SUR UN DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

Introduction.

$f(z)$ est une *fonction entière* de z, et on suppose $f(0)=0, f'(0)\neq 0$. Sans restreindre la généralité on pourra supposer $f'(0)=1$. Comme cas particulier $f(z)$ pourra être un *polynome*.

Les a_n $(n=0, 1, \ldots)$ étant des constantes complexes quelconques, envisageons la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 f(z) + a_2 f(z^2) + \cdots + a_n f(z^n) + \cdots.$$

Dans le 1[er] chapitre nous étudions la convergence de (1), les a_n étant donnés *a priori*. On est conduit à associer à (1) la série entière (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dont le rayon de convergence est ϱ qui peut-être nul ou infini.

Si $\varrho \leq 1$, la série (1) converge absolument dans $|z|<\varrho$ et uniformément dans tout cercle $|z|\leq \varrho-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ arbitrairement petit). Hors du cercle $|z|<\varrho$ la série (1) diverge pour $\varrho<|z|<1$; de plus si $f(z)$ est un polynome, la série (1) diverge aussi en tout point z où $|z|>1$ et si $f(z)$ est transcendante, les points de divergence de (1) sont denses partout hors de $|z|=1$ mais il peut y avoir des lignes de convergence uniforme hors de $|z|=1$, ces lignes ne peuvent d'ailleurs être coupées en plus d'un point par toute circonférence $|z|=r>1$.

Si $\varrho>1$, il y a 2 cas distincts:

a) $f(z)$ est un polynome de degré d: alors (1) converge absolument dans $|z|<\varrho^{\frac{1}{d}}$ et uniformément dans $|z|<\varrho^{\frac{1}{d}}-\varepsilon$, elle diverge pour $|z|>\varrho^{\frac{1}{d}}$;

b) $f(z)$ est une transcendante entière: alors (1) converge absolument et uniformément dans $|z| \leq 1$. La convergence uniforme n'est possible dans une aire extérieure à $|z| = 1$ que si $\varrho = \infty$ (condition *nécessaire,* non suffisante).

Donc *si ϱ est fini,* les points de divergence de (1) sont partout denses hors de $|z| = 1$, mais il peut y avoir, hors de $|z| = 1$, des lignes de convergence uniforme coupées en un seul point par toute circonférence $|z| = r > 1$.

Si $\varrho = \infty$ le domaine de convergence uniforme de (1) est un cercle $|z| < R$, c'est-à-dire que (1) converge absolument et uniformément dans tout cercle $|z| \leq R - \varepsilon$. Le nombre $R \geq 1$ dépend de la décroissance des a_n comparée à la croissance de $M(r^n) = \text{Max } |f(z^n)|$ pour $|z| = r > 1$. Pour que R puisse être > 1 il faut que les a_n décroissent assez vite quand n croît, de manière que l'on puisse avoir $|a_n| M(r^n) < A$, A étant un nombre fixe, pour tout n et pour une certaine valeur de $r > 1$ (alors $R \geq r$). Si pour tout $r > 1$, $|a_n| M(r^n)$ n'a pas de borne supérieure quand n devient infini, on a $R = 1$. Hors de $|z| = R$ on a les mêmes circonstances pour ϱ infini que pour ϱ fini.

Dans le 2^e^ chapitre on montre que toute fonction $F(z)$ holomorphe à l'origine est représentable d'une et d'une seule façon par une série du type (1) et l'on donne une formule simple pour le calcul des a_n. La série obtenue converge au voisinage de l'origine.

Dans le 3^e^ chapitre on étudie la convergence de la *série* (1) *formée au 2^e^ chapitre pour représenter* $F(z)$ au voisinage de l'origine. Soit δ le rayon du plus grand cercle de centre 0 dans lequel $F(z)$ reste holomorphe (distance à 0 du point singulier de F le plus voisin de 0). Si $\delta \leq 1$, le rayon de convergence uniforme de (1) sera précisément $R = \delta$ et la série (1) a le même domaine de convergence uniforme que la série de Taylor de F. Si $\delta > 1$, le rayon R de convergence uniforme de (1) est *en général égal à* 1. C'est seulement *pour des fonctions* $F(z)$ *très particulières,* liées à la fonction $f(z)$ de la représentation, que l'on peut avoir $R > 1$. On donne des conditions nécessaires, mais non suffisantes pour reconnaître si le rayon R d'une fonction F donnée est > 1.

Par conséquent, pour $\delta > 1$, le domaine de convergence uniforme de la série (1) relative à une fonction $F(z)$ donnée est *en général plus petit que celui de la série de Taylor* de $F(z)$.

Comme conclusion, c'est seulement pour $\delta \leq 1$ que le domaine de convergence uniforme de la série (1) relative à une fonction $F(z)$ quelconque épouse les singularités de $F(z)$ comme le fait la série de Taylor. On peut d'ailleurs revenir au cas de $\delta \leq 1$ en posant $z = \lambda u$, λ étant un nombre positif $\geq \delta$, formant la série (1) relative à $F_1(u) = F(\lambda u)$, et revenant en suite à la variable z, par la substitution $u = \frac{z}{\lambda}$ dans la série ainsi trouvée.

CHAPITRE I.

Convergence d'une série $\sum_0^\infty a_n f(z^n)$, les a_n étant donnés à priori.

I. *Supposons d'abord* $|z| < 1$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} z^n = 0$ et on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z^n)}{z^n} = 1.$$

La convergence de (1) est donc liée à celle de la série entière

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots. \tag{2}$$

Soit ϱ le rayon de convergence de (2).

a) Si $\varrho = 0$, on sait que, quel que soit z_0, il existe une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ pour laquelle

$$\lim_{p \to \infty} a_{n_p} z_0^{n_p} = \infty.$$

z_0 étant pris en module < 1, on aura, pour la même suite d'indices

$$\lim_{p \to \infty} a_{n_p} f(z_0^{n_p}) = \infty.$$

Donc *en aucun point* $z_0 \neq 0$, *de module* < 1, *la série* (1) *ne peut converger.*

Pour $z = 0$, elle se réduit à son premier terme.

b) Soit $0 < \varrho < 1$. Pour toute valeur z_0 de module $< \varrho$, la série (2) est absolument convergente. La série (1) est donc aussi *absolument convergente dans le cercle* $|z| < \varrho$. La série (2) est uniformément convergente dans tout cercle $|z| \leq \varrho - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit). Il en est de même de la série (1), de terme général équivalent. *La somme de la série* (1) *est donc une fonction holomorphe de z dans le cercle* $|z| < \varrho < 1$.

Si l'on choisit z_0 tel que $\varrho < |z_0| < 1$, en ce point la série (2) diverge et il existe une suite $n_p \to \infty$ pour laquelle $\lim_{p=\infty} a_{n_p} z_0^{n_p} = \infty$. La même suite n_p donne donc $\lim_{p=\infty} a_{n_p} f(z_0^{n_p}) = \infty$ et par conséquent *la série* (1) *diverge en tout point* z_0 *de module* $> \varrho$ *et* < 1.

Pour $|z_0| = \varrho$ il y a *doute*, la série associée (2) pouvant être convergente ou divergente.

c) Soit $\varrho = 1$. En raisonnant comme au § b) on voit que la série (1) converge *absolument* dans le cercle $|z| < 1$ et *uniformément* dans tout cercle $|z| \leq 1 - \varepsilon$. Sa somme est fonction holomorphe de z dans le cercle $|z| < 1$.

d) Soit $\varrho > 1$. Alors (1) converge *absolument et uniformément* dans le cercle $|z| \leq 1$.

En effet, lorsque $\varrho > 1$ on a, comme il est classique, $|a_n| < \frac{M}{\varrho_1^n}$ $(1 < \varrho_1 < \varrho)$ pour toute valeur de n, quel que soit $\varrho_1 > 1$ et $< \varrho$, M étant indépendant de n, et seulement dépendant de ϱ_1. Lorsque $|z| \leq 1$, $|z^n| \leq 1$, par suite $|f(z^n)| \leq \mathfrak{M}(1)$, en désignant par $\mathfrak{M}(r)$ le maximum de $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$. On a par suite, pour $|z| \leq 1$ et quel que soit n,

$$|a_n f(z^n)| < \frac{M\mathfrak{M}(1)}{\varrho_1^n}$$

ce qui prouve la convergence absolue et uniforme de (1) dans $|z| \leq 1$, lorsque $\varrho > 1$.

La somme de la série (1) est donc *holomorphe pour* $|z| < 1$ et certainement *continue sur la circonférence* $|z| = 1$.

Conclusion. ϱ étant le rayon de convergence de la série (2) associée à (1), la série (1) converge absolument dans la partie commune aux deux cercles $|z| < 1$, $|z| < \varrho$; si $\varrho \leq 1$, elle converge uniformément dans tout cercle $|z| \leq \varrho - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitraire), sa somme est holomorphe en z dans le cercle $|z| < \varrho$, la série (1) diverge (son terme général n'étant par borné) pour $\varrho < |z| < 1$, pour $|z| = \varrho$ il y a doute; si $\varrho > 1$ elle converge uniformément dans tout le cercle $|z| \leq 1$ et sa somme est holomorphe en z pour $|z| < 1$, continue en z sur $|z| = 1$ (nous revenons plus loin sur l'étude pour $|z| \geq 1$).

