# SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DES OPÉRATIONS INFINITÉSIMALES ÉLÉMENTAIRES.

PAR

# ANDRÉ ROUSSEL à Strasbourg.

#### Introduction.

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier certaines opérations de nature infinitésimale qui se présentent comme des généralisations naturelles de la dérivation.

Comme on le sait, la notion de dérivée s'introduit en analyse quand on cherche à remplacer la loi inconnue liant entre elles les valeurs d'une fonction qui correspondent à des valeurs voisines de la variable, par une loi approchée plus simple, on tolérant une erreur d'un ordre donné à l'avance. On suppose, en outre, implicitement que la connaissance de la loi approchée plus simple, permet de remonter dans une certaine mesure à celle de la fonction elle-mème. Toutefois, les idées précédentes que l'on retrouverait à l'origine même de l'analyse mathématique, n'ont pas été appliquées de la façon la plus générale possible. Employons le langage géométrique pour faciliter notre éxposé, en faisant correspondre aux fonctions les courbes qui en sont la représentation graphique. La propriété fondamentale des fonctions de l'analyse classique peut alors s'exprimer ainsi: en chacun de ses points, la courbe F représentant la fonction ne différe que d'un infiniment petit du scond ordre d'une droite D passant par le point M considéré, et dont le coefficient angulaire varie d'une façon continue avec M. La donnée de ce coefficient angulaire, c'est-à-dire de la dérivée en chaque point M équivaut à celle de la droite D qui y passe.

Il est naturel de chercher à étendre les propriétés précédentes et de concevoir des fonctions telles que pour chacune d'elles la courbe représentative correspondante puisse, dans le voisinage de chacun de ses points M être remplacée par une autre courbe qui représente une fonction sans dérivée, variable avec M tout en appartenant à une famille donnée K, l'erreur ainsi commise devant être d'une grandeur donnée à l'avance. Le paramètre qui, pour chaque valeur de la variable x, détermine dans la famille K la courbe C correspondante jouera ainsi un rôle analogue à celui de la dérivée et pourra donc en être considéré comme une généralisation. Il est indiqué d'étudier d'abord le cas où l'équation des curbes C est de la forme

$$Y = \alpha \varphi(X) + \beta. \tag{1}$$

Si  $\varphi(X)$  est à variation bornée, les idées qui sont exposées ici, pourraient être rattachées sans peine à la célèbre théorie de l'intégration qui a illustré M. Lebesgue. Nous exclurons donc les fonctions à variation bornée de cette étude. Nous serons alors conduit, dans la première partie de ce mémoire à montrer que, pour chacune des fonctions  $\varphi$  appartenant à une classe très étendue qui sera précisée ultérieurement, on peut définir une classe de fonctions F, de même puissance que celle des fonctions à dérivée continue, pour lesquelles on aura une relation de la forme

$$F(x+h) - F(x) = f(x) \{ \varphi(x+h) - \varphi(x) \} + \varepsilon \omega(|h|)$$
(2)

f(x) étant continue,  $\omega$  désignant le module de continuité de  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  désignant un infiniment petit avec h.

Géométriquement, cela signifie qu'en chaque point de la courbe F, il existe une courbe de la famille (1) qui représente la première avec une erreur infiniment petite par rapport au module de continuité de la seconde. L'équation de C est, d'ailleurs, pour chaque valeur de x:

$$Y=f(x)\varphi(X)+[F(x)-f(x)\varphi(x)].$$

Plus généralement, on peut prendre l'équation des courbes C sous la forme:

$$Y = \varphi(X, \alpha) + \beta$$

et il s'agira de trouver une fonction F telle que

$$F(x+h)-F(x)=g(x+h,f)-g(x,f)+\mu,$$

f désignant une fonction continue de x donnée et  $\mu$  un terme complémentaire

dont l'ordre de grandeur sera précisé dans la suite. L'interprétation géométrique est, ici aussi, bien claire. Dans le voisinage de x, l'erreur commise en substituant à F la courbe C:

$$Y = \varphi[X, f(x)] + \beta$$

où

$$\beta = F(x) - \varphi[x, f(x)]$$

no devra pas dépasser  $\mu$ .

Nous résoudrons le problème précédent dans des cas particuliers étendus. Nous dirons, pour abréger, que les fonctions F satisfaisant à une relation de la forme (2) sont des primitives de seconde espèce pour f. Inversement, f sera la dérivée de seconde espèce de F.

Enfin, nous porterons notre attention sur un problème un peu différent dont l'étude nous conduira à la notion de pseudo-dérivée, qui fait l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Prenons, pour chaque valeur de x l'équation de nos courbes C sous la forme:

$$Y = \alpha \varphi(x, X) + \beta$$

et posons nous les mêmes questions qu'auparavant. Nous serons conduit à écrire ici:

$$F(x+h)-F(x)=f(x)q(h)+\mu$$

avec:

$$g(h) = \varphi(x, x+h) - \varphi(x, x).$$

La détermination de F peut donc se ramener à celle d'une fonction u telle que l'on ait, avec une certaine erreur:

$$u(x+h)-u(x) = \varphi(x, x+h)-\varphi(x, x).$$

Le problème reviendra alors à obtenir une primitive de f par rapport à u. Mais, il est des cas extrèmement étendus dans lesquels g, considérée comme fonction de l'intervalle h peut avoir une expression très simple, sans que la question qui nous occupe soit susceptible d'être résolue avec autant de précision. Pour en donner un exemple particulièrement simple, prenons:

$$g(h)=h^2$$

il n'existe pas de fonction continue F satisfaisant à une relation telle que la suivante

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h^2+\epsilon h^2$$

12 - 28538. Acta mathematica. 53. Imprimé le 3 avril 1929.

c'est-à-dire ayant une dérivée continue par rapport à la fonction d'intervalle  $h^2$  considérée. Cependant, il existe, par rapport à chaque fonction d'intervalle g des phénomènes généralisant ceux de dérivabilité. Pour en donner dès maintenant une idée très sommaire, ils consistent dans le fait que le rapport incrémental:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{g(h)}$$

diffèrera aussi peu qu'on le voudra, en un nombre de points arbitrairement grand, d'une fonction donnée f qui sera dite alors la pseudo-dérivée de F par rapport à g.

L'extrème généralité de cette notion est manifeste, et nous serons conduit à en étudier certaines modalités remarquables. Pour terminer, renvoyant à un travail ultérieur l'étude des applications que l'on peut tirer des résultats du présent mémoire, nous terminerons on donnant des théorèmes permettant de conclure à la possibilité d'effectuer sur une fonction donnée F certaines opérations infinitésimales étudiées ici. Ces théorèmes se présentent d'ailleurs comme des généralisations de propositions connues, relatives à l'existence de la dérivée au sens classique.

### PREMIÈRE PARTIE.

# Recherche des primitives de seconde espèce.

1. **Décomposition fondamentale d'une fonction.** Soit  $\varphi$  une fonction continue donnée. Nous allons montrer que toute autre fonction continue f(x) peut se mettre sous la forme:

$$f(x) = f_1[u_1(x)\varphi(x)] + f_2[u_2(x)\varphi(x)] + \cdots$$
 (1)

 $u_1, u_2, u_3, \ldots$  désignant des fonctions continues dont chacune satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre un, les  $f_i$  étant des fonctions continues satisfaisant à des conditions:

$$|f_i(t)| < \alpha_i \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

 $\alpha_i$  étant le terme général d'une série numérique positive convergente. La série (1) sera alors absolument convergente. Nous pouvons en effet supposer  $\varphi(x)$  différent de zéro dans tout l'intervalle (1, 2) où nous supposerons nos fonctions

définies; sinon, il suffirait pour être ramené à ce cas, d'ajouter une constante convenable à  $\varphi$  et les propriétés que nous avons on vue ne devant dépendre que de l'accroissement de cette fonction ne seraient pas modifiées.

Considérons la courbe représentant la fonction

$$y = \frac{x}{\varphi(x)}.$$
 (1 \le x \le 2)

Divisons l'intervalle (1, 2) en n parties égales, par exemple:

$$(1, x_1), \ldots (x_{n-1}, x_n = 2)$$

et considérons la fonction  $u_n(x)$  représentée graphiquement par la ligne polygonale dont les sommets successifs ont pour coordonnées:

 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ 

en posant:

$$y_i = \frac{x_i}{\boldsymbol{\varphi}(x_i)}$$
.

Etant donné alors un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ , on peut, en vertu de la continuité de y, prendre n assez grand pour avoir:

$$\left| \frac{x}{\varphi(x)} - u_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{M}; \quad \text{avec} \quad |\varphi(x)| < M$$

$$|x - u_n(x) \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

et, par suite:

Ceci posé, donnons nous une fonction continue arbitraire f, et soit une série convergente à termes positifs:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

On peut prendre h assez petit pour avoir:

$$|f(x+h)-f(x)|<\alpha_1.$$

Posons alors:

$$f(x) - f[u_{p_1}(x) \varphi(x)] = f_2(x)$$

ou:

$$f(x) = f[u_{p_1}(x) \varphi(x)] + f_2(x)$$

avec, pour  $p_1$  assez grand:

$$|f_2(x)| < \alpha_2.$$

Nous pouvons de même trouver un entier  $p_2$  assez grand pour avoir:

$$|f_3(x)| < \alpha_3$$

en posant:

$$f_2(x) = f_2[u_{p_2}(x) \varphi(x)] + f_3(x)$$

et ainsi de suite indéfiniment. Finalement on voit que f(x) peut se mettre sous la forme annoncée (1) avec une légère modification dans les notations que nous venons d'employer. Nous dirons alors que nous avons effectué la décomposition du premier genre de f en fonction de  $\varphi$ .

On peut donner une autre décomposition de f qui nous permettra de généraliser certains résultats, et à laquelle nous pouvons donner le nom de décomposition de seconde espèce en fonction de  $\varphi$ .

Divisons l'intervalle (1, 2) en n parties égales et considérons la fonction continue  $v_n$  définie de la façon suivante:

$$v_n(x) = y_n \qquad \left(x_n \le x \le \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

$$v_n(x) = y_n + (2x - x_n - x_{n+1}) \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \qquad \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \le x \le x_{n+1}\right)$$

et pour n assez grand la fonction ainsi définie vérifiera encore l'inégalité:

$$|x-v_n(x)\varphi(x)|<\varepsilon;$$

on en déduit comme plus haut la possibilité de développer f suivant une série:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n[v_n(x) \varphi(x)].$$

Nous avons supposé pour simplifier que les  $u_n$  et les  $v_n$  correspondaient à des divisions de (1, 2) en parties égales. Il est évident qu'il suffit de choisir les divisions de (1, 2) en assez grand nombre et assez petites pour que le premier membre de (2) tende vers zéro.

Nous allons appliquer ces décompositions à la recherche des primitives de seconde espèce d'une fonction.

