M| \sin V$  est nécessairement différente de zéro sans quoi l'équation (64) conduirait à  $\frac{\partial Q_3}{\partial q} + \frac{\partial Q_4}{\partial q} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial q} x_2 = 0$  ce qui est impossible. On peut donc diviser membre à membre les équations (63), (64) ce qui conduit à :

$$(66) \quad \frac{\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V}{\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}} = \frac{\varrho_2 \left( \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right)^2 + \mathcal{A} \varrho (M^2) - \mathcal{A} \varrho \left( \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + \frac{\partial Q_4}{\partial \omega} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial \omega} x_2 \right)}{\mathcal{A} \varrho \left[ \frac{\partial Q_3}{\partial q} + \frac{\partial Q_4}{\partial q} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial q} x_2 \right]}$$

La comparaison des égalités (65) et (66) nous donne la valeur de  $\varrho_2 \bar{\Omega}_{21} - \varrho_1 \bar{\Omega}_{11}$  sous la forme :

$$(67) \quad \varrho_1 \bar{\Omega}_{11} - \varrho_2 \bar{\Omega}_{21} = (\varrho_2 - \varrho_1) \frac{P(s) + P_1(s)}{P(s)}$$

avec :

$$(68) \quad P(s) = \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 + \varrho_2 \left( \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right)^2 + \mathcal{A} \varrho \left[ a_{12} \left( \frac{\partial Q_3}{\partial q} + \frac{\partial Q_4}{\partial q} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial q} x_2 \right) - 2 a_{13} \mathcal{A} \varrho \left[ \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + \frac{\partial Q_4}{\partial \omega} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial \omega} x_2 \right] \right]$$

$Q_3, Q_4, Q_5$  étant des formes homogènes du 2<sup>e</sup> degré on a :

$$\omega \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + q \frac{\partial Q_3}{\partial q} = 2 Q_3, \dots$$

et par suite :

$$(69) \quad P(s) = \mathcal{A} \varrho \cdot M^2 + \varrho_2 \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 + 2 a_{12} \mathcal{A} \varrho [Q_3 + Q_4 x_1 + Q_5 x_2].$$

D'autre part :

$$(70) \quad P_1(s) = -2 a_{12} \mathcal{A} \varrho (Q_3 + Q_4 x_1 + Q_5 x_2) + \mathcal{A} \varrho (a_{32} + a_{42} x_1 + a_{52} x_2) \cdot \\ \cdot \left( \frac{\partial Q_3}{\partial q} + \frac{\partial Q_4}{\partial q} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial q} x_2 \right) + \mathcal{A} \varrho [a_{33} + a_{43} x_1 + a_{53} x_2] \left[ \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + \frac{\partial Q_4}{\partial \omega} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial \omega} x_2 \right]$$

est un polynome du 2<sup>e</sup> degré en  $x_1$  et  $x_2$  qui se réduit d'ailleurs à son terme constant lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation.

En portant dans le 1<sup>er</sup> membre de l'équation (64) l'expression de  $\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}$  tirée de (66) nous obtenons :

$$(71) \quad \varrho_1 \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 = \frac{[P(s) + P_2(s)]^2}{P(s) + P_3(s)}$$

en posant :

$$(72) \quad P_2(s) = -\mathcal{A} \varrho \left[ 2 a_{12} (Q_3 + Q_4 x_1 + Q_5 x_2) + \frac{\partial Q_3}{\partial \omega} + \frac{\partial Q_4}{\partial \omega} x_1 + \frac{\partial Q_5}{\partial \omega} x_2 \right]$$

$$(73) \quad P_3(s) = -2 \mathcal{A} \varrho \left[ a_{12} + \frac{1}{\omega} \right] [Q_3 + Q_4 x_1 + Q_5 x_2].$$

$P_2(s)$  et  $P_3(s)$  sont des polynomes du premier degré en  $x_1$ ,  $x_2$  qui se réduisent à leur terme constant dans le cas des mouvements de rotation. En dérivant par rapport à  $s$  les relations (67) et (69) nous obtenons :

$$(74) \quad \varrho_1 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} = \varrho_2 \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \mathcal{A} \varrho \frac{d P_1}{P d s} - \mathcal{A} \varrho \frac{P_1 d P}{P^2 d s}$$

$$(75) \quad \frac{d P}{d s} = 2 \mathcal{A} \varrho |M| \cos V + \varrho_2 \frac{d}{d s} \left[ \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right]^2 \\ + 2 a_{12} \mathcal{A} \varrho \left[ Q_4 \frac{d x_1}{d s} + Q_5 \frac{d x_2}{d s} \right].$$