II. *Étude pour* $|z| = 1$. Nous nous bornons aux cas où $\varrho \leq 1$, puisque, pour $\varrho > 1$, la série (1) converge uniformément pour $|z| = 1$.

a) Soit $\varrho < 1$. En prenant ϱ_2 entre ϱ et 1 $(\varrho < \varrho_2 < 1)$ il existera une suite infinie $n_1, n_2, \dots n_p, \dots$ pour laquelle $|a_{n_p}| > \frac{K}{\varrho_2^{n_p}}$, K étant un nombre positif fixe arbitrairement grand.

Si $f(z)$ *n'a pas de zéro sur le cercle* $|z| = 1$ on a, sur ce cercle, $|f(z)| > m$. Donc

$$|a_{n_p} f(z^{n_p})| > \frac{Km}{\varrho_2^{n_p}}$$

pour tout z situé sur $|z| = 1$. Le terme genéral de (1) n'étant pas borné, *la série* (1) *diverge en tout point de* $|z| = 1$.

Si $f(z)$ a des zéros sur $|z| = 1$ ceci n'est plus toujours vrai à cause de l'existence de suites ν_k et de points z pour lesquels z^{ν_k} a pour limite un zéro de $f(z)$. En voici un exemple très simple. Soit $f(z) = z(1 - z^k)$ et $a_n = 2^n$. On a ici $\varrho = \frac{1}{2}$ et pour toute racine ζ de $z^k = 1$ on a $f(\zeta^n) = 0$ et la série se réduit à son premier terme. Aux k points $\zeta = e^{i\frac{2p\pi}{k}}$ $(p = 0, 1, \dots k-1)$ la série (1) converge. En tout autre point z_0 du cercle $|z| = 1$, on peut trouver une suite $n_1, n_2, \dots n_p, \dots$ telle que $z_0^{n_p}$ *ait pour limite un point* α *du cercle* $|z| = 1$ *qui ne soit pas zéro de* $f(z)$: $f(z_0^{n_p})$ a pour limite $f(\alpha) \neq 0$, la suite des termes $a_{n_p} f(z_0^{n_p}) = 2^{n_p} f(z_0^{n_p})$ tend vers l'infini et la série (1) diverge. Donc la série (1) n'est convergente qu'aux k points $e^{i\frac{2p\pi}{k}}$.

D'une manière générale montrons que *les points où la série* (1) *diverge forment un ensemble partout dense* sur le cercle $|z| = 1$.

En effet, le rayon de convergence ϱ de (2) étant < 1, il existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2, \dots n_k, \dots$ pour laquelle

$$|a_{n_k}| > \frac{M}{\varrho_2^{n_k}} \quad \text{avec} \quad \varrho < \varrho_2 < 1 .$$

Choisissons un entier q tel que *les puissances de* $z_q = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ (lesquelles sont au nombre de q distincts) *ne contiennent aucun zéro de* $f(z)$. (Si les arguments de ces zéros sont tous incommensurables à 2π, q sera un entier quelconque.) Les zéros de $f(z)$ étant en nombre fini, les points z_q^n, pour n et q variables, (q ayant la propriété exigée) forment un *ensemble partout dense sur la circonférence* $|z| = 1$.

Considérons les points $z_q^{n_k}$ ($k = 1, 2, \ldots \infty$), les n_k étant les indices de la suite précédente. z_q étant égal à $e^{\frac{2\pi i}{q}}$ il n'y a parmi les $z_q^{n_k}$ que *q points distincts au plus*; il existe donc dans la suite n_k une suite partielle $n'_1, n'_2, \ldots n'_k, \ldots$ telle que

$$z_q^{n'_1} = z_q^{n'_2} = \cdots = z_q^{n'_k} = \cdots = \alpha$$

α n'étant pas zéro de $f(z)$. Les termes correspondants, dans la série (1), sont des termes

$$a_{n'_1} f(\alpha), \; a_{n'_2} f(\alpha), \; \ldots \; a_{n'_k} f(\alpha), \; \ldots$$

et comme $|a_{n'_k}| > \frac{M}{\varrho_2^{n'_k}}$ avec $\varrho_2 < 1$; $a_{n'_k} f(\alpha)$ tendra vers l'infini avec k, donc *au point z_q la série* (1) *diverge.*

Le même raisonnement prouve qu'*elle diverge en tous les points* z_q^n, lesquels, pour n et q variables, sont partout denses sur le cercle $|z| = 1$.

Par conséquent, lorsque $\varrho < 1$, *la convergence de* (1), possible en certains points de $|z| = 1$ lorsque $f(z)$ a des zéros sur ce cercle, *ne peut jamais avoir lieu sur tout un arc, si petit soit-il, de ce cercle.*

Il serait intéressant de voir si l'ensemble des points de convergence de (1) est toujours de mesure nulle. La question est liée à celle des suites d'approximation des zéros de $f(z)$ par les puissances z^n d'un même nombre de module 1, ou des suites d'approximation des arguments de ces zéros par les multiples d'un même nombre, l'argument de z. Nous n'insisterons pas là-dessus pour le moment.

b) Lorsque $\varrho = 1$, les conclusions de a) ne sont plus vraies, la série (1) peut converger partout sur le cercle $|z| = 1$.

Prenons par exemple $a_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\varrho = 1$. Sur le cercle $|z| = 1$ $|f(z^n)| \leq \mathfrak{M}(1)$ avec les notations du § 1, d). La série (1) est alors majorée par $\sum \frac{\mathfrak{M}(1)}{n^2}$; elle converge donc absolument et uniformément sur tout le cercle $|z| = 1$ et par suite dans $|z| \leq 1$.

Au contraire si $a_n = n^2$, on a bien $\varrho = 1$ et un raisonnement analogue à celui du § 2, a) prouve que les points de divergence de (1) sont partout denses. Dans ce cas même, la suite des a_n étant régulièrement croissante, la série (1) diverge en tout point d'argument incommensurable à 2π, quelque soit la fonction $f(z)$ choisie, car si z est d'argument incommensurable à 2π, les z^n sont partout denses sur le cercle $|z| = 1$ et il existe des suites n_k pour lesquelles $a_{n_k} f(z^{n_k})$ devient infini avec k.

Nous n'entrerons pas dans l'étude détaillée de toutes les circonstances possibles, la complexité d'une pareille étude étant aussi grande, au moins, que celle de la convergence d'une série entière sur son cercle de convergence.

Remarque. — Tout ce qui vient d'être dit dans les § 1 et 2 s'applique évidemment lorsque $f(z)$, sans être entière, est holomorphe dans le cercle $|z| \leq 1$.

III. *Étude pour* $|z| > 1$. Il est indispensable, ici, de supposer $f(z)$ holomorphe[1] pour $|z| > 1$ car, ζ étant un point quelconque de module > 1, les points $\zeta^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots \infty)$ ont pour ensemble dérivé tous les points du cercle $|z| = 1$. Si donc $f(z)$ cessait d'être holomorphe en ζ, il y aurait, au voisinage de tout point z_0 $(|z_0| = 1)$ une infinité de points $z_\varkappa$ dont une certaine puissance $k^{\text{ième}}$ serait $z_\varkappa^k = \zeta$ et le terme $f(z^k)$ ne serait plus holomorphe autour de $z_\varkappa$.

Nous supposons donc $f(z)$ *holomorphe dans tout le plan* z. Lorsque $|z| > 1$ les z^n tendent vers l'infini et l'allure de la série (1) est très différente selon que $f(z)$ admet à l'infini un pôle ou un point singulier essentiel. Dans le premier cas $f(z)$ est un *polynome* de degré d qu'on peut écrire

$$f(z) = f_d z^d + f_{d-1} z^{d-1} + \cdots + z.$$

Dans le deuxième cas $f(z)$ est une *fonction entière*.

1^{er} **Cas. $f(z)$ est un polynome.** — z^n devenant infini avec n, on a $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{f(z^n)}{f_d z^{dn}} = 1$ et le terme général de (1) est équivalent à $f_d a_n z^{dn}$; on est conduit à comparer (1) à la série entière (3) $\Sigma a_n z^{dn}$ qui n'est autre que la série (2) où z a été remplacé par z^d. Par conséquent (3) convergera pour $|z^d| < \varrho$ c'est-à-dire $|z| < \varrho^{\frac{1}{d}}$ et divergera (le terme général ne restant pas borné) pour $|z| > \varrho^{\frac{1}{d}}$.

Il en résulte, $|z|$ étant pris > 1, que

Si $\varrho = 0$ (3) et par suite (1) diverge, le terme général ne restant pas borné.

Si $0 < \varrho < 1$ on a $0 < \varrho < \varrho^{\frac{1}{d}} < 1$, par conséquent, pour $|z| > 1$, (3) et par suite (1) diverge, le terme général ne restant pas borné.

Si $\varrho = 1$ on a $\varrho^{\frac{1}{d}} = 1$, même conclusion pour $|z| > 1$, (3) et (1) divergent.

[1] On pourrait encore supposer $f(z)$ *méromorphe* dans tout le plan z, mais nous ne traiterons pas ici cette généralisation.

Si $\varrho > 1$ on a $1 < \varrho^{\frac{1}{d}} < \varrho$. Donc, pour $1 \leq |z| < \varrho^{\frac{1}{d}}$ (3) et (1) convergent absolument. Et (1) converge uniformément dans $|z| < \varrho^{\frac{1}{d}} - \varepsilon$ (aussi petit que soit $\varepsilon > 0$). Pour $|z| > \varrho^{\frac{1}{d}}$ (3) et (1) divergent, le terme général ne restant pas borné. Pour $|z| = \varrho^{\frac{1}{d}}$ il y a doute.