2. Formation des primitives de seconde espèce d'une fonction donnée. Nous nous appuierons sur une remarque évidente: dans une certaine mesure une fonction à dérivée continue jouera, par rapport à une fonction sans dérivée, un rôle analogue à celui joué par une constante dans la dérivation ordinaire. Cela provient de ce que le module de continuité  $\omega(\delta)$  sera, en général, infiniment grand par rapport à  $\delta$ . Ceci posé, considérons une décomposition de f par rapport à  $\varphi$ . Nous pouvons prévoir que les fonctions u vont, dans des cas étendus, jouer le rôle de constantes et nous serons conduit à examiner si l'expression obtenue en intégrant terme à terme la série (1),  $\varphi$  étant traitée comme une variable indépendante, et les  $u_n$  comme des constantes, ne représenterait pas une primitive de seconde espèce de f par rapport à  $\varphi$ . Soit  $\omega$  le module de continuité de  $\varphi$ , c'est-à-dire la fonction d'intervalle définie par la condition:

$$\omega(\delta) = \max_{\|k\| \le \delta} \|\varphi(x+k) - \varphi(x)\|.$$

Nous avons alors le théorème suivant:

Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue dont le module de continuité  $\omega$  satisfait à la condition suivante:

A tout nombre positif A on peut associer un nombre positif  $\alpha$  tel que, pour  $\delta \leq \alpha$  on ait:

$$\frac{\omega(\delta)}{\delta} > A.$$

Etant alors donné une fonction continue f(x), on peut trouver une infinité de fonctions continues F(x) qui soient de primitives de seconde éspèce pour f par rapport à  $\varphi$ , le quotient du module de continuité de la différence de deux quelconque d'entre elles par le module de continuité de  $\varphi$  tendant vers zéro avec h.

Rappelons que F est une primitive de seconde espèce si l'on a:

$$F(x+h)-F(x)=f(x)\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}+\varepsilon\omega(|h|),$$

 $\varepsilon$  étant infiniment petit avec h. Remarquons en outre que la classe très étendue de fonctions  $\varphi$  telles que:

$$A \, \delta^{\mu} < \omega(\delta)$$
 (0 <  $\mu$  < 1)

satisfait aux conditions de l'énoncé, comme on le voit facilement.

Ceci posé, considérons la décomposition de première espèce de f(x) en fonction de  $\varphi$ , soit:

$$f(x) = f_1[u_1(x) \varphi(x)] + \cdots + f_n[u_n(x) \varphi(x)] + \cdots$$

les  $u_i(x)$  ayant la même signification qu'au paragraphe 1. Posons

$$F_n(t) = \int_1^t f_n(t) dt$$

et considérons la fonction F(x) définie par l'équation:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F_n[u_n(x) \varphi(x)]}{u_n(x)}$$
 (1 \le x \le 2)

F(x) est une primitive de seconde espèce pour f.

Tout d'abord la série figurant au second membre de cette équation est absolument et uniformément convergente. En effet on aura, en vertu de nos hypothèses:

$$\left| \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n} \right| < M_1 |f_n(t)| \tag{3}$$

car nous pouvons supposer que t varie dans un intervalle fini. Mais nous avons vu, paragraphe 1, que  $|f_n(t)|$  restait inférieure au terme général d'une série numérique à termes positifs convergente. Donc:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n} \right| < M_1 \sum_{1}^{\infty} \alpha_n < M_2.$$

Et par suite:

$$F(x+h)-F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n$$

 $A_n$  étant la différence des termes généraux des séries:

$$F(x+h)$$
 et  $F(x)$ .

On peut écrire:

$$\mathcal{A}_{n} = \frac{1}{u_{n}(x+h)} \{ F_{n}[u_{n}(x+h)\varphi(x+h)] - F_{n}[u_{n}(x)\varphi(x)] \}$$

$$- \frac{F_{n}[u_{n}(x)\varphi(x)]}{u_{n}(x)u_{n}(x+h)} [u_{n}(x+h) - u_{n}(x)]$$

Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires.

ou encore, en appliquant la formule de la moyenne au premier terme du second membre:

$$\mathcal{A}_n = f_n(\theta_n) \{ \varphi(x+h) - \varphi(x) \} + \left[ \frac{\varphi(x) f_n(\theta_n)}{u_n(x+h)} - \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n(x+h) u_n(x)} \right] [u_n(x+h) - u_n(x)].$$

Done:

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta_n) [\varphi(x+h) - \varphi(x)] + R \tag{4}$$

avec:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\varphi(x) f_n(\theta_n)}{u_n(x+h)} - \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n(x+h) u_n(x)} \right] [u_n(x+h) - u_n(x)]$$

 $\theta_n$  étant compris dans l'intervalle qui a pour extrémités:

$$u_n(x) \varphi(x)$$
 et  $u_n(x+h) \varphi(x+h)$ .

Ceci posé, la démonstration du théorème reposera sur le lemme suivant, que nous allons établir:

Il existe un nombre positif M, tel que l'on ait pour n arbitraire:

$$\left|\frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{\omega(|h|)}\right| < M. \tag{5}$$

Nous pouvons supposer, pour simplifier, que la projection sur Ox des sommets de la ligne polygonale représentant u divisent l'intervalle (1, 2) en  $p_n$  parties égales. Supposons d'abord:

$$|h| > \frac{1}{p_n}$$

et désignons par  $(x_1, x_2)$  le plus petit intervalle dont les extrémités sont des points appartenant à la division précédente, qui renforme l'intervalle (x, x+h) à son intérieur. Soit de même  $(x'_1, x'_2)$  le plus grand des intervalles analogue qui est contenu dans (x, x+h), cet intervalle pouvant se réduire à un seul point. Nous avons, en supposant h positif,

$$x'_1 - x_1 = \frac{1}{p_n}$$
 d'où:  $x'_1 - x_1 \le |h|$ 

$$x_2 - x'_2 = \frac{1}{p_n}$$
 d'où:  $x_2 - x'_2 \le |h|$ .

Si h était négatif on aurait des conclusions analogues, en échangeant  $x_1$  et  $x_2$ . Or:

$$||u_n(x+h)-u_n(x)| \le ||u_n(x+h)-u_n(x'_2)| + ||u_n(x'_2)-u_n(x'_1)| + ||u_n(x'_1)-u_n(x)|.$$

Mais  $u_n$  varie linéairement dans chacun des deux intervalles:

$$(x_1, x'_1); (x_2, x'_2).$$

On a donc:

$$||u_n(x+h)-u_n(x)|| \leq ||u_n(x_2)-u_n(x_2')|| + ||u_n(x_2')-u_n(x_1')|| + ||u_n(x_1')-u_n(x)||.$$

Or, en chaque point de division de (1, 2) on a:

$$u_n(x_i) = \frac{x_i}{\boldsymbol{\varphi}(x_i)}$$

et l'on voit facilement que l'on peut écrire, en désignant par N une constante:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \le N |\varphi(x_2)-\varphi(x_2')| + N |\varphi(x_2')-\varphi(x_1')| + N |x_2-x_1| + N |\varphi(x_1')-\varphi(x_1)|.$$

Or:

$$x'_2 - x'_1 < |h|; \qquad x_2 - x_1 < 3|h|$$

et par suite:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \leq 3 N\omega(|h|) + 3 N|h|.$$

Les conditions de l'énoncé entraînent alors dans le cas actuel la conclusion annoncée. Passons maintenant au cas où:

$$|h| < \frac{1}{p_n}$$

A l'intérieur de (x, x+h) il y a alors au plus un point de division  $x_0$ . Supposons qu'il en soit ainsi. Soit  $x_{-1}$  le point de division qui précède immédiatement  $x_0$  et  $x_1$  celui qui le suit. On a:

$$x_0 - x < |h|, |x + h - x_0| < |h|,$$

par suite:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \le |u'_n(x)| |h| + |u'_n(x_0)| |h|$$

ou encore:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \leq N_1 \left| \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0} \right| |h| + N_1 \left| \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_{-1})}{x_0-x_{-1}} \right| |h| + N_2 |h|$$

c'est-à-dire:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \leq N_1 \frac{\omega(x_1-x_0)}{x_1-x_0} |h| + N_1 \frac{\omega(x_0-x_{-1})}{x_0-x_{-1}} |h| + N_2 |h|$$
 (6)

et des conditions de l'énoncé découlent encore la même conclusion. 1

Enfin, si, à l'intérieur de (x, x+h) il n'existait aucun point de division, nous aurons, en désignant par  $(x_0, x_1)$  l'intervalle formé de dux points de division successifs qui contiennent l'intervalle précédent à son intérieur:

$$|u_n(x+h) - u_n(x)| < N_1 \frac{\omega(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} |h| + N_2 |h|$$
(6')

et notre lemme est vrai dans tous les cas. Remarquons maintenant que, pour n inférieur à un entier fixe p, d'ailleurs arbitraire, on a:

$$\lim_{h=0} \left| \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{\omega(|h|)} \right| = 0 \tag{7}$$

car on aura pour ces p fonctions:

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| < M|h|.$$

Donnons alors à la relation (4) notre attention et considérons le premier terme du second membre qui peut s'écrire:

$$P = [\varphi(x+h) - \varphi(x)] \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta_n).$$

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 1, on a:

$$|f_n(\theta_n)| < \alpha_n$$

le second membre de cette inégalité représentant le terme général d'une série convergente. Nous pouvons alors trouver un entier k tel que, pour n supérieur à k, on ait, étant donné un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ :

$$\frac{\omega(k)}{k} \frac{h}{\omega(h)}$$

reste inférieure à 2 si h est compris entre o et 2k, comme il résulte des propriétés du module de continuité.

