

KOMBINATORISCHE ANZAHLBESTIMMUNGEN FÜR GRUPPEN, GRAPHEN UND CHEMISCHE VERBINDUNGEN.

VON

G. PÓLYA

in ZÜRICH.

Einleitung.

1. Die Entwicklungen dieser Arbeit setzen Untersuchungen von Cayley fort. Cayley hat wiederholt kombinatorische Aufgaben behandelt, deren Zweck ist, die Anzahl gewisser »Bäume« zu bestimmen.¹ Einige seiner Aufgaben sind einer chemischen Interpretation fähig: Die Anzahl der betreffenden »Bäume« ist gleich der Anzahl gewisser (theoretisch möglicher) isomerer chemischer Verbindungen.

Die ausgedehnten numerischen Rechnungen Cayleys wurden von mehreren Autoren, insbesondere von Chemikern nachgeprüft und zum Teil berichtigt. Einen eigentlichen Fortschritt brachten meines Erachtens erst die Publikationen von zwei amerikanischen Chemikern, von Henze und Blair, die nicht nur die numerischen Rechnungen Cayley's um ein gutes Stück weiter führten, sondern auch die Methode verbesserten und weitere Klassen von Verbindungen in die Berechnung einbezogen.² Ohne unmittelbaren Zusammenhang mit den Cayleyschen Fragen wurde andererseits erkannt, durch Lunn und Senior³, dass gewisse Isomerenzahlen in enger Beziehung zu den Permutationsgruppen stehen.

In der vorliegenden Arbeit werde ich die Cayleysche Fragestellung in ver-

¹ CAYLEY 1—8. Die fettgedruckten Ziffern hinter Namen in Kapitältschrift verweisen auf die kurze Literaturzusammenstellung S. 253 welche nur die am häufigsten zitierten, mit dem Hauptinhalt der Arbeit näher zusammenhängenden Schriften enthält. Weitere Literaturangaben findet der Leser im Buche von D. KÖNIG 1 ferner bei A. SAINTE-LAGÜE, *Mémoires des sciences mathématiques*, fasc. 18.

² BLAIR u. HENZE, 1—6.

³ LUNN u. SENIOR, 1.

schiedenen Hinsichten erweitern, ihre Beziehungen zur Theorie der Permutationsgruppen und zu gewissen Funktionalgleichungen darlegen und bis zur asymptotischen Berechnung der betreffenden Anzahlen verfolgen. Die Resultate sind in den nachfolgenden vier Kapiteln enthalten, über deren Inhalt die weiteren Nummern der Einleitung näher berichten. Von der Untersuchung, die ich hier ausführlich darstelle, habe ich einige Ergebnisse schon früher skizziert.¹

2. Über Permutationsgruppen habe ich eine kombinatorische Aufgabe vorzulegen, die sich durch ihre Allgemeinheit und durch die Einfachheit ihrer Lösung empfiehlt. Um die nahe Verwandtschaft dieser Aufgabe mit den ersten Elementen der Kombinatorik deutlich vor die Augen zu führen, lege ich sie hier an einem ganz konkreten Beispiel vor.

Gegeben sind 6 Kugeln von drei verschiedenen Farben, 3 rote, 2 blaue, 1 gelbe; Kugeln gleicher Farbe sind als ununterscheidbar anzusehen. Auf wie viele Arten kann man diese 6 Kugeln auf die 6 Ecken eines frei im Raume beweglichen Oktaeders verteilen? (Verteilen heisst: jeder Ecke eine Kugel zuordnen.)

Wenn das Oktaeder im Raume so fixiert wäre, dass durch seine Lage die 6 Eckpunkte als *individuell verschieden* charakterisiert wären, etwa als obere und untere, hintere und vordere, linke und rechte Ecke, so wäre die Antwort, wie aus den ersten Elementen bekannt

$$\frac{6!}{3! 2! 1!} = 60.$$

Der springende Punkt der Aufgabe ist aber der, dass die Ecken weder individualisiert, noch vollständig ununterscheidbar sind, sondern dass solche und nur solche Positionen unter den erwähnten 60 als nicht verschieden gelten, welche durch Drehungen des Oktaeders ineinander überführbar sind.

Zur Antwort auf die aufgeworfene Frage muss man die Permutationen, welche die 24 Drehungen der Oktaedergruppe zwischen den Oktaederecken veranlassen, genau ins Auge fassen. Wir zerlegen diese Permutationen in Zyklen und wir ordnen jedem Zyklus von gegebener Ordnung eine Unbestimmte zu: Einem Zyklus 1-ter Ordnung (einer durch die Drehung unverrückten Ecke) sei f_1 , einem Zyklus 2-ter Ordnung (einer Transposition) sei f_2 , einem Zyklus 3-ter Ordnung f_3 zugeordnet u.s.w. Einer Permutation, welche in ein Produkt elementenfremder Zyklen zerlegt ist, sei das Produkt derjenigen Unbestimmten zuge-

¹ PÓLYA, 1—5.

ordnet, welche den einzelnen Zyklen entsprechen. Somit werden folgende Produkte den einzelnen Drehungen des Oktaeders zugeordnet:

f_1^6 der »Ruhe«, welche die »identische Permutation« der 6 Ecken, also 6 Zyklen 1-ter Ordnung bewirkt;

$f_1^2 f_4$ einer 90° -Drehung um eine Diagonale;

$f_1^2 f_2^2$ einer 180° -Drehung um eine Diagonale;

f_2^3 einer 180° -Drehung um die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten;

f_3^2 einer 120° -Drehung um die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seitenflächen.

Man bemerke, dass diese 5 Typen bzw. durch

$$1, \quad 6, \quad 3, \quad 6, \quad 8$$

Drehungen in der Gesamtgruppe vertreten sind. Man nehme das arithmetische Mittel der 24 Produkte, die den 24 Drehungen zugeordnet sind; das entstehende Polynom der Unbestimmten f_1, f_2, f_3, f_4 ,

$$\frac{f_1^6 + 6f_1^2 f_4 + 3f_1^2 f_2^2 + 6f_2^3 + 8f_3^2}{24}$$

nenne ich den *Zykluszeiger* der Permutationsgruppe, welche die Oktaedergruppe zwischen den 6 Oktaederecken veranlasst.

Die Lösung der vorgelegten kombinatorischen Aufgabe wird durch folgende Vorschrift gegeben: *Man setze in dem Zykluszeiger*

$$f_1 = x + y + z, \quad f_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad f_3 = x^3 + y^3 + z^3, \\ f_4 = x^4 + y^4 + z^4$$

und entwickle den so entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x, y, z ; der Koeffizient von $x^3 y^2 z$ in dieser Entwicklung ist die gewünschte Anzahl. Sie ist 3, welche Zahl man auch an der Figur leicht feststellt. Man bemerke noch, dass der vorher zum Vergleich herangezogene, zur elementarsten Kombinatorik gehörige Fall, in welchem die 6 Ecken als individuell verschieden betrachtet wurden, unter dieselbe Vorschrift fällt: Denn sind die Ecken individuell verschieden, so lassen sie nur die identische Permutation zu, d. h. die aus einer einzigen Operation bestehende Permutationsgruppe vom Grade 6, deren Zykluszeiger f_1^6 ist, und die Zahl

$$\frac{6!}{3! 2! 1!}$$

ist eben der Koeffizient von $x^3 y^2 z$ in der Entwicklung von $(x + y + z)^6$.

Kapitel I erörtert den durch das vorangehende Beispiel nahegebrachten allgemeinen Begriff von »Konfigurationen, welche in bezug auf eine Permutationsgruppe äquivalent sind«, begründet die ausgesprochene Vorschrift in ihrer allgemeinen Fassung und bringt verschiedene anschliessende Beziehungen kurz zur Sprache.

3. Als »Baum« bezeichnet man, nach Cayley, ein geometrisch-kombinatorisches Gebilde, das aus »Punkten« und »Strecken« zusammengesetzt ist; jede Strecke verbindet zwei Punkte, in einem Punkte treffen sich eine beliebige Anzahl von Strecken; das ganze Gebilde ist zusammenhängend, u. zw. wird der Zusammenhang bei einer gegebenen Anzahl von Punkten durch möglichst wenig Strecken bewerkstelligt: daher übertrifft die Anzahl der Punkte die der Strecken genau um eine Einheit und es sind im Gebilde keine geschlossenen Wege möglich.

Man unterscheidet einkantige, zweikantige, dreikantige . . . Punkte des Baumes, je nach der Anzahl der Strecken, welche im betreffenden Punkte sich begegnen; ein einkantiger Punkt wird auch »Endpunkt« des Baumes genannt.

Man kann einen beliebigen Endpunkt des Baumes auszeichnen und als »Wurzelpunkt« bezeichnen; einen Baum, an welchem ein Wurzelpunkt bezeichnet ist, nenne man einen »Setzbaum«; die von dem Wurzelpunkt verschiedenen Punkte eines Setzbaumes heissen »Knotenpunkte«. Wird am Baum kein Wurzelpunkt ausgezeichnet, also alle Punkte als gleichartig betrachtet, so nennt man den Baum, im Gegensatz zu den Setzbäumen, einen »freien« Baum.

Vom topologischen Standpunkte aus werden zwei Bäume, welche in ihren Zusammenhangsverhältnissen übereinstimmen, als nicht verschieden betrachtet; die genaue Fassung dieser Definition (und einiger ähnlichen, weniger bekannten Definitionen) wird in Nr. 34—35 besprochen. Es bedeutet im folgenden

τ_n die Anzahl der topologisch verschiedenen freien Bäume mit n Punkten;

T_n die Anzahl der topologisch verschiedenen Setzbäume mit n Knotenpunkten.

Die Bestimmung der Anzahlen τ_n und T_n hat schon Cayley in bemerkenswerter Weise gefördert. Die Definition von τ_n ist einfacher als die von T_n , da ja der Begriff des »freien« Baumes eine Komponente weniger enthält als der des »Setzbaumes«; hingegen stellte sich heraus, dass vom analytischen Standpunkte aus T_n einfacher als τ_n ist: Man kann τ_n in durchsichtiger Weise erst dann berech-

nen, wenn T_n schon bekannt ist. Zur Berechnung von T_n stellte Cayley die merkwürdige Gleichung

$$(1) \quad T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \dots + T_n x^n + \dots \\ = x(1-x)^{-T_1} (1-x^2)^{-T_2} (1-x^3)^{-T_3} \dots (1-x^n)^{-T_n} \dots$$

auf, die als Potenzreihenidentität in bezug auf x aufzufassen ist und durch Koeffizientenvergleich die rekursive Bestimmung der Zahlen T_1, T_2, T_3, \dots gestattet. Es ist, wie man es aus der Gleichung (1) und durch anschauliches Probieren mit Figuren übereinstimmend findet,

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = 2, \quad T_4 = 4, \quad T_5 = 9, \dots;$$

vgl. die Zusammenstellung der Anfangsglieder der Reihe (1) mit den abgezählten Setzbäumen in Fig. 1, in welcher die Wurzelpunkte doppelt ausgezeichnet sind: zu unterst gezeichnet und durch einen Pfeil bezeichnet, während die Knotenpunkte durch kleine Kreise bezeichnet sind.

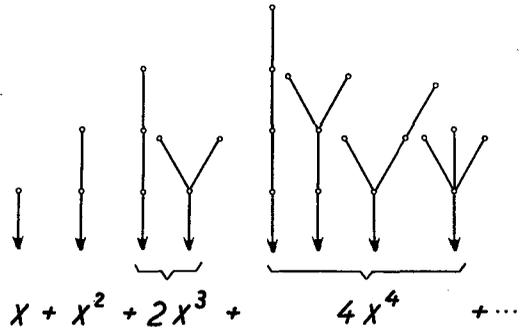


Fig. 1.

Wenn man die erzeugende Funktion

$$(2) \quad t(x) = T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \dots + T_n x^n + \dots$$

der topologischen Setzbäume einführt, kann man die Cayleysche Gleichung (1) als eine Funktionalgleichung für $t(x)$ auffassen, welche man in den beiden folgenden äquivalenten Gestalten

$$(1') \quad t(x) = x e^{\frac{t(x)}{1} + \frac{t(x)^2}{2} + \frac{t(x)^3}{3} + \dots}$$

$$(1'') \quad t(x) = x \left[1 + \frac{t(x)}{1!} + \frac{t(x)^2 + t(x^2)}{2!} + \frac{t(x)^3 + 3t(x)t(x^2) + 2t(x^3)}{3!} + \dots \right]$$

schreiben kann. Beide Fassungen haben ihre Vorzüge: Es dient die Formel (1') als Ausgangspunkt zur asymptotischen Berechnung von T_n und τ_n , und die Formel (1'') als Ausgangspunkt zu Verallgemeinerungen. (Im allgemeinen Glied der Reihe rechts in (1'') kann man nämlich den Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppe von n Elementen erkennen.)

Man kann nun beliebig viele zu T_n und τ_n analoge Anzahlen berechnen, wenn man die Cayleysche Gleichung (1) in der neuen Gestalt (1'') zum Vorbild nimmt und die darin enthaltenen gruppentheoretischen Andeutungen richtig auffasst.

Es seien hier zunächst nur zwei Anzahlen genannt, welche im folgenden behandelt werden. Es bezeichne

ϱ_n die Anzahl solcher topologisch verschiedenen freien Bäume, welche nur einkantige und vierkantige Punkte, u.zw. genau n vierkantige Punkte enthalten;

R_n die Anzahl solcher topologisch verschiedenen Setzbäume, welche nur einkantige und vierkantige Punkte, u.zw. genau n vierkantige Punkte enthalten.

Die Definition der Zahlen ϱ_n und R_n ist vom rein geometrisch-kombinatorischen Gesichtspunkte aus gesehen etwas gekünstelt; immerhin verhalten sie sich zueinander analog wie τ_n und T_n : Es ist ϱ_n aus R_n , und R_n als Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung der erzeugenden Funktion

$$(3) \quad r(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \dots + R_n x^n + \dots$$

zu bestimmen, welche der Funktionalgleichung

$$(4) \quad r(x) = 1 + x \frac{r(x)^3 + 3 r(x) r(x^2) + 2 r(x^3)}{6}$$

genügt.

4. Es ist die chemische Bedeutung, und nicht die rein geometrisch-kombinatorische, welche die eingehende Betrachtung der Anzahlen ϱ_n und R_n rechtfertigt.

Ein in der Anzahl ϱ_n inbegriffener Baum, der neben n vierkantigen nur noch einkantige Punkte besitzt, enthält von der letzteren Art von Punkten notwendigerweise $2n + 2$, also insgesamt $3n + 2$ Punkte; vgl. Nr. 36. Wenn die n vierkantigen Punkte vierwertige C -Atome und die $2n + 2$ einkantigen Punkte einwertige H -Atome vertreten, wird aus dem Baum die Strukturformel eines Paraffins, d. h. einer chemischen Verbindung von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$, u.zw. entsprechen topologisch verschiedene Bäume mit den besagten Punktzahlen n und $2n + 2$ strukturell verschiedenen aber gleichzusammengesetzten, isomeren Paraffinen von der besagten Formel $C_n H_{2n+2}$. Es bedeutet also

ϱ_n die Anzahl der strukturisomeren Paraffine von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$. Ähnlicherweise ist

R_n die Anzahl der strukturisomeren Alkohole von der Molekularformel

$C_n H_{2n+1} OH$; als »Wurzelpunkt« wird hierbei derjenige Endpunkt des Baumes bezeichnet, welcher das Radikal $-OH$ darstellt (die übrigen $2n + 1$ Endpunkte stellen je ein H dar).

Die chemische Bedeutung der geometrisch-kombinatorischen Anzahlen q_n und R_n macht uns darauf aufmerksam, dass die Begriffe der organischen Chemie zu vielen analogen Anzahlen Anlass geben, die ebenfalls rein geometrisch-kombinatorisch definiert und durch analoge Überlegungen berechnet werden können. Ich zähle die wichtigsten Anzahlen hier in chemischer Terminologie auf; die kombinatorische Definition erfordert Vorsicht und eine längere Auseinandersetzung (vgl. Nr. 33—36). Es bezeichne im folgenden:

σ_n die Anzahl der *stereoisomeren* Paraffine von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$;

S_n die Anzahl der *stereoisomeren* Alkohole von der Molekularformel $C_n H_{2n+1} OH$;

κ_n die Anzahl der strukturisomeren Paraffine von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$ ohne *asymmetrische Kohlenstoffatome*;

Q_n die Anzahl der strukturisomeren Alkohole von der Molekularformel $C_n H_{2n+1} OH$ ohne *asymmetrische Kohlenstoffatome*.

Es stellt sich heraus, dass auch diese Anzahlenpaare σ_n und S_n , κ_n und Q_n sich ähnlich berechnen lassen wie die vorangehenden τ_n und T_n , q_n und R_n : Man kann σ_n auf S_n , κ_n auf Q_n zurückführen, und die Anzahlen S_n , Q_n ergeben sich als Koeffizienten der bezüglichen erzeugenden Funktion

$$(5) \quad s(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \dots + S_n x^n + \dots,$$

$$(6) \quad q(x) = Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \dots + Q_n x^n + \dots$$

aus der bezüglichen Funktionalgleichung

$$(7) \quad s(x) = 1 + x \frac{s(x)^3 + 2s(x^3)}{3},$$

$$(8) \quad q(x) = 1 + x q(x) q(x^2).$$

Die einfachste analytische Natur unter den Funktionen $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$ hat $q(x)$, deren Funktionalgleichung (8) mit der bemerkenswerten Kettenbruchentwicklung

$$(8') \quad q(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x^2}{1 - \frac{x^4}{1 - \frac{x^8}{1 - \frac{x^{16}}{1 - \dots}}}}}}$$

gleichbedeutend ist.

Die Kapitel II und III enthalten den Beweis der ausgesprochenen Behauptungen über die Anzahlen $Q_n, R_n, S_n, T_n, \kappa_n, \varrho_n, \sigma_n, \tau_n$ und die Behandlung einiger weiteren geometrisch-kombinatorischen bzw. chemisch-kombinatorischen Anzahlen.

5. Es wurde häufig hervorgehoben, dass die Anzahl der Isomeren in den homologen Reihen rasch zunimmt, wenn die Anzahl der C -Atome anwächst. Auf Grund des Vorangehenden kann man diese Bemerkungen wesentlich präzisieren und asymptotische Ausdrücke für die Isomerenzahlen angeben. Dass wir auf dem eingeschlagenen Weg bis zur asymptotischen Berechnung gelangen, scheint mir am deutlichsten zu zeigen, dass wir uns auf dem rechten Wege befinden.

Die kombinatorische Definition ergibt teils unmittelbar, teils durch eine leichte Überlegung (vgl. Nr. 36—37) die Ungleichungen

$$(9) \quad 1 \leq \kappa_n \leq \varrho_n \leq \sigma_n, \quad \varrho_n \leq \tau_n,$$

$$(10) \quad 1 \leq Q_n \leq R_n \leq S_n, \quad R_n \leq T_n,$$

$$(11) \quad \varrho_n \leq R_n \leq n \varrho_n, \quad \sigma_n \leq S_n \leq n \sigma_n, \quad \tau_n \leq T_n \leq n \tau_n.$$

Durch weniger naheliegende kombinatorische Betrachtungen (Nr. 41, 43, 45) erhält man weiter

$$(12) \quad S_n \leq \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1}, \quad \frac{n^{n-1}}{n!} \leq T_n \leq \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Man bezeichne die Konvergenzradien der vier Reihen $q(x), r(x), s(x), t(x)$ (in dieser Reihenfolge) mit $\kappa, \varrho, \sigma, \tau$. Die Ungleichungen (10) und (12) ergeben beim Grenzübergang Ungleichungen zwischen $\kappa, \varrho, \sigma, \tau$, jedoch entschieden weniger als die bei geeigneter Behandlung der Funktionalgleichungen (1'), (4), (7), (8) sich ergebenden Beziehungen

$$(13) \quad 1 > x > \rho > \sigma, \quad \rho > \tau,$$

$$(14) \quad \sigma > \frac{4}{27}, \quad \frac{1}{e} > \tau > \frac{1}{4}.$$

Die Bestimmung der Konvergenzradien x , ρ , σ , τ ist der erste Schritt zur asymptotischen Berechnung der entsprechenden kombinatorischen Anzahlen. Man gelangt weiter, indem man das funktionentheoretische Verhalten der vier Potenzreihen $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$ an der Konvergenzgrenze feststellt. Jede besitzt auf ihrem Konvergenzkreis nur einen einzigen singulären Punkt, der auf der positiven reellen Achse liegt, u.zw. ist dieser singuläre Punkt für $q(x)$ ein Pol erster Ordnung, hingegen für $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$ ein algebraischer Verzweigungspunkt erster Ordnung, u.zw. ein solcher, in dessen Umgebung die Funktion beschränkt bleibt. Hieraus kann man das asymptotische Verhalten von Q_n , R_n , S_n , T_n leicht feststellen.

Zur Formulierung der Resultate bediene ich mich der folgenden Sprechweise: Wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = C$$

und C eine positive Zahl ist ($0 < C < \infty$ unter Ausschluss der Grenzen!), so schreibe ich

$$(15) \quad A_n \approx B_n$$

und gebrauche die Redewendung, die mit (15) gleichbedeutend sein soll: A_n ist *asymptotisch proportional zu B_n* ; den Grenzwert C werde ich dabei *Proportionalitätsfaktor* nennen. Die Beziehung der »asymptotischen Gleichheit«

$$A_n \sim B_n$$

besagt also mehr als (15), nämlich erstens, dass (15) stattfindet, und zweitens, dass der Proportionalitätsfaktor 1 ist.

Was man auf dem angedeuteten funktionentheoretischen Wege erhält, lässt sich mit der eben definierten Abkürzung so aussprechen:

$$(16) \quad Q_n \approx x^{-n}, \quad R_n \approx \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}, \quad S_n \approx \sigma^{-n} n^{-\frac{3}{2}}, \quad T_n \approx \tau^{-n} n^{-\frac{3}{2}},$$

woraus man weiter berechnen kann, dass

$$(17) \quad \kappa_n \approx \kappa^{-n}, \quad \varrho_n \approx \varrho^{-n} n^{-\frac{5}{2}}, \quad \sigma_n \approx \sigma^{-n} n^{-\frac{5}{2}}, \quad \tau_n \approx \tau^{-n} n^{-\frac{5}{2}}.$$

Ich hebe noch hervor, als besonders einfach, die Beziehung

$$(18) \quad Q_n \sim 2 \kappa_n.$$

Das Interesse dieser Resultate wird vielleicht mehr ins Auge fallen, wenn einige Verallgemeinerungen der R_n und ϱ_n betreffenden asymptotischen Formeln in chemischer Terminologie ausgesprochen werden.

Die Anzahl der strukturisomeren Kohlenwasserstoffe von der Formel $C_n H_{2n+2-2\mu}$ ist asymptotisch proportional zu $\varrho^{-n} n^{(3\mu-5)/2}$. Für $\mu = 0$ ist dies das Resultat für die Paraffine, also für ϱ_n . Für $\mu = 1$ ist der Proportionalitätsfaktor sehr einfach, nämlich $1/4$.

Es seien $X', X'', X''', \dots, X^{(l)}$ voneinander verschiedene einwertige Radikale. Die Anzahl der strukturisomeren Stoffe von der Formel $C_n H_{2n+2-l} X' X'' \dots X^{(l)}$ ist asymptotisch proportional zu $\varrho^{-n} n^{(2l-5)/2}$. Diese Stoffe sind als » l -mal substituierte Paraffine« zu bezeichnen; die Radikale $X', X'', \dots, X^{(l)}$ müssen voneinander und von den Alkylen verschieden sein. Die Aussage ergibt für $l = 0$ das asymptotische Verhalten von ϱ_n , für $l = 1$ das von R_n . Der Proportionalitätsfaktor hat die Form $L \lambda^l$, wo L und λ bestimmte, von l unabhängige Zahlen sind.

Die Anzahl der isomeren Benzolhomologen von der Molekularformel $C_{6+n} H_{6+2n}$ ist asymptotisch proportional der Anzahl der isomeren Alkohole $C_n H_{2n+1} O H$, u.zw. ist der Proportionalitätsfaktor $[r(\varrho)^5 + r(\varrho)r(\varrho^2)^2]/2$. Ebenso geht das Anwachsen der Isomerenzahlen in anderen homologen Reihen (z. B. in der aus dem Naphtalin oder in der aus dem Anthracen ausgehenden Reihe) den Isomerenzahlen R_n der Alkoholreihe asymptotisch proportional vor sich, und der Proportionalitätsfaktor ist aus dem Zyklenzeiger der Permutationsgruppe der substituierbaren Stellen des Stammkörpers der homologen Reihe leicht zu berechnen.

6. Die vorangehenden vier Nummern geben den Inhalt der nachfolgenden vier Kapitel nicht vollständig an, mehrere Punkte von einigem Interesse blieben unerwähnt. Um die Ausdehnung der Arbeit nicht ungebührlich zu vermehren, und die Masse der Einzelheiten zu meistern, musste ich an einigen Punkten, die mir weniger wichtig erschienen, auf die ausführliche Besprechung verzichten und mich mit einer Skizze begnügen. Es liegt in der Natur des Gegenstandes, dass mir manchmal nicht nur Definitionen, sondern auch formale Rechnungen und sogar heuristische Betrachtungen wichtiger erschienen, als ausführliche Beweise,

und daher wird an den letzteren am meisten gespart. Insbesondere wird, wenn eine Reihe analoger Sätze zu beweisen ist, nur ein Beweis ausgeführt, und die anderen dem Leser überlassen, vielleicht mit einem Hinweis auf den Unterschied vom ausgeführten Beweis. Leichte Konvergenzbetrachtungen werden öfters ohne Erwähnung übergangen.