Ces résultats rapprochés de ceux des § I et II nous permettent de conclure pour tout le plan z, lorsque $f(z)$ est un polynome de degré d et ϱ le rayon de convergence de la série (2) associée à (1):

Le domaine de convergence D de la série (1) *(et la convergence y est absolue) est alors le plus petit des* 2 *cercles de centre* 0 *de rayons* ϱ *et* $\varrho^{\frac{1}{d}}$*; dans tout domaine* Δ *intérieur à D, la série* (1) *converge uniformément et sa somme est holomorphe en* z. *En tout point extérieur à D, la série* (1) *diverge, son terme général ne restant pas borné.*

Les circonstantes sont donc, dans le cas a), assez analogues aux circonstances classiques qui concernent les séries entières lesquelles correspondent à $d = 1$, $f(z) \equiv z$.

Il n'y a là rien d'étonnant car la série (1) peut se ramener à *la somme des d séries entières* obtenues en remplaçant le polynome $f(z)$ successivement par chacun de ses termes: ce sont les séries

$$f_d[\Sigma a_n z^{dn}],\ f_{d-1}[\Sigma a_n z^{(d-1)n}],\ \ldots,\ [\Sigma a_n z^n],$$

dont les rayons de convergence respectifs sont

$$\varrho^{\frac{1}{d}},\quad \varrho^{\frac{1}{d-1}},\ \ldots,\ \varrho$$

tous distincts lorsque $\varrho \neq 1$.

Si l'on pose $\varphi(z) = \sum\limits_1^\infty a_n z^n$, $\varphi(z)$ sera holomorphe dans le cercle de rayon ϱ et l'on aura

$$S(z) = \sum_0^\infty a_n f(z^n) = a_0 + \varphi(z) + f_2\,\varphi(z^2) + f_3\,\varphi(z^3) + \cdots + f_d\,\varphi(z^d) \tag{4}$$

lorsque z est intérieur au plus petit des cercles de rayons ϱ et $\varrho^{\frac{1}{d}}$.

Sur cette forme (4) on remarque que

1°) Si $\varrho < 1$ *c'est pour le terme* $\varphi(z)$ que le cercle d'holomorphie est le plus petit, [$\varphi(z^n)$ étant alors holomorphe dans le cercle de rayon $\varrho^{\frac{1}{n}} > \varrho$]. *Les singularités de* $S(z)$ *les plus voisines de l'origine sont alors celles de* $\varphi(z)$: elles sont situées sur le cercle de rayon ϱ, cercle de convergence de (1), et elles peuvent être distribuées de façon quelconque, comme celles de $\varphi(z)$.

2°) Si $\varrho > 1$, c'est pour le terme $\varphi(z^d)$ que le cercle d'holomorphie est le plus petit [car $\varphi(z^n)$ est alors holomorphe pour $|z| < \varrho^{\frac{1}{n}} < \varrho$], *et les singularités de* $S(z)$ *les plus voisines de l'origine sont celles de* $\varphi(z^d)$: *elles sont distribuées en étoiles régulières à d sommets*, [tout point singulier ζ de $\varphi(z^d)$ étant accompagné de tous les $\omega\zeta$ $(\omega^d = 1)$] sur le cercle de rayon $\varrho^{\frac{1}{d}}$, cercle de convergence de (1). Ces singularités *ne peuvent pas être quelconques*, comme on le voit. C'est là un phénomène tout à fait nouveau, dont la répercussion sur la représentation des fonctions holomorphes par des séries telles que (1) est considérable, ainsi qu'on le verra plus loin.

Mais, dans les 2 cas qui précèdent, *la somme de la série, holomorphe à l'intérieur du domaine* D, *présente toujours un point singulier au moins sur la circonférence de* D.

2e Cas. $f(z)$ **est une fonction entière transcendante**

$$f(z) = z + f_2 z^2 + \cdots + f_k z^k + \cdots.$$

Reprenons la série (1) $\Sigma a_n f(z^n)$.

Il y a ici une différence essentielle avec le cas où f est un polynome. Lorsque, $|z|$ étant pris > 1, n devient infini, $f(z^n)$ *n'est équivalent à aucune puissance de* z, d'où la très grande irrégularité de la convergence de (1) pour $|z| > 1$.

1°. Montrons que si la série entière associée (2) a un rayon de convergence ϱ fini ou nul, *la série* (1) *ne peut pas converger dans toute une aire, si petite soit-elle, extérieure au cercle unité,* c'est-à-dire que les points de divergence de (1) forment un *ensemble partout dense hors de* $|z| = 1$.

En effet, les termes de (1) étant holomorphes dans tout le plan, il résulte d'un théorème classique d'Osgood (Annals of Mathematics 2e série, t. III) que, *dans toute aire où* (1) *converge, on peut trouver une aire incluse où* (1) *converge uniformément.* Par conséquent, si l'affirmation précédente n'était pas vraie, la série (1) *devrait converger uniformément dans une certaine aire extérieure à* $|z| = 1$, et par conséquent *sur un certain* arc γ du cercle $|z| = \varrho_1$, pour une valeur convenable de $\varrho_1 > 1$. Quel que soit z sur cet arc, on aurait donc $|a_n f(z^n)| < M$, M fixe, quel que soit n c'est-à-dire

$$|f(z^n)| < \frac{M}{|a_n|}.$$

Or, la série (2) ayant un rayon de convergence fini ou nul, on a

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha > 0$$

c'est-à-dire qu'il existe une suite d'indices indéfiniment croissants $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ pour lesquels

$$\lim_{k=\infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = \alpha$$

et par conséquent, α_1 étant > 0 et $< \alpha$,

$$|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \alpha_1$$

à partir d'un certain rang qu'on peut, sans restriction supposer être le premier.

On a, pour cette suite,

$$|a_{n_k}| > \alpha_1^{n_k}.$$

Donc on aurait

$$|f(z^{n_k})| < \frac{M}{\alpha_1^{n_k}} \qquad (\text{pour } k = 1, 2, \ldots \infty)$$

quel que soit z sur un certain arc γ du cercle de rayon $\varrho_1 > 1$.

Nous poserons, pour abréger, $r_k = \varrho_1^{n_k}$ donc $n_k = \dfrac{\log r_k}{\log \varrho_1}$.

Lorsque z décrit γ, si petit qu'il soit, z^{n_k} décrira *un arc du cercle de rayon* r_k *qui recouvrira tout le cercle,* dès que n_k sera assez grand.

Par conséquent, pour $k > k_0$, on aura

$$\mathfrak{M}(r_k) < \frac{M}{\alpha_1^{n_k}},$$

$\mathfrak{M}(r)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ sur $|z| = r$.

Or

$$\alpha_1^{n_k} = \alpha_1^{\frac{\log r_k}{\log \varrho_1}} = e^{\frac{\log \alpha_1 . \log r_k}{\log \varrho_1}} = r_k^{\frac{\log \alpha_1}{\log \varrho_1}}.$$

Donc

$$\mathfrak{M}(r_k) < \frac{M}{r_k^{\frac{\log \alpha_1}{\log \varrho_1}}}.$$

Les r_k grandissent indéfiniment avec k, $\mathfrak{M}(r_k)$ *serait borné supérieurement par une certaine puissance de* r_k, *ce qui n'est possible que si* f *est un polynome* de degré $\leq a$ l'exposant de cette puissance, par consequent notre théorème est démontré.

Le théorème d'Osgood invoqué repose sur ce fait essentiel que, si la série (1) converge dans une aire D, il existe une aire D_1, intérieurs à D, où la somme S_n des n premiers termes de (1) reste *bornée quel que soit* n. Ce dernier fait reste vrai si l'on envisage, non plus une aire D en tout point de laquelle (1) converge, mais *un arc continu quelconque* C *de courbe* $x=x(t)$, $y=y(t)$ pour $a \leq t \leq b$. Si sur C, la série (1) converge, on peut trouver sur C un *arc partiel* C_1, correspondant à $a_1 \leq t \leq b_1$ $(a \leq a_1 < b_1 \leq b)$, sur lequel $|S_n(z)|$ reste borné quel que soit n, et aussi, par conséquent $a_n f(z^n)$ terme general: $|a_n f(z^n)| < M$ quel que soit z sur C_1 et l'entier n. Or il est aisé de voir que C_1, qui ne peut être fermée en vertu de la démonstration qu'on vient de faire pour le cas des aires, ne peut alors être coupé qu'en un point par toute circonférence de centre o.

En effet, si C_1 était rencontré en plus d'un point par une certaine circonférence γ de centre o et de rayon r, il y aurait un arc $A\mu B$ de C_1, allant de A à B (points de γ) et sur lequel, par exemple, le rayon vecteur serait constamment $> r$. A et B sont distincts puisque C_1 n'est pas fermée et ne contient pas d'arc fermé. Les points A et B étant distincts et, comme C_1, extérieurs à $|z| = 1$, on voit que, pour n suffisamment grand, la courbe décrite par z^n, quand z décrit l'arc $A\mu B$, comprend une *courbe continue fermée* que nous désignerons pas C_1^n et qui entoure complètement le cercle de rayon r^n.