13 — 28538. Acta mathematica. 53. Imprimé le 28 mars 1929.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> La quantité

$$\left| \sum_{1}^{\infty} f_n(\theta_n) - \sum_{1}^{n} f_n(\theta_n) \right| \le \frac{\varepsilon}{4}$$
 (8)

Considérons maintenant le terme complémentaire de la formule (4). Nous avons:

$$\mid R\mid <\sum_{1}^{\infty}\beta_{n}\mid u_{n}(x+h)-u_{n}(x)\mid$$

 $\beta_n$  étant le terme général positif d'une série numérique convergente. On peut écrire:

$$\|R\| < \omega(\|h\|) \sum_{1}^{\infty} \beta_{n} \left| \frac{u_{n}(x+h) - u_{n}(x)}{\omega(\|h\|)} \right|$$

En vertu de l'inégalité (5) nous pouvons trouver un entier q tel que:

$$\sum_{n\geq q}^{+\infty} \beta_n \left| \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{\omega(|h|)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc pour tout entier n supérieur à q, nous aurons:

$$|R| < \omega(|h|) \sum_{1}^{n} \beta_{n} \left| \frac{u_{n}(x+h) - u_{n}(x)}{\omega(|h|)} \right| + \frac{\varepsilon}{4} \omega(|h|). \tag{9}$$

Nous pouvons, de même, trouver un entier r tel que si n lui est supérieur on ait:

$$\left| f(x) - \sum_{1}^{n} f_{n}(u_{n} \varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Donnons alors à n une valeur fixe p, supérieure à la fois à k, q r. Nous pouvons, en tenant compte de la continuité des  $f_i$ , et de l'inégalité (7), trouver un nombre positif  $\mu$  tel que:

$$|h| \leq \mu$$

entraîne à la fois:

$$\left| \sum_{n=1}^{n=p} f_n[u_n \varphi] - \sum_{n=1}^{n=p} f_n(\theta_n) \right| < \frac{\varepsilon}{8}; \quad \text{d'où:} \quad \left| f(x) - \sum_{1}^{p} f_n(\theta_n) \right| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{n=p} \beta_n \left| \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{\omega(|h|)} \right| \le \frac{\varepsilon}{4}.$$
(10)

L'inégalité (9), où n égale p, devient alors:

$$|R| < \frac{\varepsilon}{2} \omega(|h|).$$

L'inégalité (8) donne alors, en tenant compte de (10):

$$\left| \left[ \varphi(x+h) - \varphi(x) \right] \sum_{1}^{\infty} f_n(\theta_n) - \left[ \varphi(x+h) - \varphi(x) \right] f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \omega(|h|)$$

et l'équation (4) devient:

$$|F(x+h)-F(x)-f(x)[\varphi(x+h)-\varphi(x)]|<\varepsilon\omega(|h|)$$

ce qui établit la relation à démontrer.

**Remarque.** Il existe une propriété des opérations précédentes qui rappelle l'intégration par parties. Nous pouvons en effet, développer  $\varphi(x)$  en fonction de f(x). Soit:

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_n[w_n(x)f(x)]$$

en supposant que f ne s'annule pas. Dans le cas contraire, on lui ajouterait une constante convenable. Considérons alors la fonction:

$$F(x) = f(x) \varphi(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n[w_n(x)f(x)]}{w_n(x)} \qquad \left( \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_n(t) dt \right)$$
 (11)

où l'on a posé:

$$\boldsymbol{\Phi}_n(t) = \int_1^t \boldsymbol{\varphi}_n(t) dt.$$

Nous avons, comme le montre un calcul facile:

$$F(x+h) - F(x) = f(x) \{ \varphi(x+h) - \varphi(x) \} + \{ f(x+h) - f(x) \} \left[ \varphi(x+h) - \sum_{1}^{\infty} \varphi_n(\theta_n) \right] + \sum_{1} \beta'_n [w_n(x+h) - w_n(x)]$$

Les raisonnements précédents, appliqués à cette expression, montrent que, si, sans faire aucune hypothèse sur  $\varphi(x)$  en dehors de la continuité, on suppose que f(x) satisfait aux conditions figurant dans l'énoncé du théorème donné dans le paragraphe précédent on peut écrire dans le premier cas:

$$F(x+h)-F(x)=f(x)\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}+\varepsilon\omega'(|h|)$$

 $\omega'(|h|)$  étant le module de continuité de f(x).

Observons que la formule (11) est bien analogue comme nous l'avions annonçé de la formule classique:

$$\int f d\varphi = f \varphi - \int \varphi df$$

qui est valable quand f et  $\varphi$  ont des dérivées.

4. Autres extensions des résultats précédents. Comme nous l'avons vu, dans l'introduction, nous sommes conduit à nous poser le problème général suivant: Former des fonctions F(x) telles que, étant donnée une fonction continue  $\varphi(x, \alpha)$  on puisse trouver une fonction continue f(x) satisfaisant à la condition suivante:

$$F(x+h)-F(x)=\varphi\left[x+h,f(x)\right]-\varphi\left[x,f(x)\right]+\varepsilon\,\omega\left(\left|h\right|\right),$$

 $\omega(|h|)$  étant le module de continuité de  $\varphi(x, \alpha)$  par rapport à x. Nous le définirons avec plus de précision, par la relation:

$$\omega(|h|) = \max |\varphi(x+k, \alpha) - \varphi(x, \alpha)| \qquad \qquad \left(|k| \le |h|\right) \\ \alpha |\le M$$

M étant le maximum de |f(x)| dans l'intervalle considéré. Nous nous bornerons à indiquer la solution de cette question dans des cas particuliers, d'ailleurs étendus.

Nous supposerons d'abord que la fonction  $\varphi(x, \alpha)$  est de la forme:

$$\Phi[\varphi_1(x), \alpha]$$

 $oldsymbol{\sigma}$  admettant une dérivée partielle continue par rapport à  $oldsymbol{arphi}_1$ .

Il est alors facile de montrer qu'à toute fonction continue f(x), on peut associer une fonction continue F possédant la propriété en question, pourvu que  $\varphi_1(x)$  satisfasse à l'inégalité figurant dans l'énoncé du théorème donné paragraphe 2.

Nous dirons encore ici que F(x) est une primitive de seconde espèce de f par rapport à  $\varphi(x, \alpha)$ .

Considérons la fonction:

$$\Phi'_{\varphi}[\varphi_1(x), f(x)]$$

et soit F sa primitive de seconde espèce par rapport à  $\varphi_1(x)$ . Nous avons donc:

$$F(x+h)-F(x)=\mathbf{\Phi}[\varphi_1(x+h),f(x)]-\mathbf{\Phi}[\varphi_1(x),f(x)]+\varepsilon\omega_1(|h|)$$

car, comme on le voit facilement:

$$F(x+h)-F(x) = \Phi'_{\varphi}[\varphi_1(x), f(x)][\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)] + \varepsilon \omega_1(|h|).$$

Or, en désignant par M un nombre tel que:

$$|\Phi'_{\varphi}| < M$$

et par  $\omega$  le module de continuité de  $\varphi(x, \alpha)$ , on a:

$$\omega(\lceil h \rceil) < M\omega_1(\lceil h \rceil)$$

et, par suite, la proposition énoncée.

Plus généralement, supposons que, pour toute valeur de  $\alpha$ ,  $\varphi(x, \alpha)$  soit une primitive de seconde espèce par rapport à une fonction  $\psi(x)$  satisfaisant à la condition de l'énoncé du théorème donné paragraphe 2. On a alors:

$$\varphi(x+h, \alpha) - \varphi(x, \alpha) = \varphi'(x, \alpha) [\psi(x+h) - \psi(x)] + \varepsilon \omega(|h|)$$

 $\omega(|h|)$  étant le module de continuité de  $\psi$ ,  $\varphi'(x, \alpha)$  la dérivée partielle de seconde espèce de  $\varphi$  par rapport à  $\psi$ , et  $\varepsilon$  un infiniment petit indépendant de  $\alpha$ . Soit alors F(x) une primitive de seconde espèce pour la fonction  $\varphi'[x, f(x)]$ . On a:

$$F(x+h)-F(x)=\varphi'[x,f(x)][\psi(x+h)-\psi(x)]+\varepsilon'\omega(|h|).$$

D'où, en comparant avec l'inégalité précédente, après y avoir remplacé  $\alpha$  par f(x):

$$F(x+h)-F(x) = \varphi[x+h, f(x)] - \varphi[x, f(x)] + (\varepsilon - \varepsilon')\omega(|h|).$$

Nous pouvons faire, encore ici, une remarque analogue à celle qui termine le paragraphe précédent. Supposons que  $\varphi(x, \alpha)$  ait, par rapport à  $\alpha$  une dérivée continue  $\varphi'(x, \alpha)$ , au sens classique. Désignons par f(x) une fonction de la classe définie dans le théorème du paragraphe 2, et soit:

$$F(x)-\varphi[x,f(x)]$$

la primitive de seconde espèce de  $\varphi'_a[x, f]$  par rapport à f(x). Nous avons:

$$F(x+h) - F(x) = \varphi[x+h, f(x)] - \varphi[x, f(x)]$$

$$+ \{\varphi'_{\alpha}[x+h, c] - \varphi'_{\alpha}[x, f(x)]\} [f(x+h) - f(x)] + \varepsilon' \omega_{\alpha}([h])$$

c désignant un nombre compris entre f(x) et f(x+h). On a donc bien une relation de la forme:

$$F(x+h)-F(x)=\varphi[x+h,f(x)]-\varphi[x,f(x)]+\varepsilon_1\omega(|h|)$$

que prouve que F est une primitive de seconde espèce pour f par rapport à  $\varphi(x, \alpha)$ , pourvu que l'on elargisse un peu la définition donnée au début, en y remplaçant le module de continuité de  $\varphi$  par celui de f.

5. Dérivation par rapport à une fonction. Il est évident que la fonction F définie par une relation de la forme:

$$F(x+h)-F(x)=f(x)[\varphi(x+h)-\varphi(x)]+\varepsilon\omega(|h|)$$

n'a pas nécessairement f(x) comme dérivée par rapport à  $\varphi$ . En effet, il peut arriver, par exemple, que l'on ait à la fois:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=0,$$
  $F(x+h)-F(x)\neq 0.$ 

C'est pourquoi nous avons employé la locution de primitive de seconde espèce.

Mais on peut dans des cas étendus, associer à toute fonction f une fonction F qui admette f comme dérivée par rapport à  $\varphi$ , à condition de faire tendre l'accroissement de la variable x vers zéro par valeurs particulières convenables. Cette dernière restriction est évidemment essentielle, sinon l'accroissement de F devrait être nul en même temps que celui de  $\varphi$ , F serait alors une fonction de  $\varphi$  et il en serait de même de sa dérivée par rapport à  $\varphi$ . On ne pourrait donc résoudre le problème général de l'obtention des primitives que pour des fonctions de la fonction  $\varphi$ . Supposons alors que l'on fasse tendre h vers zéro en lui faisant emprunter les valeurs de la suite décroissante:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, \ldots$$

Si le rapport:

$$\frac{h_i}{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)}$$

tend uniformément vers zéro, quand i tend vers l'infini, et, si l'on a en outre, quel que soit i et j:

$$\left| \frac{\varphi(x+h_j) - \varphi(x)}{\varphi(x+h_i) - \varphi(x)} \right| < M \left| \frac{h_j}{h_i} \right| \qquad (j < i)$$

M désignant une certaine constante, à toute fonction continue f(x) on peut associer une fonction continue F(x) telle que:

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)} = f(x).$$

Cette fonction F est d'ailleurs donnée par la même expression qui exprime les primitives de seconde espèce:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n}.$$

On établirait sans peine cette proposition en adoptant une marche parallèle à celle que nous avons employée pour les propositions relatives à la primitive de seconde espèce. On s'appuiera sur les deux lemmes suivants aisés à établir:

1. Il existe un nombre positif fixe K, tel que, pour toutes les valeurs de n et de i:

$$\left|\frac{u_n(x+h_i)-u_n(x)}{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)}\right| < M.$$

2. Si l'on considère une fonction  $u_n$  quelconque, on a:

$$\lim_{i=\infty} \frac{u_n(x+h_i)-u_n(x)}{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)} = 0.$$

Signalons en outre que si l'on suppose seulement que  $\varphi(x)$  jouisse de la propriété exprimée par la relation:

$$\lim_{i=\infty}\frac{h_i}{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)}=0$$

on peut étendre la propriété précédente en se servant d'une décomposition de seconde espèce de f en fonction de  $\varphi$ . Il y a encore dérivabilité de f par rap-

port à  $\varphi$  au moins en tous les points x d'un ensemble de mesure nulle, mais partout dense sur (1, 2) la dérivée f pouvant d'ailleurs ne pas être atteinte uniformément.