I. GRUPPEN.

Definitionen.

7. Wir gehen nun daran, die Aufgabe, die hinter dem Beispiele der Nr. 2 steckt, in gebührender Allgemeinheit zu formulieren. Die Verallgemeinerung des Beispiels geht in zwei Richtungen vor sich: Einerseits müssen die »farbigen Kugeln«, von denen in Nr. 2 die Rede war, durch allgemeinere, kompliziertere Gebilde ersetzt werden, welche im folgendem »Figuren« heißen sollen; andererseits muss die in Nr. 2 betrachtete, durch die Oktaederdrehungen veranlasste spezielle Permutationsgruppe durch eine allgemeine Permutationsgruppe ersetzt werden.

Ich stelle nun die nötigen Definitionen zusammen, zuerst über Figuren, dann über Permutationsgruppen. Ich gebrauche dabei eine möglichst konkrete Sprache, mit räumlich-anschaulichen Wendungen, und lasse an einer Stelle eine unwesentliche Spezialisierung eintreten, welche dann am Schlusse leicht behoben werden kann.

8. **Figurenvorrat.** Wir betrachten eine Reihe von wohlunterschiedenen Gegenständen $\Phi', \Phi'', \Phi''', \dots, \Phi^{(\lambda)}, \dots$, welche wir *Figuren* nennen wollen. Die Gesamtheit dieser Figuren heiße der *Figurenvorrat* $[\Phi]$.

Die Figur $\Phi^{(\lambda)}$ enthält drei Kategorien von farbigen Kugeln, α_λ rote, β_λ blaue, γ_λ gelbe ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$).¹ Wir wollen uns kurz so ausdrücken: die Figur $\Phi^{(\lambda)}$ hat den *Kugelinhalt* $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda)$.

Es kann mehrere Figuren geben, welche dieselben Anzahlen an Kugeln jeder Farbe enthalten. Die Anzahl der Figuren vom Kugelinhalt (k, l, m) sei a_{klm} . Man nenne die Potenzreihe

¹ In der Betrachtung von drei Kategorien anstatt einer beliebigen Anzahl von Kategorien besteht die am Schluss von Nr. 7 angekündigte unwesentliche Beschränkung.

$$(I, 1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{klm} x^k y^l z^m = \sum_{k,l,m} a_{klm} x^k y^l z^m = f(x, y, z)$$

die *abzählende Potenzreihe* des Figurenvorrates $[\Phi]$.

Es sind die Zahlen a_{klm} als endlich vorausgesetzt. Über die Konvergenz der Potenzreihe (I, 1) wird Nichts ausgesagt: sie dient in üblicher Weise nur zur formalen Zusammenfassung der mit dem Koeffizientensystem vorzunehmenden rein algebraischen Operationen.

Im Beispiel der Nr. 2 haben wir nur mit drei verschiedenen Figuren zu tun: die erste besteht aus einer roten, die zweite aus einer blauen, die dritte aus einer gelben Kugel, sie haben bzw. den Kugelinhalt $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Die abzählende Potenzreihe dieses Figurenvorrats ist

$$x + y + z.$$

Auch die in Nr. 3 betrachtete Reihe (2) ist eine abzählende Potenzreihe; der Figurenvorrat umfasst die topologisch verschiedenen Setzbäume, die Rolle der in den »Figuren« enthaltenen »Kugeln« wird von den in den Setzbäumen enthaltenen Knotenpunkten gespielt, es gibt nur eine Kategorie von Kugeln, und dementsprechend hängt die Reihe nur von einer Variablen ab. Fig. 1 zeigt, wie die Figuren (Setzbäume) mit demselben Kugelinhalt (Knotenpunktzahl) in einem Gliede der abzählenden Reihe vereinigt zu denken sind.

9. Es kann unter Umständen von Vorteil sein, der Figur $\Phi^{(\lambda)}$ eine Variable zuzuordnen, welche man ruhig mit demselben Zeichen $\Phi^{(\lambda)}$ bezeichnen kann. Man betrachte die Reihe

$$(I, 2) \quad \Phi' x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} + \Phi'' x^{\alpha_2} y^{\beta_2} z^{\gamma_2} + \dots + \Phi^{(\lambda)} x^{\alpha_\lambda} y^{\beta_\lambda} z^{\gamma_\lambda} + \dots \\ = \sum_{[\Phi]} \Phi x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

Die Summation $\sum_{[\Phi]}$ ist über den ganzen Figurenvorrat $[\Phi]$ zu erstrecken und Φ bezeichnet eine allgemeine Figur, vom Kugelinhalt (α, β, γ) , aus dem Vorrat $[\Phi]$. (Diese Bezeichnungen werden im folgenden beibehalten.)

Ich nenne die Reihe (I, 2) die *figurierte Potenzreihe* des Vorrates $[\Phi]$. Setzt man $\Phi' = \Phi'' = \Phi''' = \dots = 1$ in der *figurierten Potenzreihe*, so geht diese in die *abzählende Potenzreihe* über. Dieser offenbare Zusammenhang der Reihen (I, 1) und (I, 2) wird im folgenden von einem gewissen Nutzen sein.

10. **Permutationsgruppe.** Wir betrachten eine Permutationsgruppe \mathfrak{S} von der Ordnung h und dem Grade s .

Man sagt, dass eine Permutation den *Typus* $[j_1, j_2, j_3, \dots, j_s]$ hat, wenn sie j_1 Zyklen 1-ter, j_2 Zyklen 2-ter, \dots und j_s Zyklen s -ter Ordnung enthält; ein Zyklus erster Ordnung wird durch einen unversetzten Gegenstand gebildet. Gemeint sind natürlich Zyklen ohne gemeinsame Elemente, so dass

$$(1, 3) \quad 1j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + sj_s = s$$

die Gesamtzahl der permutierten Gegenstände ist. Wir wollen die Anzahl derjenigen Permutationen der Gruppe \mathfrak{S} , welche vom Typus $[j_1, j_2, \dots, j_s]$ sind, mit $h_{j_1 j_2 \dots j_s}$ bezeichnen. Es ist offenbar

$$(1, 4) \quad \sum_{(j)} h_{j_1 j_2 \dots j_s} = h;$$

hierbei ist die Summation über alle Typen, d. h. alle nichtnegative ganzzahlige Lösungssysteme j_1, j_2, \dots, j_s der Gleichung (1, 3) zu erstrecken. (Diese Bedeutung des Symbols $\sum_{(j)}$ soll in der Folge beibehalten werden.)

Es seien $f_1, f_2, f_3, \dots, f_s$ unabhängige Veränderliche. Man betrachte das Polynom

$$(1, 5) \quad \frac{1}{h} \sum_{(j)} h_{j_1 j_2 \dots j_s} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_s^{j_s},$$

dessen Kenntnis auf die Kenntnis des Systems der Anzahlen $h_{j_1 j_2 \dots j_s}$ hinausläuft. Man bezeichne das Polynom (1, 5) als den *Zykluszeiger* der Gruppe \mathfrak{S} .¹ Der Zykluszeiger ist ein isobares Polynom vom Gewichte s , wenn der Veränderlichen f_σ das Gewicht σ beigelegt wird ($\sigma = 1, 2, \dots, s$); vgl. (1, 3). Die Koeffizienten des Zykluszeigers sind nichtnegative rationale Zahlen von der Summe 1 und vom kleinsten gemeinsamen Nenner h . (In Nr. 2 ist der Zykluszeiger der dort betrachteten Permutationsgruppe von der Ordnung 24 und dem Grade 6 aufgestellt worden.)

11. Jetzt haben wir den Figurenvorrat $[\mathcal{O}]$ mit der Permutationsgruppe \mathfrak{S} in Beziehung zu setzen.

¹ In einer früheren Publikation (PÓLYA 4) verwendete ich statt »Zykluszeiger« die Bezeichnung »Symmetriformel«.

Die s Gegenstände, welche durch die h Permutationen der Gruppe \mathfrak{S} permutiert werden, wollen wir als s bestimmte Stellen im Raume auffassen. (Im Beispiel der Nr. 2 ist $s = 6$ und die 6 Raumstellen bilden die 6 Eckpunkte eines Oktaeders.) Wir numerieren diese s Stellen mit $1, 2, 3, \dots, s$ und wir setzen auf die σ -te Stelle eine beliebige Figur Φ_σ aus dem Vorrat $[\Phi]$ (für $\sigma = 1, 2, \dots, s$); so entsteht die *Konfiguration* $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$. Es sei hervorgehoben, dass Wiederholung erlaubt ist, d. h. es darf dieselbe Figur aus dem Vorrat $[\Phi]$ auf mehreren, eventuell auf allen s Stellen derselben Konfiguration auftreten. Zwei Konfigurationen $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ und $(\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_s)$ heißen *gleich*, wenn

$$\Phi_1 = \Phi'_1, \Phi_2 = \Phi'_2, \dots, \Phi_s = \Phi'_s,$$

d. h. wenn sie genau die gleiche Besetzung der s Stellen durch die Figuren von $[\Phi]$ darbieten. Die Konfiguration $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ hat den Kugelinhalt (k, l, m) , wenn die s Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s$ zusammen k rote, l blaue und m gelbe Kugeln enthalten.

Es sei

$$(I, 6) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & s \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_s \end{pmatrix}$$

eine Permutation von s Gegenständen; es wird die Konfiguration $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ durch S in $(\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \dots, \Phi_{i_s})$ überführt. Man sagt, dass zwei Konfigurationen *inbezug auf \mathfrak{S} äquivalent* sind, wenn es eine Permutation in der Gruppe \mathfrak{S} gibt, welche die eine Konfiguration in die andere überführt.

Jede Konfiguration ist mit sich selbst inbezug auf \mathfrak{S} äquivalent, da ja die identische Permutation zu \mathfrak{S} gehört. Es können aber auch ungleiche Konfigurationen zueinander inbezug auf \mathfrak{S} äquivalent sein. Diejenigen Konfigurationen, welche inbezug auf \mathfrak{S} zueinander äquivalent sind, bilden ein *Transitivitätssystem*. Alle Konfigurationen innerhalb desselben Transitivitätssystems haben denselben Kugelinhalt.

Man bezeichne mit A_{klm} die Anzahl der voneinander verschiedenen Transitivitätssysteme, welche aus Konfigurationen vom Kugelinhalt (k, l, m) gebildet sind. Anders gesagt, es ist A_{klm} die Anzahl der inbezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen vom Kugelinhalt (k, l, m) .

12. Die allgemeine Aufgabe, welche das Beispiel der Nr. 2 als sehr speziellen Fall umfasst, lässt sich nun so aussprechen: *Gegeben ist der Figuren-*

ausmultipliziert, wird jede Kombination mit Wiederholung von s Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s$, welche zusammen den Kugelinhalt (k, l, m) haben, durch ein Glied

$$u^s \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_s x^k y^l z^m$$

vertreten. Wird also in dem Produkt (1, 8)

$$(1, 9) \quad \Phi' = \Phi'' = \Phi''' = \dots = \mathbf{I}$$

gesetzt, so wird der Koeffizient von $u^s x^k y^l z^m$ die gesuchte Anzahl A_{klm} und der Koeffizient von u^s die gesuchte Potenzreihe $F_s(x, y, z)$ sein. Es ist noch zu beachten, dass das Produkt (1, 8) auch in der Form

$$(1, 10) \quad \prod_{[\Phi]} (\mathbf{I} - u \Phi x^\alpha y^\beta z^\gamma)^{-1} \\ = \exp \left(- \sum_{[\Phi]} \log (\mathbf{I} - u \Phi x^\alpha y^\beta z^\gamma) \right) \\ = \exp \left(\frac{u}{\mathbf{I}} \sum_{[\Phi]} \Phi x^\alpha y^\beta z^\gamma + \frac{u^2}{2} \sum_{[\Phi]} \Phi^2 x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} + \dots \right)$$

geschrieben werden kann, und dass in der letzten Zeile die erste Summe unter dem exp-Zeichen die figurierte Potenzreihe (1, 2) des Figurenvorrates $[\Phi]$ darstellt. Man erhält also für (1, 9) aus (1, 8) bzw. (1, 10)

$$(1, 11) \quad \mathbf{I} + u F_1(x, y, z) + u^2 F_2(x, y, z) + \dots + u^s F_s(x, y, z) + \dots \\ = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} (\mathbf{I} - u x^k y^l z^m)^{-a_{klm}} \\ = \exp \left(\frac{u}{\mathbf{I}} f(x, y, z) + \frac{u^2}{2} f(x^2, y^2, z^2) + \frac{u^3}{3} f(x^3, y^3, z^3) + \dots \right) \\ = e \frac{u f(x, y, z)}{\mathbf{I}} e \frac{u^2 f(x^2, y^2, z^2)}{2} e \frac{u^3 f(x^3, y^3, z^3)}{3} \dots \\ = \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{u^{j_1} f(x, y, z)^{j_1}}{j_1! \mathbf{I}^{j_1}} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{u^{2j_2} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2}}{j_2! 2^{j_2}} \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{u^{3j_3} f(x^3, y^3, z^3)^{j_3}}{j_3! 3^{j_3}} \dots$$

Um die dritte Zeile dieser Formel aus der dritten Zeile von (1, 10) zu erhalten, muss man neben der Schlussbemerkung von Nr. 9 noch weiter beachten, dass für (1, 9) auch

$$(\Phi^{(\lambda)})^2 = (\Phi^{(\lambda)})^3 = \dots = \mathbf{I}$$

wird. Durch Vergleich der Koeffizienten von u^s in der ersten und der letzten Zeile von (I, 11) erhält man schliesslich

$$(I, 12) \quad F_s(x, y, z) = \frac{1}{s!} \sum_{(j)} \frac{s!}{j_1! 1^{j_1} \cdot j_2! 2^{j_2} \dots j_s! s^{j_s}} f(x, y, z)^{j_1} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2} \dots f(x^s, y^s, z^s)^{j_s};$$

die Summation ist, mit der Bezeichnung der Nr. 10, über alle Typen der Permutationen von s Gegenständen erstreckt.

14. Eine geringe Abänderung der vorangehenden Rechnung ergibt die Anzahl der *Kombinationen ohne Wiederholung* von s Figuren aus dem Vorrat $[\Phi]$ mit Gesamtkugelinhalt (k, l, m) . Nennen wir diese Anzahl B_{klm} und setzen wir

$$\sum_{k, l, m} B_{klm} x^k y^l z^m = G_s(x, y, z).$$

Wenn man das Produkt

$$(I, 13) \quad (1 + u \Phi' x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1}) (1 + u \Phi'' x^{\alpha_2} y^{\beta_2} z^{\gamma_2}) \dots \\ = \prod_{[\Phi]} (1 + u \Phi x^\alpha y^\beta z^\gamma)$$

ausmultipliziert, wird jede Kombination ohne Wiederholung von s Figuren mit Gesamtkugelinhalt (k, l, m) durch ein Glied

$$u^s \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_s x^k y^l z^m$$

vertreten. Wird also im Produkt (I, 13) das durch (I, 9) vorgeschriebene Einsetzen durchgeführt, so ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung wie vorher

$$1 + u G_1(x, y, z) + u^2 G_2(x, y, z) + \dots + u^s G_s(x, y, z) + \dots \\ = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} (1 + u x^k y^l z^m)^{a_{klm}} \\ = \exp \left(u f(x, y, z) - \frac{u^2}{2} f(x^2, y^2, z^2) + \frac{u^3}{3} f(x^3, y^3, z^3) - \dots \right)$$

und durch Koeffizientenvergleichung

$$(I, 14) \quad G_s(x, y, z) = \frac{1}{s!} \sum_{(j)} \frac{s! (-1)^{j_2 + j_3 + \dots}}{j_1! 1^{j_1} \cdot j_2! 2^{j_2} \dots j_s! s^{j_s}} f(x, y, z)^{j_1} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2} \dots f(x^s, y^s, z^s)^{j_s}.$$

15. Das vorangehende gestattet uns die allgemeine Aufgabe der Nr. 12 in einem weiteren Spezialfall, nämlich für die alternierende Gruppe \mathfrak{A}_s vom Grade s zu lösen. Betrachten wir nämlich zwei Konfigurationen C und C' von je s Figuren aus dem Vorrat $[\Phi]$. Wann sind C und C' in bezug auf \mathfrak{A}_s äquivalent?

Hierzu ist notwendig, dass C und C' äquivalent in bezug auf \mathfrak{S}_s seien, d. h. dass C und C' dieselbe Kombination (mit Wiederholung) von s Figuren umfassen.

In einem Fall ist diese notwendige Bedingung auch hinreichend: Wenn in der C und C' gemeinsamen Kombination eine Figur Φ zweimal auftritt, so kann man zur Permutation, welche C in C' überführt, die Transposition der beiden durch die besagte Figur in C besetzten Stellen hinzufügen oder nicht, und so auf alle Fälle erzielen, dass C in C' durch eine *gerade* Permutation überführt wird: *Eine Kombination mit nicht lauter ungleichen Figuren gibt in bezug auf \mathfrak{A}_s nur zu einem Transitivitätssystem von Konfigurationen Anlass.*

Hingegen gibt, wie man sich leicht überlegt, eine Kombination mit lauter ungleichen Figuren zu genau zwei verschiedenen Transitivitätssystemen in bezug auf \mathfrak{A}_s Anlass. So gelangt man zur Regel: Um die Anzahl aller in bezug auf \mathfrak{A}_s verschiedenen Transitivitätssysteme von Konfigurationen zu erhalten, muss man zur Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung noch die der Kombinationen ohne Wiederholung addieren. Somit ist die abzählende Potenzreihe der in bezug auf \mathfrak{A}_s inäquivalenten Permutationen

$$(1, 15) \quad F_s(x, y, z) + G_s(x, y, z).$$

16. **Hauptsatz.** Um die für die speziellen Annahmen $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_s$ erhaltenen Resultate (1, 12) und (1, 15) einheitlich aufzufassen, erinnere man sich daran¹, dass

$$\frac{s!}{j_1! 1^{j_1} \cdot j_2! 2^{j_2} \dots j_s! s^{j_s}}$$

die Anzahl aller derjenigen Permutationen von s Gegenständen ist, welche den Typus $[j_1, j_2, \dots, j_s]$ haben. Im Sinne der Definition in Nr. 10 ist also der Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_s

$$(1, 16) \quad \frac{1}{s!} \sum_{(j)} \frac{s!}{j_1! 1^{j_1} \cdot j_2! 2^{j_2} \dots j_s! s^{j_s}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_s^{j_s},$$

¹ Vgl. z. B. SERRET, Cours d'algèbre supérieure, 3. éd. (Paris 1866), Bd. 2, S. 235—236.

und der der alternierenden Gruppe \mathfrak{A}_s lässt sich so schreiben

$$(I, 17) \quad \frac{1}{s!} \sum_{(j)} \frac{s! [1 + (-1)^{j_2 + j_4 + j_6 + \dots}]}{j_1! 1^{j_1} \cdot j_2! 2^{j_2} \dots j_s! s^{j_s}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_s^{j_s}.$$

Man sieht, dass (I, 12) dasselbe Verhältnis zum Zyklenzeiger (I, 16) hat, wie (I, 15) [unter Beachtung von (I, 12) und (I, 14)] zu (I, 17). Wir wollen nun folgendes vereinbaren: Die Funktion $f(x)$ in den Zyklenzeiger einzusetzen, heisse

$$(I, 18) \quad f_1 = f(x), \quad f_2 = f(x^2), \quad f_3 = f(x^3), \dots$$

zu setzen; die Funktion $f(x, y)$ in den Zyklenzeiger einzusetzen heisse

$$f_1 = f(x, y), \quad f_2 = f(x^2, y^2), \quad f_3 = f(x^3, y^3), \dots$$

zu setzen; u. s. w. für Funktionen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen. Nach dieser Vereinbarung können wir die beiden bisher erhaltenen speziellen Resultate (für $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_s$) in folgenden Worten gleichmässig aussprechen:

Um die abzählende Potenzreihe der aus dem Figurenvorrat $[\Phi]$ gebildeten, in bezug auf die Permutationsgruppe \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen zu erhalten, setze man die abzählende Potenzreihe von $[\Phi]$ in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S} ein.

Die so formulierte Aussage trifft, wie es bald nachgewiesen werden soll, für eine beliebige Permutationsgruppe \mathfrak{S} zu. Die allgemeine, alle Permutationsgruppen umfassende Aussage wird im folgenden als der Hauptsatz (des I. Kapitels) bezeichnet.

17. Der Hauptsatz trifft sicherlich zu in dem weiteren Spezialfall, in welchem die Permutationsgruppe \mathfrak{S} vom Grade s die Ordnung 1 hat, d. h. nur die identische Permutation umfasst, also zwei nichtidentische Konfigurationen als nichtäquivalent gelten und der Zyklenzeiger f_1^s ist. Zurückübersetzt in die übliche Ausdrucksweise ist dies wohlbekannt, enthalten in der Lösung einer wohlbekannteren allgemeineren Aufgabe, die man (für $s = 3$, Spezialisierung unwesentlich!) so aussprechen kann:

Gegeben sind von drei Figurenvorräten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[X]$ die abzählenden Potenzreihen, welche bzw. f , g , h heissen. Gesucht ist die abzählende Potenzreihe der Figurentripel (Φ, Ψ, X) wobei Φ , Ψ , X voneinander unabhängig die bezüglichen Figurenvorräte $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[X]$ durchlaufen.

Was unter der abzählenden Potenzreihe der Figurentripel (Φ, Ψ, X) zu verstehen ist, muss noch explizite gesagt werden: eine Potenzreihe in den drei Variablen x, y, z , worin der Koeffizient von $x^k y^l z^m$ die Anzahl derjenigen Tripel (Φ, Ψ, X) angibt, deren drei Figuren Φ, Ψ, X den Gesamtkugelinhalt (k, l, m) haben, d. h. insgesamt k rote, l blaue und m gelbe Kugeln enthalten.

Die Anzahl der Kugeln der 3 Sorten sei bezeichnet mit α, β, γ in Φ (wie vorher), mit α', β', γ' in Ψ , mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$ in X . Jedem Tripel (Φ, Ψ, X) sei das Produkt $\Phi \Psi X$ der Unbestimmten zugeordnet. Die figurierte Potenzreihe der Produkte ist

$$\begin{aligned} & \sum_{[\Phi]} \sum_{[\Psi]} \sum_{[X]} \Phi \Psi X x^{\alpha+\alpha'+\alpha''} y^{\beta+\beta'+\beta''} z^{\gamma+\gamma'+\gamma''} \\ &= \sum_{[\Phi]} \Phi x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \cdot \sum_{[\Psi]} \Psi x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'} \cdot \sum_{[X]} X x^{\alpha''} y^{\beta''} z^{\gamma''}, \end{aligned}$$

das Produkt der figurierten Potenzreihen. Setzt man hierin 1 für alle Unbestimmten $\Phi', \Phi'', \dots, \Psi', \Psi'', \dots, X', X'', \dots$, so erhält man: *Die gesuchte abzählende Potenzreihe ist das Produkt der gegebenen.* In dieser Fassung haben wir uns von der unwesentlichen Beschränkung der Faktorenzahl auf 3 schon befreit. Es handelt sich hier um ein seit Euler bekanntes elementares Prinzip, dem ich wohl die folgende Fassung geben darf: *Wenn die einzelnen Elemente einer Anordnung voneinander unabhängig gewählt werden dürfen, so ist die abzählende Potenzreihe der Anordnung das Produkt der abzählenden Potenzreihen der einzelnen Elemente.*

18. Die Beantwortung der folgenden Aufgabe wird das Gemeinsame an dem Aufbau der Formeln (I, 12) und (I, 14) weiter aufklären.

Gegeben ist die abzählende Potenzreihe (I, 1) des Figurenvorrates $[\Phi]$ und der Typus $[j_1, j_2, \dots, j_s]$ der Permutation (I, 6). Gesucht ist die abzählende Potenzreihe derjenigen Konfigurationen $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ von s Figuren aus dem Vorrat $[\Phi]$, welche durch die Permutation (I, 6) in sich selbst überführt werden.

Man bezeichne mit $X_{klm}(S)$ die Anzahl derjenigen Konfigurationen mit Kugelinhalt (k, l, m) , welche durch S , die Permutation (I, 6), in sich selbst überführt werden. Gesucht ist also die Potenzreihe

$$\sum_{k,l,m} X_{klm}(S) x^k y^l z^m.$$

Die Konfiguration $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ wird dann und nur dann durch (1, 6) in sich selbst überführt, wenn

$$(1, 19) \quad \Phi_{i_1} = \Phi_1, \quad \Phi_{i_2} = \Phi_2, \quad \dots \quad \Phi_{i_s} = \Phi_s.$$

Es sei nun (a, b, c, \dots, k, l) ein in der Permutation (1, 6) enthaltener Zyklus und es sei λ seine Länge (seine Ordnung). Wenn die Konfiguration $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ bei Ausübung von (1, 6) in sich selbst überführt wird, so besagen gewisse λ unter den Gleichungen (1, 19), dass

$$\Phi_a = \Phi_b = \Phi_c = \dots = \Phi_k = \Phi_l.$$

D. h. es müssen die Figuren, welche durch (1, 6) zyklisch miteinander verbunden sind, einander gleich sein. Hingegen kann man in jedem Zyklus eine Figur frei aus dem Vorrat $[\Phi]$ wählen.