En raisonnant comme précédemment sur la suite partielle $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ pour laquelle

$$|a_{n_k}| > \alpha_1^{n_k} > 0,$$

on aurait, sur C_1,

$$|f(z^{n_k})| < \frac{M}{\alpha_1^{n_k}},$$

et par conséquent, puisque $C_1^{n_k}$ entoure le cercle de rayon r^{n_k},

$$\mathfrak{M}(r^{n_k}) < \frac{M}{\alpha_1^{n_k}}$$

et l'on conclurait comme précédemment que $f(z)$ *est un polynome.*

De ce qui précède résulte que: en un point ζ, extérieur à $|z| = 1$, s'il passe *un* arc de courbe C, de rayon vecteur croissant (ou décroissant) à partir de ζ, sur lequel la série (1) converge uniformément, (ou simplement sur lequel le terme général $a_n f(z^n)$ reste borné quel que soit n), *il n'en existe pas d'autre ayant les mêmes propriétés.* (Car l'ensemble des deux arcs constituerait une courbe ayant les caractères de l'arc $A\mu B$ qu'on vient d'envisager, et dont l'existence est impossible lorsque $f(z)$ est une transcendante entière.)

Conclusion. Lorsque la série associée (2) $\sum_1^\infty a_n z^n$ *n'est pas une fonction entière,* son rayon de convergence ϱ n'étant pas infini, la série (1), où $f(z)$ est une *fonction transcendante entière,* ne peut pas converger hors de $|z| = 1$ en tous les points d'une *aire,* si petite qu'elle soit; les points de divergence de (1) sont, hors de $|z| = 1$, denses partout. De plus la convergence *uniforme* de (1), possible sur certains arcs de courbe extérieur à $|z| = 1$, ne peut avoir lieu que sur *des arcs* de courbe coupés en *un seul point* par toute circonférence de centre o (arcs à rayon vecteur monotone).

Exemple. On peut aisément former des exemples où (1) converge absolument et uniformément par exemple sur toute une demi droite issue de o, $f(z)$ étant une transcendante entière.

Prenons $f(z) = 1 - e^{-z} = z + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n!} + \cdots$ et formons la série (1') $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n} f(z^n)$.

Le rayon de convergence de (2') associée à (1') est $\varrho = 2$.

Lorsque z est réel et positif, z^n l'est aussi. Donc, pour tout $z > 0$ $0 < e^{-z^n} < 1$ et $0 < f(z^n) < 1$.

La série (1') $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n} f(z^n)$ est, quel que soit z réel > 0, majorée par $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$.

Donc (1') converge *absolument et uniformément sur tout l'axe réel positif.*

Soit $z = re^{i\omega}$ hors de l'axe réel positif et extérieur à $|z| = 1$; $r > 1$.

Si ω est commensurable à 2π, les multiples $n\omega$ forment une suite régulière périodique (mod 2π) dans laquelle une infinité de termes sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (mod 2π), par exemple tous les termes de la forme $\omega(n_0 + \lambda p)$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ et λ et n_0 ayant une certaine valeur entière: posons $n_p = n_0 + \lambda p$, tous les $\omega(n_0 + \lambda p)$ sont congrus (mod 2π). On aura

$$f(z^{n_p}) = 1 - e^{-z^{n_p}} = 1 - e^{-r^{n_p}\cos n_p\omega} \cdot e^{-ir^{n_p}\sin n_p\omega}.$$

Les $\omega(n_0 + \lambda p)$ étant congrus (mod 2π) à un nombre compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, $\cos n_p\omega$ *a une valeur fixe négative.*

Donc

$$e^{-r^{n_p}\cos n_p\omega} = e^{ar^{n_p}} \qquad (a > 0) \text{ pour tout entier } p > 0,$$

$$|f(z^{n_p})| > e^{ar^{n_p}} - 1$$

et

$$\left|\frac{1}{2^{n_p}} f(z^{n_p})\right| > \frac{e^{ar^{n_p}} - 1}{2^{n_p}}.$$

Lorsque p croît indéfiniment, le 2[e] membre grandit aussi indéfiniment, donc la série proposée diverge au point z.

Si ω est incommensurable à 2π on peut, comme il est bien connu, trouver une suite indéfiniment croissante d'entiers n_p pour lesquels

$$n_p\omega = -\pi + \varepsilon_p \pmod{2\pi},$$

ε_p tendant vers zéro lorsque p devient infini.

Il en résulte

$$f(z^{n_p}) = 1 - e^{r^{n_p}\cos\varepsilon_p} e^{ir^{n_p}\sin\varepsilon_p}.$$

Donc

$$\left|\frac{1}{2^{n_p}} f(z^{n_p})\right| > \frac{e^{r^{n_p}(1-\eta)} - 1}{2^{n_p}}$$

η positif arbitrairement petit dès que p est assez grand.

Et par suite la série $(1')$ diverge encore au point z.

La série (1') $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n} f(z^n)$ *proposée converge donc absolument et uniformément dans l'ensemble fermé constitué par le cercle* $|z| \leq 1$ *et tout l'axe réel positif.* Hors de cet ensemble elle diverge, le terme général ne restant pas borné.

2. Supposons maintenant que la série associée (2) $\sum_1^\infty a_n z^n$ *converge dans tout le plan.* Sa somme $\varphi(z)$ est une fonction transcendante entière.

Nous désignerons comme précédemment par $\mathfrak{M}(r)$ le maximum de $|f(z)|$ sur $|z| = r$.

Nous savons déjà que la série (1) $\Sigma a_n f(z^n)$ converge uniformément dans le domaine $|z| \leq 1$. Supposons qu'elle converge en tous les points d'une certaine aire D extérieure à $|z| = 1$, elle converge alors *uniformément* en tous les points d'une aire convenable D_1 intérieure à D, et en particulier sur un certain arc de cercle γ ayant son centre en o et pour rayon $r_0 > 1$.

On a donc quel que soit z sur γ $|a_n f(z^n)| < A$ pour tout entier n. Or, pour $n \geq N$ assez grand z^n décrit tout le cercle de centre o de rayon r_0^n [N dépend de l'angle au centre correspondant à γ] par suite $|f(z^n)|$ prend en un certain point de γ la valeur $\mathfrak{M}(r_0^n)$, c'est-à-dire que l'on aura, pour tout $n \geq N$

$$|a_n| \mathfrak{M}(r_0^n) < A$$

$$|a_n| < \frac{A}{\mathfrak{M}(r_0^n)}.$$

Il en résulte que (1) *converge absolument et uniformément dans tout cercle* $|z| \leq r < r_0$ quelque voisin que soit r de r_0.

En effet on aura, dans le cercle $|z| \leq r$, $|f(z^n)| \leq \mathfrak{M}(r^n)$. Donc

$$|a_n f(z^n)| < A \frac{\mathfrak{M}(r^n)}{\mathfrak{M}(r_0^n)}.$$

La série (1) est donc majorée par la série $A \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathfrak{M}(r^n)}{\mathfrak{M}(r_0^n)}$ qui converge plus rapidement qu'une progression géométrique de raison $\frac{r}{r_0} < 1$.

Cela résulte de ce que, $f(z)$ étant nulle à l'origine, avec $f'(0) = 1$, la fonction $\frac{f(z)}{z}$, holomorphe dans $|z| \leq z_0^n$, atteint le maximum de son module sur $|z| = r_0^n$; donc pour $r^n < r_0^n$ on a $\frac{\mathfrak{M}(r^n)}{r^n} < \frac{\mathfrak{M}(r_0^n)}{r_0^n}$, c'est-à-dire

$$\frac{\mathfrak{M}(r^n)}{\mathfrak{M}(r_0^n)} < \frac{r^n}{r_0^n}.$$

La série majorante converge donc plus rapidement que la progression $\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$.

Nous allons, comme dans la théorie des séries entières, diviser les nombres positifs en 2 classes:

1°. Si pour une certaine valeur r_0 de r tous les $|a_n| \mathfrak{M}(r_0^n)$ sont bornés supérieurement quel que soit n par un nombre positif A, il en sera de même pour les $|a_n| \mathfrak{M}(r^n)$ quel que soit $r \leq r_0$; car $\mathfrak{M}(r^n) \leq \mathfrak{M}(r_0^n)$ pour $r \leq r_0$ quel que soit n.

2°. Si pour une certaine valeur r'_0 de r, les $|a_n| \mathfrak{M}(r'^n_0)$ n'ont pas de borne supérieure commune, il existe une infinité d'indices croissants $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ tels que

$$\lim_{k=\infty} |a_{n_k}| \mathfrak{M}(r'^{n_k}_0) = +\infty.$$

Alors, quel que soit $r' \geq r'_0$ on aura aussi

$$\lim_{k=\infty} |a_{n_k}| \mathfrak{M}(r'^{n_k}) = +\infty$$

donc l'ensemble des $|a_n| \mathfrak{M}(r'^n)$ ne sera borné supérieurement pour aucune valeur de $r' \geq r'_0$.

La 1ère classe comprendra tout nombre r pour lequel l'ensemble des $|a_n| \mathfrak{M}(r^n)$ a une borne supérieure finie.

La 2e classe comprendra tout nombre r' pour lequel cet ensemble n'a pas de borne supérieure finie.

Tout nombre positif r appartient à l'une des 2 classes.