Signalons enfin que les propriétés analogues à l'intégration par parties, signalées paragraphe 3 s'étendent encore au cas actuel, comme on le voit facilement.

## DEUXIÈME PARTIE.

### Théorie de la pseudo-dérivation.

Nous aurons à utiliser certaines notions relatives aux ensembles de fonctions, et surtout la notion de pseudo-accumulation que j'ai introduite et dont j'ai établi les propriétés essentielles dans ma thèse. Pour plus de clarté, j'exposerai donc brièvement ici cette théorie en donnant d'ailleurs certains résultats inédits.

Soit W un ensemble de fonctions f(x). Supposons les définies dans un même intervalle (1, 2). On dit qu'une fonction  $f_0$  est une fonction d'accumulation de l'ensemble, si, à tout nombre positif  $\varepsilon$ , on peut faire correspondre au moins une fonction de W telle que l'on ait:

$$|f(x) - f_0(x)| \le \varepsilon. (1 \le x \le 2)$$

Or, en sait que tout ensemble de fonctions également bornées, c'est-à-dire vérifiant les inégalités:

où M est fixe, n'a pas toujours de fonction d'accumulation. Nous allons montrer cependant, qu'il existe dans tous les cas une fonction dont les propriétés relatives à l'ensemble W sont des généralisations naturelles des propriétés de la fonction d'accumulation. Nous poserons la définition suivante:

Soit W un ensemble formé d'une infinité de fonctions f(x), définies dans un même intervalle (a, b). Une fonction  $f_0(x)$  est une fonction de pseudo-accumulation de cet ensemble, si, à tout nombre positif  $\varrho$  et à tout nombre entier k en peut faire correspondre au moins une fonction f(x) de W et p valeurs  $x_1, x_2, x_3, \ldots$ , de la variable x satisfaisant aux conditions suivantes:

105

$$p \ge k$$
.

2º) Les inégalités

$$|f(x_i)-f_0(x_i)| \le \varrho \qquad (i=1, 2, \dots p)$$

sont vérifiées.

- 3°) A chaque division de (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels, correspond un nombre entier m tel que pour  $k \ge m$  il existe toujours au moins un  $x_i$  intérieur à chacun des intervalles de la division considérée.
- 1. Existence des fonctions de pseudo-accumulation. Nous allons établir le théorème suivant:

Tout ensemble W renfermant une infinité de fonctions également bornées admet au moins une fonction de pseudo-accumulation continue, ou non mais mesurable.

Représentons graphiquement chaque fonction de W par une courbe d'équation:

$$y = f(x) \qquad (1 \le x \le 2)$$

considérons alors p parallèles à  $Oy: \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{p-1}$  d'abscisses respectives:

$$1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-2} < 2$$
.

Donnons nous un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ . Nous allons définir ce qu'il faut entendre par: filtrage ( $\varepsilon$ ) de W sur les  $\mathcal{A}_i$ . Sur  $\mathcal{A}_0 = Oy$  les courbes de W determinent au moins un point d'accumulation  $P_0$ . Soit  $A_0$   $B_0$  le segment de  $\mathcal{A}_0$  de centre  $P_0$  et longueur  $\varepsilon$ . Il existe une infinité de courbes de W qui ont un point entre  $A_0$  et  $B_0$ . Soit  $W^0$  l'ensemble qu'elles forment. Sur  $\mathcal{A}_1$  les courbes de W détermineront au moins un point d'accumulation  $P_1$  et il existera un ensemble  $W^1$  extrait de  $W^0$  formé d'une infinité de courbes ayant chacune un point sur le segment  $A_1B_1$  de  $\mathcal{A}_1$  qui a pour centre  $P_1$  et  $\varepsilon$  pour longueur. On voit immédiatement qu'en poursuivant p fois le processus ci-dessus, nous finirons par obtenir sur chaque  $\mathcal{A}_i$  un segment  $A_i$   $B_i$  de longueur  $\varepsilon$  et, d'autre part un ensemble  $W(\varepsilon)$  renfermant une infinité de courbes telles que leurs points d'intersection avec les  $\mathcal{A}_i$  successifs soient situées entre  $A_i$  et  $B_i$ . Nous dirons, pour abréger, que le filtrage  $(\varepsilon)$  de W sur les  $\mathcal{A}_i$  est l'opération qui permet d'extraire de W l'ensemble  $W(\varepsilon)$ .

Nous voyons ainsi que cette méthode de filtrage nous permet d'extraire de W un ensemble renfermant une infinité de fonctions et présentant sur p droites 14-28538. Acta mathematica. 53. Imprimé le 28 mars 1929.

données p étranglements successifs égaux à  $\varepsilon$ , p pouvant d'ailleurs être pris aussi grand, et  $\varepsilon$  aussi petit qu'on le voudra.

Ceci posé, soit:

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \ \varepsilon_n, \ldots$$

une suite décroissante de nombres positifs tendant vers zéro. Soit  $W_1$  l'ensemble obtenu en faisant le filtrage  $(\varepsilon_1)$  de W sur Oy et sur la parallèle à Oy d'abscisse 2. Divisons (1, 2) en deux parties égales, et par les sommets des 2 intervalles partiels obtenus, menons des parallèles à Oy sur lesquelles nous effectuerons le filtrage  $(\varepsilon_2)$  de W ce qui nous donnera ainsi un ensemble  $W_2$  dont on extraira un ensemble  $W_3$  en en faisant le filtrage  $(\varepsilon_3)$  sur les parallèles à Oy d'abscisses égales à celles des sommets des intervalles obtenus en divisant (1, 2) on trois parties égales, . . . et ainsi de suite. D'une façon générale, pour obtenir  $W_n$ , on divise (1, 2) en n parties égales, et par les extrémités des intervalles partiels ainsi obtenus, on mène des parallèles à Oy sur lesquelles on fait le filtrage  $(\varepsilon_n)$  de  $W_{n-1}$ .

Nous formons ainsi une suite

$$W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots \tag{1}$$

d'ensembles où chaque  $W_i$  renforme une infinité de fonctions appartenant toutes à  $W_{i-1}$ .

Soit alors D une parallèle à Oy d'abscisse x. Considérons l'ensemble des points d'intersection de D avec les fonctions de  $W_i$ . Cet ensemble est borné, inférieurement et supérieurement. Désignons respectivement par I et par J sa borne inférieure et sa borne supérieure. Nous désignons par les mêmes lettres I et J les ordonnées des points I et J on a:

$$I_1 \le I_2 \le \cdots \le M$$

$$J_1 \ge J_2 \ge \cdots \ge -M$$

M étant un nombre fixe, ce dernier point résultant de l'hypothèse:

$$|f(x)| < M$$
.

Les points  $I_i$  et  $J_i$  tendent donc respectivement vers des limites I et J et le segment IJ est intérieur à tous les  $I_iJ_i$ . Soit y l'ordonnée d'un des points I ou J, I par exemple. Posons pour chaque valeur de x:

$$f_0(x) = y$$
 (1, 2).

Il est clair que  $f_0(x)$  est une fonction de pseudo-accumulation de W. En effet, prenons un  $\varepsilon$  positif, et soit k un entier quelconque. Il existe un nombre entier p tel que l'on ait:

$$\varepsilon \geq \varepsilon_p \geq \varepsilon_{p+1} > \cdots$$
.

Soit alors n un nombre entier plus grand que p et que k. Considérons l'ensemble  $W_n$  de la suite (1) et désignons par  $\mathcal{L}_i$  une quelconque des n-1 parallèles à Oy menées par les extrémités des intervalles partiels obtenus en divisant (1, 2) en n parties égales. Les lettres I et J gardant la même signification que plus haut, nous avons d'après les propriétés des ensembles de la suite (1):

$$I_nJ_n\!<\!arepsilon_n$$

I et J étant relatifs à la droite considérée. Or, le point I est intérieur au segment  $I_nJ_n$ . Donc, si de part et d'autre de I, nous portons sur  $\mathcal{L}_i$  des longueurs égales à  $\varepsilon$ , nous obtenons un nouveau segment à l'intérieur duquel toutes les fonctions de  $W_n$  ont chacune un point, ce qui établit la proposition, le nombre n pouvant être pris arbitrairement grand.

Exemple: considérons l'ensemble des fonctions

$$y = (x-1)^n$$
 (1, 2)  $(n = 1, 2, ...)$ 

il y a une fonction de pseudo-accumulation et une seule définie par les conditions:

$$y = 0 1 \le x \le 2$$

$$y = 1 x = 1$$

Fonctions également continues. Théorème d'Ascoli. On sait que les fonctions d'un ensemble W sont également continues, si, à tout  $\varepsilon > 0$ , on peut faire correspondre un  $\delta > 0$  tel que l'inégalité:

$$|x_2-x_1| \leq \delta$$

entraı̂ne pour toutes les fonctions de W:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le \varepsilon.$$

Il est alors facile de retrouver cet énoncé du à Ascoli:

Tout ensemble de fonctions également continues et également bornées admet au moins une fonction d'accumulation continue.

Formons avec les fonctions de W la suite (1). Donnons nous arbitrairement un nombre positif  $\alpha$ . Je dis qu'il existe un entier q tel que pour n supérieur à q, la valeur absolue de la différence des valeurs correspondant à un même point x de deux fonctions quelconques de W reste inférieure à  $\alpha$ . En effet nous pouvons choisir n tel que pour n supérieur à q, on ait:

$$|f(x'') - f(x')| \le \frac{\alpha}{3}$$

quelle que soit la fonction f de W, x' et x'' étant deux valeurs de x prises dans un des intervalles partiels obtenus en divisant (1, 2) en n parties égales par des points d'abscisses  $x_1, x_2, \ldots x_n$ .

$$2^{\circ}$$
)  $\frac{\alpha}{3} \geq \varepsilon_n > \cdots$ .

On a, en désignant par  $f_1, f_2$  deux fonctions arbitraires de  $W_n, x''$  étant compris entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ :

$$|f_2(x_i'') - f_1(x_i'')|$$
  $(i = 1, 2, ..., n-1)$ 

$$\leq |f_2(x_i'') - f_2(x_i)| + |f_1(x_i) - f_1(x_i'')| + |f_2(x_i) - f_1(x_i)| < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \epsilon_n \leq \alpha.$$

Il en résulte immédiatement que, sur toute droite D, les points I et J convergent uniformément vers le même point I, dont le lieu définit une fonction d'accumulation de W qui, étant la limite de fonctions continues convergeant uniformément vers elle, est aussi continue.