Eine durch die Permutation (1, 6) in sich selbst überführte Konfiguration können wir also auffassen, als eine Anordnung von $j_1 + j_2 + \dots + j_\lambda + \dots + j_s$ Zyklen. Die Figuren innerhalb desselben Zyklus sind miteinander identisch, die Figuren in verschiedenen Zyklen sind voneinander unabhängig aus dem Vorrat $[\Phi]$ zu wählen. Wenn der Kugelinhalt einer in einem gewissen Zyklus von der Länge λ befindlichen Figur (k, l, m) ist, so ist der gesamte Kugelinhalt der in demselben Zyklus befindlichen Figuren $(\lambda k, \lambda l, \lambda m)$; daher entspricht diesem Zyklus die abzählende Potenzreihe

$$f(x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda),$$

und die gesuchte abzählende Potenzreihe der durch S in sich selbst überführten Konfigurationen ist, nach dem am Ende der Nr. 17 ausgesprochenen Prinzip, ein Produkt von $j_1 + j_2 + \dots + j_s$ Faktoren:

$$(1, 20) \quad \sum_{k, l, m} X_{klm}(S) x^k y^l z^m = f(x, y, z)^{j_1} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2} \dots f(x^s, y^s, z^s)^{j_s}.$$

Bestimmung der Anzahl der inäquivalenten Konfigurationen für eine beliebige Permutationsgruppe.

19. Um die allgemeine Aufgabe der Nr. 12 zu lösen, betrachten wir einen bestimmten Zahlentripel k, l, m und die Gesamtheit aller Konfigurationen vom Kugelinhalt (k, l, m) (genau k rote, l blaue, m gelbe Kugeln). Es sei C eine bestimmte unter diesen Konfigurationen.

Suchen wir unter den h verschiedenen Permutationen von \mathfrak{S}

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_h$$

diejenigen g heraus, welche C in sich selbst überführen (es existiert mindestens eine solche Permutation, nämlich die identische); diese g Permutationen bilden bekanntlich eine Gruppe \mathfrak{G} ; \mathfrak{G} ist von der Ordnung g , \mathfrak{G} ist eine Untergruppe von \mathfrak{S} .

Die Anzahl derjenigen verschiedenen Konfigurationen, in welche C durch die Permutationen von \mathfrak{S} überführt werden kann, d. h. welche mit C in bezug auf \mathfrak{S} äquivalent sind, ist bekanntlich h/g ; jede dieser h/g Konfigurationen wird von genau g Permutationen von \mathfrak{S} in sich selbst überführt, nämlich von den Permutationen einer zu \mathfrak{G} unter \mathfrak{S} konjugierten Untergruppe. Also wird jede zu C äquivalente Konfiguration in genau g Gliedern der Summe

$$(1, 21) \quad X_{klm}(S_1) + X_{klm}(S_2) + \dots + X_{klm}(S_h)$$

(Bezeichnung von Nr. 18) mitgerechnet, und trägt somit zu dieser Summe g Einheiten bei. Nun ist aber die Anzahl der zu C in bezug auf \mathfrak{S} äquivalenten Konfigurationen, wie gesagt, h/g ; die ganze Klasse dieser zu C äquivalenten Konfigurationen, d. h. das ganze durch C bestimmte Transitivitätssystem trägt somit zur Summe (1, 21)

$$\frac{h}{g} \cdot g = h$$

Einheiten bei. All die verschiedenen Transitivitätssysteme in bezug auf \mathfrak{S} äquivalenter Konfigurationen leisten zu (1, 21) den gleichen Beitrag h , also ist

$$(1, 22) \quad X_{klm}(S_1) + X_{klm}(S_2) + \dots + X_{klm}(S_h) = h A_{klm}.$$

Die gesuchte erzeugende Funktion (1, 7) ergibt sich aus (1, 22) und (1, 20):

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \sum_{k, l, m} \frac{X_{klm}(S_1) + X_{klm}(S_2) + \dots + X_{klm}(S_h)}{h} x^k y^l z^m \\ &= \frac{1}{h} \sum_{(\mathfrak{S})} \sum_{k, l, m} X_{klm}(S) x^k y^l z^m, \end{aligned}$$

$$(1, 23) \quad F(x, y, z) = \frac{1}{h} \sum_{(\mathfrak{S})} f(x, y, z)^{j_1} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2} \dots f(x^s, y^s, z^s)^{j_s}.$$

Hierbei ist $\sum_{(\mathfrak{S})}$ über alle h zur Gruppe \mathfrak{S} gehörigen Permutationen S zu erstrecken. Man kann in dieser Summe die Permutationen von demselben Typus

$[j_1, j_2, \dots, j_s]$ zusammenfassen; ihre Anzahl wurde in Nr. 10 mit h_{j_1, j_2, \dots, j_s} bezeichnet. Bei dieser Zusammenfassung nach Typen nimmt die Formel (1, 23) die Gestalt

$$(1, 24) \quad F(x, y, z) = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h_{j_1, j_2, \dots, j_s} f(x, y, z)^{j_1} f(x^2, y^2, z^2)^{j_2} \dots f(x^s, y^s, z^s)^{j_s}$$

an. Beachtet man die Definition (1, 5) des Zyklenzeigers der Gruppe \mathfrak{S} , so findet man den allgemeinen Satz, der am Ende der Nr. 16 bloss auf Grund von Beispielen ausgesprochen wurde, durch Beweis vollkommen erhärtet.

20. In der vorangehenden Überlegung treten nur einfachste Sätze der Gruppentheorie auf, welche sich unmittelbar an den Begriff der Gruppe anschliessen. Unter Voraussetzung von etwas mehr Vorkenntnissen kann man den Beweis anders fassen. (Es werden weder die im folgenden heranzuziehenden Begriffe der Darstellungstheorie, noch die Bemerkungen dieser Nummer in den späteren Nummern gebraucht.)

Die aus dem gegebenen Figurenvorrat $[\Phi]$ gebildeten Konfigurationen $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ vom Kugelinhalt (k, l, m) erfahren bei jeder Vertauschung der s Stellen durch die gegebene Gruppe \mathfrak{S} eine Permutation, und diese Permutationen bilden eine Darstellung \mathfrak{D}_{klm} der gegebenen Gruppe \mathfrak{S} . Es ist \mathfrak{D}_{klm} , wie \mathfrak{S} , eine Permutationsgruppe: \mathfrak{S} vertauscht Stellen, und \mathfrak{D}_{klm} Konfigurationen, die auf den von \mathfrak{S} vertauschten s Stellen aufgebaut sind. Die in Nr. 18 definierte, durch die Formel (1, 20) berechnete Grösse $X_{klm}(S)$ ist der Charakter derjenigen Permutation von \mathfrak{D}_{klm} , welche der Permutation S von \mathfrak{S} zugeordnet ist. Die Anzahl A_{klm} ist, gemäss ihrer Definition in Nr. 11, die Anzahl der verschiedenen Transitivitätssysteme der Permutationsgruppe \mathfrak{D}_{klm} ; diese Anzahl ist aber, nach einem bekannten Satz¹, das arithmetische Mittel der Charaktere $X_{klm}(S)$ der Permutationsgruppe \mathfrak{D}_{klm} , womit wir die entscheidende Formel (1, 22) nahezu erreichen. Um (1, 22) auf dem eingeschlagenen Wege vollständig zu beweisen, muss man noch bemerken, dass A_{klm} in (1, 22) auch dann das arithmetische Mittel der Charaktere von \mathfrak{D}_{klm} ist, wenn \mathfrak{D}_{klm} keine getreue, sondern nur eine verkürzte Darstellung von \mathfrak{S} ist, in welchem Falle die Ordnung von \mathfrak{D}_{klm} nicht h , sondern nur ein Teiler von h ist.

Aus diesem Zusammenhang geht folgender Satz hervor: *Ist \mathfrak{S} eine Permutationsgruppe, S eine Permutation von \mathfrak{S} vom Typus $[j_1, j_2, \dots, j_s]$, $f(x, y, z)$ eine beliebige*

¹ Vgl. z. B. A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. (Berlin 1927), S. 120, Satz 102.

Potenzreihe in x, y, z mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten, und k, l, m ein Tripel natürlicher Zahlen, so ist der Koeffizient von $x^k y^l z^m$ in der Reihenentwicklung (1, 20) der Charakter von S in einer gewissen, durch $f(x, y, z)$ und k, l, m spezifizierten Darstellung von \mathfrak{S} . Herr Professor I. Schur teilte mir eine Herleitung dieser Aussage aus bekannten Sätzen der Darstellungstheorie mit.

Das der Permutationsgruppe \mathfrak{S} zugeordnete Polynom (1, 5), das ich hier Zykluszeiger nannte, wird, wenn \mathfrak{S} die symmetrische Gruppe ist, als die *Hauptcharakteristik* von \mathfrak{S} in der Darstellungstheorie bezeichnet. Herrn Schur verdanke ich den Hinweis darauf, dass auch der Zykluszeiger einer beliebigen Permutationsgruppe, welche ja Untergruppe einer geeigneten symmetrischen Gruppe ist, für die Darstellung dieser symmetrischen Gruppe von Bedeutung ist.¹ Es soll aber hier auf die Zusammenhänge des Dargelegten mit der Darstellungstheorie nicht weiter eingegangen werden.

Ebenfalls Herrn Schur verdanke ich den Hinweis auf eine Überlegung von Frobenius², womit die Überlegung der Nr. 19 sehr nahe verwandt ist.

Spezialfälle.

21. **Spezielle Permutationsgruppen.** Folgende wohlbekannte spezielle Permutationsgruppen, alle vom Grade s (d. h. es werden s Gegenstände permutiert) treten in den späteren Anwendungen des in Nr. 16 formulierten Hauptsatzes öfters auf:

\mathfrak{S}_s , die symmetrische Gruppe von s Gegenständen, von der Ordnung $s!$;

\mathfrak{A}_s , die alternierende Gruppe von s Gegenständen, die die geraden Permutationen umfasst und die Ordnung $s!/2$ hat;

\mathfrak{Z}_s , die zyklische Gruppe von Grad und Ordnung s , erzeugt durch eine zyklische Vertauschung von s Gegenständen;

\mathfrak{D}_s , die Diedergruppe von Ordnung $2s$, die die Permutationen umfasst, welche die s Ecken eines starren regulären s -Ecks bei sämtlichen $2s$ Deckbewegungen des s -Ecks erfahren;

\mathfrak{E}_s , die Permutationsgruppe vom Grad s und Ordnung 1, welche bloss die identische Permutation umfasst.

¹ I. SCHUR, Darstellungstheorie der Gruppen, Vorlesungen an der Eidg. Technische Hochschule, herausgegeben von E. Stiefel. (Zürich 1936.) Vgl. S. 59—60.

² Sitzungsber. d. Akademie Berlin (1904), S. 558—571. Vgl. § 1.

In dem Hauptsatz der Nr. 16 tritt der Zyklenzeiger der betrachteten Permutationsgruppe auf. Der Zyklenzeiger von \mathfrak{C}_s ist in (1, 16), der von \mathfrak{A}_s in (1, 17) aufgestellt. Für die kleinsten Zahlenwerte von s haben diese Zyklenzeiger die folgende Gestalt:

 (\mathfrak{C}_1)

$$f_1$$

 (\mathfrak{C}_2)

$$\frac{f_1^2 + f_2}{2}$$

 (\mathfrak{C}_3)

$$\frac{f_1^3 + 3f_1f_2 + 2f_3}{6}$$

 (\mathfrak{C}_4)

$$\frac{f_1^4 + 6f_1^2f_2 + 3f_2^2 + 8f_1f_3 + 6f_4}{24}$$

 (\mathfrak{A}_2)

$$f_1^2$$

 (\mathfrak{A}_3)

$$\frac{f_1^3 + 2f_3}{3}$$

 (\mathfrak{A}_4)

$$\frac{f_1^4 + 3f_2^2 + 8f_1f_3}{12}$$

Die Zyklenzeiger von \mathfrak{C}_s , \mathfrak{B}_s , \mathfrak{D}_s seien hier gegeben:

 (\mathfrak{C}_s)

$$f_1^s,$$

 (\mathfrak{B}_s)

$$\frac{1}{s} \sum_{k|s} \varphi(k) f_k^{\frac{s}{k}},$$

 (\mathfrak{D}_s)

$$\frac{1}{2s} \sum_{k|s} \varphi(k) f_k^{\frac{s}{k}} + \begin{cases} \frac{1}{2} f_1 f_2^{s-1} \\ \frac{1}{4} (f_1^2 f_2^{s-1} + f_2^s). \end{cases}$$

Der Zyklenzeiger von \mathfrak{C}_s ist unmittelbar, der von \mathfrak{B}_s , wie auch der von \mathfrak{D}_s , ist auf Grund von Bekanntem leicht aufzustellen. Sowohl in der Formel für \mathfrak{B}_s wie in der für \mathfrak{D}_s ist die Summation über sämtliche Teiler k von s zu erstrecken. In der Formel für \mathfrak{D}_s gilt die obere Zeile für ungerades $s = 2\sigma - 1$ und die untere für gerades $s = 2\sigma$. Die Spezialfälle für die kleinsten Zahlenwerte von s sind in der oberen Tabelle mitenthalten, da

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{C}_3.$$

22. **Spezielle Figurenvorräte.** Es seien zwei spezielle Figurenvorräte hervorgehoben, die in der Literatur schon für beliebige Permutationsgruppen betrachtet worden sind.

a) Der Figurenvorrat besteht aus n Figuren, jede Figur enthält nur eine Kugel, je zwei verschiedene Figuren enthalten Kugeln von verschiedener Farbe. Kurzum, der Figurenvorrat besteht aus n verschiedenfarbigen Kugeln und die abzählende Potenzreihe dieses Vorrats ist

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Die Aufgabe der Nr. 12 ist für diesen speziellen Figurenvorrat so auszusprechen: Gegeben ist eine beliebige Permutationsgruppe \mathfrak{S} vom Grade s und n nichtnegative ganze Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n von der Summe s . Auf wie viele in bezug auf \mathfrak{S} inäquivalente Arten kann man auf s Stellen eine Konfiguration von s Kugeln aufbauen, von welchen k_1 eine erste, k_2 eine andere, \dots, k_n eine gewisse n -te gegebene Farbe haben? Die Lösung erfolgt, gemäss Nr. 16, durch das Einsetzen von

$$f_m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$$

in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S} und das Aufsuchen des Koeffizienten von

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

in dem durch das Einsetzen entstandenen homogenen Polynom vom Grade s . (Die Aufgabe der Nr. 2 ist ein spezieller Fall hiervon.)

Diese Aufgabe wurde, in etwas verschiedener Fassung, schon von Lunn und Senior behandelt, die die chemische Bedeutung der Aufgabe erkannten (vgl. unten, Nr. 56) und eine von der hier gegebenen ziemlich verschieden aussehende Lösung dafür aufstellten.¹ Man kann die Lösung von Lunn und Senior als eine besondere rechnerische Ausgestaltung der hier gegebenen Lösung nachweisen, und aus dem Umstand, dass hier für f_m die m -te Potenzsumme der Unbestimmten x_1, x_2, \dots, x_n eingesetzt wird, mit Benützung klassischer Formeln über symmetrische Funktionen weitergehende Folgerungen ziehen. Auf Einzelheiten soll vielleicht an einem anderen Ort eingegangen werden.

b) Es gibt nur eine Sorte von Kugeln und zu jeder gegebenen Anzahl k gibt es im Vorrat $[\mathcal{O}]$ genau eine Figur, die k Kugeln enthält. In diesem Fall ist die abzählende Potenzreihe des Figurenvorrates

¹ LUNN u. SENIOR, 1.

$$(1, 25) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Eine aus den Figuren dieses Vorrates auf s Stellen aufgebaute Konfiguration vom Kugelinhalt k ist eine Anordnung von s nichtnegativen ganzen Zahlen k_1, k_2, \dots, k_s von der Summe k :

$$(k_1, k_2, \dots, k_s).$$

Indem man jeder Stelle eine Unbestimmte zuordnet (der Stelle σ die Unbestimmte u_σ , wobei $\sigma = 1, 2, \dots, s$), kann die Konfiguration als ein Potenzprodukt

$$(1, 26) \quad u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_s^{k_s}$$

vom Grade

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$$

aufgefasst werden, und die Permutationsgruppe \mathfrak{S} als eine Vertauschungsgruppe der s Unbestimmten u_1, u_2, \dots, u_s . Die Aufgabe der Nr. 12 lässt sich nun so aussprechen: In wie viele Transitivitätssysteme zerfallen die Potenzprodukte (1, 26) unter der Gruppe \mathfrak{S} ? Zwei Potenzprodukte werden dann und nur dann zu demselben Transitivitätssystem gerechnet, wenn sie durch \mathfrak{S} ineinander transformiert werden können. Die Summe aller zu demselben Transitivitätssystem gehörigen Produkte (1, 26) bleibt offenbar allen Permutationen von \mathfrak{S} gegenüber invariant. Man sieht leicht, dass die gesuchte Anzahl nichts anderes ist, als die Anzahl der *linear unabhängigen rationalen ganzen homogenen absoluten Invarianten k -ten Grades der Gruppe \mathfrak{S}* .

Diese Anzahl ist, gemäss dem Hauptsatz (Nr. 16), der Koeffizient von x^k in der Entwicklung derjenigen Funktion von x , die durch Einsetzung von (1, 25) in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S} entsteht, oder dadurch entsteht, dass $f(x, y, z)$ in (1, 23) zu (1, 25) spezialisiert wird. Diese Funktion ist

$$(1, 27) \quad \frac{1}{h} \sum_{(\mathfrak{S})} \frac{1}{(1-x)^{j_1} (1-x^2)^{j_2} \dots (1-x^s)^{j_s}} = \frac{1}{h} \sum_{(\mathfrak{S})} \frac{1}{|E - xS|},$$

auf beiden Seiten ist die Summation, wie in (1, 23), über alle Permutationen S der Gruppe \mathfrak{S} erstreckt; auf der rechten Seite wird S als eine Matrix von s Zeilen und s Kolonnen aufgefasst (mit s Elementen 1 und $s^2 - s$ Elementen 0); E ist die Einheitsmatrix; unter dem Summationszeichen im Nenner steht links und rechts die Determinante von $E - xS$ (im wesentlichen das charakteristische Polynom von S), wie leicht nachzurechnen.

Wir bewiesen, dass in der *Maclaurinschen Entwicklung* von (1, 27) der Koeffizient von x^k die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten k -ten Grades der Permutationsgruppe \mathfrak{S} ist, und damit einen wesentlichen Spezialfall eines von Th. Molien herrührenden Satzes.¹

23. **Spezielle Folgerungen.** Viele sehr spezielle Fälle der in Nr. 12 gestellten, durch den Hauptsatz gelösten Aufgabe kommen in der Literatur vereinzelt vor. Ein etwas mehr ausgedehnter Spezialfall, der aus der Kombination der zyklischen Gruppe \mathfrak{Z}_s mit dem in Nr. 22 unter a) besprochenen Figurenvorrat hervorgeht, ist der der »zyklischen Permutationen mit Wiederholung«; das darüber in der Literatur befindliche² ergibt sich meist unmittelbar aus dem Hauptsatz. — Bei Kombination der symmetrischen und der alternierenden Gruppe mit dem in Nr. 22 unter a) besprochenen Figurenvorrat gelangen wir auf neuem Wege zu klassischen Formeln über symmetrische Funktionen und somit zu einer weiteren Bestätigung der allgemeinen Überlegung.

In den folgenden Anwendungen kommen die in Nr. 13—15 behandelten Spezialfälle der symmetrischen und der alternierenden Gruppe \mathfrak{S}_s und \mathfrak{A}_s öfters vor. Wie dort besprochen, haben die aus den Zyklenzeigern F_s und $F_s + G_s$ dieser Gruppen gebildeten drei Polynome in f_1, f_2, \dots, f_s

$$\begin{aligned} & F_s \\ G_s &= (F_s + G_s) - F_s \\ F_s - G_s &= 2F_s - (F_s + G_s) \end{aligned}$$

die folgende Eigenschaft: Wird in diese Polynome die abzählende Potenzreihe eines Figurenvorrates $[\mathcal{O}]$ im Sinne der Nr. 16 eingesetzt, so entsteht, in bezügl. Reihenfolge, die abzählende Potenzreihe für die

Kombinationen aus beliebigen,

Kombinationen aus lauter verschiedenen,

Kombinationen aus nicht lauter verschiedenen

s Figuren des Vorrates $[\mathcal{O}]$. Es wurde F_s für die kleinsten Werte von s schon in Nr. 21 angegeben; hier soll dies noch für G_s und $F_s - G_s$ geschehen (unter symbolischer Hervorhebung der Entstehung aus den beiden Zyklenzeigern):

¹ Sitzungsber. d. Akademie Berlin (1897), S. 1152—1156. Vgl. Formel (12), die sich auf beliebige endliche Gruppen linearer Substitutionen bezieht, nicht bloss auf Permutationsgruppen, wie die hiesige Formel (1, 27). Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich ebenfalls Herrn Prof. Schur.

² E. JABLONSKI, Journ. d. mathématiques pures et appliquées (4) 8 (1892), S. 331—349.

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{S}_2) & \qquad \qquad \qquad \frac{f_1^2 - f_2}{2} \\
(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{S}_3) & \qquad \qquad \qquad \frac{f_1^3 - 3f_1f_2 + 2f_3}{6} \\
(\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{S}_4) & \qquad \qquad \qquad \frac{f_1^4 - 6f_1^2f_2 + 3f_2^2 + 8f_1f_3 - 6f_4}{24} \\
(2\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{A}_2) & \qquad \qquad \qquad f_2 \\
(2\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{A}_3) & \qquad \qquad \qquad f_1f_2 \\
(2\mathfrak{S}_4 - \mathfrak{A}_4) & \qquad \qquad \qquad \frac{f_1^2f_2 + f_4}{2}
\end{aligned}$$

Es folgt aus der kombinatorischen Bedeutung (oder aus der Rechnung der Nr. 14, ohne Rücksicht auf die kombinatorische Bedeutung) die folgende, in einer späteren Überlegung nützliche Tatsache: *Wird in die Differenz der Zyklenzeiger von \mathfrak{A}_s und \mathfrak{S}_s eine Potenzreihe mit lauter nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten eingesetzt, so entsteht eine Potenzreihe mit lauter nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten.*

Verallgemeinerung.

24. Es sei hier kurz angedeutet eine Verallgemeinerung der Aufgabe der Nr. 12, die im folgenden zwar keine Rolle spielt (abgesehen von einer nebensächlichen Bemerkung in Nr. 65), aber in verwandten Fragen benützt werden dürfte.

Es sei vorgelegt eine Permutationsgruppe \mathfrak{S} vom Grade $s + t$, u.z.w. sei \mathfrak{S} intransitiv; die durch \mathfrak{S} permutierten $s + t$ Gegenstände zerfallen in zwei Klassen, von welchen die eine s und die andere t Gegenstände umfasst, und es wird niemals ein Gegenstand der einen Klasse mit einem der anderen Klasse durch \mathfrak{S} vertauscht. (Nur des Beispiels halber unterscheide ich 2 Intransitivitätssysteme; nach Behandlung dieses Falles ist die Verallgemeinerung leicht auf n solche Systeme auszudehnen.) Die durch \mathfrak{S} vertauschten $s + t$ Gegenstände wollen wir als $s + t$ Raumpunkte uns vorstellen; in den s Punkten der ersten Klasse seien s Figuren aus einem Vorrat $[\Phi]$, in den t Punkten der zweiten t Figuren aus einem Vorrat $[\Psi]$ aufgestellt; so entsteht eine Konfiguration

$$(I, 28) \qquad \qquad (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s; \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_t).$$

Gesucht ist die Anzahl der in bezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen von der Gestalt (1, 28) und dem Kugelinhalt (k, l, m) .

Zur Lösung betrachte man irgendeine Permutation S der Gruppe \mathfrak{S} . In einem Zyklus von S treten entweder nur Punkte der ersten, oder nur Punkte der zweiten Klasse auf. Es sei S vom Typus

$$[j_1 + k_1, j_2 + k_2, \dots, j_m + k_m, \dots];$$

unter den $j_m + k_m$ in S auftretenden Zyklen von der Länge m sollen j_m bloss Punkte der ersten Klasse, mit Figuren aus $[\Phi]$ besetzt, umfassen und k_m bloss Punkte der zweiten Klasse, mit Figuren aus $[\Psi]$ besetzt, so dass

$$1 j_1 + 2 j_2 + \dots + s j_s = s, \quad 1 k_1 + 2 k_2 + \dots + t k_t = t.$$

Man betrachte das Polynom in $s + t$ Unbestimmten $f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_t$

$$(1, 29) \quad \frac{1}{h} \sum_{(\mathfrak{S})} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_s^{j_s} g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_t^{k_t};$$

die Summe ist über alle Permutationen S von \mathfrak{S} erstreckt. Die abzählende Potenzreihe von $[\Phi]$ sei mit $f(x, y, z)$, die von $[\Psi]$ mit $g(x, y, z)$ bezeichnet. Die gesuchte Anzahl ist der Koeffizient von $x^k y^l z^m$ in der Potenzreihenentwicklung, die man erhält, wenn man in (1, 29)

$$f_n = f(x^n, y^n, z^n), \quad g_n = g(x^n, y^n, z^n)$$

setzt ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Beziehungen zwischen Zyklenzeiger und Permutationsgruppe.