Tout nombre de la 1ère classe est inférieur à un nombre quelconque de la 2e classe.

Par la coupure précédente nous définissons un nombre R séparant la 1ère classe de la 2e; R peut être le plus grand nombre de la 1ère classe, ou le plus petit nombre de la 2e classe. Quel que soit $r < R$, on pourra insérer entre r et R un nombre r_0 de la 1ère classe et, en vertu, d'un raisonnement fait précédemment *la série* (1) *converge absolument et uniformément dans tout cercle* $|z| \leq R - \varepsilon$ (ε positif arbitrairement petit). *Pour tout* z *de module* $r < R$ $|a_n \mathfrak{M}(r^n)|$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$. Au contraire, tout $r' > R$ appartient à la 2^e classe, il est donc impossible que sur un arc du cercle $|z| = r'$, si petit soit-il, les termes $|a_n f(z^n)|$ soient tous inférieurs à un nombre fixe, donc sur cet arc la série (1) ne peut pas converger uniformément, son terme général ne restant pas uniformément borné. *A l'extérieur du cercle* $|z| = R$ *les points de divergence de la série* (1) *sont partout denses,* (car si une aire D extérieure à $|z| = R$ n'en contenait pas, elle renfermerait un arc γ de rayon $r' > R$ sur lequel (1) convergerait uniformément ce qui est impossible puisque r' est de la 2^e classe.

Le domaine de convergence uniforme de (1) *est donc le cercle de centre* 0, *de rayon* R. *Hors de ce cercle, la série* (1) *peut avoir des lignes de convergence uniforme mais non des domaines. Le nombre* R *est, bien entendu, au moins égal à un.*

[En procédant comme on l'a fait au n° 1 précédent, on verrait aisément que les lignes de convergence uniforme de (1), extérieures à $|z| = R$ ne peuvent être coupées qu'en un point par tout cercle de centre 0 de rayon $r > R$.]

Un exemple de ligne de convergence uniforme extérieure au domaine $|z| < R$ s'obtient en modifiant légèrement l'exemple formé au n° précédent.

On prendra encore $f(z) = 1 - e^{-z}$. Alors $\mathfrak{M}(r) = e^r - 1$. Prenons pour a_n précisément les nombres

$$a_n = e^{-R^n} \qquad R \text{ nombre } > 1.$$

Alors

1°) pour $|z| \leq r < R$ on a $|a_n f(z^n)| \leq e^{-R^n} \mathfrak{M}(r^n) < e^{-R^n + r^n}$

$$|a_n f(z^n)| < e^{-R^n\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]}$$

et la série (1) est majorée par la série très convergente

$$e^{-\lambda R^n} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

2°) pour z *quelconque réel et positif* on aura

$$a_n f(z^n) < e^{-R^n}$$

car $f(z^n)$ est alors < 1 et la série (1) converge absolument et uniformément sur tout l'axe réel positif.

3°) pour $z = re^{i\omega}$ non situé sur l'axe réel positif $\omega \neq 0 \pmod{2\pi}$ on aura comme on l'a déjà vu, une suite indéfinie $n_1, n_2, \ldots n_p, \ldots$ telle que

$$|f(z^{n_p})| > e^{a r^{n_p}} - 1 \qquad \text{avec } a > 0$$

dès que p est assez grand. Le terme d'indice n_p de (1) a donc un module

$$|a_{n_p} f(z^{n_p})| > \frac{e^{a r^{n_p}} - 1}{e^{R^{n_p}}}$$

qui grandit indéfiniment avec n_p lorsque $r > R$.

La série (1) diverge donc hors de $|z| = R$ pour tout point non situé sur l'axe réel positif.

La série $\sum_1^\infty e^{-R^n}(1 - e^{-z^n})$ possède donc un ensemble de points de convergence, composé du cercle $|z| < R$ et de tout l'axe réel positif.

Dans tout domaine fermé intérieur à $|z| = R$ et prolongé par l'axe réel positif la série converge absolument et uniformément.

Conclusion de l'étude de la convergence.

L'étude faite en dernier lieu nous a conduit pour déterminer le rayon R de convergence uniforme de la série (1) à séparer les nombres $r > 1$ en 2 classes séparées par R:

La 1ère composée des r pour lesquels $|a_n \mathfrak{M}(r^n)|$ reste borné supérieurement.

La 2e composée des r pour lesquels $|a_n \mathfrak{M}(r^n)|$ ne reste pas borné supérieurement; on observera que *ce critérium reste valable pour* $r \leq 1$, car, pour $r < 1$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{M}(r^n)}{r^n} = 1,$$

du fait que $f'(0) = 1$.

Nous résumerons ce chapitre en disant que:

La série (1) converge absolument et uniformément à l'intérieur d'un domaine circulaire de centre 0 de rayon R. R sépare les nombres positifs r pour lesquels $|a_n \mathfrak{M}(r^n)|$ est borné supérieurement de ceux pour lesquels il ne l'est pas. Hors du cercle $|z| = R$ la série (1) peut avoir des lignes de convergence uniforme, mais non des domaines. Les points de divergence de (1) sont partout denses hors de $|z| = R$. R sera dit rayon de convergence uniforme de (1).

Nous n'insisterons pas davantage ici sur la détermination du nombre R qui dépend de l'allure de a_n pour $n = \infty$ et de celle de $\mathfrak{M}(r^n)$. On pourrait, en envisageant la fonction inverse de $\mathfrak{M}(r)$ donner, pour la détermination de R, une règle analogue à celle de Cauchy-Hadamard pour le rayon de convergence des séries entières (mais beaucoup moins simple). Nous nous bornerons pour l'instant aux indications données dans les numéros précédents:

Soit ϱ le rayon de convergence de la série associée (2) $\sum_0^\infty a_n z^n$.

1°. Si $\varrho \leq 1$ on a $R = \varrho$.

2°. Si $1 < \varrho < \infty$ on a

$$\left.\begin{cases} R = \varrho^{\frac{1}{d}} & \text{si } f(z) \text{ est un polynome de degré } d \\ R = 1 & \text{si } f(z) \text{ est une transcendante entière} \end{cases}\right\} \begin{matrix}\text{On voit que} \\ R < \varrho\end{matrix}$$

3°. Si $\varrho = \infty$, c'est-à-dire si (2) est une fonction entière, on a $R \geq 1$, et la détermination précise de R exige l'étude des suites $|a_n| \mathfrak{M}(r^n)$ pour $r > 1$. S'il existe un $r > 1$ tel que $|a_n| \mathfrak{M}(r^n)$ reste borné, on a $R \geq r > 1$.

Si quel que soit $r > 1$ $|a_n| \mathfrak{M}(r^n)$ ne reste pas borné on a $R = 1$.

Lorsque $f(z)$ *est à croissance régulière et d'ordre* $\neq 0$ on voit aisément que R ne peut être > 1 que si $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ *est d'ordre nul.*

CHAPITRE 2.

Représentations des fonctions holomorphes autour de l'origine par des séries de la forme $\Sigma a_n f(z^n)$.

Soit $F(z)$ une fonction holomorphe autour de l'origine, montrons que, $f(z)$ étant donnée, comme au chapitre précédent, on peut determiner les a_n de manière que la série $a_0 + \sum_{n=p}^\infty a_n f(z^n)$ converge uniformément dans un certain cercle autour de l'origine et ait pour somme dans ce cercle la fonction $F(z)$ donnée.

1. *Déterminations des a_n. Unicité du développement.* — Si le développement précédent est possible et jouit des propriétés requises, on aura, dans le cercle où converge uniformément la série $\Sigma a_n f(z^n)$ (1)

$$F(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(z^n).$$

Si C_r est un cercle de centre o, de rayon $r < 1$, intérieur aux domaines d'holomorphie de $f(z)$ et de $F(z)$, et au domaine de convergence uniforme de la série (1), il est visible que, $f(z)$ se developpant autour de o sous la forme

$$f(z) = z + f_2 z^2 + \cdots + f_k z^k + \cdots.$$

$f(z^n)$ sera de l'ordre de z^n à l'origine, par suite

$$\int_{C_r} \frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}} = \int_{C_r} \frac{a_0 + a_1 f(z) + a_2 f(z^2) + \cdots + a_n f(z^n)}{z^{n+1}}\,dz$$

et comme

$$\int_{C_r} \frac{a_n f(z^n)}{z^{n+1}}\,dz = 2\pi i a_n$$

$$(5) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F(z) - a_0 - a_1 f(z) - a_2 f(z^2) - \cdots - a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}}\,dz.$$

Les intégrales qui figurent dans (5) peuvent toujours se calculer si C_r satisfait aux conditions indiqués, même lorsque $f(z)$ n'est pas holomorphe dans tout le plan.

Lorsque $f(z)$ est entière (polynome ou fonction transcendante), l'intégrale qui fournit a_n peut se calculer en supposant seulement que *C_r est intérieur au domaine d'holomorphie de $F(z)$, même si $r > 1$*, car z^n restera alors toujours intérieur au domaine d'holomorphie de $f(z)$.