Application. On peut très facilement établir le théorème suivant qui rentre dans l'ordre d'idées étudié dans ce mémoire et qui montre l'utilité des notions précédentes.

Soit un ensemble W de fonctions continues f(x), à dérivées continues. Si W admet une fonction d'accumulation  $f_0(x)$ , continue et admettant une dérivée continue  $f_0'(x)$ , cette dérivée est une fonction de pseudo-accumulation pour l'ensemble W' formé avec les dérivées f' des fonctions de W.

2. Continuité de la fonction de pseudo-accumulation. Nous allons établir les deux lemmes suivants qui nous serons utiles plus loin.

Pour qu'un ensemble U de fonctions également bornées admette une fonction de pseudo-accumulation continue, il faut et il suffit qu'on puisse extraire de U un ensemble W d'une infinité d'éléments tel qu'à chaque fonction de W on puisse faire correspondre une fonction continue g(x) de manière à satisfaire aux conditions cidessous:

- 1º) Les fonctions g sont également continues.
- 2°) A tout nombre positif  $\varepsilon$  et à tout entier n donné, on peut faire correspondre au moins une fonction de W et n valeurs de x satisfaisant aux inégalités:

$$|g(x_i)-f(x_i)| \leq \varepsilon$$
  $(i=1,2,\ldots n)$ 

g étant la fonction associée à f.

On suppose, en outre, quand n augmente indéfiniment que les valeurs de x définies ci-dessous tendent à se répartir uniformément sur Ox.

Les conditions énoncées sont suffisantes. En effet, nous pouvons extraire de W une suite illimitée S de fonctions:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

dont le terme général est la fonction qui correspond, d'après l'énoncé, à une valeur pour  $\varepsilon$  égale à l'inverse de n. Or, les fonctions associées aux termes successifs de S ont au moins une fonction d'accumulation continue d'après le théorème d'Ascoli et cette fonction est aussi une fonction de pseudo-accumulation pour W.

La condition est nécessaire. Soit F une fonction de pseudo-accumulation continue, f une fonction vérifiant les conditions:

$$|f(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$$

quand x a l'une des valeurs suivantes:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

A la fonction f faisons alors correspondre la fonction g dont la représentation graphique s'obtient en inscrivant dans la courbe représentant f la ligne polygonale qui a ses sommets projetés sur Ox aux points de la suite précédente. D'après la définition de la pseudo-accumulation et en vertu de la continuité de F, on peut former une suite de fonctions g, convergeant uniformément vers F. Ces fonctions sont donc également continues et l'ensemble des f qui leur cor-

respondent possède bien les propriétés de l'ensemble W de l'énoncé. D'après ce qui précède, on peut encore dire:

Pour qu'un ensemble U de fonctions également bornées admette une fonction de pseudo-accumulation, continue, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif  $\varepsilon$  et à tout entier n on puisse faire correspondre une fonction f de U et au moins n valeurs de x telles que l'on ait:

$$|f(x_j) - f(x_i)| < \varepsilon \qquad (i, j = 1, 2, \dots n)$$

pourvu que:

$$|x_j - x_i| < \eta$$

 $\eta$  ne dépendant que de  $\varepsilon$ .

Les valeurs précédentes de x sont, en outre, supposées tendre à se répartir uniformément sur Ox.

# 2. Introduction de la notion de pseudo-dérivée. Soit une fonction

$$y = F(x) \qquad (1 \le x \le 2), \qquad (1)$$

dans la courbe C qui la représente graphiquement inscrivons une ligne polygonale de n cotés  $C_n$  dont les sommets successifs se projettent sur Ox aux points d'abscisses

$$1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 2.$$

Considérons la fonction  $f_n$  ainsi définie:

$$f_n(x) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \qquad (x_{i-1} \le x < x_i), \qquad (2)$$

cette fonction  $f_n(x)$  est égale à la dérivée de la fonction  $F_n(x)$ , représentée graphiquement par la ligne polygonale  $C_n$ . Considérons alors une suite  $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$  de ces lignes polygonales telles que le nombre des cotés de chacune d'elles augmente indéfiniment leurs projections sur Ox tendant vers zéro. Soit W l'ensemble des  $f_n(x)$  correspondantes. Pour plus de simplicité, supposons que F satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre un:

$$|F(x+h) - F(x)| < M|h|.$$
 (3)

On aura done:

$$|f_n(x)| < M$$

quel que soit M. Il peut alors se présenter deux cas:

- 1°) W admet une fonction d'accumulation continue f(x).
- 2°) W n'admet pas de fonction d'accumulation continue.

Dans le premier cas, sur lequel nous reviendrons, F(x) admet f(x) comme dérivée.

Plaçons nous maintenant dans le second cas. Nous savons que W admet toujours une fonction de pseudo-accumulation, bornée et mesurable. Le cas où W aurait une fonction d'accumulation discontinue rentre dans le cas actuel.  $\Pi$  est donc naturel de dire que f est une pseudo-dérivée de F. Nous sommes ainsi conduit à poser la définition suivante:

Une fonction F(x) admet f(x) comme pseudo-dérivée par rapport à la fonction d'intervalle  $\varphi(\delta)$  s'il est possible de satisfaire aux conditions suivantes:

I. A tout nombre positif  $\varepsilon$  il est possible de faire correspondre un entier n et n couples:

$$(x_1, x_1'), (x_2, x_2'), \ldots, (x_n, x_n')$$

de valeurs pour x de manière à avoir:

$$\left|\frac{F(x_i')-F(x_i)}{\varphi[(x_i', x_i)]}-f(x_i)\right|<\varepsilon.$$

- 2. Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, n tend vers l'infini, et  $\max |x_i'-x_i|$  tend vers zéro.
- 3. Si l'on divise (1, 2) en p intervalles partiels on pourra trouver un nombre positif  $\varepsilon_1$  tel que, pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  il y ait au moins un point x intérieur à chacun de ces intervalles.

Plus brièvement, cela revient à dire que le rapport:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{\varphi(h)}$$

diffèrera de f(x) d'aussi peu que l'on voudra, en des points x en nombre aussi grand qu'on voudra, ces point tendant d'ailleurs à former un ensemble partout dense sur (1, 2).

D'après cette définition, si une fonction F satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à la fonction d'intervalle  $\varphi(\delta)$ , soit:

$$|F(x+h) - F(x)| < M|\varphi(h)| \tag{4}$$

cette fonction admet évidemment une pseudo-dérivée constituée par un des nombres dérivés  $\mathcal{A}(x)$  de cette fonction par rapport à  $\varphi$ . Mais la réciproque n'est pas vraie nécessairement. Une pseudo-dérivée ne coincide pas toujours avec un des nombres dérivés, même sur un certain ensemble.

Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des fonctions qui satisfont à une condition telle que (4). Soit:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, \ldots$$
 (S)

une suite de divisions de (1, 2) en  $1, 2, \ldots n, \ldots$  intervalles partiels quelconques, mais tendant tous vers zéro.  $\mathcal{A}_n$  est ainsi constitué par la réunion de n intervalles partiels  $(1, x_1), \ldots, (x_{n-1}, 2)$ . Nous poserons alors la définition complémentaire suivante:

La fonction F admet par rapport à  $\varphi$  une pseudo-dérivée f relative à la suite de divisions :

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n, \ldots$$

si, à tout  $\varepsilon$  positif et à tout entier p, on peut associer un entier q, au moins égal à p, tel que, dans chaque division  $\mathcal{A}_n$  de rang supérieur à q, il y ait au moins p intervalles partiels  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$  qui satisfassent aux conditions:

$$\left|\frac{F(x_i+\alpha_i)-F(x)}{\varphi((\alpha_i))}-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Ces intervalles tendent en outre à devenir nuls quand  $\varepsilon$  tend vers zéro et p vers l'infini. Enfin, leur répartition sur Ox doit tendre à devenir uniforme.

Plus brièvement, F admet f comme pseudo-dérivée relative à la suite S, si, parmis les quantités:

$$\left| \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varphi((x_{i+1}, x_i))} - f(x_i) \right|$$

calculées pour tous les intervalles partiels d'une même division  $\mathcal{A}_n$  de (1, 2) il y en a, quand n tend vers l'infini, un nombre indéfiniment croissant qui tend vers zéro.

Nous avons alors le théorème suivant, nullement évident à priori:

Soit F une fonction satisfaisant à la condition:

$$|F(x+h) - F(x)| < M |\varphi(|h|)|$$

113

 $\varphi$  étant une fonction d'intervalle donnée. Il est alors possible de faire correspondre à toute suite S:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n, \ldots$$

de divisions de (1, 2) en intervalles partiels, une fonction f(x) bornée et mesurable qui soit la pseudo-dérivée de F par rapport à  $\varphi$ , et relative à la suite S.

En effet, à chaque terme  $\mathcal{A}_n$  de S nous pouvons associer la fonction  $f_n(x)$  ainsi définie:

$$f_n(x) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varphi\{(x_{i+1}, x_i)\}} \qquad (x_i \le x < x_{i+1})$$

 $(x, x_1) \dots (x_{n-1}, z)$  étant les intervalles partiels de division appartenant à  $\mathcal{A}_n$ . On a bien:

$$|f_n(x)| < M$$

et l'ensemble W des  $f_n$  admet une fonction de pseudo-accumulation qui répond à la question, en supposant que les opérations de filtrage aient été éffectuées sur des parallèles à Oy d'abscisses égales à celles des extrémités de tous les intervalles appartenant aux diverses  $\mathcal{A}_n$  ce qui est toujours possible.

En résumé, quand on examine les aspects les plus généraux possibles que peut prendre la théorie de la dérivation, on voit que les propriétés d'une fonction F par rapport à une fonction d'intervalle  $\varphi(\delta)$  peuvent se classer en deux types principaux. (Nous supposons toujours, pour simplifier, qu'une condition à la Lipschitz est satisfaite.)

- Phénomènes de dérivabilité.
- Phénomènes de pseudo-dérivabilité.

Ce sont respectivement les analogues des phénomènes d'accumulation et de pseudo-accumulation dans les ensembles de fonctions, le premier cas étant un cas particulier remarquable du second. Or, si l'on se place au point de vue de la théorie classique de la dérivation, où la fonction d'intervalle  $\varphi(h)$  est identique à h, on voit en vertu du célèbre théorème de M. Lebesgue, que, en supposant toujours la condition de Lipschitz satisfaite, il existe une pseudo-dérivée qui est en même temps ici une dérivée sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle, résultat qui pourrait se déduire aussi des considérations ci dessus. Mais la propriété que nous venons de rappeler ne s'étendrait pas aux fonctions d'intervalle les plus générales, non additives. Dans ce cas, le phénomène de pseudo-dériva-

15 — 28538. Acta mathematica. 53. Imprimé le 30 mars 1929.

tion subsiste seul et il se présente donc bien d'après la proposition précédente comme une généralisation naturelle de celui de dérivation.