25. Die Eigenschaft des Zyklenzeigers, die im Hauptsatz (Nr. 16) ausgesprochen wurde, ist für den Zyklenzeiger charakteristisch, der Zyklenzeiger ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Ausführlicher gesagt, besteht der folgende Satz:

Das Polynom $\psi(f_1, f_2, \dots, f_s)$ in den s Veränderlichen f_1, f_2, \dots, f_s sei mit der gegebenen Permutationsgruppe \mathfrak{S} vom Grade s so verbunden, dass für einen beliebigen Figurenvorrat $[\Phi]$ und dessen abzählende Potenzreihe $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ folgendes gilt: Wenn in dem Polynom $\psi(f_1, f_2, \dots, f_s)$ die Variablen

$$(1, 30) \quad f_1 = f(x_1, x_2, \dots), \quad f_2 = f(x_1^2, x_2^2, \dots), \quad \dots, \quad f_s = f(x_1^s, x_2^s, \dots)$$

gesetzt werden, so entsteht aus ψ die abzählende Potenzreihe der aus dem Figurenvorrat $[\Phi]$ gebildeten, inbezug auf \mathfrak{S} inäquivalenten Konfigurationen. — Ein solches Polynom ψ ist notwendigerweise der Zyklenzeiger.

Der Zyklenzeiger von \mathfrak{S} , bezeichnen wir ihn mit $\zeta(f_1, f_2, \dots, f_s)$, hat ja schon die Eigenschaft, welche wir von $\psi(f_1, f_2, \dots, f_s)$ postulieren. Es ist zu zeigen, dass die beiden Polynome ψ und ζ identisch sind, d. h. dass sie, nach den Variablen f_1, f_2, \dots, f_s entwickelt, die gleichen Koeffizienten aufweisen.

Verwerten wir die Voraussetzung für den speziellen Figurenvorrat, dessen abzählende Potenzreihe

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

lautet [n Kugeln von verschiedener Farbe, vgl. Nr. 22 a)]. Die Voraussetzung besagt, dass

$$(1, 31) \quad f_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, f_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \dots, f_s = x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s$$

gesetzt, und nach den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n entwickelt, die beiden Polynome ψ und ζ die gleichen Koeffizienten aufweisen, d. h. dass vermöge (1, 31)

$$(1, 32) \quad \psi(f_1, f_2, \dots, f_s) - \zeta(f_1, f_2, \dots, f_s) = 0$$

identisch in x_1, x_2, \dots, x_n . Nun wählen wir $n \geq s$; bekanntlich kann, wenn $s \leq n$ zwischen den ersten s Potenzsummen (1, 31) der n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n keine algebraische Beziehung bestehen¹; so wird ersichtlich, dass die linke Seite von (1, 32) als Polynom in f_1, f_2, \dots, f_s identisch verschwinden muss w.z.b.w.

26. Jetzt können wir die in Nr. 12 aufgeworfene Frage, deren Lösung in Nr. 19 abgeschlossen wurde, von einer neuen Seite her beleuchten, nämlich genauer sagen, inwieweit deren Lösung von der Struktur der darin auftretenden Gruppe \mathfrak{S} abhängt. Nennen wir zwei Permutationsgruppen von gleichem Grade, für welche die Aufgabe der Nr. 12 bei beliebig gegebenem Figurenvorrat und Kugelinhalt die gleiche Lösung hat, *kombinatorisch gleichwertig*. (Es versteht sich, dass hier die Zahl der verschiedenen Kugelkategorien nicht mehr auf 3 beschränkt, sondern beliebig ist.) Ausführlich lautet die Definition so: *Zwei Permutationsgruppen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 von gleichem Grade s heißen kombinatorisch gleichwertig, wenn aus einem beliebigen Figurenvorrat $[\Phi]$ und mit einem beliebigen*

¹ Vgl. z. B. M. BÖCHER, Einführung in die höhere Algebra (Leipzig 1910), S. 263 den nahestehenden Satz 3.

Kugelinhalt $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ genau ebensoviel in bezug auf \mathfrak{S}_1 inäquivalente Konfigurationen $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s)$ gebildet werden können, wie in bezug auf \mathfrak{S}_2 inäquivalente.

Aus dem in Nr. 16 ausgesprochenen und in Nr. 19 voll bewiesenen Hauptresultat dieses Kapitels, zusammen mit dem in der vorangehenden Nr. 25 bewiesenen Satz ergibt sich unmittelbar: *Zwei Permutationsgruppen sind dann und nur dann kombinatorisch gleichwertig, wenn sie denselben Zyklenzeiger besitzen.*

Indem man auf die Definition des Zyklenzeigers mittels der expliziten Formel (1, 5) zurückgreift, ergibt sich weiter¹: *Zwei Permutationsgruppen sind dann und nur dann kombinatorisch gleichwertig, wenn die Permutationen der einen den Permutationen der anderen sich eindeutig umkehrbar so zuordnen lassen, dass einander zugeordnete Permutationen den gleichen Typus von Zyklenerlegung aufweisen.*

Es ist von Interesse zu bemerken, dass zwei kombinatorisch gleichwertige Permutationsgruppen nicht identisch sein müssen.² Sie müssen nicht einmal als abstrakte Gruppen einander isomorph sein. Es sei nämlich p eine ungerade Primzahl und m eine ganze Zahl, welche grösser als 2 ist ($p = 3$, $m = 3$ ist das einfachste Beispiel). Es gibt bekanntlich³ eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung p^m , deren alle Elemente, das Einselement ausgenommen, die Ordnung p haben. Man nenne \mathfrak{S}_1 die reguläre Darstellung dieser Gruppe als Permutationsgruppe, und \mathfrak{S}_2 die reguläre Darstellung der abelschen Gruppe von Ordnung p^m und Typus (p, p, \dots, p) . Es sind \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 Permutationsgruppen von Ordnung und Grad p^m , und kombinatorisch gleichwertig: Jede ihrer Permutationen, ausgenommen die identische, wird ja in derselben Weise in Zyklen zerlegt, nämlich in p^{m-1} Zyklen von der Länge p , und der Zyklenzeiger von beiden ist

$$\frac{f_1^{p^m} + (p^m - 1)f_p^{p^{m-1}}}{p^m}$$

27. Wir besprechen einige Fälle, in welchen der Zyklenzeiger einer aus mehreren gegebenen Gruppen aufgebauten Gruppe sich in übersichtlicher Weise aufbauen lässt aus den Zyklenzeigern der gegebenen Gruppen.

¹ Wenn man sich, wie in Nr. 22 unter a), auf »Figuren« beschränkt, welche bloss in einer Kugel bestehen, so wird der Satz abgeändert, in bezug auf Notwendigkeit schärfer, in bezug auf Hinlänglichkeit weniger besagend. Der so abgeänderte Satz wurde hier (vgl. Nr. 25) mitbewiesen; er ist schon bei LUNN und SENIOR 1, S. 1053 ausgesprochen, zur einen Hälfte (»hinreichend«) ist auch der Beweis mitgeteilt. Die andere Beweishälfte wurde mir durch Herrn Senior freundlichst mitgeteilt; die Überlegung ist von der hier in Nr. 25 gegebenen verschieden.

² LUNN und SENIOR, 1, S. 1053.

³ Vgl. W. BURNSIDE, Theory of groups of finite order, 2. ed. (Cambridge 1911), S. 143—144.

Es seien gegeben die beiden Permutationsgruppen \mathfrak{G} , \mathfrak{H} ; bezeichnen wir bzw. mit

g, h die Ordnung,
 r, s den Grad,
 φ, ψ den Zyklenzeiger.

Nennen wir $g_{i_1 i_2 \dots i_r}$ die Anzahl derjenigen in der Gruppe \mathfrak{G} befindlichen Permutationen, deren Typus $[i_1, i_2, \dots, i_r]$ ist. Dann ist der Zyklenzeiger von \mathfrak{G}

$$(1, 33) \quad \varphi = \frac{1}{g} \sum_{(i)} g_{i_1 i_2 \dots i_r} f_1^{i_1} f_2^{i_2} \dots f_r^{i_r};$$

der Zyklenzeiger von \mathfrak{H} ist gemäss (1, 5)

$$(1, 34) \quad \psi = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h_{j_1 j_2 \dots j_s} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_s^{j_s}.$$

Die durch \mathfrak{G} permutierten Objekte seien mit x_1, x_2, \dots, x_r , die durch \mathfrak{H} permutierten mit y_1, y_2, \dots, y_s bezeichnet. Die Permutationen der beiden Gruppen haben bzw. die Gestalt

$$(1, 35) \quad G = \begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_r, & \dots & x_r \\ x_{1'}, & \dots & x_{r'}, & \dots & x_{r'} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} y_1, & \dots & y_s, & \dots & y_s \\ y_{1'}, & \dots & y_{s'}, & \dots & y_{s'} \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun aus \mathfrak{G} und \mathfrak{H} zwei neue Permutationsgruppen aufbauen; die erste ist sehr einfach gebaut und wohlbekannt, die zweite interessanter.

Das »direkte Produkt« $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$. Wählen wir aus \mathfrak{G} und \mathfrak{H} je eine beliebige Permutation G bzw. H , was auf gh Arten geschehen kann. Ordnen wir dem Paar G, H eine Permutation der Objekte $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ zu, nämlich die folgende:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_r, & y_1, & y_2, & \dots & y_s \\ x_{1'}, & x_{2'}, & \dots & x_{r'}, & y_{1'}, & y_{2'}, & \dots & y_{s'} \end{pmatrix}$$

d. h. führen wir die beiden in (1, 35) angegebenen Permutationen simultan aus. Die so aufgestellten gh Permutationen der $r + s$ Objekte bilden offenbar eine Permutationsgruppe, die wir mit $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ bezeichnen und das *direkte Produkt* von \mathfrak{G} und \mathfrak{H} nennen wollen. Offenbar ist $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ intransitiv. Offenbar ist (vgl. Nr. 17) $\varphi\psi$ der Zyklenzeiger von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$.

Auf ähnliche Art kann man das direkte Produkt $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{R} \times \dots$ beliebig vieler Permutationsgruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{R}, \dots$ definieren. Bei dieser Bildung des direkten Produktes werden die Grade addiert und die Ordnungen, sowie die Zyklenzeiger multipliziert.

Der »Kranz« $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$. Wählen wir aus \mathfrak{G} eine Permutation G , und aus \mathfrak{H} insgesamt r Permutationen $H_1, H_2, \dots, H_\varrho, \dots, H_r$, u.zw. voneinander unabhängig (so dass unter den H_ϱ auch gleiche vorkommen dürfen); die Wahl kann auf gh^r verschiedene Arten erfolgen. Es sei G durch (1, 35) gegeben; setzen wir

$$(1, 36) \quad H_\varrho = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_s \\ y_{\varrho 1} & y_{\varrho 2} & \dots & y_{\varrho s} \end{pmatrix} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r).$$

Wir betrachten die folgenden, in r Reihen angeordneten rs Objekte:

$$(1, 37) \quad \begin{array}{cccc} z_{11}, & z_{12}, & \dots & z_{1s}, \\ z_{21}, & z_{22}, & \dots & z_{2s}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{r1}, & z_{r2}, & \dots & z_{rs}. \end{array}$$

Dem System der $1 + r$ Permutationen $G, H_1, H_2, \dots, H_\varrho, \dots, H_r$ wird folgende Permutation der rs Objekte zugeordnet:

$$\left(z_{11}, \dots, z_{1s}, \dots, z_{\varrho 1}, z_{\varrho 2}, \dots, z_{\varrho s}, \dots, z_{r1}, \dots, z_{rs}, \right. \\ \left. z_{1'1}, \dots, z_{1's}, \dots, z_{\varrho'1}, z_{\varrho'2}, \dots, z_{\varrho's}, \dots, z_{r'1}, \dots, z_{r's} \right).$$

D. h. G besorgt die Vertauschung der Zeilen des Rechtecks (1, 37), die *Großpermutation*¹; G gibt für alle Zeilen, auch für die ϱ -te Zeile an, in welche ϱ' -te Zeile sie abgebildet werden soll; es ist die Sache von H_ϱ im einzelnen anzugeben, in welche s Objekte der ϱ' -ten Zeile die s Objekte der ϱ -ten Zeile übergehen sollen. Die so aufgestellten gh^r Permutationen der rs Objekte bilden offenbar eine Permutationsgruppe, die wir mit $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$ bezeichnen wollen. Als Name könnte man wählen: »Der \mathfrak{H} -Kranz um \mathfrak{G} «. ²

¹ Diese treffende Bezeichnung verdanke ich Herrn R. Remak.

² *Geometrisch-kinematisches Beispiel.* Ein regelmässiges Polyeder hat r Seitenflächen, jede Seitenfläche hat e Ecken, und s ist ein bestimmtes Vielfaches von e (auch $s=e$ ist zulässig). Auf jeder Seitenfläche ist im Mittelpunkt eine äussere Normale errichtet, und diese Normale dient als Achse eines Rades. Alle r Räder sind gleich; jedes hat s äquidistante Speichen, und jedes kann in s verschiedenen Lagen arretiert werden: in jeder Lage weist eine andere Speiche auf eine bestimmte Ecke der betreffenden Seitenfläche. Das regelmässige Polyeder habe g Deckbewegungen,

Die Zeilen des Rechtecks (1, 37) zeigen ein besonderes Verhalten gegenüber den Permutationen der Gruppe $\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]$: Wenn durch irgend eine dieser Permutationen ein Element einer Zeile in ein Element einer anderen Zeile übergeht, so gehen bei der genannten Permutation alle Elemente der erstgenannten Zeile in je ein Element der zweitgenannten über: die Zeilen von (1, 37) sind *Imprimitivitätsgebiete* von $\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]$. Diejenigen Permutationen von $\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]$, welche jedes dieser r Imprimitivitätsgebiete in sich überführen (welche als Grobpermutation die Identität ausüben), bilden eine Untergruppe; diese hat die Ordnung h^r , ist das direkte Produkt $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S}$ zu r Faktoren und ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]$, u.zw. ist ihre Faktorgruppe \mathfrak{G} . In Zeichen:

$$\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]/\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S} = \mathfrak{G}.$$

Denken wir die rs Elemente (1, 37) als bestimmte Raumstellen und auf jeder Raumstelle eine Figur aus dem Vorrat $[\mathcal{P}]$ aufgestellt; so entsteht die Konfiguration

$$(1, 38) \quad \begin{array}{cccc} \mathcal{P}_{11}, & \mathcal{P}_{12}, & \dots & \mathcal{P}_{1s}, \\ \mathcal{P}_{21}, & \mathcal{P}_{22}, & \dots & \mathcal{P}_{2s}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{P}_{r1}, & \mathcal{P}_{r2}, & \dots & \mathcal{P}_{rs}. \end{array}$$

Jede Zeile in dieser Konfiguration sei eine *Teilkonfiguration* genannt. Zwei Teilkonfigurationen

$$\mathcal{P}_{\rho 1}, \mathcal{P}_{\rho 2}, \dots, \mathcal{P}_{\rho s} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{\rho' 1'}, \mathcal{P}_{\rho' 2'}, \dots, \mathcal{P}_{\rho' s'}$$

sind als äquivalent zu betrachten, wenn es eine Permutation

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & s \\ i_1 & i_2 & \dots & i_s \end{pmatrix}$$

in der Gruppe \mathfrak{S} gibt, so dass

$$\mathcal{P}_{\rho i_1} = \mathcal{P}_{\rho' 1'}, \quad \mathcal{P}_{\rho i_2} = \mathcal{P}_{\rho' 2'}, \quad \dots \quad \mathcal{P}_{\rho i_s} = \mathcal{P}_{\rho' s'}$$

d. h. Drehungen welche es mit sich selbst zur Deckung bringen; bei diesen Deckbewegungen erfahren die r Seitenflächen eine Permutationsgruppe \mathfrak{G} von Ordnung g und Grad r . Als Deckbewegung eines Rades bezeichne ich eine Drehung von einer Arretierung zu einer anderen; die s Speichen erfahren bei den Deckbewegungen eine Permutationsgruppe \mathfrak{S} ; sie ist zyklisch, von Ordnung und Grade s . Durch Kombination aller Deckbewegungen des Polyeders und der Räder erfahren die rs Speichen eine Permutationsgruppe von der Ordnung gs^r und dem Grad rs , nämlich die Gruppe $\mathfrak{G}[\mathfrak{S}]$.

(ob ϱ und ϱ' gleich oder verschieden sind, ist hier belanglos). Betrachten wir alle zu einer gegebenen äquivalenten Teilkonfigurationen als nicht verschieden, als dieselbe *Grossfigur*. Die abzählende Potenzreihe der aus dem gegebenen Figurenvorrat $[\Phi]$ zusammensetzbaren verschiedenen *Grossfiguren* ergibt sich aus (1, 34) wenn darin, im Sinne der Nr. 16, die abzählende Potenzreihe von $[\Phi]$ eingesetzt wird.

Aus der Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$ ist ersichtlich, dass zwei Konfigurationen von der Gestalt (1, 38) äquivalent oder inäquivalent in bezug auf $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$ sind, jenachdem die bezüglichlichen r , auf den r Zeilen aufgestellten *Grossfiguren* in bezug auf \mathfrak{G} äquivalente oder inäquivalente Konfigurationen auf r Stellen bilden. Um die abzählende Potenzreihe der in bezug auf $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$ inäquivalenten Konfigurationen aus rs Figuren Φ zu erhalten, müssen wir die abzählende Potenzreihe der in bezug auf \mathfrak{G} inäquivalenten Konfigurationen aus r *Grossfiguren* bilden, also, im Sinne der Nr. 16, die abzählende Potenzreihe der *Grossfiguren* (d. h. die Funktion (1, 34), worin schon für f die abzählende Potenzreihe von $[\Phi]$ eingesetzt ist) in (1, 33) einsetzen; somit ist, indem

$$(1, 39) \quad \psi_m = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h_{j_1 j_2 \dots j_s} f_m^{j_1} f_{2m}^{j_2} \dots f_{sm}^{j_s}$$

gesetzt wird,

$$(1, 40) \quad \varphi[\psi] = \frac{1}{g} \sum_{(i)} g_{i_1 i_2 \dots i_r} \psi_1^{i_1} \psi_2^{i_2} \dots \psi_r^{i_r}$$

zu bilden, und für f die abzählende Potenzreihe von $[\Phi]$ einzusetzen.

Aus Nr. 25 folgt nun: *Der Zyklenzeiger von $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$ ist der durch (1, 40) gegebene Ausdruck $\varphi[\psi]$, worin ψ_1, ψ_2, \dots Abkürzungen für Polynome in den unabhängigen Variablen f_1, f_2, \dots bedeuten, gemäss (1, 39).*

Über die beiden aus den gegebenen Permutationsgruppen \mathfrak{G} und \mathfrak{H} hier gebildeten neuen Permutationsgruppen, über das »direkte Produkt« und den »Kranz«, gibt die folgende Tabelle eine Übersicht:

Gruppe:	\mathfrak{G}	\mathfrak{H}	$\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$	$\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$
Grad:	r	s	$r + s$	rs
Ordnung:	g	h	gh	gh^r
Zyklenzeiger:	φ	ψ	$\varphi\psi$	$\varphi[\psi]$.

II. GRAPHEN.

Definitionen.

28. Es sollen in den nächsten Nummern diejenigen Gebilde, welche die Chemiker als »Strukturformeln« und »Stereoformeln« zu bezeichnen pflegen, rein axiomatisch-kombinatorisch beschrieben werden, mindestens soweit, als es nötig ist um den nachfolgenden Anzahlbestimmungen eine feste Grundlage zu verschaffen. Damit diese Beschreibung übersichtlich und unzweideutig ausfalle, muss ich etwas weiter ausholen; insbesondere muss ich zu Beginn einige bekannte Definitionen der Graphentheorie wiederholen, um die Terminologie mit erwünschter Deutlichkeit festzulegen. (Es wird dabei Einiges, was in der Einleitung schon »inoffiziell« gesagt wurde, nochmals »offiziell« ausgesprochen.) Ich werde in der Terminologie von dem schönen Buche von D. König, das hier als Standard-Werk gelten mag¹, möglichst wenig abweichen. Die wesentlicheren Abweichungen, welche ich im Interesse der speziellen Zwecke der gegenwärtigen Arbeit vornehmen zu sollen glaubte, werden durch besondere Hinweise hervorgehoben.

29. Was in ausführlicher Terminologie ein »zusammenhängender endlicher Graph ohne Schlingen« heissen würde, sei im folgenden kurz als ein Graph bezeichnet.

Ein *Graph* ist ein System, das zweierlei Elemente, *Punkte* und *Strecken*, enthält; die Elemente sind in endlicher Anzahl; es ist eine Relation, *Grundbeziehung* genannt, zwischen zwei Elementen verschiedener Art, also zwischen einem Punkt und einer Strecke definiert; dass zwischen dem Punkt P und der Strecke σ die Grundbeziehung besteht, wird auch mit den Worten » P begrenzt σ « ausgedrückt (gelegentlich auch durch andere geometrische Wendungen wie » σ endet in P «, » σ geht von P aus« u.s.w.). Es sind folgende zwei Bedingungen erfüllt:

I. *Jede Strecke wird durch zwei verschiedene Punkte begrenzt.*

II. *Die Elemente des Graphen, Punkte und Strecken, bilden ein vermöge der Grundbeziehung zusammenhängendes System. Anders gesagt: Indem man vom Element zu einem damit durch die Grundbeziehung verbundenen Element schreitet, kann man von einem beliebigen Element zu einem beliebigen andern fortschreiten.*

¹ KÖNIG, 1. Der Leser braucht die »Graphentheorie« nicht von Anfang an zu beherrschen; es genügt zum ersten Verständnis des Hauptinhalts dieser Abhandlung, die vorkommenden Aussagen über Graphen sich an selbstgezeichneten Figuren »experimentell« klarzumachen.

Die Bedingung I besagt, dass jede im Graphen auftretende Strecke zu genau zwei Punkten in der Grundbeziehung steht. Die Anzahl der Strecken, die zu einem gegebenen Punkte in der Grundbeziehung stehen (durch den Punkt begrenzt werden), wird durch keine Bedingung eingeengt; es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass sie jede natürliche Zahl und auch 0 sein kann. Ein Punkt, der keine Strecke begrenzt, hängt mit keiner Strecke, also überhaupt mit keinem weiteren Element im Sinne von II zusammen, er muss also, eben wegen dieser Bedingung II, den ganzen Graphen ausmachen. Ein Graph, der aus einem einzigen Punkt besteht, heisst der *Einpunktgraph*.¹

30. Man betrachte einen beliebigen Graphen; es bezeichne p die Anzahl seiner Punkte, s die Anzahl seiner Strecken.

Den Fall $p = 0, s = 0$ (den Fall des »Nullgraphen«) schliesse ich von der Betrachtung aus. Wenn $s = 0$ ist, also keine Strecken vorhanden sind, können verschiedene Punkte miteinander nicht zusammenhängen; in diesem Falle ist also, gemäss der Bedingung II, $p = 1$ und wir haben den Einpunktgraphen vor uns. Wenn $s \geq 1$, so ist, wegen II, $p \geq 2$. Es besteht zwischen p und s , wie man auf Grund der Bedingungen I, II zeigen kann², die Beziehung, dass die Zahl

$$(2, 1) \quad s - p + 1 = \mu$$

nichtnegativ ist; man nennt μ die *Zusammenhangszahl* des Graphen. Einen Graphen von Zusammenhangszahl 0 nennt man einen *Baum*. Ein Baum ist also ein Graph, der bei gegebener Punktzahl p möglichst wenig, nämlich $p - 1$ Strecken besitzt.

Ein Punkt, der genau k Strecken begrenzt, wird *k-kantiger* Punkt genannt. Ein einkantiger Punkt wird auch als *Endpunkt* bezeichnet. Es sei p_k die Anzahl der k -kantigen Punkte; abgesehen vom Falle des Einpunktgraphen ist $p_0 = 0$. Es ist

$$(2, 2) \quad p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots = p,$$

und wegen der Bedingung I

$$(2, 3) \quad 0 p_0 + 1 p_1 + 2 p_2 + \cdots + k p_k + \cdots = 2 s.$$

¹ Die Einführung des Einpunktgraphen bedingt die wesentlichsten Abweichungen der hiesigen von der Königschen Terminologie.

² KÖNIG, 1, S. 54.

31. Einen vom Einpunktgraphen verschiedenen Baum, wovon ein Endpunkt als von allen anderen Punkten verschiedenartig aufgefasst wird, nennt man einen *Setzbaum*¹, den ausgezeichneten, einzigartigen Endpunkt nennt man den *Wurzelpunkt* und die einzige durch den Wurzelpunkt begrenzte Strecke den *Stamm* des Setzbaumes. Die von dem Wurzelpunkt verschiedenen Punkte eines Setzbaumes seien als *Knotenpunkte*² bezeichnet. In den Figuren, welche Setzbäume darstellen, sollen die Knotenpunkte durch Kreislein, der Wurzelpunkt durch eine Pfeilspitze angedeutet werden; vgl. Figg. 1, 2, 3.

Bäume, an welchen kein Punkt als Wurzelpunkt ausgezeichnet ist, sollen, wo eine Unterscheidung erforderlich, *freie* Bäume genannt werden.

Es sei P ein Punkt eines Baumes B , und der andere Begrenzungspunkt einer von P ausgehenden Strecke sei Q . Die Punkte P und Q und solche (eventuelle) weitere Punkte von B , welche mit P ohne die Vermittlung von Q nicht verbunden, also bloss durch Q hindurch mit P verbunden werden können, bilden, zusammen mit den Kanten, welche sie beidseitig begrenzen, einen Baum (Teilbaum von B), u. zw. einen Setzbaum, als dessen Wurzelpunkt P betrachtet und dessen Stamm durch P und Q begrenzt wird; dieser Setzbaum heisst ein von P entspringender *Ast* von B .³

Zur Erläuterung dieser Definition sei bemerkt: Wenn B genau p Punkte enthält, so enthalten sämtliche von P entspringenden Äste von B zusammen p oder mehr Punkte, aber genau $p - 1$ Knotenpunkte. (Vgl. in Fig. 2, (α) und (β), die von M entspringenden Äste.)