Les équations du problème s'écrivent donc :

$$(76) \quad M^2 = \frac{1}{\mathcal{A} \varrho} \left[ P(s) - \varrho_2 \left( \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right)^2 + 2 a_{12} \mathcal{A} \varrho (Q_3 + Q_4 x_1 + Q_5 x_2) \right].$$

$$\begin{aligned}
 (77) \quad & \varrho_1 [P(s) + P_3(s)] \left[ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \frac{\mathcal{A} \varrho d P_1}{\varrho_1 P ds} - \frac{\mathcal{A} \varrho P_1}{\varrho_1 P^2} \left( 2 \mathcal{A} \varrho |M| \cos V \right. \right. \\
 & \left. \left. + \varrho_2 \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} - |M| \sin V \right) + 2 a_{12} \mathcal{A} \varrho \left( Q_4 \frac{d x_1}{ds} + Q_5 \frac{d x_2}{ds} \right) - |M| \sin V \right]^2 \\
 & - [P(s) + P_2(s)]^2 = 0.
 \end{aligned}$$

C'est sous cette forme que nous allons discuter le problème.

## CHAPITRE VI.

### Détermination complète des mouvements d'une surface limite de cavitation.

#### I. Équations du problème.

Pour appliquer les considérations du chapitre précédent au cas où la surface  $L$  limite une cavitation intérieure au fluide il suffit d'attribuer la valeur zéro à la constante  $\varrho_2$  qui figure dans les équations obtenues. Dans ces conditions nous obtenons les 3 systèmes suivants:

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{[Système 1]} \\
 (1) \quad M^2(s) = \frac{1}{\varrho_1} \frac{M_3^2(s) - M_1 M_2}{M_1 + M_2 - 2 M_3(s)} \\
 (2) \quad [\omega_2 - \omega_1]^2 [M_3^2(s) - M_1 M_2] \left[ \sin V (M_3(s) - M_1) (M_3(s) - M_2) \right. \\
 \quad \left. - \frac{\alpha_{13}}{\Delta} \cos V (M_1 + M_2 - 2 M_3) \right]^2 - [M_3(s) - M_1]^2 [M_3(s) - M_2]^2 \cdot \\
 \quad [\omega_1 M_1 - \omega_2 M_2 + (\omega_2 - \omega_1) M_3(s)]^2 = 0
 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{[Système 2]} \\
 (3) \quad M^2(s) = \frac{1}{\varrho_1} \frac{M_3^2(s) - M_1 M_2}{M_1 + M_2 - 2 M_3(s)} \\
 (4) \quad [\omega_2 - \omega_1]^2 [M_3^2(s) - M_1 M_2] \left[ \sin V (M_3(s) - M_1) (M_3(s) - M_2) \right. \\
 \quad \left. - \frac{\alpha_{13}}{\Delta} \cos V (M_1 + M_2 - 2 M_3) \right]^2 - [M_3(s) - M_1]^2 [M_3(s) - M_2]^2 \cdot \\
 \quad \cdot [\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 - (\omega_1 + \omega_2) M_3(s)]^2 = 0
 \end{array} \right.$$

$$[\text{Système 3}] \begin{cases} (5) & M^2(s) = \frac{P(s)}{Q_1} - 2 a_{12} Q_3 \\ (6) & Q_1 \left[ 2 Q_1 P_1 \frac{\cos V}{P^2(s)} + \sin V \right]^2 \cdot M^2(s) \cdot [P(s) + P_3] - [P(s) + P_2]^2 = 0. \end{cases}$$

## 2. Intégration qualitative du premier système.

La première des équations du système donne les valeurs de la fonction  $M_3(s)$  aux points de  $L$  qui se trouvent à une distance donnée de  $O$ . A partir de cette valeur nous pourrions trouver au moyen de la seconde équation les valeurs correspondantes de l'angle  $V$  que fait le vecteur  $\vec{S}_1$  avec le vecteur  $\vec{M}$ . Ceci nous permettrait pour toutes les valeurs numériques des constantes, de déterminer de façon exacte le champ des vecteurs  $\vec{S}_1$  et par suite la construction des lignes de force de ce champ. Parmi ces lignes se trouve la courbe  $L$ . Il est évident, d'après la nature même du problème, que d'une des lignes intégrales on peut en déduire une infinité par rotation autour de  $O$ . D'autre part, à chaque valeur de  $|M|$  correspond deux valeurs de  $M_3$ , à chaque valeur de  $M_3$  2 valeurs de  $\text{tg } V$ . Donc par chaque point du plan passent 4 courbes intégrales réelles ou imaginaires. La question qui se pose est de savoir si parmi les  $\infty^4$  courbes