3. Formation de fonctions admettant une pseudo-dérivée continue donnée. Supposons pour simplifier que la pseudo-dérivée donnée soit égale à 1, le raisonnement étant le même dans tous les cas. Le problème est donc de trouver une fonction F(x) ayant par rapport à la fonction d'intervalle continue donnée, une pseudo-dérivée égale à 1. Supposons nos fonctions définies dans l'intervalle (0, 1) par exemple. Soit  $A_1$  le point de coordonnées 1 et  $\varphi(1)$ . Désignons par  $H_1$  la droite joignant O à  $A_1$ . Prenons sur  $H_1$  un point  $A_2$  distinct à la fois de O et de  $A_1$ , et soit  $A_3$  le point dont les coordonnées  $(x_3, y_3)$  sont respectivement égales à  $x_3$  et  $y_2 + \varphi(\{x_3, x_2\})$ ,  $x_3$  étant une valeur de x comprise, au sens strict, entre  $x_2$  et 1. Nous désignerons par  $H_2$  la nouvelle ligne polygonale dont les sommets successifs sont O,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_1$ , ces points étant rangés ici par ordre d'abscisses croissantes.

Sur le coté  $OA_2$  de  $\Pi_2$  prenons de même un point  $A_4$  de coordonnées  $(x_4, y_4)$ , distinct de O et de  $A_2$ , et soit  $A_5$  le point de coordonnées  $x_5$  et  $y_4 + \varphi\{(x_4, x_5)\}$  avec  $(x_4 < x_5 < x_2)$ . En effectuant des opérations analogues sur les deux autres cotés  $A_2A_3$  et  $A_3A_1$  de  $\Pi_1$  nous obtiendrons deux autres couples analogue au couple  $A_4$ ,  $A_5$  soit  $A_6$ ,  $A_7$  et  $A_8$ ,  $A_9$ . Désignons par  $\Pi_3$  la ligne polygonale dont les sommets successifs sont O,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_2$ ,  $A_6$ ,  $A_7$ ,  $A_3$ ,  $A_8$ ,  $A_9$ ,  $A_1$ . Nous obtiendrons de même une ligne polygonale  $\Pi_4$  en effectuant successivement relativement à chacun des cotés de  $\Pi_3$  des opérations analogues à celles que nous avons effectuées sur ceux de  $\Pi_3$ , et ainsi de suite indéfiniment. La suite de lignes polygonales obtenue est telle que tous les sommets de  $\Pi_n$  appartiennent aussi aux lignes polygonales d'indice supérieur. Si alors nous considérons la série:

$$F_1(x) + \{F_2(x) - F_1(x)\} + \cdots$$

où  $F_n$  désigne la fonction représentée graphiquement par  $\Pi_n$  on voit facilement qu'elle converge uniformément et définit par suite une fonction F qui admet évidemment 1 pour pseudo-dérivée par rapport à  $\varphi$ . En effet, tous les sommets de  $\Pi_n$  sont sur la courbe y = F(x), et, d'après la construction indiquée plus haut, on peut toujours trouver deux sommets de  $\Pi_n$  de coordonnées  $(\alpha_1, \beta_1)$ ;  $(\alpha_2, \beta_2)$  tels que:

$$\beta_2 - \beta_1 = \varphi \{(\alpha_1, \alpha_2)\}.$$

On étend sans peine la méthode précédente au cas où la pseudo-dérivée est une fonction quelconque. Il suffit de prendre les coordonnées de  $A_4$  égales à  $x_5$  et  $y_4 + f_4 \varphi\{x_4x_5\}$  etc.

On voit ainsi, qu'étant donné une fonction d'intervalle  $\varphi(\delta)$  on peut, à toute fonction f(x) associer une infinité de fonctions F telles que chacune d'elles admette f pour pseudo-dérivée par rapport à  $\varphi$ .

Observons que, dans le cas actuel, le rapport:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(h)}$$

peut ne pas tendre vers f quand h tend vers zéro même par valeurs particulières, et, en général cela n'aura pas lieu, quelle que soit la valeur x considérée. On peut dire que nous avons ici un cas de pseudo-dérivation pure.

Remarque. Si l'on prend  $\varphi(\delta) = \delta^{\alpha}$  il n'est pas possible de trouver une fonction ayant pour dérivée f(x) par rapport à  $\varphi$  à moins que f ne soit identiquement nulle et cela que  $\alpha$  soit inférieur ou non à 1, pourvu qu'il en soit différent. Mais, on peut, d'après ce que nous venons de voir, résoudre le même problème, à condition de remplacer la notion de dérivée par celle plus large de pseudo-dérivée. La pseudo-dérivation se présente donc bien comme une généralisation naturelle de la dérivée.

4. Pseudo-dérivée par rapport à h. Nous nous occuperons surtout dans ce qui suit de la pseudo-dérivation par rapport à  $h^{\alpha}$ , l'exposant  $\alpha$  étant inférieur à un.

Nous allons établir la proposition suivante:

A toute fonction ayant pour pseudo-dérivée un par rapport à  $h^{\alpha}$  on peut faire correspondre une autre fonction ayant une pseudo-dérivée donnée, continue f(x). Inversement à toute fonction continue, non identiquement nulle, on peut faire correspondre une fonction ayant pour pseudo-dérivée l'unité.

En d'autres termes, la recherche des fonctions ayant une pseudo-dérivée donnée se ramène à la recherche des fonctions ayant pour pseudo-dérivée un.

Soit  $\varphi(x)$  une fonction admettant pour pseudo-dérivée un par rapport à  $h^{\alpha}$ . On pourra alors trouver une suite infinie

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

de valeurs pour x et une suite correspondante de valeurs pour h, soit

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, \ldots$$

telles que l'on ait:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(x_i + h_i) - \varphi(x_i)}{h_i^{\alpha}} = 1.$$

Effectuons alors la décomposition de f(x) en fonction de  $\varphi(x)$ :

$$f(x) = f_1(u_1 \varphi) + \cdots + f_p(u_p \varphi) + \cdots.$$

Or, a partir d'une valeur finie k de i, il existera deux nombres fixes A et B tels que:

$$A < \left| \frac{\varphi(x_i + h_i) - \varphi(x_i)}{h_i^{\alpha}} \right| < B$$

et l'on montre comme dans la première partie, qu'il est possible de trouver un nombre positif M tel que, pour toutes les valeurs de i supérieures à k, on ait:

$$\left|\frac{u_n(x_i+h_i)-u_n(x_i)}{h_i{}^{\alpha}}\right| < M$$

et, d'autre part, si l'on donne à n une valeur fixe, le premier membre de l'inégalité précédente tendra vers zéro avec  $h_i$ .

Si nous considérons alors la série déjà rencontrée dans la première partie de ce travail, soit:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{F_n(u_n \varphi)}{u_n}$$

on voit facilement, en reprenant les raisonnements qui y ont été faits, que le rapport:

$$\frac{F(x_i+h_i)-F(x_i)}{h_i^{\alpha}}$$

tendra, i augmentant indéfiniment, vers la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u_n \varphi) \frac{\varphi(x_i + h_i) - \varphi(x_i)}{h_i^{\alpha}} = f(x) \frac{\varphi(x_i + h_i) - \varphi(x_i)}{h_i^{\alpha}}$$

c'est-à-dire vers f(x). Donc f est bien une pseudo-dérivée de F par rapport à  $h^{\alpha}$ .

Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires.

Soit maintenant  $F_1(v)$  une fonction ayant pour pseudo-dérivée par rapport à  $h^{\alpha}$  une fonction  $f_1(v)$  non identiquement nulle. Montrons comment on peut en déduire une fonction g ayant pour pseudo-dérivée l'unité. Puisque  $f_1$  n'est pas identiquement nulle il existe un intervalle où cette fonction ne s'annule pas et où elle reste donc supérieure en valeur absolue à un nombre fixe n. On peut, par une transformation linéaire évidente en déduire une fonction F(x) définie dans tout l'intervalle (1, 2) ayant une pseudo-dérivée f supérieure en valeur absolue à un nombre fixe. Effectuons alors la décomposition de 1: f(x) en fonction de F(x) soit:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(u_n F) \tag{5}$$

et posons:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F_n(u_n F)}{u_n}$$

avec:

$$F_n(t) = \int_0^t F_n(t) dt$$

il est alors facile de voir que F admet l'unité pour pseudo-dérivée, car on pourra faire en sorte que le rapport:

$$\frac{F(x_i+h_i)-F(x_i)}{h_i{}^{\alpha}}$$

diffère arbitrairement peu de l'expression:

$$\frac{F(x_i+h_i)-F(x_i)}{h_i{}^{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}F_n(u_nF)$$

qui, elle même, pourra être prise, on vertu des relations précédentes, aussi voisine qu'on voudra de l'unité.

5. Formation de fonctions admettant l'unité pour pseudo-dérivée par rapport à  $h^{\alpha}$ . Nous supposerons, pour simplifier, que l'on prend toujours h positif.

Divisons l'intervalle (1, 2) en 2<sup>n</sup> parties égales et soient:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \qquad (N=2^n)$$

les points de divisions. Désignons par  $f_n(x)$  une fonction définie de la manière suivante:

$$f_n(x) = (x - x_1)^{\alpha} \qquad (x_1 \le x \le x_2)$$

$$f_n(x) = f_n(x_2) + (x - x_2)^{\alpha} \qquad (x_2 \le x \le x_3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f_n(x) = f_n(x_i) + (x - x_i)^{\alpha} \qquad (x_i \le x \le x_{i+1})$$

cette fonction est continue et elle admet 1 pour dérivée par rapport à h en  $2^n$  points de Ox. Posons maintenant:

$$\varphi_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x).$$
 (6)

On a:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x).$$

Donc, si  $x_j$  est un point quelconque associé à  $f_n$  on aura, d'après la façon dont cette fonction a été définie:

$$h^{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} { \{ \varphi_i(x_j + h) - \varphi_i(x_j) \}} \qquad (j = 1, \dots 2^n)$$
 (7)

pourvu que l'on ait:

$$h < 2^{-n}$$
;

de même, si l'on se donne un entier p supérieur à n on aura de même:

$$h^{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=p} {\{\varphi_i(x_j+h) - \varphi_i(x_j)\}} \qquad (j = 1, 2, \dots 2^p)$$
 (8)

et tous les  $x_j$  de l'équation (7) font partie de ceux relatifs à l'équation (8). Ces valeurs de x relatives à toutes les valeurs de n forment un ensemble partout dense que nous désignerons par E. E est dénombrable. Soit donc  $x_1, x_2, x_3, \ldots$  cet ensemble. Nous supposerons que le numérotage a été éffectué de la façon suivante on pose

$$x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{2}, \ x_3 = 1, \ x_4 = \frac{1}{4}, \ x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ x_6 = \frac{1}{8}, \cdots.$$

Remarquons maintenant que chacune des fonctions définies par l'égalité (6) a une dérivée continue sauf en un nombre fini de points qui lui correspondent. Soit alors:

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$
 (9)

une suite de fonctions discontinues mais mesurables, dont chacune est égale à 1 sur un ensemble convenable qui sera précisé ultérieurement, et à zéro sur l'ensemble complémentaire du précédent. Nous allons montrer que l'on peut déterminer ces fonctions de manière que la série:

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{1}^{x} u_{n}(x) \varphi_{n}'(x) dx$$

converge uniformément et représente une fonction ayant une dérivée, ou plus généralement une pseudo-dérivée en tous les points de E, cette dérivée ou pseudo-dérivée étant égale à 1.