32. Man kann die Punkte eines beliebigen Graphen in *Arten* einteilen, u. zw. willkürlich, mit der selbstverständlichen Beschränkung, dass jeder Punkt des Graphen genau einer Art angehört; d. h. die Arten sollen zu je zweien elementenfremd sein und zusammen alle Punkte des Graphen umfassen. (Man kann Punkte der gleichen Art als Kugeln von gleicher Farbe oder als Atome desselben chemischen Elements sich vorstellen.)

An Setzbäumen unterscheiden wir zwei Arten von Punkten: Wurzelpunkte und Knotenpunkte, und es bestehen zwei Beschränkungen: Ein Wurzelpunkt

¹ Nicht »Wurzelbaum« (vgl. KÖNIG, 1, S. 76). Ich betone, dass nicht ein beliebiger Punkt, sondern ein Endpunkt des Baumes ausgezeichnet ist.

² Das Wort »Knotenpunkt« hat also eine spezifische Bedeutung, und wird nur für Nicht-Wurzelpunkte von Setzbäumen gebraucht, im Unterschied von KÖNIG 1, S. 1.

³ Ein Ast wird also immer als Setzbaum betrachtet; hierin liegt ein kleiner Unterschied von KÖNIG 1, S. 70.

muss der einzige seiner Art und ein einkantiger Punkt sein. Im allgemeinen Falle bestehen keine derartigen Beschränkungen, die Einteilung der Punkte in Arten kann willkürlich erfolgen, sie braucht insbesondere Nichts mit der Kantenzahl zu tun haben. Wenn es so viel Arten gibt als Punkte, wenn also je zwei verschiedene Punkte verschiedenartig sind, so kann man von einem Graphen mit *individuell verschiedenen* Punkten sprechen. Diesem äussersten Fall ist derjenige entgegengesetzt, in welchem alle Punkte des Graphen gleichartig sind.

33. Ein k -kantiger Punkt P eines Graphen bildet zusammen mit den k durch ihn begrenzten Strecken einen *Kantenkranz*¹, und der Punkt P heisst das

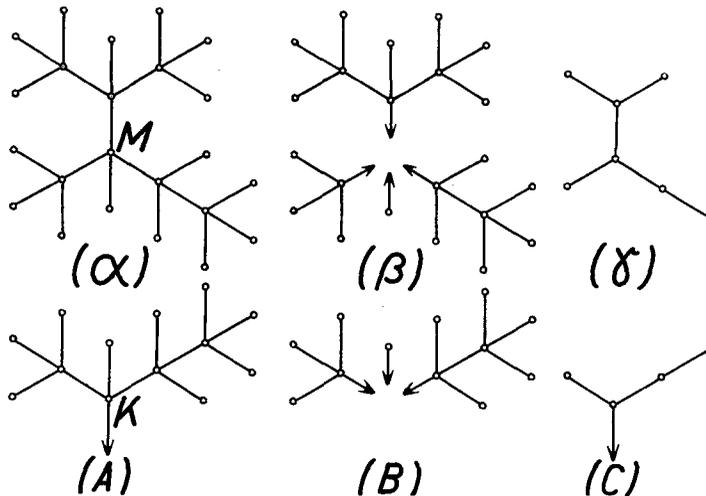


Fig. 2.

Zentrum des Kantenkranzes. Wir wollen die k vom Zentrum auslaufenden Kanten mit $1, 2, 3, \dots, k$ numerieren. Ich will einige Auffassungen, welche bei dieser Numerierung in Frage kommen können, aufzählen.

a) Wir denken uns den Kantenkranz in der Ebene gelegen, die Strecken geradlinig aus dem Zentrum auslaufend. Wir numerieren die Strecken in der Reihenfolge, in welcher sie von einem beweglichen Punkt angetroffen werden, der das Zentrum gegen den Uhrzeigersinn laufend umkreist. Je nach dem Sektor der Ebene, worin der bewegliche Punkt zu laufen anfängt, können wir k verschiedene Numerierungen erhalten. Diese k verschiedenen Numerierungen

¹ Nicht »Stern«, vgl. KÖNIG 1, S. 50. Ich betone, dass zu einem Kantenkranz nur ein Punkt gehört; ein Kantenkranz ist kein Graph, da die dazugehörigen Strecken nur einseitig begrenzt sind.

werden ineinander überführt durch die Permutationen einer Gruppe von Ordnung und Grade k , der zyklischen Permutationsgruppe \mathfrak{Z}_k .

b) Es sei $k = 4$. Wir wollen uns das Zentrum des Kantenkranzes als im Mittelpunkt eines regulären Tetraeders gelegen und die vier davon ausgehenden Strecken als gegen die vier Eckpunkte des Tetraeders gerichtet vorstellen. Wir geben jeder Strecke die gleiche Nummer wie der entsprechenden Ecke des Tetraeders, und wir numerieren die Tetraederecken so, dass das Tetraeder rechtswendig wird. (D. h. es soll eine Person, die entlang der Tetraederkante 1, 2 mit dem Kopf in 1 und den Füßen in 2 liegt und die Tetraederkante 3, 4 vor sich hat, 3 zur Linken und 4 zur Rechten haben.) Auf diese Weise können wir die 4 Strecken des Kantenkranzes auf 12 verschiedene Arten numerieren. Wie man sich überzeugen kann, bleibt bei einer geraden Permutation der ursprünglichen Nummern die Numerierung rechtswendig, sie geht aber bei einer ungeraden Permutation in eine entgegengesetzte, linkswendige über.¹ Es werden somit die 12 verschiedenen Numerierungen durch die 12 Permutationen der alternierenden Gruppe vom Grade 4, der Gruppe \mathfrak{A}_4 ineinander überführt.

c) Wir betrachten wieder einen allgemeinen Kantenkranz mit k Kanten, u. zw. betrachten wir ihn topologisch, d. h. ohne Rücksicht darauf, ob er in der Ebene oder im Raum oder sonstwo gelegen ist. Dann sind alle möglichen $k!$ Numerierungen, welche durch die Permutationen der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_k ineinander überführt werden, gleich zulässig.

Zusammengefasst: Jenachdem wir den Kantenkranz »eben«, »räumlich« oder »topologisch« auffassen, ist für die Permutation der Nummern die Gruppe \mathfrak{Z}_k , \mathfrak{A}_4 oder \mathfrak{S}_k zuständig. Man beachte, dass nach erfolgter Numerierung der Kanten und Festlegung der zuständigen Permutationsgruppe die anschauliche Bedeutung der Worte »eben« und »räumlich« ausgeschaltet und die Betrachtung rein kombinatorisch weitergeführt werden darf.

34. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Hauptpunkt. Wir können jetzt kurz und vollständig, losgelöst von jeder Spezialisierung und doch auf eine Reihe von Spezialfällen passend erklären, wann zwei Graphen als verschieden, wann sie als nichtverschieden anzusehn sind. Statt nichtverschieden gebrauche ich auch das Wort »kongruent«, statt verschieden »inkongruent«.

Es liegen zwei Graphen G und G' vor, von beiden sind die Punkte in

¹ Die 12 geraden Permutationen der 4 Tetraederecken entsprechen den Rotationen, welche das reguläre Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen.

Arten eingeteilt, von beiden sind die Kanten aller Kantenkränze numeriert¹, für jedes k ($k = 1, 2, 3, \dots$) ist eine Gruppe \mathfrak{G}_k erklärt, die für die k -kantigen Kantenkränze zuständig ist. Die Graphen G und G' heissen dann und nur dann kongruent, wenn eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Abbildung von G auf G' existiert, durch welche

- (I) jede Strecke in eine Strecke abgebildet wird,
- (II) jeder Punkt in einen Punkt von der gleichen Art abgebildet wird,
- (III) die Grundbeziehung erhalten bleibt, und
- (IV) in jedem Kantenkranz eine zur zuständigen Gruppe gehörige Permutation der Kantennummern induziert wird.

Die beiden letzten Bedingungen werden unten näher erklärt. — Eine Abbildung der beschriebenen Art von G auf G' wollen wir eine *kongruente* Abbildung nennen. Auch zwei Elemente, deren Aufeinanderabbilden bei einer kongruenten Abbildung nicht a priori durch ihre Natur ausgeschlossen ist, kann man als einander kongruent bezeichnen und in diesem Sinne [(I), (II)] sagen:

Irgend zwei Strecken sind einander kongruent.

Gleichartige Punkte sind einander kongruent, ungleichartige inkongruent.

Unter der Bedingung (III), dass die Grundbeziehung erhalten bleibt, ist natürlich folgendes zu verstehen: Wenn P und P' Punkte, σ und σ' Strecken sind, P und σ zu G , P' und σ' zu G' gehören, und die Abbildung P in P' , σ in σ' überführt, so wird σ' dann und nur dann durch P' begrenzt, wenn σ durch P begrenzt ist.

Die Bedingung (IV) muss ausführlicher erläutert werden. Wenn P das Zentrum und $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ die numerierten Strecken eines k -kantigen, in G enthaltenen Kantenkranzes sind, so erfolgt die Abbildung dieser $k + 1$ Elemente, gemäss den Bedingungen (I), (II), (III), auf die $k + 1$ Elemente eines Kantenkranzes $P', \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_k$ in G' , wobei aber die Numerierung der aufeinander bezogenen Kanten nicht dieselbe sein muss. Erfolgt die Abbildung in der durch die Pfeile angedeuteten Weise:

$$P \rightarrow P',$$

$$\sigma_{i_1} \rightarrow \sigma'_{i_1}, \sigma_{i_2} \rightarrow \sigma'_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k} \rightarrow \sigma'_{i_k},$$

¹ Bei vollständiger Numerierung der Kantenkränze erhält jede Strecke zwei Nummern, die miteinander Nichts zu tun zu haben brauchen.

so ist unter der induzierten Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k \end{pmatrix}$$

zu verstehen. Es wird die Zugehörigkeit dieser Permutation zur Gruppe \mathcal{G}_k , welche für die k -kantigen Kantenkränze zuständig ist, durch Bedingung (IV) gefordert.

Indem man die Bedingungen (I), (II), (III), (IV) nochmals durchgeht, überzeugt man sich leicht, dass die Kongruenz von Graphen, wie hier definiert, eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung zwischen Graphen ist. Bei Bedingung (IV) ist es zu beachten, dass es sich nicht um irgendeine Gesamtheit sondern um eine Gruppe von Permutationen handelt.

35. Soweit ich sehen kann, ist die erläuterte Definition der Kongruenz und der Inkongruenz (der Nichtverschiedenheit und der Verschiedenheit) zweier Graphen wesentlich zur genauen Festlegung des Sinnes, in welchem die chemischen Formeln, insbesondere die »Stereoformeln« gebraucht werden. Ich beschränke mich hier darauf, die Bedeutung der Anzahlen, welche im gegenwärtigen Kapitel zu berechnen sind, auf Grund dieser Definition festzulegen. Ich will dabei von der chemischen Terminologie, die erst im nächsten Kapitel eingeführt wird, vorderhand absehen, rein geometrisch-kombinatorisch vorgehen, und auch die chemisch uninteressante »planare« Auffassung der Graphen zum Vergleich heranziehen.

In der gegebenen Definition der Kongruenz von zwei Graphen stecken viele Spezialfälle. Die Spezialisierung kann nach drei Richtungen vor sich gehen: Man betrachtet besondere Graphen, man teilt die Punkte des Graphen auf besondere Weise in Arten ein, man legt die für die Kantenkränze zuständigen Gruppen auf besondere Weise fest. Den Zwecken dieser dreifaltigen Spezialisierung dient die folgende Terminologie.

Als *C-Graph* wird ein Graph bezeichnet, von welchem kein Punkt fünf oder mehr Strecken begrenzt. In der Bezeichnung der Nr. 30 ist also für einen *C-Graphen* charakteristisch, dass

$$(2, 4) \quad p_5 = p_6 = p_7 = \dots = 0.$$

Als *C-H-Graph* wird ein Graph bezeichnet, der ausser Endpunkten nur vierkantige Punkte besitzt, d. h. der Bedingung genügt, dass

$$(2, 5) \quad p_0 = 0, \quad p_2 = p_3 = 0, \quad p_5 = p_6 = p_7 = \dots = 0.$$

In freien Bäumen wollen wir alle Punkte als gleichartig ansehen, wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich hervorgehoben wird (das wird in diesem Kapitel nur in der Nr. 45 geschehen).

In Setzbäumen wollen wir nur zwei Punktarten unterscheiden: die Knotenpunkte und den Wurzelpunkt, so dass alle Knotenpunkte als gleichartig anzusehen sind, insoferne das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt ist (wie in Nr. 45).

Als zuständige Gruppen wollen wir nur die in Nr. 33 betrachteten einführen.

Wenn für die k -kantigen Kantenkränze die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_k zuständig ist ($k = 1, 2, 3, \dots$), so heißen zwei Graphen, welche im Sinne der Definition der Nr. 34 kongruent sind, *topologisch* nichtverschieden, und zwei in diesem Sinne inkongruente topologisch verschieden.

Wenn für die k -kantigen Kantenkränze die zyklische Gruppe \mathfrak{Z}_k zuständig ist ($k = 1, 2, 3, \dots$), so heißen zwei, im Sinne der Nr. 34 kongruente Graphen *planar* nichtverschieden, zwei in diesem Sinne inkongruente planar verschieden.¹

Für $C-H$ -Graphen (und nur für diese!) kann ein Kongruenzbegriff dadurch geschaffen werden, dass für vierkantige Kantenkränze die alternierende Gruppe \mathfrak{A}_4 als zuständig erklärt wird. (Für einkantige Kantenkränze ist die Bedingung (IV), nach den Bedingungen (I), (II), (III), nichtssagend, und es gibt ja auch nur eine Permutationsgruppe vom Grade 1.) Zwei unter der Zuständigkeit von \mathfrak{A}_4 kongruente $C-H$ -Graphen heißen *räumlich* nichtverschieden, zwei in diesem Sinne inkongruente räumlich verschieden.

Die Unterscheidung in freie- und Setzbäume hat mit der Bedingung (II) der Nr. 34 zu tun. Für freie Bäume kann diese so gefasst werden: »Irgend zwei Punkte sind einander kongruent«, und für Setzbäume so: »Knotenpunkte sind untereinander kongruent, Wurzelpunkte sind untereinander kongruent, ein Wurzelpunkt ist keinem Knotenpunkt kongruent«. Die Unterscheidung »topologisch«, »planar« und »räumlich« hängt mit der Bedingung (IV) zusammen; diese ist für topologische Graphen eigentlich nichtssagend.

36. Nach den vorangehenden Ausführungen erhalten die in der Einleitung gegebenen Definitionen der Zahlen τ_n und T_n einen vollständig bestimmten, rein kombinatorischen Sinn. Die kombinatorische Definition der anderen in der

¹ Ob bei der Zeichnung eines »planar« aufgefassten Graphen auf einem ebenen Zeichenblatt Kreuzungen der Kanten, die keinem Punkte des Graphen entsprechen, unvermeidlich sind oder nicht, ist hier gleichgültig: Ein »planar« aufgefasster Graph hat Nichts zu tun mit einem Graphen vom Geschlecht Null (vgl. KÖNIG 1, S. 198).

Einleitung erwähnten Zahlen x_n , q_n , σ_n , Q_n , R_n , S_n hängt mit den $C-H$ -Bäumen zusammen, weshalb zunächst diese Gebilde näher erörtert werden müssen.

a) Es sei die Anzahl der vierkantigen Punkte eines $C-H$ -Graphen mit n bezeichnet, also, in der Bezeichnung der Nr. 30, $p_4 = n$ gesetzt. Die Gleichungen (2, 5), kombiniert mit (2, 1), (2, 2) und (2, 3) ergeben dann, durch Elimination von s und p ,

$$(2, 6) \quad p_1 = 2n + 2 - 2\mu.$$

Insbesondere ist ein $C-H$ -Graph mit n vierkantigen Punkten dann und nur dann ein $C-H$ -Baum, wenn die Anzahl seiner Endpunkte $2n + 2$ und die Gesamtzahl seiner Punkte $3n + 2$ ist. Ein $C-H$ -Setzbaum mit n vierkantigen Punkten hat $2n + 1$ von dem Wurzelpunkt verschiedene Endpunkte, also insgesamt $3n + 1$ Knotenpunkte.

b) Gewisse vierkantige Punkte eines $C-H$ -Baumes heißen *asymmetrisch*, nämlich solche, von welchen vier topologisch verschiedene Äste ausgehen. (Der Punkt M in Fig. 2 (a) ist asymmetrisch.) Ganz gleich lautet die Definition für die asymmetrischen Punkte eines $C-H$ -Setzbaumes, nur muss dies hinzugefügt werden: Derjenige von einem bestimmten vierkantigen Punkt P entspringende Ast, der den Wurzelpunkt des ganzen Setzbaumes enthält, gilt als von allen 3 anderen Ästen verschieden, die demselben Punkte P entspringen: er trägt ja einen einzigartigen Punkt, dem kein Punkt der 3 andern Äste kongruent ist. (Der Punkt K des Setzbaumes in Fig. 2 (A) ist asymmetrisch; würde der Baum als frei und nicht als Setzbaum betrachtet, so wäre der Punkt K nicht asymmetrisch.)

Nun zur kombinatorischen Definition der erwähnten Zahlen.

Die Zahlen σ_n , q_n , x_n beziehen sich auf freie $C-H$ -Bäume, die Zahlen S_n , R_n , Q_n auf $C-H$ -Setzbäume mit n vierkantigen Punkten. Es bedeutet für freie $C-H$ -Bäume (bzw. für $C-H$ -Setzbäume) mit n vierkantigen Punkten

σ_n (bzw. S_n) die Anzahl aller räumlich verschiedenen,

q_n (bzw. R_n) die Anzahl aller topologisch verschiedenen,

x_n (bzw. Q_n) die Anzahl derjenigen speziellen topologisch verschiedenen, welche keinen asymmetrischen Punkt besitzen.

(Betreffs die Übereinstimmung der hier gegebenen kombinatorischen mit den in der Einleitung gegebenen chemischen Definitionen vgl. Nr. 55.)

Zur Klärung dieser Definitionen seien die folgenden, an und für sich wesentlichen Zusammenhänge erwähnt.

Der Übergang von ϱ_n zu \varkappa_n , wie der von R_n zu Q_n , ist Übergang von einer Menge zu einer Teilmenge. Daher ist

$$(2, 7) \quad \varrho_n \geq \varkappa_n, \quad R_n \geq Q_n.$$

Der Übergang von ϱ_n zu σ_n , wie der von R_n zu S_n , besteht im Wechsels der zur Beurteilung der vierkantigen Kantenkränze zuständigen Gruppe, im Übergang von \mathfrak{S}_4 zu \mathfrak{A}_4 . Dass die durch die Abbildung induzierte Permutation (vgl. Nr. 34, Bedingung (IV)) in der Untergruppe \mathfrak{A}_4 liege, ist eine mehr einschränkende Bedingung, als dass sie in der vollen Gruppe \mathfrak{S}_4 liege: Beim Übergang von Gruppe zur Untergruppe kann die Anzahl der nichtäquivalenten Konfigurationen nicht abnehmen. Daher ist

$$(2, 8) \quad \varrho_n \leq \sigma_n, \quad R_n \leq S_n.$$

37. Es besteht eine, schon von Cayley hervorgehobene, eindeutige Zuordnung zwischen topologisch aufgefassten $C-H$ -Graphen und C -Graphen, die, unter Auszeichnung der Setzbäume und der Wurzelpunkte, folgendermassen erklärt werden kann: Von einem $C-H$ -Graphen entferne man jeden Endpunkt und jede Kante, die durch einen Endpunkt begrenzt ist, jedoch mit Ausnahme des Wurzelpunktes und des Stammes, wenn es sich um einen Setzbaum handelt; so gelangt man vom $C-H$ -Graphen zum zugeordneten C -Graphen, u. zw. gelangt man von einem Setzbaum zu einem zugeordneten Setzbaum mit demselben Wurzelpunkt und Stamm. (Man gehe in Fig. 2 von (α) zu (γ) und von (A) zu (C) über.) Man gelangt vom C -Graphen zum $C-H$ -Graphen zurück, wenn man jedem Punkt des C -Graphen mit Ausnahme des eventuell vorhandenen Wurzelpunkts, so viele (0, 1, 2, 3 oder 4) neue Kanten hinzufügt, dass ein vierkantiger Punkt entsteht, und die neu hinzugekommenen Kanten durch neue Endpunkte abschliesst. [Man gehe in Fig. 2 von (γ) zu (α) , von (C) zu (A) zurück.]¹

Wenn man diese Zuordnung an den durch ϱ_n und R_n abgezählten $C-H$ -Graphen verfolgt, ersieht man leicht die folgende neue Bedeutung dieser Zahlen: ϱ_n ist die vom topologischen Standpunkte aus berechnete Anzahl der freien

¹ Wenn der $C-H$ -Graph n vierkantige Punkte enthält, so enthält der zugeordnete C -Graph n Punkte, falls er kein Setzbaum, und $n + 1$ Punkte, falls er ein Setzbaum ist. Im ersten Falle ist $n = 0$ auszuschliessen, im zweiten Falle (für Setzbäume) ist $n = 0$ zuzulassen; bei dieser Übereinkunft wird das eindeutige Entsprechen durchgängig und die Betrachtung des Nullgraphen vermieden. Bei der Rückkehr von den C - zu den $C-H$ -Graphen findet das Hinzufügen von 4 neuen Strecken zu demselben Punkt nur dann statt, wenn der C -Graph der Einpunktgraph ist.

C -Bäume mit n Punkten, R_n die der C -Setzbäume mit n Knotenpunkten. Anders ausgedrückt:

ϱ_n ist die Anzahl derjenigen speziellen topologisch verschiedenen freien Bäume mit n Punkten, deren Punkte höchstens vier Strecken begrenzen;

R_n ist die Anzahl derjenigen speziellen topologisch verschiedenen Setzbäume mit n Knotenpunkten, deren Knotenpunkte höchstens vier Strecken begrenzen.

Vgl. hierzu die Definition der Zahlen τ_n und T_n in der Einleitung (Nr. 3). Der Übergang von τ_n zu ϱ_n wie der von T_n zu R_n ist Übergang von einer Menge zu einer Teilmenge. Daher ist

$$(2, 9) \quad \tau_n \geq \varrho_n, \quad T_n \geq R_n.$$

Setzbäume.

38. Wir wollen von nun an voraussetzen, dass die für die k -kantigen Kantenkränze zuständige Gruppe \mathfrak{G}_k *transitiv* ist (für $k = 1, 2, 3, \dots$). Diese Voraussetzung trifft ja zu für die Gruppen $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z}_k, \mathfrak{A}_4$, welche bzw. die topologische, die planare und die räumliche Auffassung charakterisieren.

Der Stamm eines Setzbaumes S wird durch zwei Punkte begrenzt; der eine ist der Wurzelpunkt, der andere sei *Hauptknotenpunkt* oder kurz K genannt, vgl. Fig. 2 (A). Es sei K ein k -kantiger Punkt. Von den k Ästen, die aus K entspringen (Nr. 31), enthält einer (der in gewöhnlicher Sprache nicht Ast heißen würde) den Stamm und den Wurzelpunkt von S ; die übrigen $k - 1$ Äste wollen wir die *Hauptäste* des Setzbaumes S nennen. Wir wollen die Hauptäste numerieren: Jeder Hauptast enthält eine bestimmte von K auslaufende Strecke, welche, als zum Kantenkranz vom Zentrum K gehörig, eine Nummer trägt; diese Nummer sei dem betreffenden Hauptast zuerteilt.

Ich behaupte, dass man *einen zu S kongruenten Setzbaum S' finden kann, dessen Hauptäste mit $1, 2, \dots, (k - 1)$ numeriert sind. Dies beruht auf der Transitivität der Gruppe \mathfrak{G}_k . Diese enthält nämlich eine Permutation, welche diejenige Nummer, die bei Numerierung des Kantenkranzes um K dem Stamme von S zufällt, in k überführt; man übe diese Permutation auf die Numerierung des Kantenkranzes aus und lasse sonst Alles an S unverändert; der dabei entstehende Setzbaum S' hat die verlangten Eigenschaften (vgl. Nr. 34, insbesondere (IV)).*

39. Wir wollen nun Setzbäume betrachten, deren $k - 1$ Hauptäste die Nummern $1, 2, \dots (k - 1)$ tragen. Wir wollen die Hauptäste des Setzbaumes S , richtig numeriert, mit $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_{k-1}$ bezeichnen, und wir ordnen S die Konfiguration seiner Hauptäste

$$(\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_{k-1})$$

zu. Das Wort »Konfiguration« wird hier in demselben Sinne gebraucht, wie in Nr. 11¹⁾; kongruente Hauptäste werden als gleiche, inkongruente Hauptäste als verschiedene Figuren betrachtet. Da jeder Hauptast als ein Setzbaum aufzufassen ist (Nr. 31), umfasst der Figurenvorrat alle (zu je zweien inkongruente) Setzbäume.