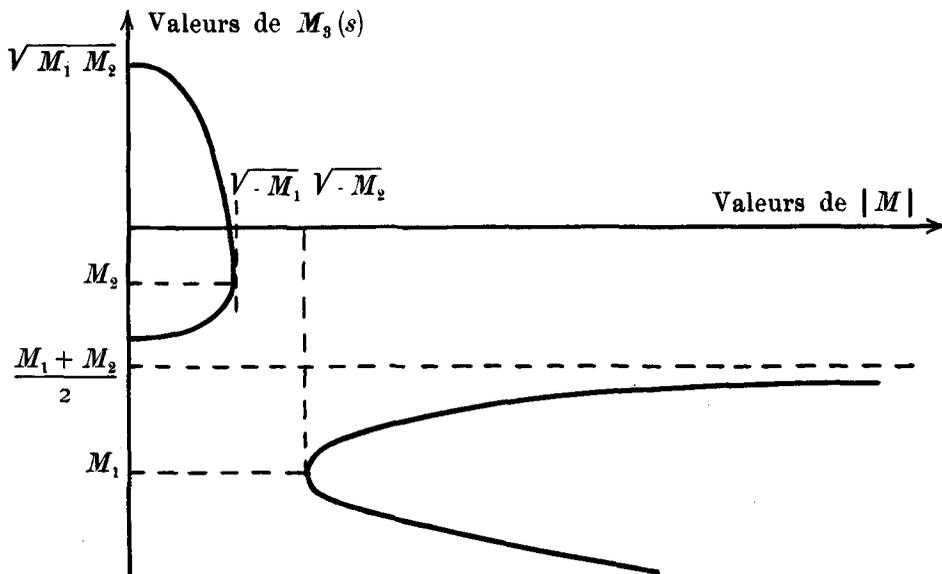


Fig. I. Cas  $M_1 < 0$   
 $M_2 < 0$

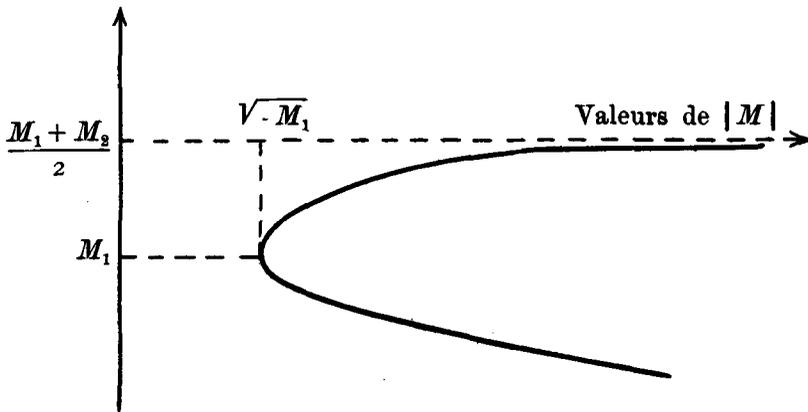


Fig. 2. Cas  $M_1 < 0$   
 $M_2 > 0$

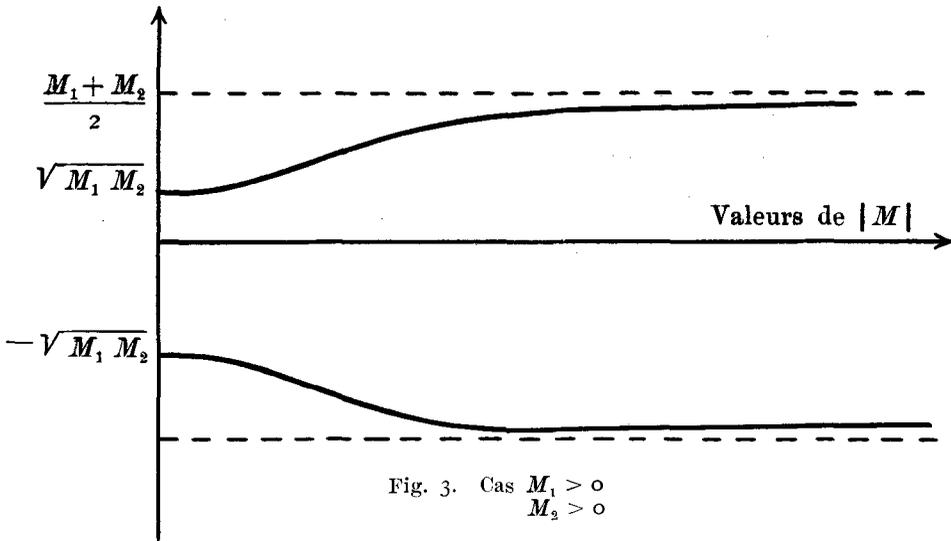


Fig. 3. Cas  $M_1 > 0$   
 $M_2 > 0$

ainsi déterminées il en est qui satisfont aux conditions précisées dans le chapitre V. Sur une telle courbe  $V$  et  $|M|$  varient de façon continue. Donc  $M_3$  varie de façon continue. De plus  $|M|$  varie entre deux limites positives car la courbe n'ayant aucun point à l'infini est intérieure à une couronne circulaire ayant son centre au point  $O$ ; la limite inférieure peut d'ailleurs être nulle (si le centre de rotation est sur  $L$ ). Pour ces valeurs limites l'angle  $V$  a pour valeur  $\frac{\pi}{2}$  sauf si la limite inférieure de  $M$  est nulle auquel cas  $V$  tend vers 0 lorsque  $|M|$  diminue. La racine  $V = \frac{\pi}{2}$  doit d'ailleurs être racine double dans les équations.

Les courbes de variation de  $M_3(s)$  en fonction de  $|M|$  que nous avons représentées dans tous les cas possibles montrent que ces conditions entraînent les circonstances suivantes:

1°.  $M_1$  et  $M_2$  sont des constantes négatives [ $M_1 < M_2$ ].

2°.  $L$  passe par  $O$  et est intérieure au cercle de rayon  $\sqrt{-M_2}$ .

D'autre part la condition relative à la limite de  $V$  lorsque  $|M|$  tend vers zéro exige la compatibilité des 3 équations:

$$(7) \quad M_3^2 - M_1 M_2 = 0.$$

$$(8) \quad M_1 + M_2 - 2 M_3 = 0.$$

$$(9) \quad \omega_1 M_1 - \omega_2 M_2 + (\omega_2 - \omega_1) M_3 = 0.$$

La moyenne arithmétique ne pouvant être égale à la moyenne géométrique si  $M_1 \neq M_2$  nous nous trouvons en présence d'une contradiction.

Le raisonnement précédent n'étant plus applicable lorsque les constantes  $M_1$  et  $M_2$  sont égales il convient d'examiner ce cas particulier. Le système (1) s'écrit alors sous la forme:

$$(10) \quad M^2(s) = -\frac{1}{2 \varrho_1} [M_3 + M_1].$$

$$(11) \quad [M_3 + M_1] \left[ \sin V - 4 \frac{a_{13}}{\Delta} \cos V \right]^2 - [M_3 - M_1] = 0.$$