Pour définir le terme général u de la suite (9) nous poserons cette fonction égale à l'unité dans des intervalles:

$$\delta_n^{(n)}, \ \delta_{n+1}^{(n)}, \ \delta_{n+2}^{(n)}, \dots$$
 (10)

dont les milieux sont respectivement en

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$$

et dont nous préciserons bientôt la grandeur. Nous la poserons ensuite égale à zéro dans l'ensemble complémentaire de l'ensemble  $\varepsilon_n$  somme de ces intervalles. Les cinq lignes suivantes représentent, pour plus de clarté, les valeurs des cinq premières fonctions  $u_n$  pour les quatre premiers membres de E:

Donnons nous maintenant une série numérique à termes positifs convergente:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

On peut toujours astreindre les fonctions  $u_n$  aux conditions suivantes:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_p}^{x_p + h} u_n(x) \varphi_n'(x) dx \right| < \alpha_n \tag{II}$$

οù

$$p=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\,.$$

Donnons nous en effet une valeur fixe pour h inférieure à  $2^{-n}$ .

Plaçons nous au point  $x_1$  par exemple, et décomposons l'intervalle

$$(x_1, x_1+h)$$

en 2 intervalles partiels:

$$(x_1, x_1+k), (x_1+k, x_1+h).$$

Dans le second  $\varphi_n'(x)$  est une fonction continue. Nous avons:

$$\int_{x_1}^{x_1+k} u_n(x) \varphi_n'(x) dx \le \int_{x_1}^{x_1+k} \varphi_n'(x) dx = \varphi_n(x_1+k) - \varphi_n(x_1)$$

car la dérivée conserve le signe positif. Nous pouvons donc prendre k assez petit pour que l'on ait:

$$\frac{\varphi_n(x_1+k)-\varphi_n(x_1)}{h}<\frac{\alpha_n}{2},$$

k ayant été choisi de cette façon, on peut trouver un nombre M tel que:

 $|\varphi_n'(x)| < M \qquad (x_1 + k \le x \le x_1 + h).$ 

Or:

$$\int\limits_{x_1+k}^{x_1+h} u_n(x) \varphi_n{'}(x) \, dx = \int\limits_{e_n} \varphi_n{'}(x) \, dx < M \text{ mes }. \, e_n$$

 $e_n$  étant la portion de l'ensemble  $\varepsilon_n$  associé à  $u_n$  contenu dans l'intervalle  $(x_1+k, x_1+h)$ . Si nous désignons par  $E_1$  l'ensemble des points de E appartenant à l'intervalle précédent, il suffira de prendre la somme des intervalles de

Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires.

la suite (11) qui correspondent aux points de  $E_1$  assez petite pour que le quotient par h de l'intégrale (12) soit inférieur à:

$$\frac{1}{2}\alpha_n$$
.

En effet, on peut toujours faire:

$$\operatorname{mes} e = \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes} \delta_{m_1}^{(n)} < \frac{h \alpha_n}{2M} = \mu. \tag{13}$$

Ceci posé, considérons une suite décroissante de valeurs pour h par exemple celle dont le terme général est  $2^{-p}$ , où p est supérieur à n. On peut faire en sorte que la propriété précédente soit vraie pour tous les termes de cette suite. En effet soit:

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

une suite dont le terme général représente l'ensemble des points de E intérieurs à l'intervalle fermé:

$$(x_1, x_1+2^{-n}).$$

Soit alors:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

une nouvelle suite dont le terme général représente l'ensemble des intervalles de la suite (10) qui correspondent aux points de  $e_n$ . Tous les intervalles de  $e_n$  appartiennent à  $e_{n-1}$ . Or, d'après ce que nous avons dit un peu plus haut, on peut trouver une suite de nombres décroissants:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

telle que, en vertu de (13) les relations:

$$\operatorname{mes} e_n \leq \mu_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (14)$$

entraînent l'inégalité (11), où h a des valeurs égales à  $2^{-p}$ . Les équations (14) seront vérifiées si l'on a:

16 — 28538. Acta mathematica. 53. Imprimé le 30 mars 1929.

Le premier membre de n'importe la quelle des relations (15) est égal à la somme d'une infinité dénombrable d'intervalles extraits de la suite (10), et les intervalles relatifs à deux des relations précédentes sont distinct. On pourra donc satisfaire de proche en proche aux inégalité ci-dessus ce qui établit la conclusion. Il reste maintenant à montrer que la propriété en question est vraie pour toutes les valeurs de h. En effet, on peut associer à toute valeur de h un entier q tel que:

$$x_1 + 2^{-q-1} \le x_1 + h \le x_1 + 2^{-q} = x_1 + h_1$$

d'où:

$$h_1 < 2h$$
.

Or:

$$\frac{1}{h} \int_{x_{1}}^{x_{1}+h} u_{n}(x) \varphi_{n}'(x) dx \leq \frac{h_{1}}{h} \frac{1}{h_{1}} \int_{x_{1}}^{x_{1}+h_{1}} u_{n}(x) \varphi_{n}'(x) dx < 2 \alpha_{n}.$$

La propriété est donc établie pour le point  $x_1$ . Il est clair que l'on peut l'étendre à un nombre fini arbitraire de valeurs de x. On verrait, en outre, facilement que l'on peut choisir les termes des suites telles que (10) assez petits pour que la série:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \int_{1}^{x} u_n(x) \varphi_n'(x) dx$$

soit uniformément convergente et représente par suite une fonction continue. Soit alors  $x_n$  un point de E, nous avons:

$$F(x_n+h) - F(x_n) = S_n + R_n$$

en posant:

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{x_n}^{x_n+h} u_i(x) \varphi_i'(x) dx; \quad R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_n+h} u_i(x) \varphi_i'(x) dx$$

avec:

$$|R_n| < \left(\sum_{n+1}^{\infty} \alpha_i\right) h < Mh \tag{16}$$

M étant un nombre fixe. Or, si l'on prend h assez petit, les n fonctions:

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

seront respectivement égales à 1 dans l'intervalle  $(x_n, x_n + h)$ .

D'où, en tenant compte de (16):

$$\left| F(x_n+h) - F(x_n) - \sum_{i=1}^n \left\{ \varphi_i(x_n+h) - \varphi_i(x_n) \right\} \right| < Mh$$

et, en tenant compte de (7):

$$|F(x_n+h)-F(x_n)-h^{\alpha}|< Mh$$

donc:

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_n+h)-F(x_n)}{h^{\alpha}}=1;$$

on voit ainsi que F admet 1 pour dérivée par rapport à  $h^{\alpha}$  en tous les points d'un ensemble E partout dense, mais il faut remarquer que cette dérivée n'est pas uniformément atteinte. Plus généralement, on peut remplacer la condition (11) par la suivante, beaucoup moins restrictive:

$$\left| \frac{1}{h^{\alpha}} \int_{x_p}^{x_p+h} u_n(x) \varphi_n'(x) dx \right| < \alpha_n$$

nous aurons alors pour h assez petit:

$$\left| \frac{F(x_n+h) - F(x_n)}{h^{\alpha}} - \mathbf{I} \right| < \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i \tag{17}$$

et pour n assez grand, le second membre pourra être rendu arbitrairement petit sans que l'on puisse cependant affirmer qu'il y ait dérivation en aucun point de E. Il y a donc pseudo-dérivation, mais une pseudo-dérivation remarquable, car si l'on se donne un nombre positif arbitraire  $\alpha$ , l'inégalité précédente montre que l'on peut, après avoir choisi un nombre assez grand p, trouver alors un nombre positif  $\lambda$  tel que, pour toute valeur de h inférieure à  $\lambda$ , le premier membre de (17) soit inférieur à  $\alpha$  quand x désigne un des p premiers nombres de E. Etant donné, d'ailleurs, une division quelconque de (1, 2) en intervalles partiels, on peut toujours trouver une valeur assez grande pour p de manière qu'à l'intérieur de chacun d'eux il y ait au moins un des points x considérés. Nous

dirons alors que la pseudo-dérivée est forte et nous sommes ainsi conduit à poser la définition suivante:

Une fonction F, définie dans l'intervalle (1, 2), admet f pour pseudo-dérivée forte par rapport à la fonction d'intervalle  $\varphi(\delta)$ , si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

I. A tout nombre positif  $\varepsilon$  et à tout entier p, on peut faire correspondre un nombre positif  $\mu$  et au moins p valeurs de x,

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$
 (S)

de manière à ce que l'inégalité h < \mu entraîne:

$$\left|\frac{F(x_i+h)-F(x_i)}{\varphi(h)}-f(x_i)\right|<\varepsilon \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

2. Etant donné une division arbitraire de (1, 2) en intervalles partiels on peut prendre p assez grand pour qu'il y ait au moins une valeur de x appartenant à S intérieure à chacun d'eux.

Remarquons maintenant que les résultats du présent paragraphe peuvent encore s'étendre, comme on le voit facilement, au cas où la fonction d'intervalle:

$$g(\delta) \equiv g(x_0, x_1)$$

représente, quand,  $x_0$  restant fixe, x varie, une fonction dérivable au sens classique dans un certain intervalle autour de  $x_0$ , sauf peut-être en ce point luimême. En outre, il est facile de montrer que le procédé utilisé pour former une fonction ayant l'unité pour pseudo-dérivée est applicable au cas où la pseudo-dérivée est une fonction continue quelconque. Il suffira de remplacer l'égalité (7) par une nouvelle égalité de la forme

$$f(x_k) g(x_k, x_k + h) = \sum_{i=1}^n \{ \varphi_i(x_k + h) - \varphi_i(x_k) \}$$

et nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Si

$$g(\delta) \equiv g(x_1, x_2), \qquad \delta = (x_1, x_2)$$

est une fonction d'intervalle telle que, si l'on fixe un des nombres  $x_1$ ,  $x_2$  la fonction obtenue en faisant varier le second ait une dérivée, sauf peut-être quand les deux

nombres précédents coincident, on peut alors associer à toute fonction continue f(x) une infinité d'autres fonctions continues F(x), admettant toutes f pour pseudo-dérivée forte par rapport à la fonction d'intervalle  $g(\delta)$ .