Zwei Setzbäume, deren Hauptäste dieselbe Konfiguration bilden, sind, im Sinne der Definition der Nr. 34, sicherlich kongruent.² *Können verschiedene Konfigurationen der Hauptäste zu kongruenten Setzbäumen gehören?*

Es sollen für den Setzbaum S' die Buchstaben $K', k', \Phi'_1, \Phi'_2, \dots \Phi'_{k-1}$ dieselbe Bedeutung haben, wie $K, k, \Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_{k-1}$ für S . Wenn S und S' zueinander kongruent sind (vgl. Bedingungen (I), (II), (III), (IV) in Nr. 34), so muss in einer kongruenten Abbildung der Wurzelpunkt von S dem Wurzelpunkt von S' , der Stamm von S dem Stamm von S' und der Punkt K dem Punkt K' entsprechen, und somit ist $k = k'$. Da in der Numerierung des Kantenkranzes um K bzw. um K' beide Stämme dieselbe Nummer k tragen, muss die induzierte Permutation die Gestalt

$$(2, 10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (k-1) & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & k \end{pmatrix}$$

haben und sie muss der Gruppe \mathfrak{G}_k angehören [Nr. 34, (IV)]. Schliesslich muss (kongruente Hauptäste sind als Figuren betrachtet identisch)

$$(2, 11) \quad \Phi'_1 = \Phi_{i_1}, \quad \Phi'_2 = \Phi_{i_2}, \quad \dots \quad \Phi'_{k-1} = \Phi_{i_{k-1}}$$

sein.

Die Permutation (2, 10) gehört zu \mathfrak{G}_k , u. zw. zu derjenigen Untergruppe von \mathfrak{G}_k , welche k fest lässt; diese Untergruppe, welche wir als eine Permutations-

¹ Wir können, wenn wir die in Nr. 11 hervorgehobene räumliche Vorstellung beibehalten wollen, den $k - 1$ von K verschiedenen Endpunkten der $k - 1$ Hauptäste $k - 1$ bestimmte Raumpunkte zuweisen.

² Zur ausführlichen Begründung dieses Schlusses muss man zwei Setzbäume S und S' betrachten, deren gleich numerierte Hauptäste aufeinander kongruent abgebildet sind, und aus diesen $k - 1$ Abbildungen eine kongruente Abbildung von S auf S' konstruieren. Ich übergehe die Einzelheiten und ich werde mir ähnliche Ersparungen auch im folgenden erlauben.

gruppe vom Grade $k - 1$ auffassen wollen [sie permutiert $1, 2, \dots, (k - 1)$], heiße kurz die *zuständige Untergruppe*. Das Bestehen der Gleichungen (2, 11) kann man jetzt, mit der Ausdrucksweise der Nr. 11, so aussprechen: *die Konfigurationen $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1})$ und $(\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_{k-1})$ sind in bezug auf die zuständige Untergruppe äquivalent.*

Wenn man das Überlegte nochmals, in umgekehrter Reihenfolge durchläuft, erhält man das Resultat: *Zwei Setzbäume sind dann und nur dann einander kongruent, wenn sie gleich viel Hauptäste haben, und die Konfigurationen ihrer Hauptäste in bezug auf die zuständige Untergruppe einander äquivalent sind.*

Jenachdem die zuständige Gruppe \mathfrak{S}_k , \mathfrak{A}_4 oder \mathfrak{B}_k , ist die zuständige Untergruppe \mathfrak{S}_{k-1} , $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3$ bzw. \mathfrak{S}_{k-1} . Diese Fälle spielen eine Rolle im folgenden.

40. Wir betrachten jetzt die $C-H$ -Setzbäume mit n vierkantigen Punkten; die Anzahl der topologisch verschiedenen haben wir mit R_n , die der räumlich verschiedenen mit S_n bezeichnet; die Anzahl der planar verschiedenen soll P_n heißen.

Der Hauptknotenpunkt eines $C-H$ -Setzbaumes ist entweder ein Endpunkt oder vierkantig.

Wenn der Hauptknotenpunkt K ein Endpunkt ist, so besteht der ganze Setzbaum aus K , aus dem Wurzelpunkt und aus dem Stamm, der diese beiden Punkte verbindet; es gibt keine vierkantigen Punkte, es gibt keine Hauptäste. Es gibt auch nicht zwei inkongruente Setzbäume dieser Art; hierbei ist gleichgültig, ob wir die Kongruenz topologisch, räumlich oder planar auffassen. Es ist somit

$$(2, 12) \quad R_0 = S_0 = P_0 = 1.$$

Wenn der Hauptknotenpunkt des $C-H$ -Setzbaumes S vierkantig ist, so hat S drei Hauptäste, und diese enthalten zusammen genau einen vierkantigen Knotenpunkt weniger als S allein enthält. Es gibt somit genau gleich viele

inkongruente $C-H$ -Setzbäume mit n vierkantigen Knotenpunkten als in bezug auf die zuständige Untergruppe inäquivalente Konfigurationen von drei $C-H$ -Setzbäumen, welche zusammen $n - 1$ vierkantige Knotenpunkte enthalten

vorausgesetzt, dass $n \geq 1$ ist. (Vgl. Fig. 2, (A) und (B); jenachdem wir die Kongruenz topologisch, räumlich oder planar auffassen, kann man aus 3 ge-

benen, voneinander verschiedenen Hauptästen 1, 2 oder 6 verschiedene Konfigurationen, also verschiedene Setzbäume mit vierkantigen Punkten bilden.)

Jenachdem die Kongruenz topologisch, räumlich oder planar aufgefasst wird, werden die $C-H$ -Setzbäume durch die Potenzreihen

$$r(x) = \sum_0^{\infty} R_n x^n, \quad s(x) = \sum_0^{\infty} S_n x^n, \quad p(x) = \sum_0^{\infty} P_n x^n$$

abgezählt, heisst die zuständige Untergruppe

$$\mathfrak{S}_3, \quad \mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{G}_3$$

und ist der Zyklenzeiger dieser Untergruppe (vgl. Nr. 21)

$$\frac{f_1^3 + 3f_1f_2 + 2f_3}{6}, \quad \frac{f_1^3 + 2f_3}{3}, \quad f_1^3.$$

Entsprechend diesen drei Fällen erhalten wir drei Gleichungen, indem wir die kurz vorher genau auseinandergesetzte Beziehung: »Anzahl der inkongruenten Setzbäume ist gleich der Anzahl der inäquivalenten Konfigurationen von 3 Setzbäumen« mit den abzählenden Potenzreihen ausdrücken, auf Grund des Hauptsatzes des Kap. I (Nr. 16), und die Sonderstellung des Falles $n=0$ berücksichtigen:

$$(2, 13) \quad r(x) = R_0 + x \frac{r(x)^3 + 3r(x)r(x^2) + 2r(x^3)}{6},$$

$$(2, 14) \quad s(x) = S_0 + x \frac{s(x)^3 + 2s(x^3)}{3},$$

$$(2, 15) \quad p(x) = P_0 + xp(x)^3.$$

41. Es ergeben (2, 13) und (2, 14), mit Rücksicht auf (2, 12), die angekündigten Funktionalgleichungen (4) bzw. (7). Es ergibt (2, 15) mit (2, 12) eine trinomische Gleichung 3-ten Grades zur Bestimmung von $p(x)$, welche bekanntlich¹ durch die Reihenentwicklung

$$p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n-1} \frac{x^n}{n}$$

¹ Vgl. z. B. G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925) Bd. I, Aufg. III 211, S. 125 u. S. 301.

befriedigt wird. Folglich ist

$$(2, 16) \quad P_n = \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1}.$$

Man beachte noch, dass der Übergang von S_n zu P_n dem Übergang von \mathfrak{A}_3 zu \mathfrak{S}_3 , von der Gruppe zur Untergruppe entspricht; somit erhält man [ähnlich, wie (2, 8)]

$$(2, 17) \quad S_n \subseteq P_n.$$

42. Wir bleiben bei den $C-H$ -Setzbäumen mit n vierkantigen Knotenpunkten und betrachten die topologisch verschiedenen unter ihnen, welche genau α asymmetrische Punkte haben; ihre Anzahl sei $R_{n\alpha}$. Offenbar ist

$$(2, 18) \quad R_{n0} + R_{n1} + R_{n2} + \dots = R_n,$$

und gemäss einer früheren Definition (Nr. 36)

$$(2, 19) \quad R_{n0} = Q_n.$$

Wir setzen

$$(2, 20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} R_{n\alpha} x^n y^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (R_{n0} + R_{n1} y + R_{n2} y^2 + \dots) = \Phi(x, y).$$

Offenbar ist

$$(2, 21) \quad R_0 = R_{00} = 1.$$

Setzen wir also $n \geq 1$ voraus und betrachten die in der Gesamtanzahl R_n enthaltenen Setzbäume. Jedem solchen Setzbaum entspricht die Konfiguration seiner 3 Hauptäste, u. zw., da jetzt die Untergruppe \mathfrak{S}_3 zuständig ist, kommt es nur darauf an, welche Setzbäume als Hauptäste auftreten, und es kommt auf die Numerierung nicht an; d. h. es kommt bloss auf die Kombination der drei Hauptäste an.

Für einen in der Anzahl $R_{n\alpha}$ enthaltenen Setzbaum liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:

1) Der Hauptknotenpunkt K ist kein asymmetrischer Punkt; in diesem Falle sind die 3 Hauptäste nicht alle voneinander verschieden und sie enthalten zusammen α asymmetrische Punkte.

2) Der Hauptknotenpunkt K ist ein asymmetrischer Punkt; in diesem Falle sind die 3 Hauptäste alle verschieden und sie enthalten zusammen $\alpha - 1$ asymmetrische Punkte.

In beiden Fällen enthalten die 3 Hauptäste zusammen $n - 1$ vierkantige Knotenpunkte. Unter Berücksichtigung der Sonderstellung von $n = 0$ erhalten wir auf Grund der in Nr. 23 zusammengestellten Resultate [es kommt $(2 \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{A}_3)$ für Fall 1) und $(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{S}_3)$ für Fall 2) in Betracht], dass

$$(2, 22) \quad \Phi(x, y) = 1 + x \Phi(x, y) \Phi(x^2, y^2) + \\ + xy \frac{\Phi(x, y)^3 - 3 \Phi(x, y) \Phi(x^2, y^2) + 2 \Phi(x^3, y^3)}{6}.$$

Nun ist, wegen (2, 18), (2, 20), (3)

$$(2, 23) \quad \Phi(x, 1) = r(x)$$

und wegen (2, 19), (2, 20), (6)

$$(2, 24) \quad \Phi(x, 0) = q(x).$$

Es geht, in der Tat, für $y = 1$ die Funktionalgleichung (2, 22) in (4) über, und für $y = 0$ in die angekündigte Gleichung (8).

43. Jetzt schreiten wir zur Betrachtung von beliebigen Setzbäumen mit insgesamt n Knotenpunkten; die Anzahl der topologisch verschiedenen haben wir mit T_n bezeichnet, die der planar verschiedenen soll \bar{P}_n heissen. Neben der abzählenden Potenzreihe (2) betrachten wir noch

$$\bar{p}(x) = \bar{P}_1 x + \bar{P}_2 x^2 + \bar{P}_3 x^3 + \dots$$

Es ist leicht zu sehen [dieselbe Figur wie zu (2, 12)], dass

$$(2, 25) \quad T_1 = \bar{P}_1 = 1.$$

Wenn $n \geq 2$, so hat der Setzbaum Hauptäste; bezeichnen wir ihre Anzahl, wie in Nr. 38, mit $k - 1$. Diese $k - 1$ Hauptäste enthalten zusammen $n - 1$ Knotenpunkte; die für ihre Konfiguration zuständige Untergruppe ist \mathfrak{S}_{k-1} oder \mathfrak{G}_{k-1} , jenachdem es sich um T_n oder \bar{P}_n handelt. Die Anzahl der in bezug auf \mathfrak{S}_{k-1} inäquivalenten, für T_n massgebenden Hauptastkonfigurationen erhält man, gemäss Nr. 16, als den Koeffizienten von x^{n-1} in derjenigen Reihe, die durch Einsetzen von $t(x)$ in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S}_{k-1} hervorgeht; vgl. die Formel (1, 12) und

für Spezialfälle die Nr. 21. — Die Anzahl der in bezug auf \mathfrak{G}_{k-1} inäquivalenten, für \bar{P}_n massgebenden Hauptastkonfigurationen ist der Koeffizient von x^{n-1} in der Reihe $t(x)^{k-1}$. Indem man $k=2, 3, 4, \dots$ setzt und die Sonderstellung von $n=1$ nebst (2, 25) berücksichtigt, erhält man

$$(2, 26) \quad t(x) = x + x t(x) + x \frac{t(x)^2 + t(x^2)}{2} + x \frac{t(x)^3 + 3 t(x) t(x^2) + 2 t(x^3)}{6} + \dots,$$

$$(2, 27) \quad \bar{p}(x) = x + x \bar{p}(x) + x \bar{p}(x)^2 + x \bar{p}(x)^3 + \dots$$

Die linken Seiten zählen die inkongruenten Setzbäume auf, die rechten Seiten zählen die nach der zuständigen Untergruppe inäquivalenten Hauptastkonfigurationen auf; diese sind Konfigurationen von Setzbäumen der gleichen Sorte und, nach Nr. 39, gleich zahlreich, wie die inkongruenten Setzbäume.

Es ist (2, 26) die in der Einleitung angekündigte Formel (1''). Man nehme in Formel (1, 11) eine doppelte Spezialisierung vor: Erstens setze man $f(x, y, z) = t(x)$ und dementsprechend

$$a_{000} = 0, \quad a_{k00} = T_k, \quad a_{klm} = 0 \text{ für } l + m > 0;$$

zweitens setze man $u=1$; dann erhält man aus dem Vergleich der 1-ten, 2-ten und 3-ten Zeile von (1, 11) auch die beiden anderen angekündigten Gleichungen (1) und (1').

Es ist (2, 27) mit einer Gleichung 2-ten Grades für $\bar{p}(x)$, nämlich mit

$$\bar{p}(x) - \bar{p}(x)^2 = x$$

gleichbedeutend, welche, wie man leicht findet, durch die Reihenentwicklung

$$\bar{p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}$$

befriedigt wird. Folglich ist

$$(2, 28) \quad \bar{P}_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Der Übergang von T_n zu \bar{P}_n entspricht dem Übergang von \mathfrak{G}_{k-1} zu \mathfrak{E}_{k-1} , also von Gruppe zu Untergruppe; somit erhält man [ähnlich wie (2, 8) und (2, 17)]

$$(2, 29) \quad T_n \leq \bar{P}_n.$$

Der Übergang von \overline{P}_{3n+1} zu P_n ist ein Übergang von Menge zur Untermenge; daher ist (dass kein Widerspruch mit (2, 16) und (2, 28) vorliegt, ist leicht direkt zu sehen)

$$\overline{P}_{3n+1} \supseteq P_n.$$

44. Die Anzahl der topologisch verschiedenen C -Setzbäume mit n Knotenpunkten ist R_n (für $n \geq 1$), wie wir es in Nr. 37 gesehen haben. Man sieht leicht, dass

$$R_1 = 1$$

[wie (2, 25)]. Wenn $n \geq 2$, besitzt der C -Setzbaum Hauptäste, u.zw. 1, 2 oder 3 Hauptäste. Die Überlegung, welche zu (2, 26) geführt hat, ergibt für die Reihe

$$R_1 x + R_2 x^2 + R_3 x^3 + \dots = r(x) - 1 = g(x)$$

die Funktionalgleichung

$$(2, 30) \quad g(x) = x + x g(x) + x \frac{g(x)^2 + g(x^2)}{2} + x \frac{g(x)^3 + 3 g(x) g(x^2) + 2 g(x^3)}{6}.$$

Die rechte Seite von (2, 30) enthält nur vier Glieder, welche den für C -Setzbäume möglichen vier Fällen entsprechen: Es gibt 0, 1, 2 oder 3 Hauptäste. (Dagegen enthält die rechte Seite von (2, 26) unendlich viele Glieder.) Wenn man $g(x) = r(x) - 1$ in (2, 30) einsetzt, erhält man, wie es vorauszusehen ist, die Gleichung (4).

Eine leichte Verallgemeinerung der Überlegung zeigt, dass alle Gleichungen, welche aus (2, 26) oder (2, 27) dadurch entstehen, dass auf der rechten Seite nur ein Teil der von x verschiedenen Glieder zurückbehalten wird, abzählende Potenzreihen für einfach charakterisierbare Sorten von Setzbäumen liefern.¹

45. Jetzt wollen wir die Gestalten (1') und (1'') der Gleichung (1) noch von einer anderen Seite her beleuchten. Wir betrachten freie Bäume mit n Punkten, u.zw. mit n individuell verschiedenen Punkten; die Anzahl der topologisch verschiedenen heiße α_n . Diese Anzahl α_n wurde zuerst von Cayley und

¹ So entsteht z. B. aus (2, 27) durch Zurückbehalten von bloss einem von x verschiedenen Glied die Gleichung $\varphi(x) = x + x\varphi(x)^2$, deren Lösung diejenigen planar verschiedenen Setzbäume mit n Knotenpunkten abzählt, welche nur ein- und dreikantige Punkte besitzen. Das Resultat findet sich schon bei CAYLEY, 2. Vgl. F. LEVI, Christiaan Huygens, 2 (1922), S. 307—314, unter Nr. 5, ferner A. ERRERA, Mémoires de l'Académie royale de Belgique 11 (1931) S. 1—26, unter Nr. 15—16. An beiden Stellen ist auch das Resultat (2, 28) in anderer Gestalt zu finden und Untersuchungen über freie planare Bäume.

nachher von anderen berechnet¹; hier soll α_n auf eine (meines Wissens) neue Weise berechnet werden.

Aus jedem freien Baum der betrachteten Sorte kann man einen Setzbaum dadurch erhalten, dass man irgendeinem der n Punkte eine neue Strecke anhängt und deren neuen Endpunkt als Wurzepunkt erklärt; man erhält auf diese Art aus jedem freien Baum, wegen der individuellen Verschiedenheit der Punkte, n verschiedene Setzbäume. Bezeichnen wir mit A_n die Anzahl der *topologisch verschiedenen Setzbäume mit n individuell verschiedenen Knotenpunkten*; das vorangehende zeigt, dass

$$(2, 31) \quad A_n = n \alpha_n.$$

Offenbar ist

$$(2, 32) \quad A_1 = 1.$$

Betrachten wir diejenigen in der Anzahl A_{n+1} enthaltenen Setzbäume, die den folgenden 2 Bedingungen genügen:

- 1) die Rolle des Punktes K (des Hauptknotenpunktes) spielt der »rote Punkt«;
- 2) es entspringen 3 Hauptäste aus K .

(Ich sage in konkreter Sprache »der rote Punkt« anstatt »ein bestimmter Punkt«, und ich nehme nur beispielshalber 3 Hauptäste.) Wenn die drei von K entspringenden Hauptäste bzw. i , j und k Knotenpunkte tragen, so ist

$$(2, 33) \quad i + j + k = n.$$

Es ist auf

$$\frac{n!}{i! j! k!}$$

Arten möglich, die n individuell verschiedenen Knotenpunkte auf drei Klassen, welche bzw. i , j , k Individuen umfassen, zu verteilen; ist einmal diese Verteilung vorgenommen, so kann der erste Hauptast auf A_i , der zweite auf A_j , der dritte auf A_k verschiedene Arten gewählt werden, und wir erhalten, die Summation auf alle positiven Lösungssysteme von (2, 33) erstreckt,

$$\sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! j! k!} A_i A_j A_k$$

¹ CAYLEY, 8. O. DZIOBEK, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 16 (1917), S. 64–67. H. PRÜFER, Archiv d. Math. u. Physik (3) 27 (1918), S. 142–144.

Konfigurationen von Hauptästen; von denselben sind je $3!$ in bezug auf \mathfrak{S}_3 äquivalent¹; somit erhalten wir

$$(2, 34) \quad \frac{1}{3!} \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! j! k!} A_i A_j A_k$$

in bezug auf \mathfrak{S}_3 inäquivalente Konfigurationen von Hauptästen, d. h. ebensoviele in A_{n+1} aufgezählte Setzbäume, welche den Bedingungen 1), 2) genügen; heben wir 1) auf, d. h. setzen wir an Stelle des »roten« Punktes alle $n + 1$ verschiedenen, so erhalten wir $(n + 1)$ -mal die Anzahl (2, 34), und heben wir auch 2) auf, d. h. betrachten wir beliebig viele Hauptäste, so erhalten wir überhaupt alle in A_{n+1} aufgezählten Setzbäume, d. h. es ist

$$(2, 35) \quad A_{n+1} = (n + 1) A_n + \frac{n + 1}{2!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! j!} A_i A_j + \\ + \frac{n + 1}{3!} \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! j! k!} A_i A_j A_k + \dots;$$

die Glieder auf der rechten Seite entsprechen den verschiedenen möglichen Fällen von 1, 2, 3, ... Hauptästen. Führen wir die erzeugende Funktion

$$f(x) = \frac{A_1 x}{1!} + \frac{A_2 x^2}{2!} + \frac{A_3 x^3}{3!} + \dots$$

ein und berücksichtigen wir auch den Fall, in welchem kein Hauptast vorhanden ist, vgl. (2, 32), so erhalten wir

$$(2, 36) \quad f(x) = x + x f(x) + x \frac{f(x)^2}{2!} + x \frac{f(x)^3}{3!} + \dots;$$

es ergibt nämlich der Vergleich des Koeffizienten von x^{n+1} links und rechts in (2, 36) die durch $(n + 1)!$ dividierte Gleichung (2, 35) (für $n + 1 \geq 2$). Nun wird (2, 36), d. h.

$$(2, 37) \quad f(x) = x e^{f(x)}$$

bekanntlich² durch die Reihenentwicklung

¹ Wegen der individuellen Verschiedenheit der Knotenpunkte kann keine Vertauschung der Hauptäste (ausser der identischen Permutation!) deren Konfiguration in sich überführen.

² Vgl. z. B. PÓLYA u. SZEGÖ a. a. O., Fussnote S. 194, Bd. 1, Aufg. III 209, S. 125 u. S. 301.

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!2} + \dots + \frac{(nx)^n}{n!n} + \dots$$

befriedigt. Somit ist

$$(2, 38) \quad A_n = n^{n-1},$$

und, wegen (2, 31),

$$\alpha_n = n^{n-2};$$

letzteres ist das merkwürdig einfache Resultat von Cayley.

Der Ähnlichkeit der beiden Gleichungen (2, 36) und (1'') [oder (2, 37) und (1')] entspricht ein Zusammenhang zwischen den Anzahlen A_n und T_n . Nimmt man einen in T_n aufgezählten, topologisch aufgefassten Setzbaum mit n gleichartigen Knotenpunkten, und gibt man den n Knotenpunkten nachträglich individuelle Bezeichnungen, so erhält man einen in A_n aufgezählten Setzbaum; vertauscht man die Bezeichnungen auf alle möglichen $n!$ Arten, so könnte man möglicherweise nicht lauter topologisch verschiedene in A_n aufgezählte Setzbäume erhalten.¹ Somit ist

$$(2, 39) \quad n! T_n \geq A_n = n^{n-1},$$

und ähnlicherweise

$$(2, 40) \quad n! \tau_n \geq \alpha_n = n^{n-2}.$$

Freie Bäume.

46. Es sei B ein Baum, der n Punkte besitzt. Wir teilen die Punkte von B in zwei Klassen ein, in gewöhnliche Punkte und Ausnahmepunkte. Ein Punkt P von B heisst *gewöhnlich*, wenn von P ein Ast entspringt, der mehr als $\frac{n}{2}$ Knotenpunkte besitzt; *Ausnahmepunkt* heisst ein Punkt, der nicht gewöhnlich ist. Es besteht der folgende, von C. Jordan herrührende Satz²:

Ein Baum mit n Punkten hat entweder einen Ausnahmepunkt oder zwei Ausnahmepunkte.

Wenn es nur einen Ausnahmepunkt M gibt, so entspringt in M kein Ast, der $\frac{n}{2}$ oder mehr Knotenpunkte hätte.

Wenn es zwei Ausnahmepunkte M_1 und M_2 gibt, so ist die Zahl n gerade, es

¹ Die Präzisierung eines ähnlichen Schlusses wird in Nr. 54 a angedeutet.

² JORDAN 1. Vgl. KÖNIG 1, S. 70—75.

entspringt sowohl in M_1 wie in M_2 genau ein Ast mit $\frac{n}{2}$ Knotenpunkten und eine gewisse Strecke des Baumes wird durch M_1 und M_2 begrenzt.

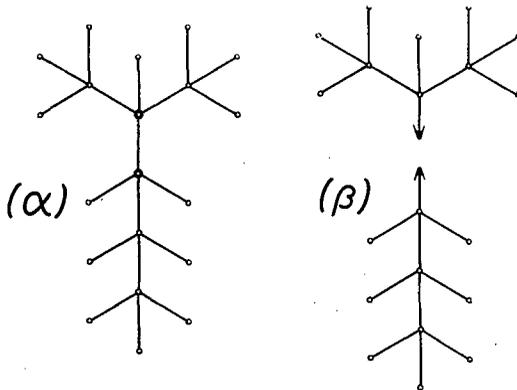


Fig. 3.

Bäume mit einem einzigen Ausnahmepunkt heissen *zentrisch* und der Ausnahmepunkt heisst das *Zentrum* des Baumes, Bäume mit zwei Ausnahmepunkten heissen *bizentrisch*, die beiden Ausnahmepunkte die *Bizentren*, die sie verbindende Strecke die *Achse* des Baumes.¹ (Es stellt Fig. 2 (α) einen zentrischen, Fig. 3 (α) einen bizentrischen Baum dar.) Der einfachste zentrische Baum ist der Einpunktgraph, er besteht bloss aus dem Zentrum.