Par ces formules (5), qui ressemblent aux formules classiques de Cauchy

$$A_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

donnant les coefficients $A_n = \dfrac{F^{(n)}(a)}{n!}$ du développement de Taylor autour de a, on voit que *le développement* (1) *s'il existe et jouit des propriétés indiquées, est nécessairement unique.*

En effet on a

$$a_0 = F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{F(z)}{z}\,dz = A_0$$

puis

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{F(z)-a_0}{z^2}\,dz = F'(0) = A_1$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{F(z)-a_0-a_1 f(z)}{z^3}\,dz = \frac{F''(0)}{2!} - a_1 f_2 = \frac{F''(0)}{2!} - a_1\frac{f''(0)}{2!} = A_2 - a_1 f_2$$

et, par récurrence, *chaque a_n est déterminé, sans ambiguité, ni impossibilité,* en fonction des a d'indice moindre.

On pourrait encore remarquer que l'on a

$$a_n = \lim_{z=0}\left[\frac{F(z) - a_0 - a_1 f(z) - \cdots - a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}}\right]$$

comme on le fait pour les séries asymptotiques, mais le premier mode de calcul des a_n nous paraît préférable dans le cas présent.

2. *Convergence, au voisinage de* 0, *du développement* (1) *formé avec les coefficients précédents.* Par les formules (5) nous associons à toute fonction $F(z)$ holomorphe autour de 0 une suite de coefficients a_n ($n = 0, 1, \ldots \infty$) avec laquelle nous formons la série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(z^n)$$

dont nous allons maintenant démontrer la convergence uniforme et absolue dans un certain domaine voisin de 0.

Supposons < 1 le rayon r de C_r. Puisque C_r est intérieur au domaine d'holomorphie de $f(z)$ on aura dans et sur C_r

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < A, \qquad \text{et, puisque } r < 1$$

$$\left|\frac{f(z^n)}{z^n}\right| < A.$$

De même

$$\left|\frac{F(z)-a_0}{z}\right| < B$$

puisque C_r est dans le domaine d'holomorphie de $F(z)$.

En tenant compte de ces inégalités dans la formule qui donne a_n il vient

$$|a_n| < \frac{Br + Ar|a_1| + Ar^2|a_2| + \cdots + Ar^{n-1}|a_{n-1}|}{r^n}.$$

Pour simplifier, on peut toujours *remplacer A et B par le plus grand d'entre eux, soit M*, et on a

$$|a_n| < \frac{M[r + |a_1|r + |a_2|r^2 + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1}]}{r^n}.$$

Envisageons la série $r + \sum_1^\infty |a_k|r^k$ et posons $s_n = r + \sum_1^n |a_k|r^k$. L'inégalité précédente devient:

$$s_n - s_{n-1} < Ms_{n-1}$$

$$s_n < s_{n-1}(1 + M).$$

D'où, en multipliant membre à membre les inégalités tirées de la précédente en donnant successivement à l'indice n les valeurs $2, 3, \ldots$, et observant que

$$s_1 = r(1 + |a_1|)$$

$$s_n < s_1(1 + M)^{n-1} = r(1 + |a_1|)(1 + M)^{n-1}.$$

Si l'on observe que $a_1 = F'(0) = \lim_{z=0} \frac{F(z) - a_0}{z}$ on voit que $|a_1| \leq B \leq M$

donc

$$s_n < r(1 + M)^n$$

et, par conséquent,

$$|a_n| < \frac{Ms_{n-1}}{r^n} < \frac{M(1 + M)^{n-1}}{r^{n-1}}.$$

Il résulte de là que

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < M^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1 + M}{r}\right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Par conséquent

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1 + M}{r}.$$

Avec les notations du chapître précédent, ϱ désignant le rayon de convergence de la série (2) associée $\sum_1^\infty a_n z^n$, on aura

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{n=\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1+M}{r}$$

c'est-à-dire

$$\varrho \geq \frac{r}{1+M}.$$

Par conséquent, en vertu du chapître 1[er], la série $a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n f(z^n)$, formée avec les coefficients a_n tirés des formules (5), converge absolument et uniformément dans tout cercle de centre o de rayon $\frac{r-\varepsilon}{1+M}$, ε positif étant aussi petit qu'on le voudra — et dans ce cercle, sa somme est égale à la fonction $F(z)$ figurant dans les formules (5). c. q. f. d.

Ce qui précède ne vaut d'ailleurs que pour un cercle C_r de rayon $r \leq 1$, car c'est alors seulement que lorsque z est dans ou sur C_r, z^n (pour n entier > 0) est aussi dans C_r. Par conséquent, lorsque le domaine d'holomorphie de F contient le cercle unité, $f(z)$ étant une fonction entière, les limitations précédentes ne nous renseignent plus sur l'ordre de grandeur des coefficients a_n, car on ne peut plus écrire $\left|\frac{f(z^n)}{z^n}\right| < A$ pour z sur C_r, quel que soit n, lorsque $r > 1$.

CHAPITRE 3.

Domaine de convergence uniforme de la série $\Sigma a_n f(z^n)$ correspondant à une fonction donnée $F(z)$, holomorphe autour de o, ($f(z)$ entière).

1. La série (1) $a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n f(z^n)$ étant, autour de o, égale à une fonction $F(z)$ *donnée à priori*, que peut-on dire de son rayon R de convergence uniforme.

D'abord il est clair que R est inférieur ou égal à la distance δ à o du point singulier de $F(z)$ le plus voisin de l'origine, puisque la somme de la série (1) est holomorphe pour $|z| < R$.

1°. *Supposons que* δ *soit* < 1. — Alors $R \leq \delta < 1$ et l'on sait, en vertu du chapitre I, qu'alors R n'est autre que le rayon de convergence ϱ de la série (2) associée $\sum_1^\infty a_n z^n$. Posons, comme précédemment,

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors, de l'identité $\quad F(z) = a_0 + \sum_1^\infty a_n f(z^n), \quad$ valable dans $|z| < R$,

résulte, par un nouveau groupement des termes, l'identité

$$F(z) = a_0 + f_1 \varphi(z) + f_2 \varphi(z^2) + \cdots + f_d \varphi(z^d) + \cdots$$

laquelle est valable dans $|z| < R$ et s'étend par prolongement analytique.

La fonction $\varphi(z)$, holomorphe pour $|z| < R$, présente un point singulier au moins sur $|z| = R$. Les fonctions $\varphi(z^2), \ldots, \varphi(z^d), \ldots$ sont holomorphes pour $|z| < R^{\frac{1}{2}}, \ldots |z| < R^{\frac{1}{d}}$, cercles de rayons croissant vers l'unité et $\varphi(z^d)$ présente des singularités en étoile sur le cercle $|z| = R^{\frac{1}{d}}$.

Sur $|z| = R$, aux points singuliers de $\varphi(z)$ la différence $F(z) - f_1 \varphi(z)$ reste holomorphe. — Par conséquent, sur $|z| = R$, $F(z)$ possède les mêmes points singuliers que $\varphi(z)$, avec les mêmes parties singulières que $f_1 \varphi(z)$. On a par conséquent ici $R = \delta < 1$.

On en conclut aussitôt que si $\delta \geq 1$ on a nécessairement $R \geq 1$.

Car, lorsque $R < 1$ on peut faire le raisonnement précédent, écrire l'identité

$$F(z) = a_0 + f_1 \varphi(z) + f_2 \varphi(z^2) + \cdots$$

prouvant que $F(z)$ a nécessairement sur $|z| = R$ les mêmes points singuliers que $\varphi(z)$, ce qui est ici contradictoire avec $\delta \geq 1$.

Par suite, si $\delta = 1$ on a $R = 1$.

2°. *Supposons* $\delta > 1$. Alors, en général $R = 1$ et par conséquent, le domaine de convergence uniforme de (1) est plus petit que celui C_δ de la série de Taylor de $F(z)$. Nous l'avons déjà reconnu indirectement au chapitre I, section III premier cas, *lorsque* $f(z)$ *est un polynome de la forme* $f = z + f_2 z^2 + \cdots + f_d z^d$.

a) $f(z)$ *est un polynome de degré* d. Nous avons vu alors que, ϱ étant le rayon de convergence de la série associée (2) $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$, si $\varrho > 1$, le rayon de convergence uniforme de (1) étant $R = \varrho^{\frac{1}{d}} > 1$ et la somme $F(z)$ de la série (1) pouvant s'écrire

$$F(z) = a_0 + \varphi(z) + f_2 \varphi(z^2) + \cdots + f_d \varphi(z^d),$$

$F(z)$ devrait présenter sur $|z| = R$ des *points singuliers régulièrement distribués* aux sommets de polygones réguliers inscrits de d côtés, comme la fonction $\varphi(z^d)$ elle-même. *Lorsque* $F(z)$ *a des singularités quelconques*, cela ne se produit pas, par conséquent, on a nécessairement alors $\varrho = R = 1 < \delta$, en sorte que lorsque $\delta > 1$, *le domaine de convergence uniforme de* (1) *n'est pas en général le plus grand cercle d'holomorphie* (*de centre* 0) C_δ *de* $F(z)$, *comme c'est le cas pour la série de Taylor*. On n'a $R = \delta$ que pour des $F(z)$ très particulières de la forme

$$F(z) = a_0 + \varphi(z) + f_2 \varphi(z^2) + \cdots + f_d \varphi(z^d)$$

φ étant holomorphe dans un cercle de rayon > 1.

La démonstration qui précède, par l'absurde, n'éclaire pas suffisamment la question. Nous allons en donner une seconde basée sur l'évaluation de certains coefficients a_k de la série associée (2). d étant le degré du polynome $f(z)$, soit p le plus grand nombre premier $\leq d$. Etudions les a_n d'indice $n = p^q$ ($q = 1, 2, \ldots \infty$).