Pour  $V = \frac{\pi}{2}$  on trouve  $M_1 = 0$ . Par suite l'équation se réduit à:

$$(12) \quad \left[ \sin V - 4 \frac{a_{13}}{\Delta} \cos V \right]^2 - 1 = 0$$

et se décompose en deux équations distinctes:

$$(13) \quad \operatorname{tg} V = \frac{16 a_{13}^2 - \Delta^2}{8 a_{13} \Delta}.$$

$$(14) \quad \cos V = 0.$$

Les courbes qui correspondent à (13) sont des spirales logarithmiques et ne conviennent pas au problème. Les courbes qui correspondent à (14) sont des cercles de centre  $O$ .

Il résulte de cette discussion que les cercles de centre  $O$  sont les seules courbes  $L$  possibles. Soit  $a$  le rayon du cercle. Le système fondamental prend dans ces conditions la forme :

$$(15) \quad \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - a \right]^2 = a^2 - 2 a_{31} - 2 a_{11} \bar{\Omega}_{11}.$$

$$(16) \quad \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - a \right] = - a_{32} - a_{12} \bar{\Omega}_{11}.$$

$$(17) \quad \left[ \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \right]^2 = - 2 a_{33} - 2 a_{13} \bar{\Omega}_{11}.$$

Il résulte de là que les fonctions  $\bar{\Omega}_{11} \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n}$  et  $\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}$  prennent des valeurs constantes sur le cercle. Les conditions aux limites relatives aux fonctions  $\Omega_{11}$  et  $\Omega_{12}$  montrent que ces fonctions prennent elles même des valeurs constantes sur le cercle. La fonction analytique  $\Omega_{11} + i \bar{\Omega}_{11}$  constante sur un arc de courbe de longueur finie sera constante dans tout son domaine d'existence. Les fonctions  $\Omega$  n'étant définie qu'à une fonction (de  $t$ ) près, nous aurons :

$$(18) \quad \Omega_1(t) = \Omega_{12}(x_1, x_2) q(t)$$

et nous serons alors ramenés au cas précédemment étudié qui conduit aux mouvements  $M_0$  et  $M_2$  et en général aux mouvements étudiés dans la publication signalée sur les cavitations de forme permanente.