Der einfachste bizentrische Baum hat zwei Punkte; er besteht aus den beiden Bizentren und der sie verbindenden Achse.

47. Bei einer kongruenten Abbildung des Baumes B auf den Baum B' soll dem Punkt P von B der Punkt P' von B' entsprechen; dann entspricht jedem von P entspringenden Ast von B ein von P' entspringender Ast von B' , u.zw. ein Ast, der gleich viele Knotenpunkte trägt (Nr. 34, (I), (II), (III); (IV) spielt noch keine Rolle). Hieraus ersieht man: Bei kongruenter Abbildung entspricht einem Ausnahmepunkt ein Ausnahmepunkt; ein zentrischer Baum kann nur einem zentrischen, ein bizentrischer nur einem bizentrischen Baume kongruent sein.

Daher können und wollen wir bei Bestimmung der Anzahlen die zentrischen und bizentrischen Bäume getrennt behandeln. Anzahlen zentrischer Bäume sollen mit einem, Anzahlen bizentrischer mit zwei Strichen unterschieden werden. Unter den in den Anzahlen $\varrho_n, \sigma_n, \tau_n$ enthaltenen freien Bäumen seien bzw. $\varrho'_n, \sigma'_n, \tau'_n$ zentrisch und $\varrho''_n, \sigma''_n, \tau''_n$ bizentrisch, so dass

$$(2, 41) \quad \varrho_n = \varrho'_n + \varrho''_n, \quad \sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n, \quad \tau_n = \tau'_n + \tau''_n.$$

Wir definieren $\varrho_{n\alpha}$ als die Anzahl derjenigen topologisch verschiedenen freien $C-H$

¹ KÖNIG 1, S. 73 gebraucht die (hier nicht nötigen) präziseren Namen Massenzentrum, Massenbizentren, Massenachse.

Bäume mit n vierkantigen Punkten, welche genau α asymmetrische Punkte enthalten; unter diesen Bäumen sollen $q'_{n\alpha}$ zentrische und $q''_{n\alpha}$ bizentrische sich befinden, so dass

$$(2, 42) \quad q_{n\alpha} = q'_{n\alpha} + q''_{n\alpha},$$

$$(2, 43) \quad x_n = q'_{n0} + q''_{n0},$$

$$q_n = q_{n0} + q_{n1} + q_{n2} + \dots$$

48. Es sei B ein bizentrischer Baum mit n Punkten, M_1 und M_2 seine Bizentren, Φ_1 derjenige von M_1 , Φ_2 derjenige von M_2 entspringende Ast, der $\frac{n}{2}$ Knotenpunkte trägt, und es sollen $M'_1, M'_2, \Phi'_1, \Phi'_2$ die analoge Bedeutung für den Baum B' haben; vgl. Fig. 3. Es sind B und B' dann und nur dann kongruent, wenn der eine der beiden folgenden (sich nicht mit Notwendigkeit ausschliessenden) Fälle vorliegt: Entweder ist Φ_1 mit Φ'_1 und Φ_2 mit Φ'_2 kongruent, oder ist Φ_1 mit Φ'_2 und Φ_2 mit Φ'_1 kongruent. Hieraus folgt: *Die Anzahl der freien bizentrischen Bäume mit n Punkten ist dieselbe, wie die Anzahl der ungeordneten Paare von Setzbäumen mit $\frac{n}{2}$ Knotenpunkten.*

Als Spezialfälle dieser Aussage erhalten wir

$$(2, 44) \quad \tau''_n = \frac{1}{2} T_{n/2} (T_{n/2} + 1),$$

$$(2, 45) \quad \sigma''_n = \frac{1}{2} S_{n/2} (S_{n/2} + 1),$$

$$(2, 46) \quad \varrho''_n = \frac{1}{2} R_{n/2} (R_{n/2} + 1),$$

$$(2, 47) \quad \varrho''_{n0} + \varrho''_{n1} y + \varrho''_{n2} y^2 + \dots = \frac{1}{2} [(R_{n/2,0} + R_{n/2,1} y + R_{n/2,2} y^2 + \dots)^2 + \\ + R_{n/2,0} + R_{n/2,1} y^2 + R_{n/2,2} y^4 + \dots],$$

$$(2, 48) \quad \varrho''_{n0} = \frac{1}{2} Q_{n/2} (Q_{n/2} + 1).$$

In den vier letzteren Formeln bezeichnet n nicht die Anzahl aller Punkte, sondern nur die der vierkantigen Punkte des Baumes (die Anzahl aller ist $3n+2$). Beiden Seiten aller fünf Formeln kann man für ungerades n den Wert 0 zu-

schreiben; in dieser Auffassung bleiben die Formeln für $n = 1, 2, 3, \dots$ richtig. Zur Herleitung von (2, 47) wird der auf \mathfrak{S}_2 bezügliche Spezialfall des Hauptsatzes des Kap. I gebraucht.

49. Es sei B ein zentrischer Baum, sein Zentrum M sei ein k -kantiger Punkt, und es seien $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ die vom Zentrum entspringenden Äste des Baumes B ; jeder dieser Äste trägt dabei diejenige Nummer, welche der darin enthaltenen, von M ausgehenden Strecke bei Numerierung des Kantenkranzes um M zukommt. Wir betrachten die Konfiguration

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_k)$$

und kommen durch Überlegungen, welche denjenigen der Nr. 39 sehr ähnlich sind, zum Ergebnis: *Zwei zentrische Bäume sind dann und nur dann kongruent, wenn von ihren Zentren gleich viel Äste entspringen und die Konfigurationen dieser Äste inbezug auf die im Kantenkranz des Zentrums zuständige Gruppe äquivalent sind.*

Demgemäss wird die Abzählung der inkongruenten freien Bäume einer gewissen Sorte auf die Abzählung der inäquivalenten Konfigurationen der Setzbäume der entsprechenden Sorte zurückgeführt, also insbesondere ρ'_n auf R_n , σ'_n auf S_n , τ'_n auf T_n zurückgeführt, wie es sofort genauer erörtert wird.

50. In den folgenden Nr. 51—52 brauche ich einige Abkürzungen. Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine beliebige Potenzreihe ist, so wird der n -te Abschnitt

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = f^n(x)$$

und der n -te Koeffizient von $f(x)$

$$a_n = \text{Coeff}_n f(x)$$

gesetzt.

Man bezeichne mit m die maximale Anzahl von Knotenpunkten, die ein Ast besitzen kann, der im Zentrum eines zentrischen Baumes mit n Punkten entspringt. Es ist also m diejenige ganze Zahl, welche der folgenden doppelten Ungleichung genügt:

$$(2, 49) \quad \frac{n}{2} - 1 \leq m < \frac{n}{2}.$$

51. Wir betrachten freie zentrische $C-H$ -Bäume mit n vierkantigen Punkten, also insgesamt $3n + 2$ Punkten [Nr. 36 a)]. Irgend ein Ast dieses Baumes, der v vierkantige Punkte hat, besitzt insgesamt $3v + 1$ Knotenpunkte [Nr. 36 a)]; für einen im Zentrum entspringenden Ast besteht demnach die Ungleichung

$$3v + 1 < \frac{3n + 2}{2}, \quad v < \frac{n}{2},$$

oder anders ausgedrückt: Die Anzahl der vierkantigen Punkte eines im Zentrum entspringenden Astes ist höchstens m [vgl. (2, 49)]. Das Zentrum ist vierkantig, also es gilt: Die Anzahl der vierkantigen Punkte aller im Zentrum entspringenden Äste zusammen ist $n - 1$.

Fassen wir, Bestimmtheit halber, die Kongruenz zunächst topologisch auf. Wir betrachten also die Anzahl ρ'_n der topologisch verschiedenen freien zentrischen $C-H$ -Bäume mit n vierkantigen Punkten. Nach dem Gesagten ist ρ'_n die Anzahl der nach \mathfrak{S}_4 inäquivalenten Konfigurationen von vier $C-H$ -Setzbäumen, welche insgesamt $n - 1$ Knotenpunkte enthalten und von welchen keiner mehr als m Knotenpunkte enthält. Die abzählende Potenzreihe dieser Setzbäume ist

$$R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \dots + R_m x^m = r(x)^m.$$

(Bezeichnung von Nr. 50). Indem wir diese Reihe, gemäss dem Hauptsatz des I. Kapitels (Nr. 16) in den Zyklenzeiger von \mathfrak{S}_4 (vgl. Nr. 21) einsetzen und den Koeffizienten von x^{n-1} aufsuchen, erhalten wir

$$(2, 50) \quad \rho'_n = \text{Coeff}_n \left\{ x \frac{{}^m r(x)^4 + 6 {}^m r(x)^2 {}^m r(x^2) + 3 {}^m r(x^2)^2 + 8 {}^m r(x) {}^m r(x^3) + 6 {}^m r(x^4)}{24} \right\}.$$

Bei räumlicher Auffassung der Kongruenz, also bei Heranziehung der zuständigen Gruppe \mathfrak{A}_4 und ihres Zyklenzeigers (vgl. Nr. 21), erhält man

$$(2, 51) \quad \sigma'_n = \text{Coeff}_n \left\{ x \frac{{}^m s(x)^4 + 3 {}^m s(x^2)^2 + 8 {}^m s(x) {}^m s(x^3)}{12} \right\}.$$

Indem man die Alternative berücksichtigt, dass das Zentrum entweder asymmetrischer Punkt ist oder nicht, erhält man weiter, ähnlich wie in Nr. 42, auf Grund der Formeln $(2\mathfrak{S}_4 - \mathfrak{A}_4)$ und $(\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{S}_4)$ der Nr. 23,

$$(2, 52) \quad \varrho'_{n0} + \varrho'_{n1}y + \varrho'_{n2}y^2 + \dots \\ = \text{Coeff}_n \left\{ x \frac{\varphi_1^m \varphi_2^m + \varphi_4^m}{2} + xy \frac{\varphi_1^m - 6\varphi_1^m \varphi_2^m + 3\varphi_2^m + 8\varphi_1^m \varphi_3^m - 6\varphi_4^m}{24} \right\}.$$

Hierin ist die Abkürzung

$$\sum_{v=0}^m \sum_{\alpha=0}^{\infty} R_{v\alpha} x^{vk} y^{\alpha k} = \varphi_k^m$$

benutzt. Wird $y = 0$ in (2, 52) gesetzt, so folgt

$$(2, 53) \quad \varrho'_{n0} = \text{Coeff}_n \left\{ x \frac{q(x)^2 q(x^3) + q(x^4)}{2} \right\}.$$

52. Jetzt kommen wir zur Bestimmung der Anzahl τ'_n der topologisch verschiedenen freien zentrischen Bäume mit n Punkten. Von der durch τ'_n abgezählten Menge heben wir die Untermenge derjenigen Bäume hervor, von deren Zentrum s Äste entspringen; die Anzahl der Bäume in dieser Untermenge erhalten wir, nach dem Gesagten, als die Anzahl der in bezug auf \mathfrak{S}_s inäquivalenten Konfigurationen von gewissen s Setzbäumen, indem wir in (1, 12) für $f(x, y, z)$ die Funktion

$$T_1 x + T_2 x^2 + \dots + T_m x^m = t(x)$$

einsetzen, und von dem so erhaltenen Ausdruck den Koeffizienten von x^{n-1} herausgreifen; schreiben wir kurz für das Resultat dieser Rechnung

$$\text{Coeff}_n \{x F_s\}.$$

Setzen wir hierin $s = 0, 1, 2, \dots$, so ergibt sich

$$(2, 54) \quad \tau'_n = \text{Coeff}_n \{x(1 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots)\}.$$

Führen wir in (1, 11) eine doppelte Spezialisierung durch: Erstens setzen wir

$$f(x, y, z) = t(x)$$

und dementsprechend

$$a_{k00} = T_k \text{ für } 1 \leq k \leq m,$$

$$a_{k\lambda\mu} = 0, \text{ wenn irgend eine der drei Bedingungen}$$

$$k = 0, \quad k > m, \quad \lambda + \mu > 0$$

zutritt. Zweitens setzen wir $u = 1$. Durch Vergleichen der beiden ersten Zeilen von (1, 11) erhalten wir aus (2, 54)

$$(2, 55) \quad \tau'_n = \text{Coeff}_n \{x(1-x)^{-T_1}(1-x^2)^{-T_2} \dots (1-x^m)^{-T_m}\}.$$

Zur numerischen Berechnung.

53. Betrachten wir, als Beispiel, die Funktionalgleichung (4), der die Potenzreihe (3) genügt. Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$(2, 56) \quad \begin{aligned} R_0 &= 1, \\ R_1 &= \frac{R_0^3 + 3R_0^2 + 2R_0}{6}, \\ R_2 &= \frac{R_0^2 R_1 + R_0 R_1}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

und allgemein erhalten wir R_n ausgedrückt als ein Polynom in R_0, R_1, \dots, R_{n-1} . So können wir R_n rekursiv berechnen, und auf ähnliche Art können wir Zahlenwerte für Q_n, S_n, T_n aus den betreffenden Funktionalgleichungen erhalten. Etwas umständlicher ist die Berechnung von $R_{n\alpha}$ aus (2, 22) durch »zweifache Rekursion«.

Die besprochene Art T_n zu berechnen stammt von Cayley, der die Funktionalgleichung für die hier mit $t(x)$ bezeichnete Funktion in der Gestalt (1) aufgestellt hat.¹ Die Zahlen R_n hat Cayley umständlicher berechnet; die Rekursionsformeln (2, 56), welche hier aus der Funktionalgleichung (4) fließen, haben (ohne die Funktionalgleichung zu kennen) durch direkte kombinatorische Überlegung Henze und Blair aufgestellt und zur numerischen Berechnung von R_n verwendet.²

Die Zahl q_n lässt sich wegen (2, 41) aus (2, 46) und (2, 50) berechnen, ohne Rekursion, aber auf Grund der Kenntnis der rekursiv berechneten Zahlen R_0, R_1, \dots, R_m und $R_{n/2}$ (die letzte kommt nur bei geradem n in Betracht). Ähnlich ist die Zurückführung von τ_n auf T_n , σ_n auf S_n , $q_{n\alpha}$ auf $R_{n\alpha}$, x_n auf Q_n .

Die zur Berechnung von τ_n dienenden Ausdrücke (2, 44) und (2, 55) stammen von Cayley.³ Es ist erwähnenswert, dass Cayley die hier mit q_n und τ_n

¹ CAYLEY 1.

² BLAIR u. HENZE 1.

³ CAYLEY 7.

bezeichneten Zahlen zuerst auf sehr langwierigem Weg numerisch berechnet hat, unter Zugrundlegung eines anderen Zentrumsbegriffs, und erst nachher die elegante Formel (2, 55) fand. Betreffend ϱ_n scheint er über seine erste schwerfällige Berechnungsmethode nie hinausgegangen zu sein; die viel brauchbarere Methode, welche der Formel (2, 50) entspricht, stammt von Henze und Blair.¹

Die in vorangehenden Arbeiten² aufgestellten und hier bewiesenen Funktionalgleichungen (1'), (4), (7), (8), (2, 22) fassen nicht nur die Rekursionsformeln für die Zahlen $T_n, R_n, S_n, Q_n, R_{n\alpha}$ in kondensiertester Gestalt zusammen, sondern gestatten auch allgemeine Folgerungen (z. B. in Nr. 60) zu ziehen und hauptsächlich das asymptotische Verhalten festzustellen (in Kap. IV).

Bemerkungen über die Automorphismengruppe eines freien topologischen Baumes.

54. In dieser Nummer ist unter »Baum« ein freier Baum mit n Punkten zu verstehen. Zwei Bäume werden als verschieden oder gleich betrachtet, jenachdem sie topologisch verschieden sind oder nicht. Die Anzahl der verschiedenen Bäume ist also τ_n ; zur Abkürzung setze ich

$$\tau_n = \tau.$$

Die Automorphismengruppe eines Baumes umfasst alle diejenigen eindeutigen und eindeutig umkehrbaren Abbildungen des Baumes auf sich selbst, welche den in Nr. 34 ausgesprochenen Bedingungen (I), (II), (III) genügen, d. h. Punkte auf Punkte, Strecken auf Strecken unter Erhaltung der Grundbeziehung abbilden. Die Automorphismengruppe kann als *Permutationsgruppe der n Punkte* des Baumes aufgefasst werden; in der Tat, wenn jeder der n Punkte durch den Automorphismus in sich übergeht, bleibt auch jede der $n - 1$ Strecken fest. Zwei Bemerkungen über die Automorphismengruppe, welche mit verschiedenen vorangehenden Ausführungen etwas lose zusammenhängen, mögen hier Platz finden.³

a) Alle $n!$ in der symmetrischen Gruppe enthaltenen Permutationen können bekanntlich durch $n - 1$ passende Transpositionen erzeugt werden. Einem Komplex von $n - 1$ Transpositionen, welche \mathfrak{S}_n erzeugen, kann man einen Baum

¹ BLAIR u. HENZE 2.

² PÓLYA 3, 4, 5. Die letztzitierte Arbeit enthält einen direkten Nachweis für die Gleichwertigkeit der kombinatorisch hergeleiteten Rekursionsformeln (2, 56) und der Funktionalgleichung (4).

³ KÖNIG 1, S. 5 wirft eine interessante allgemeine Frage über Gruppen von Graphen auf.

zuordnen; allen Komplexen, welche unter \mathfrak{S}_n einander konjugiert sind, entspricht derselbe Baum, und der Normalisator des Komplexes ist die Automorphismengruppe des zugeordneten Baumes. Es gibt insgesamt n^{n-2} derartige Komplexe.¹ Wenn die Ordnungen der Automorphismengruppen, die den τ verschiedenen Bäumen entsprechen, der Reihe nach mit h_1, h_2, \dots, h_τ bezeichnet werden, so gilt

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\tau} = \frac{n^{n-2}}{n!}.$$

Diese Gleichung besagt mehr, als die daraus folgende Ungleichung (2, 40).

b) Jordan hat² ein Reduktionsverfahren angegeben zur Bestimmung der Ordnung der Automorphismengruppe eines beliebigen Graphen. Für Graphen von der Zusammenhangszahl 0, d. h. für Bäume ergibt das Jordansche Verfahren ein konkreteres Resultat, als für höhere Zusammenhangszahlen, nämlich das folgende: Zu jedem Baum gehören gewisse natürliche Zahlen m_1, m_2, \dots, m_r ,

$$r \geq 1, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_r, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n,$$

so dass die Automorphismengruppe des Baumes sich aufbauen lässt aus den symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_{m_1}, \mathfrak{S}_{m_2}, \dots, \mathfrak{S}_{m_r}$ durch wiederholte Anwendung der beiden in Nr. 27 besprochenen Operationen: Bildung des direkten Produkts $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ und des Kranzes $\mathfrak{G}[\mathfrak{H}]$. Insbesondere muss die Ordnung der Automorphismengruppe von der Form

$$m_1!^{a_1} m_2!^{a_2} \dots m_r!^{a_r}$$

sein, wo a_1, a_2, \dots, a_r gewisse natürliche Zahlen sind. Durch Bildung nahegelegener Beispiele erhält man weiter: Eine ganze Zahl kann dann und nur dann die Ordnung der Automorphismengruppe eines Baumes sein, wenn sie von der Form ist

$$1^{d_1} 2^{d_2} 3^{d_3} \dots m^{d_m},$$

wobei m, d_1, d_2, \dots, d_m natürliche Zahlen sind und

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_m \geq 1.$$

D. h.: Es kann zu jeder der Zahlen

$$1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, \dots$$

¹ Vgl. die Fussnote S. 199.

² JORDAN 1.

und es kann zu keiner der Zahlen

3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, . . .

ein Baum gefunden werden, dessen Automorphismengruppe diese Zahl zur Ordnung hat. Hingegen kann jede natürliche Zahl die Ordnung der Automorphismengruppe eines Graphen von der Zusammenhangszahl 1 sein.

III. CHEMISCHE VERBINDUNGEN.

Allgemeines.

55. Man kann die Elemente eines Graphen chemisch deuten, die Punkte als Atome, die Strecken als Valenzstriche auffassen; dann wird der Graph zur chemischen Formel. Die in Nr. 29 erörterten Bedingungen I und II erhalten eine chemische Bedeutung. Dass jede Strecke durch zwei verschiedene Punkte begrenzt wird, bedeutet, dass alle Valenzen abgesättigt sind; dass alle Punkte und Strecken des Graphen zusammenhängen, bedeutet, dass alle auftretenden Atome zu einem Molekül verbunden sind. Die Anzahl der durch einen Punkt begrenzten Strecken bedeutet die Wertigkeit des Atoms: Endpunkte stellen einwertige Atome dar, zweikantige Punkte zweiwertige, dreikantige dreiwertige Atome, u. s. w.

Insbesondere stellt ein $C-H$ -Graph das Molekül einer chemischen Verbindung dar, an der nur einwertige und vierwertige Elemente beteiligt sind. Wenn keine Ungleichartigkeit der Punkte a priori postuliert wird, so sind alle vierkantigen Punkte als Atome desselben vierwertigen und alle Endpunkte als Atome desselben einwertigen Elements zu deuten; nimmt man das vierwertige Element als C und das einwertige als H an, so wird der $C-H$ -Graph zur Formel eines Kohlenwasserstoffs. Insbesondere stellt ein freier $C-H$ -Baum mit n vierkantigen Punkten, der wie besprochen (Nr. 36) notwendigerweise $2n + 2$ Endpunkte haben muss, ein Paraffin von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$ dar. Ein $C-H$ -Setzbaum mit n vierkantigen Punkten, einem Wurzelpunkt und $2n + 1$ von dem Wurzelpunkt verschiedenen Endpunkten ist die Formel eines monosubstituierten Paraffins, z. B. von $C_n H_{2n+1} Cl$. Ein C -Graph ist am natürlichsten (vgl. die Konstruktion in Nr. 37) als das Kohlenstoffskelett eines Kohlenwasserstoffs (oder eines monosubstituierten Paraffins) aufzufassen.

Die topologische Auffassung der Kongruenz findet Anwendung auf beliebige Graphen, welche chemische Formeln darstellen. Die Bedingungen (I), (II), (III) sprechen nur explizite aus, was beim Lesen chemischer Formeln immer als selbstverständlich angenommen wird: (I) besagt, dass es auf die Länge oder Form der Valenzstriche nicht ankommt, bloss auf deren Vorhandensein oder Nichtvorhandensein. (II) besagt, dass Atome des gleichen Elements nicht zu unterscheiden, Atome verschiedener Elemente wohl zu unterscheiden sind. (I), (II) und (III) zusammen besagen, dass es auf die Zusammenhangsverhältnisse, auf die »Konstitution« oder auf die »Struktur« ankommt. Da (IV) bei der topologischen Auffassung nichtsagend wird, gibt es bei dieser Auffassung ausser (I), (II) und (III) keine weitere Bedingungen: es kommt *nur* auf die Zusammenhangsverhältnisse, *nur* auf die Struktur an. Die topologische Auffassung der Kongruenz von Graphen läuft auf die Auffassung der chemischen Formel als *Strukturformel* hinaus; in dieser Auffassung spreche ich von *Strukturisomeren*. Z. B. gibt es so viel verschiedene strukturisomere $C_n H_{2n+2}$ als topologisch verschiedene freie $C-H$ -Bäume mit n vierkantigen Punkten; ihre Anzahl wurde in Nr. 36 mit ϱ_n bezeichnet.

Die räumliche Auffassung der Kongruenz findet nur auf $C-H$ -Graphen, also im wesentlichen nur auf chemische Formeln Anwendung, welche eine Verbindung von Kohlenstoffatomen mit lauter einwertigen Atomen (oder einwertigen Radikalen) darstellen. Hier hat die Bedingung (IV) neben den Bedingungen (I), (II), (III) wohl etwas zu sagen: Es kommt nicht bloss auf die Zusammenhangsverhältnisse an, sondern auch auf die räumliche Orientierung der Valenzen um die C -Atome herum. Die räumliche Auffassung der Kongruenz von $C-H$ -Graphen läuft auf die Auffassung der chemischen Formel als *Stereoformel* hinaus; in dieser Auffassung spreche ich von *Stereoisomeren*. Z. B. gibt es so viel verschiedene stereoisomere $C_n H_{2n+2}$ als räumlich verschiedene freie $C-H$ -Bäume mit n vierkantigen Punkten; ihre Anzahl wurde in Nr. 36 mit σ_n bezeichnet.

Wie von ϱ_n und σ_n , kann man auch von den Anzahlen R_n , S_n , x_n und Q_n leicht feststellen, dass die in der Einleitung (Nr. 4) erwähnte chemische und die im vorangehenden Kapitel (Nr. 36) ausführlich erläuterte graphentheoretische Definition miteinander übereinstimmen.

Zwei Zeichnungen oder zwei räumliche Modelle können dieselbe Strukturformel darstellen, ohne dieselbe Stereoformel darzustellen: Sie stellen dieselbe Strukturformel dar, wenn sie dieselben Zusammenhangsverhältnisse haben (topologisch kongruent sind, die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllen); um dieselbe Stereoformel darzustellen, müssen sie zunächst denselben Zusammenhang auf-

weisen und darüber hinaus noch räumlich gleich orientiert sein [ausser (I), (II), (III) noch (IV) (mit \mathcal{R}_4) erfüllen, räumlich kongruent sein]. Wenn aber zwei Formeln als Stereoformeln aufgefasst gleich sind, sind sie auch als Strukturformel aufgefasst sicherlich gleich. Daher gibt es von einer gegebenen Molekularformel mehr oder mindestens ebensoviel Stereoisomere als Strukturisomere. Insbesondere gilt dies für den Fall der Paraffine und der monosubstituierten Paraffine; eben dies wird durch (2, 8) ausgedrückt.