Théorèmes d'existence des pseudo-dérivées. Jusqu'ici, nous nous sommes surtout placé au point de vue de la recherche des primitives. Etant donné une fonction, nous avons cherché à lui faire correspondre une fonction F admettant f comme dérivée généralisée, de première ou de seconde espèce, dans la première partie de ce mémoire, ou comme pseudo-dérivée dans sa seconde partie. Nous adopterons pour terminer un point de vue opposé. Etant donné une fonction F nous chercherons sous quelles conditions il existe une fonction f ayant avec la première une des relations infinitésimales antérieurement définies. Nous serons ainsi conduit à énoncer des théorèmes d'existence qui assureront en même temps le succès d'un processus permettant théoriquement, du moins, le calcul de la fonction f correspondant à F. On sait qu'il existe de tels théorèmes pour la dérivation classique. Nous allons rappeler l'un d'eux et nous en donnerons une démonstration dont le principe nous servira de guide pour établir les généralisations que nous avons en vue. Voici l'énoncé de cette proposition due à M. Brouwer:

Théorème de Brouwer. Soit f une fonction satisfaisant quel que soit x à la condition:

$$|F(x+h+k)-F(x+k)-F(x+h)+F(x)|<|h|\varepsilon(h,k) \tag{18}$$

où  $\varepsilon$  désigne une quantité infiniment petite avec |h|+|k|. F admet alors une dérivée continue.

Soit:

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots \tag{19}$$

une suite de divisions de (1, 2) en intervalles partiels tendant tous vers zéro quand n tend vers l'infini. Désignons par

$$(1, x_1) \ldots (x_i, x_{i+1}) \ldots (x_{n-1}, x_n = 2)$$

les intervalles correspondant au terme général de cette suite. Considérons les fonctions  $g_n(x)$  définies de la manière suivante:

$$g_n(x) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (x_i \le x < x_{i+1}); \ (i = 1, 2, \dots n). \quad (20)$$

La représentation graphique de chacune de ces fonctions consiste en une courbe formée de palliers successifs. Considérons les points de coordonnées

$$(1, g_n(1)); (x_1, g_n(x_1)); \ldots (2, g_n(2)).$$

Joignons ces points deux à deux dans l'ordre où se présentent leurs projections sur l'axe des x. La ligne polygonale ainsi obtenue est la représentation graphique d'une fonction continue  $f_n$  associée à  $g_n$ . Soit U l'ensemble de toutes les  $g_n$ , et W celui des  $f_n$  qui correspondent ainsi respectivement aux divisions successives de la suite (19). Nous dirons pour abréger que U et W sont les ensembles associés à F. L'étude de ces ensembles, au point de vue des éléments d'accumulation ou de pseudo-accumulation, est intimement lié à celle de la dérivabilité de F. Remarquons d'abord, en vertu de (18), que la quantité:

$$|g_n(x)-f_n(x)|$$

tend uniformément vers zéro quand n augmente indéfiniment. Ceci posé, on peut faire sur l'ensemble des W les deux hypothèses suivantes:

- 1°) W admet une fonction d'accumulation, finie ou infinie.
- 2°) W admet une fonction de pseudo-accumulation finie ou infinie.

Mais, d'après (18) on voit immédiatement que les fonctions de W sont également continues. Nous pouvons donc retenir seulement la première hypothèse. De plus, on voit immédiatement que cette fonction d'accumulation f de W est finie. Sinon, supposons, par exemple, qu'elle soit égale à  $+\infty$ , alors, étant donné un nombre positif arbitraire M, on aurait, à partir d'une valeur assez grande de n:

$$g_n(x) > M$$

d'où:

$$F(\mathbf{1}) = \sum_{i=0}^{i=n} g_n(x_i) \left(x_{i+1} - x_i
ight) > M$$

ce qui est absurde. f est donc finie et continue. On voit sans peine que cette fonction est bien la dérivée de F. On établit facilement, en effet, les relations:

$$F(x) - F(x_0) = \lim_{n = \infty} \int_0^x g_n(x) dx = \int_0^x f(x) dx$$

Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires. 127

et la proposition est ainsi démontrée. Nous allons cependant donner de ce fait une autre démonstration pouvant s'étendre à des cas plus généraux. Soit a une valeur particulière quelconque de x. Considérons le rapport:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}. (21)$$

Or, on peut approcher autant qu'on le voudra de a par des points appartenant à des extrémités d'intervalles de la suite (19). Soit b un de ces points. A cette valeur de b correspond une valeur de h, et le rapport:

$$\frac{F(b+h)-F(b)}{h}$$

pourra être rendu arbitrairement voisin de f. Mais, en vertu de l'inégalité (18), quand b tend vers a la différence des deux rapports précédents tend vers zéro. Donc, l'expression (21) tend vers f quand h tend vers zéro par valeurs particulières. D'ailleurs, dans le cas actuel, comme nous l'avons vu, cette limite est atteinte même quand h tend vers zéro d'une façon arbitraire.

**Généralisation.** Supposons maintenant qu'il s'agisse de la dérivée par rapport à une fonction  $\varphi(x)$ . Nous supposons que l'on fait tendre h vers zéro par valeurs particulières h que nous supposerons pour simplifier indépendantes de x. On tire facilement des considérations précédentes le théorème suivant.

Soit F(x) une fonction à la quelle on puisse associer deux suites

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$
(S)

le terme général de la première au moins tendant vers zéro, et telles que toutes les inégalités de la forme:

$$|h - h_i| \le \alpha_i \tag{E}$$

entraînent:

$$|F(x+h)-F(x)| \leq A |\varphi(x+h)-\varphi(x)|,$$

où A désigne une certaine constante

$$| \underline{J_2''} \delta_1' - \underline{J_1'} \delta_2'' | \leq \varepsilon | \delta_2'' | | \delta_1' |$$

en posant:

$$\mathbf{\Delta_1'} = F(x_1 + h') - F(x_1); \quad \mathbf{\Delta_2''} = F(x_2 + h'') - F(x_2)$$
  
 $\mathbf{\delta_1'} = \varphi(x_1 + h') - \varphi(x_1); \quad \mathbf{\delta_2''} = \varphi(x_2 + h'') - \varphi(x_2),$ 

où h' et h'' sont deux valeurs de h satisfaisant à une même inégalité  $E, x_1, x_2$  deux valeurs quelconques de x et  $\varepsilon$  une quantité infiniment petite avec:

$$|x_2-x_1|+|h|.$$

La fonction F admet alors une dérivée continue par rapport à  $\varphi$  pourvu que l'on fasse tendre vers zéro l'accroissement de la variable par valeurs  $h_i$  satisfaisant aux inégalités E successives.

Il suffit pour établir cette proposition de reprendre notre démonstration du théorème de Brouwer. Prenons pour terme général  $D_n$  d'une suite de décompositions en intervalles partiels, la division de (1,2) en intervalles égaux au terme général de la suite S figurant dans l'énoncé précédent. Nous formerons encore deux ensembles U et W associés à F, les fonctions de l'ensemble U étant définies par les relations:

$$g_n(x) = rac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{m{\varphi}(x_{j+1}) - m{\varphi}(x_j)} \qquad \qquad (x_j \le x < x_{j+1}) \ x_{j+1} - x_j = h_n.$$

Si le dénominateur est nul, nous poserons, dans le même intervalle:

$$g_n(x) = \frac{F(x'_{j+1}) - F(x'_j)}{\varphi(x'_{j+1}) - \varphi(x'_j)}$$

de façon à ce que l'on ait:

$$\varphi(x'_{j+1}) - \varphi(x'_j) \neq 0.$$

De plus, si l'on pose:

$$h'_n = x'_{j+1} - x'_j$$

nous nous arrangerons pour que l'on ait en même temps:

$$|h'_n-h_n|\leq \alpha_n, \quad \lim_{n=\infty}\frac{h'_n}{h_n}=1$$

ce qui est toujours possible pourvu que  $\varphi$  ne soit constante dans aucun intervalle, ce que nous supposerons. On forme alors les fonctions de l'ensemble W par le même procédé que dans la démonstration du théorème précédent. Les

129

fonctions de W sont alors, en vertu des conditions figurant dans le présent théorème, également continues et bornées dans leur ensemble. Donc W admet une fonction d'accumulation continue qui est encore ici la dérivée généralisée de F.

On peut de même donner de nombreux théorèmes d'existence de la pseudodérivée. La méthode est la suivante. On considère l'ensemble U associé à la fonction donnée F et relative à la fonction d'intervalle considérée. On exprime que cet ensemble est borné, ce qui revient à écrire une condition à la Lipschitz, les cas où U ne serait pas borné présentant pour la plus part un intérêt moindre. On appliquera alors les critéres de continuité pour la pseudo-dérivée que nous avons indiqués plus haut, et qui se traduiront en imposant à la fonction F des conditions convenables, faciles à former. Pour donner un exemple de cette méthode, nous établirons le théorème suivant, relatif à l'existence de la pseudodérivée forte.

Une fonction définie dans l'intervalle (1, 2) qui satisfait à la condition:

$$|F(x+h) - F(x)| < M|h|^{\alpha}$$

admet une pseudo-dérivée forte, continue si elle jouit en outre des propriétés suivantes:

A tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre deux autres nombres positifs  $\mu$ ,  $\beta$  et à chaque valeur de h satisfaisant à:

$$|h| < \mu$$

une suite S:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

de n valeurs pour x dont le nombre des termes tend vers l'infini quand h tend vers zéro, de telle sorte que, si x' et x'' sont 2 termes arbitraires d'une suite quelconque S, l'inégalité:

$$|x''-x'|<\beta$$

entraîne:

$$\mid F(x^{\prime\prime}+h) - F(x^{\prime\prime}) - F(x^{\prime}+h) + F(x^{\prime}) \mid \leq \varepsilon \mid h \mid^{\alpha}.$$

On suppose, de plus, qu'étant donné une division arbitraire de (1, 2) en intervalles partiels il y a dans chacun de ces derniers au moins un point appartenant à une même suite S de rang assez grand.

17 - 28583. Acta mathematica. 53. Imprimé le 11 mai 1929.

Pour établir cette proposition, il suffit de former les ensembles U associés à F et correspondant à une série de décomposition de (1, 2) en intervalles partiels, soit:

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$$

de telle sorte que, parmis les intervalles partiels de  $D_n$  il y en ait p dont une des extrémités au moins appartiennent à une suite S, p augmentant indéfiniment avec n. Il en résulte alors immédiatement la continuité de la fonction de pseudo-accumulation de U, en vertu d'un théorème donné antérieurement au paragraphe 1.