### 3. Intégration qualitative du deuxième système.

L'intégration du 2<sup>e</sup> système conduit à des considérations en tous points analogues à celles que nous venons de développer. La nature géométrique des courbes intégrales qui sont solutions des équations, nous met en présence de contradictions et d'impossibilités si les constantes  $M_1$  et  $M_2$  ont des valeurs différentes. Dans le cas où elles prennent la même valeur on obtient :

$$(19) \quad M^2(s) = - \frac{1}{2 \varrho} [M_1 + M_3].$$

$$(20) \quad (\omega_2 - \omega_1)^2 (M_1 + M_3) \left[ \sin V - \frac{4 a_{12}}{\Delta} \cos V \right]^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2 (M_3 - M_1) = 0.$$

Lorsque  $|M|$  tend vers 0  $M_3(s)$  tend vers  $-M_1$  et la condition (20) exige que l'on ait soit  $M_1 = 0$  soit  $(\omega_1 + \omega_2) = 0$ . Dans le premier cas on obtient :

$$(\omega_2 - \omega_1)^2 \left[ \sin V - \frac{4a_{13}}{\Delta} \cos V \right]^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2 = 0$$

et les courbes intégrales sont des spirales logarithmiques, des cercles de centre  $O$  [si  $\omega_1 = 0$ ] ou des droites passant par  $O$ . Dans le 2° cas on a :

$$\sin V - \frac{4a_{13}}{\Delta} \cos V = 0$$

relation qui conduit aux mêmes conclusions.

#### 4. Intégration qualitative du troisième système.

Pour que l'équation (6) admette  $V = \frac{\pi}{2}$  comme racine pour certaines valeurs de  $P$  il est nécessaire que les équations

$$(21) \quad \begin{cases} P + P_3 = 0 \\ P + P_2 = 0 \end{cases}$$

soient compatibles ce qui exige  $P_2 = P_3$  à moins que  $P_1$  ne soit nul. Si nous éliminons les cercles de centre  $O$  dont nous avons précédemment étudié le mouvement on voit que l'équation se simplifie dans le cas où  $P_2 = P_3$  et que la condition précédente exige — même dans ce cas — que la constante  $P_1$  soit nulle. Mais s'il en est ainsi la condition (67) nous montre que la fonction  $\overline{\Omega}_{11}$  est égale à l'unité en tout point de la courbe  $L$ . La fonction  $P(s)$  ne peut en effet être nulle que lorsque  $L$  est un cercle de centre  $O$ . Si nous nous reportons maintenant au système fondamental on en conclut que  $\frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n}$  est constant. Comme  $\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} = 0$  l'équation (32) conduit à  $|M| \cos V = c^{te}$  et l'équation (33) à  $|M| \sin V = c^{te}$ . De là il résulte que  $|M|$  est constant et on retombe sur le cas des cercles étudié précédemment.

#### 5. Conclusion.

En résumé aucun des systèmes différentiels auxquels se ramène le problème en dernière analyse, n'admet de courbe intégrale satisfaisant aux conditions

d'analysis situs imposées par la nature physique du problème. Il en résulte que nous devons conclure à l'incompatibilité des équations du système  $H_3$  [cette incompatibilité étant d'ailleurs entendue au sens restreint que nous venons de préciser] et par suite à l'impossibilité de mouvements physiques qui seraient définis par ce système  $H_3$ .

## CHAPITRE VII.

### Étude des systèmes associés d'ordre supérieur à trois et détermination complète du mouvement d'une surface de discontinuité.

#### I. Systèmes d'ordre 4.

En conservant les notations du chapitre V nous pouvons écrire les systèmes associés  $G_4$  et  $H_4$  sous la forme:

$$\begin{array}{l}
 G_4 \left\{ \begin{array}{l}
 (1) \quad d\omega = Q_1(\omega, g) dt + a_{14}g(t) dt \\
 (2) \quad dq = Q_2(\omega, g) dt + a_{24}g(t) dt \\
 (3) \quad \gamma_1 = Q_4(\omega, g) + a_{44}g(t) \\
 (4) \quad \gamma_2 = Q_5(\omega, g) + a_{54}g(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 H_4 \left\{ \begin{array}{l}
 (5) \quad h_2(s) + a_{11}h_5(s) + a_{21}h_6(s) + a_{41}h_7(s) + a_{51}h_8(s) = 0 \\
 (6) \quad 2h_3(s) + a_{12}h_5(s) + a_{22}h_6(s) + a_{42}h_7(s) + a_{52}h_8(s) = 0 \\
 (7) \quad h_4(s) + a_{13}h_5(s) + a_{23}h_6(s) + a_{43}h_7(s) + a_{53}h_8(s) = 0 \\
 (8) \quad 1 + a_{14}h_5(s) + a_{24}h_6(s) + a_{44}h_7(s) + a_{54}h_8(s) = 0.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les considérations développées au chapitre précédent s'appliquent au cas actuel si bien que l'on peut — en changeant seulement les notations relatives aux fonctions  $\Omega$  — supposer, sans détruire la généralité que le coefficient  $a_{24}$  est nul ainsi que les coefficients de la forme  $Q_2$ . Dans ces conditions, si l'on suppose connue la fonction  $g(t)$ , la rotation instantanée  $\omega(t)$  est définie par l'intégration d'une équation de Riccati. Si au contraire, la rotation instantanée est une fonction connue du temps on en déduit la valeur de  $g(t)$  au moyen de l'équation (1) et l'accélération du point principal au moyen des équations (3) et (4). Il en résulte que les mouvements  $M_e$  sont ceux pour lesquels l'accélération du point principal est liée à la rotation instantanée par une condition de la forme:

$$(9) \quad \vec{\gamma}(t) = \left( \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \frac{d\omega}{dt} \right) \vec{M}$$

où les composantes de  $\vec{\gamma}_1$  sont des polynomes du second degré en  $\omega$  et les composantes du vecteur  $\vec{\gamma}_2$  constantes. Ils comprennent en particulier tous les mouvements de rotation.

En transformant les équations (5), (6), (7) du système  $H_4$  comme nous avons transformé au chapitre précédent les équations du système  $H_3$  nous obtenons des relations analogues aux équations (32), (33), (34) où l'on suppose nuls les coefficients de la forme  $Q_3$ . En outre l'équation (8) conduit entre les fonctions  $\overline{\Omega}_{11}$  et  $\overline{\Omega}_{21}$  à une relation de la forme:

$$(10) \quad e_2 \overline{\Omega}_{21} - e_1 \overline{\Omega}_{11} = \frac{\mathcal{A} e}{a_{14}} [1 + a_{44} x_1 + a_{54} x_2].$$

En portant la valeur de cette expression dans le second membre des équations (32), (33), (34) et en tenant compte de la condition:

$$(11) \quad e_1 \frac{\partial \overline{\Omega}_{11}}{\partial n} - e_2 \frac{\partial \overline{\Omega}_{21}}{\partial n} = \frac{\mathcal{A} e}{a_{14}} \left[ a_{44} \frac{d x_1}{d s} + a_{54} \frac{d x_2}{d s} \right]$$

nous obtenons:

$$(12) \quad \left[ e_2 \frac{\partial \overline{\Omega}_{21}}{\partial n} - e_1 M \sin V + \vec{A} \cdot \vec{s}_1 \right]^2 = \frac{b + \vec{B} \cdot \vec{M}}{c + \vec{C} \cdot \vec{M}}$$

$$(13) \quad e_2 \left[ \frac{\partial \overline{\Omega}_{21}}{\partial n} - M \sin V \right]^2 = e_1 \frac{b + \vec{B} \cdot \vec{M}}{c + \vec{C} \cdot \vec{M}} + \mathcal{A} e M^2 + d + \vec{D} \cdot \vec{M}.$$

$b, c, d$  sont des constantes et les vecteurs  $\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  sont des vecteurs constants. Leurs expressions sont données dans le tableau suivant

$$(14) \quad \begin{cases} b = e_1 a_{12} \mathcal{A} e \\ c = 2 a_{13} a_{14} \\ d = -2 \mathcal{A} e \frac{a_{11}}{a_{14}} \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \vec{B} = e_1 \mathcal{A} e [(a_{12} a_{44} - a_{14} a_{42}) \vec{x}_1 + (a_{12} a_{54} - a_{14} a_{52}) \vec{x}_2] \\ \vec{C} = 2 a_{14} [(a_{13} a_{44} - a_{14} a_{43}) \vec{x}_1 + (a_{13} a_{54} - a_{14} a_{53}) \vec{x}_2] \\ \vec{D} = \frac{2 \mathcal{A} e}{a_{14}} [(a_{14} a_{41} - a_{11} a_{44}) \vec{x}_1 + (a_{14} a_{51} - a_{11} a_{54}) \vec{x}_2]. \end{cases}$$