Envisageons la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z) - a_0 - a_1 f(z) - \cdots - a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}} dz$$

$$= A_n - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a_1 f(z) + \cdots + a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}} dz$$

en désignant par $F(z) = \sum_0^{+\infty} A_n z^n$ le développement de Taylor de $F(z)$ autour de l'origine.

Dans l'intégrale

$$\int \frac{a_1 f(z) + \cdots + a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}}$$

il faut prendre au numérateur les termes en z^n car seuls ils donnent une valeur $\neq 0$ dans l'intégrale.

Ce numérateur s'écrit

$$\sum_{\nu=1}^{d} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\mu f_\nu z^{\mu\nu}$$

somme double dans laquelle sont à envisager les indices μ et ν tels que $\mu\nu = n$.

Lorsque $n = p^q$ $(q = 1, 2, \ldots \infty)$ on devra avoir

$$\mu\nu = p^q \quad \text{avec} \quad \nu \leq d \quad \text{et} \quad \mu \leq p^q - 1,$$

ν devant diviser p^q, et p étant premier, ν est nécessairement une puissance de p. D'autre part, ν devant être $\leq d$, je dis qu'on ne peut avoir que $\nu = 1$ ou $\nu = p$.

Montrons en effet que $p^2 > d$, c'est-à-dire que, p étant le plus grand nombre premier $\leq d$ on a

$$d \geq p > \sqrt{d}.$$

Reportons-nous pour cela au théorème célèbre de Bertrand-Tchebichef sur les nombres premiers:

Pour tout entier $x \geq 7$ il existe au moins un nombre premier ϖ satisfaisant à

$$\frac{x}{2} < \varpi \leq x - 2,$$

ou bien pour tout entier $d \geq 5$ (en posant $x - 2 = d$) existe au moins un nombre premier ϖ pour lequel

$$1 + \frac{d}{2} < \varpi \leq d.$$

Or il est visible que pour tout entier d on a

$$1 + \frac{d}{2} - \sqrt{d} = \left(1 - \frac{\sqrt{d}}{2}\right)^2 + \frac{d}{4} > 0$$

donc

$$1 + \frac{d}{2} > \sqrt{d}.$$

Par suite pour tout $d \geq 5$ existe au moins un nombre premier ϖ tel que

$$\sqrt{d} < \varpi \leq d,$$

le plus grand nombre premier $p \leq d$ est alors tel que

$$\sqrt{d} < p \leq d.$$

Reste à vérifier la propriété pour $d = 2, 3, 4$. Or pour $d = 2$ on a $p = 2$; pour $d = 3$, $p = 3$; pour $d = 4$, $p = 3$, elle est donc toujours vraie.

On a donc bien toujours $p \leq d < p^2$, par suite $\nu \leq d$ et diviseur de p^q est nécessairement 1 ou p.

Or $\nu = 1$ est impossible car il faudrait $\mu = p^q$ et on doit avoir $\mu \leq p^q - 1$. Reste seulement $\nu = p$

$$\mu = p^{q-1}.$$

Par conséquent on a

$$a_{p^q} = A_{p^q} - f_p a_{p^{q-1}}$$

formule valable pour $q = 1, 2, \ldots$ Ecrivant les formules correspondant aux valeurs $1, 2, \ldots q$ de q on a

$$\begin{cases} a_p = A_p - f_p a_1 \\ a_{p^2} = A_{p^2} - f_p a_p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p^q} = A_{p^q} - f_p a_{p^{q-1}} \end{cases}$$

multipliant l'avant dernière (rang $q-1$) par $-f_p$, la précédente par $(-f_p)^2$, la première [rang $q-(q-1)$] par $(-f_p)^{q-1}$ et ajoutant membre à membre il reste

$$a_{p^q} = A_{p^q} - A_{p^{q-1}} f_p + A_{p^{q-2}} f_p^2 + \cdots + (-1)^{q-1} A_p f_p^{q-1} + (-1)^q a_1 f_p^q$$

ou encore

$$a_{p^q} = (-1)^q f_p^q \left[A_1 - \frac{A_p}{f_p} + \frac{A_{p^2}}{f_p^2} + \cdots + (-1)^q \frac{A_{p^q}}{f_p^q} \right]$$

car $a_1 = A_1$.

Nous aurons une *borne supérieure* du rayon ϱ de convergence de la série associée $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ en étudiant la suite partielle

$$|a_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}} \qquad \text{pour } q = 1, 2, \ldots \infty$$

car évidemment

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{n=\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{q=\infty} |a_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}};$$

or

$$|a_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}} = |f_p|^{\frac{q}{p^q}} \left| A_1 - \frac{A_p}{f_p} + \frac{A_{p^2}}{f_p^2} - \cdots + (-1)^q \frac{A_{p^q}}{f_p^q} \right|^{\frac{1}{p^q}}.$$

Envisageons l'expression

$$A_1 - \frac{A_p}{f_p} + \frac{A_{p^2}}{f_p^2} - \cdots + (-1)^q \frac{A_{p^q}}{f_p^q},$$

c'est la valeur pour $x = \frac{-1}{f_p}$ du polynome

$$A_1 + A_p x + A_{p^2} x^2 + \cdots + A_{p^q} x^q$$

lequel comprend les $q + 1$ premiers termes de la série entière en x

$$\sum_{q=0}^{\infty} A_{p^q} x^q.$$

Par hypothèse, la fonction $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ est holomorphe dans un cercle de centre 0 de rayon $\delta > 1$. Donc

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\delta} < 1 \text{ et par suite } |A_n| < \left(\frac{1}{\delta} + \varepsilon\right)^n \text{ pour } n > n_0(\varepsilon).$$

Par suite

$$|A_{p^q}|^{\frac{1}{q}} < \left(\frac{1}{\delta} + \varepsilon\right)^{\frac{p^q}{q}} \qquad \text{pour } q > q_0(\varepsilon)$$

et comme ε peut être choisi assez petit pour que $\frac{1}{\delta} + \varepsilon < 1$ on a

$$\lim_{q=\infty} |A_{p^q}|^{\frac{1}{q}} = 0.$$

La série entière

$$\sum_{q=0}^{\infty} A_{p^q} x^q$$

converge donc quel que soit x, c'est une fonction entière que nous appellerons $A(x)$.

Par suite l'expression

$$A_1 - \frac{A_p}{f_p} + \frac{A_{p^2}}{f_p^2} - \cdots + (-1)^q \frac{A_{p^q}}{f_p^q}$$

a une limite, pour $q = \infty$, et c'est le nombre

$$\alpha = A\left(-\frac{1}{f_p}\right).$$

On voit ensuite aisément que, si $\alpha \neq 0$ on a

$$\lim_{q=\infty} |a_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}} = 1.$$

Lorsque $\alpha = 0$, on ne peut pas toujours affirmer que

$$\left| A_1 - \frac{A_p}{f_p} + \frac{A_{p^2}}{f_p^2} - \cdots + (-1)^q \frac{A_{p^q}}{f_p^q} \right|^{\frac{1}{p^q}}$$

a pour limite l'unité car la parenthèse tend vers zéro lorsque $q \to \infty$.

En définitive, lorsque $A\left(-\frac{1}{f_p}\right) \neq 0$ on a $\frac{1}{\varrho} \geq 1$ c'est-à-dire $\varrho \leq 1$; mais comme on sait que $\varrho \geq 1$ *on en conclut* $\varrho = 1$ *et par suite* $R = 1$.

La fonction entière

$$\sum_{q=0}^{\infty} A_{p^q} x^q = A(x)$$

ne dépend que des coefficients A_{p^q} de la *fonction donnée* $F(z)$.

f_p est un coefficient de la fonction $f(z)$ qui est complètement indépendante de $F(z)$.

Le cas général est donc $A\left(-\frac{1}{f_p}\right) \neq 0$ *et par suite* $R = 1$.

Et l'on a en même temps une *condition nécessaire* pour que $R > 1$, c'est que $A\left(-\frac{1}{f_p}\right) = 0$, *p étant tout nombre premier* $\leq d$ *tel que* $p^2 > d$, car c'est là la seule propriété de p qui a été utilisée.

Remarque. — Il va sans dire que, dans ce qui précède, il faut supposer $f_p \neq 0$, ce qui est le cas général. Si l'on avait $f_p = 0$ pour tout nombre premier p tel que $p \leq d < p^2$ on aurait $a_{pq} = A_{pq}$ pour $q = 1, 2, \ldots$

Donc

$$\overline{\lim_{q=\infty}} |a_{pq}|^{\frac{1}{pq}} = \overline{\lim_{q=\infty}} |A_{pq}|^{\frac{1}{pq}} \leq \overline{\lim_{n=\infty}} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\delta}$$

et on ne pourrait en genéral conclure autre chose que $R \leq \varrho \leq \delta$, résultat banal. Nous revenons d'ailleurs sur ce cas dans l'étude suivante du cas où $f(z)$ est entière.

Exemple simple d'un cas où $\delta > 1$, $R = 1$, $f(z)$ *polynome.* — Considérons

$$F(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \cdots + \frac{z^n}{3^{n+1}} + \cdots$$

et le polynome $f(z) = z + z^2$.

Formons le développement $F(z) = a_0 + a_1 f(z) + a_2 f(z^2) + \cdots + a_n f(z^n) + \cdots$.