On déduit de là deux expressions de  $\frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n}$  en fonction des éléments géométriques de la surface de discontinuité.

$$(16) \quad \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} = \frac{\mathcal{A} \varrho (b + \vec{B} \cdot \vec{M}) - (c + \vec{C} \cdot \vec{M}) [\varrho_2 (\vec{D} \cdot \vec{M} + d) + (\vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \varrho_1 M \sin V)^2 + \varrho_1 \varrho_2 M^2 - \varrho_2^2 M^2 \cos^2 V]}{2 \varrho_1 \varrho_2 (\vec{C} \cdot \vec{M} + c) (\vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \mathcal{A} \varrho M \sin V)}$$

et :

$$(17) \quad 2 \{ \varrho_1 M \sin V (\vec{C} \cdot \vec{M} + c) (\vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \varrho_1 M \sin V)^2 + [\varrho_1^2 M^2 - \varrho_1 \varrho_2 M^2 \cos^2 V] \\ - \varrho_1 \vec{D} \cdot \vec{M} - \varrho_1 d \} [c + \vec{C} \cdot \vec{M}] - \vec{B} \cdot \vec{M} - b \} [\vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \varrho_1 M \sin V] \\ + \varrho_1 M \sin V [\vec{B} \cdot \vec{M} + b] \} \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n} + \mathcal{A} \varrho (\vec{B} \cdot \vec{M} + b) \\ - \varrho_1 (\vec{C} \cdot \vec{M} + c) [(\vec{A} \cdot \vec{s}_1 - \varrho_1 M \sin V)^2 + \varrho_2^2 M^2 \cos^2 V - \varrho_1 \varrho_2 M^2 + \varrho_2 \vec{D} \cdot \vec{M} + \varrho_2 d] = 0.$$

En exprimant la condition de compatibilité des équations (16) et (17) on obtient une première relation entre les éléments géométriques de la courbe  $L$ , qui donne lieu à une discussion analogue à celle que nous avons faite au chapitre précédent. On peut d'ailleurs remarquer que l'expression de la dérivée normale  $\frac{\partial \Omega_{21}}{\partial n}$  est déterminée par la donnée de cette courbe ce qui conduit à une deuxième condition, mais après les résultats de l'intégration qualitative il est inutile d'envisager cette dernière étude. La conclusion est la même que celle qui a été déduite de l'étude du système  $H_3$ .

## 2. Cas d'un mouvement de rotation.

Si le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation les formes quadratiques  $Q_4$  et  $Q_5$  sont identiquement nulles. Par suite les valeurs prises par les fonctions  $\overline{\Omega}_{11}$  et  $\overline{\Omega}_{21}$  sur  $L$  sont liées par une relation de la forme :

$$(18) \quad \varrho_2 \overline{\Omega}_{21} - \varrho_1 \overline{\Omega}_{11} = c^{te}.$$

La dérivée normale de la fonction  $\overline{\Omega}_{11}$  est constante, et comme sa dérivée tangentielle est nulle, la fonction analytique  $\frac{d \overline{\Omega}_{11}}{d \varepsilon}$  est constante sur un arc du plan

$z$  de longueur finie. Elle est, par suite, constante dans tout son domaine d'existence. Comme  $U_{12}$  n'est certainement pas constant, nous trouvons pour son expression, une fonction linéaire en  $z$ . Les courbes  $L$  et  $S$  sont alors des droites ce qui est incompatible à la signification physique du problème.

### 3. Cas où la surface de discontinuité limite une cavitation.

Si l'on tient compte du fait que  $\Omega_{11}$  est sur  $L$  une fonction linéaire des variables  $x_1$  et  $x_2$ , le système fondamental prend la forme suivante :

$$(19) \quad \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - M \sin V \right]^2 = M^2 + 2 \frac{a_{11}}{a_{14}} + 2 \frac{a_{11} a_{44} - a_{14} a_{41}}{a_{14}} x_1 + 2 \frac{a_{11} a_{54} - a_{14} a_{51}}{a_{14}} x_2.$$

$$(20) \quad \left[ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n} - M \sin V \right] \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} = \frac{a_{12}}{a_{14}} + \frac{a_{12} a_{44} - a_{14} a_{42}}{a_{14}} x_1 + \frac{a_{12} a_{54} - a_{14} a_{52}}{a_{14}} x_2.$$

$$(21) \quad \left( \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial n} \right)^2 = 2 \frac{a_{12} a_{44} - a_{14} a_{42}}{a_{14}} x_1 + 2 \frac{a_{12} a_{54} - a_{14} a_{52}}{a_{14}} x_2 + 2 \frac{a_{12}^2}{a_{14}}.$$

La relation entre les éléments géométriques de la courbe  $L$ , qui exprime la compatibilité des équations de ce système devient :

$$(22) \quad [M^2 + M_1(x_1, x_2)] M_2(x_1, x_2) + M_3(x_1, x_2) = 0$$

$M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  étant des fonctions linéaires de  $x_1$  et  $x_2$ .  $L$  ferait donc partie d'une famille de cubiques, ayant des points à l'infini. Il n'est donc pas utile de pousser la discussion plus avant: en effet nous nous heurtons là à une impossibilité physique.

### 4. Systèmes d'ordre 5, 6 et 7.

Les systèmes associés  $G_5$  et  $H_5$  s'écrivent :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = a_{11}\omega^2 + a_{12}\omega q + a_{13}q^2 + a_{14}g(t) + a_{15}\frac{dq}{dt} \\ (24) \quad \gamma_1(t) = a_{21}\omega^2 + a_{22}\omega q + a_{23}q^2 + a_{24}g(t) + a_{25}\frac{dq}{dt} \\ (25) \quad \gamma_2(t) = a_{31}\omega^2 + a_{32}\omega q + a_{33}q^2 + a_{34}g(t) + a_{35}\frac{dq}{dt} \end{array} \right.$$

$$(26) \quad h_2(s) + a_{11}h_5(s) + a_{21}h_7(s) + a_{31}h_8(s) = 0$$

$$(27) \quad 2h_3(s) + a_{12}h_5(s) + a_{22}h_7(s) + a_{32}h_8(s) = 0$$

$$(28) \quad h_4(s) + a_{13}h_5(s) + a_{23}h_7(s) + a_{33}h_8(s) = 0$$

$$(29) \quad 1 + a_{14}h_5(s) + a_{24}h_7(s) + a_{34}h_8(s) = 0$$

$$(30) \quad h_6(s) + a_{15}h_5(s) + a_{25}h_7(s) + a_{35}h_8(s) = 0.$$

Effectuons une circulation autour de  $L$  en tenant compte de la périodicité des fonctions  $h$  autres que  $h_5$  et  $h_6$ . Nous obtenons par un raisonnement analogue à celui du chapitre précédent:

$$a_{11}K_1 = a_{12}K_1 = a_{13}K_1 = a_{14}K_1 = K_2 + a_{15}K_1 = 0.$$

Dès lors deux hypothèses sont possibles:

Première hypothèse  $K_1 = K_2 = 0.$

$$\text{Deuxième hypothèse} \quad \begin{cases} a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0 \\ a_{15} = -\frac{K_2}{K_1}. \end{cases}$$

Or nous avons vu précédemment que la fonction  $\Omega_{12}$  admettait nécessairement une constante cyclique relative à une circulation autour de  $L$ . La première hypothèse est donc à rejeter mais si nous adoptons la deuxième nous constatons, d'après l'équation (29), qu'il existe sur la courbe  $L$  une relation linéaire en  $x_1$  et  $x_2$  et ceci est impossible.

Des considérations analogues s'appliquent aux systèmes d'ordre 6 et d'ordre 7 et nous devons, par suite, conclure à l'impossibilité de tels systèmes.

## CHAPITRE VIII.

### Conclusion.

En résumé, les systèmes associés d'ordre égal ou supérieur à trois, tels qu'ils ont été définis au chapitre I, ou bien sont incompatibles ou bien conduisent à des solutions qui ne sont pas acceptables pour le problème posé au début de ce travail. Seuls, les systèmes d'ordre un et deux conduisent à des solutions acceptables. Par suite la stabilité d'une surface de discontinuité relative à la

densité d'un milieu continu en mouvement irrotationnel, ne peut être assurée que par les mouvements d'ensemble définis par ces systèmes d'ordre un et deux c'est à dire soit par des mouvements uniformes du type  $R_0$  soit par des mouvements amortis du type  $R_1$ . La surface de discontinuité peut avoir une forme quelconque et le mouvement de déformation des éléments fluides est lié aux éléments géométriques de cette surface. Dans chaque cas envisagé on pourra déterminer le mouvement de déformation par les méthodes exposées au chapitre IV. Dans le cas particulier des surfaces de cavitation on utilisera les procédés qui ont été indiqués avec quelques détails, dans la publication Sur les cavitations de forme permanente, à laquelle nous nous sommes déjà reportés plusieurs fois au cours de ce travail.