On a aisément $\frac{1}{3^{2k}} = a_{2k-1}$ et $\frac{1}{3^{2k+1}} = a_k + a_{2k}$. On tire de là les a_{2q} pour toute valeur positive de q

$$a_{2q} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{3^{2^{n-1}}} + \cdots \pm \frac{1}{3}\right].$$

En posant $\lambda = \frac{1}{3}$ il vient

$$|a_{2q}| = \lambda\,|\lambda - \lambda^2 + \lambda^{2^2} - \cdots + (-1)^n \lambda^{2^n}|.$$

Or, à cause de $\lambda^{2^n} > \lambda^{2^{n+1}}$ on voit que la série entre parenthèses est alternée, donc

$$\frac{2}{9} = \lambda - \lambda^2 < |\lambda - \lambda^2 + \lambda^{2^2} + \cdots + (-1)^n \lambda^{2^n}| < \frac{1}{3} = \lambda.$$

Donc

$$\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2^q}} = |\lambda(\lambda-\lambda^2)|^{\frac{1}{2^q}} < |a_{2^q}|^{\frac{1}{2^q}} < (\lambda^2)^{\frac{1}{2^q}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2^q}}.$$

Par suite

$$\lim_{q=\infty} |a_{2^q}|^{\frac{1}{2^q}} = 1$$

ce qui prouve que le rayon ϱ de la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ n'est pas > 1. Donc il est nécessairement $= 1$ et par suite $R = 1$, bien que sur le cercle $|z| = 1$ la somme $P(z)$ de la série formée n'ait aucune singularité.

b) $f(z)$ *est une transcendante entière.* Démontrons maintenant que, $f(z)$ étant une fonction transcendante entière, le rayon R de convergence uniforme de la série (1) fournie par $F(z)$ est en général égal à *un*.

En vertu de l'étude directe faite au chapitre I on a vu que R ne peut-être > 1 que si la fonction associée (2) $\varphi(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ est une *fonction entière* ($\varrho = \infty$), condition nécessaire, mais non suffisante.

Il suffit alors de trouver une suite de coefficients a_{n_i} tels que $|a_{n_i}|^{\frac{1}{n_i}}$ ne tende pas vers zéro pour affirmer que φ n'est pas entière, et par suite $R = 1$; p étant un nombre premier quelconque, envisageons les a_{p^q} pour $q = 0, 1, 2, \ldots \infty$ et reprenons

$$a_n = A_n - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a_1 f(z) + \cdots + a_{n-1} f(z^{n-1})}{z^{n+1}}\, dz$$

avec

$$F(z) = \sum_0^\infty A_n z^n \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_1^\infty f_n z^n \qquad (f_1 = 1)$$

le numérateur de l'intégrale est

$$\sum_{\nu=1}^\infty \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\mu f_\nu z^{\mu\nu}.$$

Les termes en z^n (les seuls intéressants) sont donnés par $\mu\nu = n = p^q$.

On a nécessairement les valeurs

$$\mu = 1,\ p,\ p^2,\ \ldots\ p^{q-1}$$

auxquelles correspondent

$$\nu = p^q,\ p^{q-1},\ p^{q-2},\ \ldots\ p;$$

ce qui donne pour $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \infty$,

$$A_{p^q} = a_1 f_{p^q} + a_p f_{p^{q-1}} + a_{p^2} f_{p^{q-2}} + \cdots + a_{p^q} f_1 \qquad \text{car } f_1 = 1.$$

On pourrait tirer de là a_{p^q} en fonction de $a_1, a_p, \ldots a_{p^{q-1}}$. Nous ne le ferons pas.

Considérons les 3 séries entières

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} f_{p^q} x^q$$

$$a(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p^q} x^q$$

$$A(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} A_{p^q} x^q$$

la relation précédente prouve que la 3e est le produit des 2 premières. On aura donc, si elles ont un cercle de convergence commun,

$$a(x) \,.\, \mathfrak{F}(x) = A(x)$$

et comme $\mathfrak{F}(0) = 1$, $a(x) = \dfrac{A(x)}{\mathfrak{F}(x)}$ dans un certain cercle autour de 0, à condition que les séries $\mathfrak{F}(x)$ et $A(x)$ convergent dans un certain cercle autour de 0.

Or $f(z)$ étant une fonction entière on a $\lim\limits_{q=\infty} |f_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}} = 0$.

Donc

$$\lim_{q=\infty} |f_{p^q}|^{\frac{1}{q}} = 0$$

à fortiori, par suite $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction entière.

D'autre part $F(x) = \sum_0^\infty A_n x^n$ étant convergente dans un cercle de rayon $\delta > 1$ on a

$$\lim_{n=\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\delta} \quad \text{donc} \quad \lim_{q=\infty} |A_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}} \leq \frac{1}{\delta} < 1$$

par suite

$$\lim_{q=\infty} |A_{p^q}|^{\frac{1}{q}} = 0$$

et $A(x)$ est aussi une fonction entière.

Donc la relation $a(x) = \dfrac{A(x)}{\mathfrak{F}(x)}$ est valable dans le cercle de centre o de rayon λ passant par *le zéro de $\mathfrak{F}(x)$ le plus rapproché de l'origine qui n'appartient pas à* $A(x)$ avec le même ordre de multiplicité.

Nous allons en déduire que $|a_{p^q}|^{\frac{1}{p^q}}$ ne tend pas vers zéro pour $q = \infty$ (d'où resultera $R = 1$). En effet λ étant le rayon de convergence de $a(x)$, il existe toujours une suite d'indices croissants $q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots$ tels que

$$\lim_{n=\infty} |a_{p^{q_n}}|^{\frac{1}{q_n}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pour ces indices q_n on aura

$$\lim_{n=\infty} |a_{p^{q_n}}|^{\frac{1}{p^{q_n}}} = 1$$

lorsque $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ c'est-à-dire λ fini ce qui prouve bien que $\varphi(z)$ n'est pas en général une fonction entière, et par suite, en général $R = 1$.

Il résulte aussi de ce qui précède que R ne peut être > 1 et $\varphi(z)$ ne peut-être entière *que si $\lambda = \infty$ (condition nécessaire et non suffisante)* c'est-à-dire que si la fonction donnée $f(z)$ et la fonction à représenter $F(z)$ sont telles que les 2 *fonctions entières $\mathfrak{F}(x)$ et $A(x)$ auxquelles elles donnent naissance, sont, quel que soit le nombre premier p choisi, divisibles l'une par l'autre, de manière que le quotient $\dfrac{A(x)}{F(x)}$ soit une fonction entière.*

La méthode suivie dans le cas où $f(z)$ est un polynome de degré d,

$(p \leq d < p^2)$ est un cas particulier de la précédente, pour lequel $\mathfrak{F}(x)$ se réduit à $1 + f_p x$, et la condition *nécessaire* pour que $R > 1$, $A\left(-\frac{1}{f_p}\right) = 0$ est bien un cas particulier de la condition trouvée pour le cas où $f(z)$ est une transcendante entière.

Il est clair que dans le cas particulier où les f_{pq} seraient nuls pour tous les nombres premiers p, la méthode ne nous apprendra rien.

Conclusion. — Ce qui précède suffit à montrer *qu'en général,* si $\delta > 1$, le rayon R sera égal à 1 et par suite *la série* (1) *aura un domaine de convergence uniforme moins étendu que la série de Taylor.* Au contraire si $\delta \leq 1$, la série (1) et la série de Taylor ont le même domaine de convergence uniforme.

Mais un changement élémentaire de variable peut nous ramener à ce cas $\delta \leq 1$, *si F n'est pas une fonction entière.*

Posons en effet $z = \delta u$. Alors au domaine $|z| \leq \delta$ correspond $|u| \leq 1$. Soit $F(\delta u) = F_1(u)$, $F_1(u)$ admet une singularité au moins sur $|u| = 1$.

Formons la série (1) *relative à la fonction $F_1(u)$*

$$F_1(u) = a_0 + a_1 f(u) + a_2 f(u^2) + \cdots + a_n f(u^n) + \cdots$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{F_1(u) - a_0 - a_1 f(u) - \cdots - a_{n-1} f(u^{n-1})}{u^{n+1}} du \qquad r < 1.$$

Elle convergera absolument et uniformément à l'intérieur du cercle $|u| = 1$.

Donc la série

$$a_0 + a_1 f\left(\frac{z}{\delta}\right) + a_2 f\left(\left(\frac{z}{\delta}\right)^2\right) + \cdots + a_n f\left(\left(\frac{z}{\delta}\right)^n\right) + \cdots$$

convergera absolument et uniformément vers $F(z)$ à l'extérieur du cercle $|z| < \delta$, passant par la singularité de $F(z)$ la plus voisine de l'origine. L'inconvénient est *qu'il faut connaitre* δ pour former le développement précédent (car le calcul des a_n dépend du choix de δ), ou tout au moins *une limite supérieure λ de δ*, car le changement de variable $z = \lambda u$ dans $F(z)$ donnera aussi une fonction $F_2(u) = F(\lambda u)$ pour laquelle il y a au moins un point singulier de module $\frac{\delta}{\lambda} \leq 1$, et à laquelle s'appliquent les mêmes considérations qu'à $F_1(u)$.

Nous espérons revenir prochainement sur le cas des fonctions entières $F(z)$.