Asymmetrische Kohlenstoffatome werden in der vorliegenden Arbeit nur in Paraffinen und substituierten Paraffinen betrachtet, und es wird [vgl. Nr. 36, b] an folgender Definition festgehalten: Ein Kohlenstoffatom heisst asymmetrisch, wenn die vier mit ihm verbundenen Radikale zu je zwei *der Struktur nach* verschieden sind. (Blosse sterische Verschiedenheit der vier Radikale genügt also bei dieser Festsetzung noch nicht, um ein Kohlenstoffatom als asymmetrisch zu bezeichnen. Es sind natürlich auch andere Definitionen denkbar und möglicherweise brauchbar.)

In welcher Bedeutung die »Strukturformeln« und die »Stereoformeln« gebraucht werden, ist nicht in allen Lehrbüchern der Chemie ganz klar umschrieben. Vielleicht könnten die in dieser Arbeit dargelegten Begriffe der »räumlichen« und der »topologischen« Kongruenz von Graphen zur Klärung der chemischen Terminologie etwas beitragen.

56. Lunn und Senior haben bemerkt, dass mit jedem chemischen Stammkörper drei Permutationsgruppen verbunden sind.¹ Das Interesse der Entwicklungen des I. Kapitels dieser Arbeit für chemische Fragen wird erst durch diese Bemerkung ins rechte Licht gerückt. Es seien daher die drei Gruppen an einem geeigneten Beispiel, an dem des Cyclopropans C_3H_6 erörtert; dies gibt uns zugleich Gelegenheit, das im vorangehenden über Struktur- und Stereoformeln, über topologische und räumliche Kongruenz Gesagte zu erläutern.

Der Graph des Cyclopropans (vgl. Fig. 4) besteht aus 3 vierkantigen Punkten, welche, mit 3 Valenzstrichen verbunden, ein Dreieck bilden, und aus 6 Endpunkten, die in 3 Paare zerfallen; die Punkte eines Paares sind mit demselben vierkantigen Punkte durch Valenzstriche verbunden. Wir behandeln die Frage »Auf wie viele Arten kann der Graph des Cyclopropans auf sich selbst kongruent abgebildet werden?« in zwei Auffassungen, in räumlicher und in topologischer Auffassung.

¹ LUNN u. SENIOR 1.

a) **Räumliche Auffassung.** Das Dreieck, dessen Ecken die 3 vierkantigen Punkte sind, kann auf $3! = 6$ Arten auf sich selbst abgebildet werden. Wenn eine dieser Abbildungen festgelegt ist, ist die Abbildung der übrigen Bestandteile des Graphen mitfestgelegt. In der Tat, es wird durch die Abbildung des Dreiecks in dem Kantenkranz um jeden vierkantigen Punkt herum die Abbildung von zwei Kanten festgelegt; dadurch wird aber, da die Gruppe \mathfrak{A}_4 genau zweimal transitiv ist, die Abbildung der übrigbleibenden 2 Strecken des Kantenkranzes mitfestgelegt. (Anschaulich: Wenn von einem starren Tetraeder sowohl der Mittelpunkt wie zwei Eckpunkte festgehalten werden, so kann das Tetraeder sich nicht mehr bewegen, die beiden anderen Eckpunkte werden mitfestgehalten.) Die Gesamtzahl der in räumlicher Auffassung kongruenten Selbstabbildungen ist 6.

b) **Topologische Auffassung.** Das Dreieck, dessen Ecken die vierkantigen Punkte sind, kann, wie vorher, auf 6 Arten auf sich selbst abgebildet werden. Wenn eine dieser Abbildungen festgelegt ist, können die übrigen Bestandteile des Graphen noch auf $2^3 = 8$ Arten permutiert werden; in der Tat, die beiden mit demselben vierkantigen Punkt direkt verbundenen Endpunkte können noch miteinander vertauscht werden. Die Gesamtzahl der in topologischer Auffassung kongruenten Selbstabbildungen ist also $6 \times 8 = 48$.

Die 6 unter a) aufgezählten Selbstabbildungen bilden eine Gruppe. Man fasst diese Gruppe wohl am bequemsten elementargeometrisch auf, als die Gruppe derjenigen Rotationen, welche ein gerades Prisma mit regelmässiger dreieckiger Basis in sich selbst überführen. Man kann nämlich, bei regulärer Anordnung, die 6 Endpunkte des Graphen, vgl. Fig. 4, in die 6 Eckpunkte eines solchen Prismas legen. Die 6 Endpunkte erfahren dabei eine Permutationsgruppe, welche wir als die *Gruppe der Stereoefformel* bezeichnen können. Ihr Zyklenzeiger (Nr. 10) ist

$$(3, 1) \quad \frac{f_1^6 + 3f_2^3 + 2f_3^2}{6}.$$

Die 48 unter b) aufgezählten Selbstabbildungen bilden eine Gruppe, die sich für die 6 Endpunkte als eine Permutationsgruppe auswirkt. [Genau dieselbe Permutationsgruppe erfahren, wie man sich überlegen kann, die 6 Eckpunkte

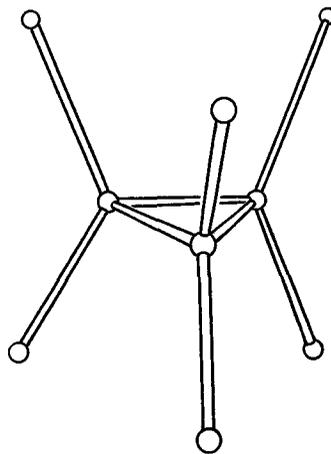


Fig. 4.

eines Oktaeders bei den 48 Drehungen und Drehspiegelungen, welche das Oktaeder in sich selbst überführen. Am übersichtlichsten ist diese Gruppe mit der Bezeichnung der Nr. 27 als $\mathfrak{S}_3[\mathfrak{S}_2]$ zu beschreiben: es vertauscht \mathfrak{S}_3 die drei C -Atome (die drei Ecken des Dreiecks in Fig. 4) bzw. die drei Oktaederdiagonalen, und \mathfrak{S}_2 die zwei an dasselbe C -Atom angeschlossenen H bzw. die beiden Endpunkte derselben Diagonalen.] Diese Permutationsgruppe von Ordnung 48 können wir als die *Gruppe der Strukturformel* bezeichnen. Ihr Zyklenzeiger ist [am einfachsten als Beispiel der Formel (1, 40) aufzustellen, vgl. auch (\mathfrak{S}_2) und (\mathfrak{S}_3) in Nr. 21]:

$$(3, 2) \quad \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{f_1^2 + f_2}{2} \right)^3 + 3 \frac{f_1^2 + f_2}{2} \frac{f_2^2 + f_4}{2} + 2 \frac{f_3^2 + f_6}{2} \right\}.$$

Eine dritte Permutationsgruppe des Graphen des Cyclopropan ergibt sich, wenn das sechseckige Prisma, in dessen Ecken wir bei räumlicher Auffassung die 6 Endpunkte des Graphen untergebracht haben, nicht bloss den Drehungen, sondern auch den Drehspiegelungen unterworfen wird, die es in sich selbst überführen. Diese wirken sich für die 6 Ecken (Endpunkte) als eine Permutationsgruppe von Ordnung 12 aus; wir wollen sie die *erweiterte Stereoformelgruppe* nennen. Ihr Zyklenzeiger ist

$$(3, 3) \quad \frac{f_1^6 + 3f_2^3 + 2f_3^2 + f_2^6 + 3f_1^2f_2^2 + 2f_6}{12}.$$

[Wie man sich überlegen kann, erfahren die 6 Ecken eines regelmässigen Sechsecks bei den 12 Drehungen, die das Sechseck in sich selbst überführen, genau die 12 Permutationen der erweiterten Stereoformelgruppe des Cyclopropan; hierauf beruht ja der Zusammenhang zwischen der Ladenburgschen Prismenformel und der gewöhnlichen Sechseckformel des Benzols. Es ergibt sich (3, 3) aus (\mathfrak{D}_6) in Nr. 21 für $s = 6$.]

Der Zusammenhang der drei Gruppen ist so: Die Stereoformelgruppe von Ordnung 6 ist eine Untergruppe der erweiterten Stereoformelgruppe von Ordnung 12 und diese ist eine Untergruppe der Strukturformelgruppe von Ordnung 48.

57. Die erläuterten drei Gruppen sind grundlegend für die Auffassung der Isomeren der Cyclopropanderivate, die aus C_3H_6 hervorgehen, wenn die 6 H -Atome durch einwertige Radikale substituiert werden.

Denken wir uns, den Vorstellungen der Nr. 56 entsprechend, 6 einwertige Radikale in den 6 Endpunkten des Graphen des Cyclopropans untergebracht (Fig. 4); sie bilden eine Konfiguration und jede solche Konfiguration ergibt die chemische Formel eines Cyclopropanderivats. Es kann aber vorkommen, dass zwei verschiedene Konfigurationen, d. h. zwei verschiedene Verteilungen derselben Radikale auf die 6 Raumstellen dasselbe Derivat darstellen, nämlich dann und nur dann, wenn die beiden Konfigurationen auseinander durch eine Permutation der massgebenden Gruppe hervorgehen, also in bezug auf die massgebende Gruppe äquivalent sind. Massgebend ist natürlich für Stereoisomeren die Gruppe der Stereoformel, für Strukturisomeren die der Strukturformel. Die erweiterte Stereoformelgruppe (von deren 12 Permutationen wir uns die zweite Hälfte als Spiegelungen und Drehspiegelungen des 6-eckigen Primas veranschaulicht haben) hat folgende Bedeutung: Durch ihre Permutationen werden ein Paar räumlich verschiedene Isomeren, die sich als Bild und Spiegelbild zueinander verhalten (optische Antipoden darstellen) ineinander übergeführt; Spiegelbildisomeren sind in bezug auf die erweiterte Stereoformelgruppe äquivalent, die beiden Antipoden eines spiegelbildlichen Paares werden nicht unterschieden.¹

Wenn wir die Anzahl der inäquivalenten Konfigurationen nach den drei Gruppen berechnen, erhalten wir:

bei der Stereoformelgruppe die Anzahl der Stereoisomeren;

bei der erweiterten Stereoformelgruppe die Anzahl der Stereoisomeren, vermindert um die Anzahl der Paare der Spiegelbildisomeren;

bei der Strukturformelgruppe die Anzahl der Strukturisomeren.

Wollen wir z. B. die Anzahl der verschiedenen isomeren Cyclopropanderivate von der Form



berechnen, wobei $k + l + m = 6$ und X, Y, Z einwertige, verschiedene, voneinander unabhängige Radikale sind², so müssen wir, gemäss dem Hauptsatz des Kapitels I, in den Zyklenzeigern

¹ Sterische Verschiedenheiten *innerhalb* der einzelnen Substituenten werden bei dieser Betrachtung der Antipoden natürlich nicht berücksichtigt.

² Unabhängigkeit bedeutet, dass $X_k Y_l Z_m$ und $X_{k'} Y_{l'} Z_{m'}$ nur dann dieselbe molekulare Zusammensetzung haben, wenn $k = k', l = l', m = m'$. Z. B. sind die Radikale $-H, -CH_3, -C_2H_5$ nicht voneinander unabhängig, da $C_3H_5(C_2H_5)$ und $C_3H_4(CH_3)_2$ dieselbe molekulare Zusammensetzung haben. Die gleichzeitige Substitution verschiedener Alkyle wird hier ausgeschlossen und in der nächsten Nummer besprochen.

$$f_1 = x + y + z, \quad f_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad f_3 = x^3 + y^3 + z^3, \dots$$

setzen und entwickeln; wir erhalten der Reihe nach

$$\begin{aligned} & x^6 + x^5 y + 4 x^4 y^2 + 5 x^4 y z + 4 x^3 y^3 + 10 x^3 y^2 z + 18 x^2 y^2 z^2 + \dots, \\ & x^6 + x^5 y + 3 x^4 y^2 + 3 x^4 y z + 3 x^3 y^3 + 6 x^3 y^2 z + 11 x^2 y^2 z^2 + \dots, \\ & x^6 + x^5 y + 2 x^4 y^2 + 2 x^4 y z + 2 x^3 y^3 + 3 x^3 y^2 z + 5 x^2 y^2 z^2 + \dots. \end{aligned}$$

Der Koeffizient von $x^4 y^2$ in den drei Ausdrücken besagt: Es gibt unter Berücksichtigung der Stereoisomerie 4 verschiedene Cyclopropanderivate von der Form $C_6 H_4 X_2$ (Disubstituiertes Cyclopropan mit 2 gleichen Substituenten). Unter diesen 4 Derivaten gibt es zwei, welche zueinander spiegelbildlich sind, also 1 Paar optischer Antipoden bilden. Ohne Berücksichtigung der Stereoisomerie kann man nur 2 Cyclopropanderivate von der Formel $C_6 H_4 X_2$, 2 Strukturisomere unterscheiden.

Merken wir uns: Der *chemischen* Einsetzung von *Radikalen* in einen *Stammkörper* entspricht (im Sinne des Hauptsatzes des Kapitels I) die *algebraische* Einsetzung der *abzählenden Potenzreihe* der betreffenden Radikale in den *Zykluszeiger der Gruppe* des betreffenden Stammkörpers.

58. Die Reihe $r(x)$, worin der Koeffizient von x^n die Anzahl R_n der strukturisomeren Alkohole $C_n H_{2n+1} OH$ bedeutet, ist die abzählende Potenzreihe dieser Alkohole; sie kann aber auch als die abzählende Potenzreihe der Alkylradikale $-C_n H_{2n+1}$ aufgefasst werden. Durch die chemische Einsetzung beliebiger Alkylradikale $-C_n H_{2n+1}$ in das Cyclopropan $C_3 H_6$ anstelle der $-H$ entstehen die Homologen des Cyclopropans. Durch die algebraische Einsetzung der abzählenden Potenzreihe $r(x)$ der Alkylradikale in den Zykluszeiger (3, 2) der Strukturformelgruppe des Cyclopropans entsteht die abzählende Potenzreihe der strukturisomeren Cyclopropanhomologen

$$(3, 4) \quad 1 + x + 3 x^2 + 6 x^3 + 15 x^4 + 33 x^5 + \dots$$

Diese Reihe ist also, ausführlicher gesagt, gemäss dem Hauptsatz des I. Kapitels, dadurch aus dem Zykluszeiger (3, 2) entstanden, dass darin

$$f_1 = r(x), \quad f_2 = r(x^2), \quad f_3 = r(x^3), \dots$$

gesetzt und das Resultat nach Potenzen von x entwickelt wurde. Die Bedeutung des Koeffizienten von x^n in der Reihe (3, 4) ist: Anzahl der strukturisomeren

Cyclopropanhomologen von der Molekularformel $C_{3+n}H_{6+2n}$. Um die Anzahl der stereoisomeren Cyclopropanhomologen von derselben Formel auf analoge Art zu erhalten, muss man die abzählende Potenzreihe $s(x)$ der stereoisomeren Alkylradikale in den Zyklenzeiger $(3, 1)$ der Stereoformelgruppe des Cyclopropan einsetzen.

59. Genau so wie in den vorangehenden Nummern für das Cyclopropan, können wir für einen beliebigen Stammkörper analytisch berechnen die Anzahl derjenigen isomeren (struktur- oder stereoisomeren) Derivate, welche bei Einsetzen von wesentlich verschiedenen einwertigen Substituenten oder von Alkylradikalen entstehen. Vorausgesetzt ist allerdings, dass die Konstitution des Stammkörpers so weit bekannt ist, dass sie die Aufstellung der in Nr. 56 erläuterten 3 Gruppen gestattet (was für die wichtigsten Stammkörper, für das Benzol, das Naphtalin, u. s. w. sicher der Fall ist). Ich unterlasse hier die Formulierung bestimmter Regeln¹, die ja aus dem vorangehenden Beispiel ganz deutlich hervorgehen.

Es geht ferner aus dem vorangehenden Beispiel ziemlich deutlich hervor, dass es bei den Begriffsbildungen der Chemie wesentlich auf den Gruppenbegriff ankommt, sowie auf einige damit verbundene Begriffe, insbesondere auf den hier in Nr. 11 eingeführten Begriff der Äquivalenz von Konfigurationen in bezug auf eine Permutationsgruppe. Auch dem Zyklenzeiger und dem darauf bezüglichen Hauptsatz in Nr. 16 dürfte eine Rolle zufallen. Indem ich nochmals auf die Arbeit von Lunn und Senior hinweise, möchte ich diese allgemeinen Bemerkungen abbrechen und mich der analytischen Bestimmung der Isomerenzahlen in einigen speziellen Fällen zuwenden.

Spezielle Fragen.

60. **Strukturisomere $C_n H_{2n+1} O H$ mit einer gegebenen Anzahl von asymmetrischen C-Atomen.** Wir kommen zurück auf die in Nr. 42 graphentheoretisch definierte Anzahl $R_{n\alpha}$. Offenbar bedeutet

$R_{n\alpha}$ die Anzahl aller derjenigen voneinander verschiedenen strukturisomeren $C_n H_{2n+1} O H$, welche genau α asymmetrische Kohlenstoffatome enthalten.²

¹ Vgl. Nr. 77 und PÓLYA 4.

² Vgl. die Definition in Nr. 36 b).

Wir haben schon in Nr. 42 die abzählende Potenzreihe $\Phi(x, y)$ für $R_{n\alpha}$ und deren Funktionalgleichung (2, 22) aufgestellt. Jetzt sollen einige Eigenschaften der Zahlen $R_{n\alpha}$ auf Grund der Funktionalgleichung (2, 22) hergeleitet werden.

a) **Bestimmung des niedrigsten $C_n H_{2n+1} O H$ mit einer gegebenen Anzahl von asymmetrischen C .** Es sind in $C_n H_{2n+1} O H$ insgesamt n Kohlenstoffatome enthalten, es können also darin höchstens n asymmetrische Kohlenstoffatome enthalten sein; folglich ist

$$R_{n\alpha} = 0 \quad \text{für } \alpha > n.$$

Diese triviale Bemerkung führt uns zu der Frage: *Für welche Wertkombinationen von n und α ist $R_{n\alpha} = 0$, für welche von 0 verschieden?*

Da $\Phi(0, 0) = 1$ und das letzte Glied auf der rechten Seite der Funktionalgleichung (2, 22) nichtnegative Koeffizienten hat (vgl. Nr. 23, die Schlussbemerkung), majoriert die linke Seite $x\Phi(x, y)$, in Zeichen

$$\Phi(x, y) \geq x\Phi(x, y),$$

also ist

$$R_{n,\alpha} \geq R_{n-1,\alpha}.$$

Wir können somit die Frage auch so stellen: *Welches ist das erste nichtverschwindende Glied der monotonen Folge $R_{0\alpha}, R_{1\alpha}, R_{2\alpha}, \dots$?*

Setzen wir

$$(3, 5) \quad R_{0\alpha} + R_{1\alpha}x + \dots + R_{n\alpha}x^n + \dots = q^{[\alpha]}(x).$$

Wir haben das erste nichtverschwindende Glied dieser Potenzreihenentwicklung aufzusuchen.

Schreiben wir

$$q^{[0]}(x) = q(x), \quad q^{[1]}(x) = q^I(x), \quad q^{[2]}(x) = q^{II}(x), \quad \dots$$

(die erste dieser Gleichungen ist mit (6) und (2, 19) in Übereinstimmung).

Dann ist

$$(3, 6) \quad \Phi(x, y) = q(x) + q^I(x)y + q^{II}(x)y^2 + q^{III}(x)y^3 + \dots$$

Führen wir hier anstelle von y die neue Variable z ein mittels der Gleichung

$$(3, 7) \quad x^2 y = z$$

und setzen wir

$$(3, 8) \quad \Phi(x, y) = 1 + x + x^2 \Psi(x, z).$$

Das Einsetzen von (3, 8) in (2, 22) ergibt eine Funktionalgleichung für $\Psi(x, z)$ von der Gestalt

$$\Psi(x, z) = 1 + z\Psi(x, z) + xP(x, z, \Psi(x, z), \Psi(x^2, z^2), \Psi(x^3, z^3)),$$

wobei P ein gewisses Polynom in 5 Variablen bedeutet. Aus dieser Gestalt der Funktionalgleichung ersieht man: $\Psi(x, z)$ ist eine Potenzreihe in x und z , welche nur Potenzen dieser Variablen mit *nichtnegativen* Exponenten enthält. Insbesondere ist

$$\Psi(0, z) = 1 + z\Psi(0, z),$$

$$\Psi(0, z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Vergleicht man dies mit der aus (3, 6), (3, 7) und (3, 8) folgenden Entwicklung

$$\Psi(x, z) = \frac{q(x) - 1 - x}{x^2} + \frac{q^I(x)}{x^4}z + \frac{q^{II}(x)}{x^6}z^2 + \dots + \frac{q^{[\alpha]}(x)}{x^{2\alpha+2}}z^\alpha + \dots,$$

so ergibt sich das Resultat

$$(3, 9) \quad R_{0\alpha} = R_{1\alpha} = \dots = R_{2\alpha+1, \alpha} = 0, \quad R_{2\alpha+2, \alpha} = 1,$$

$$R_{n\alpha} \geq 1 \quad \text{für} \quad n \geq 2\alpha + 2.$$

Hierin ist enthalten: Wenn ein Alkohol $C_n H_{2n+1} O H$ α asymmetrische C-Atome enthält, so muss sein Kohlenstoffgehalt n mindestens $2\alpha + 2$ sein. Ist der Kohlenstoffgehalt $n = 2\alpha + 2$, so gibt es von diesem Kohlenstoffgehalt genau eine Struktur $C_n H_{2n+1} O H$ mit α asymmetrischen C-Atomen.

b) Bestimmung des niedrigsten $C_n H_{2n+1} O H$, bei dem eine Kompensation der Asymmetrien eintritt. Wir haben schon in Nr. 42 festgestellt, dass

$$\Phi(x, 0) = q(x), \quad \Phi(x, 1) = r(x).$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $\Phi(x, 2)$ und $s(x)$?

Es folgt aus (2, 22)

$$\Phi(x, 2) = 1 + x \frac{\Phi(x, 2)^3 + 2\Phi(x^3, 8)}{3}$$

oder

$$(3, 10) \quad \Phi(x, 2) = 1 + x \frac{\Phi(x, 2)^3 + 2\Phi(x^3, 2)}{3} + \frac{2x}{3}(\Phi(x^3, 8) - \Phi(x^3, 2)),$$

welche Gleichung mit (7):

$$s(x) = 1 + x \frac{s(x)^3 + 2s(x^3)}{3}$$

zu vergleichen ist.

Nun ist, gemäss (3, 6),

$$\Phi(x, 8) - \Phi(x, 2) = (8 - 2)q^I(x) + (64 - 4)q^{II}(x) + \dots = 6x^4 + \dots$$

eine Potenzreihe mit lauter nichtnegativen Koeffizienten; der erste von 0 verschiedene Koeffizient wurde aus (3, 9) ermittelt. Somit ist auch

$$(3, 11) \quad \frac{2x}{3} (\Phi(x^3, 8) - \Phi(x^3, 2)) = 4x^{13} + \dots$$

eine Potenzreihe mit lauter nichtnegativen Koeffizienten.

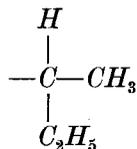
Der Vergleich von (7), (3, 10) und (3, 11) ergibt, dass $s(x)$ von $\Phi(x, 2)$ majoriert wird (die Einzelheiten der Überlegung sind ähnlich, wie unten in Nr. 68); d. h. es besteht mit Rücksicht auf die Definition dieser Reihen, vgl. (5) bzw. (2, 20), die Ungleichung

$$(3, 12) \quad S_n \leq R_{n0} + 2R_{n1} + 4R_{n2} + 8R_{n3} + \dots$$

Wenn man näher zusieht [das Anfangsglied von (3, 11) beachtet], findet man den Zusatz: *Es gilt in (3, 12) die Gleichheit für $n \leq 12$ und die Ungleichheit für $n \geq 13$.*

Die Ungleichung (3, 12) folgt ohne weiteres aus der bekannten Tatsache, dass aus einer gegebenen Strukturformel, welche α asymmetrische Kohlenstoffatome enthält, im allgemeinen 2^α verschiedene Stereoisomeren und im Ausnahmefall weniger als 2^α Stereoisomeren entspringen. (Immerhin hat es den Wert einer Bestätigung, dass die Ungleichung (3, 12) sich hier rein analytisch aus (7) und (2, 22) ergab.) Wenn der Ausnahmefall eintritt, d. h. wenn eine Struktur mit α asymmetrischen C zu weniger als 2^α Stereoisomeren Anlass gibt, spricht man von *Kompensation der Asymmetrien*. Der Zusatz zu (3, 12) zeigt dass die Kompensation der Asymmetrien bei $C_n H_{2n+1} O H$ für $n \leq 12$ niemals eintritt, hingegen für $n \geq 13$ bei jedem n mindestens bei einer Strukturformel eintritt. [Die Kompensation tritt bei *genau einer* Strukturformel ein, wenn $n = 13$, wie man es dem numerischen Wert des Anfangskoeffizienten von (3, 11) und der

genauerer Betrachtung der betreffenden Formel entnimmt. Sie ist $(C_4H_9)_3COH$, wobei $-C_4H_9$ eine Abkürzung für



ist. Für diese Strukturformel ist die Anzahl der asymmetrischen Kohlenstoffatome $\alpha = 3$, aber die Anzahl der daraus entspringenden verschiedenen Stereoisomeren ist nicht 8, sondern nur 4; die Differenz $8 - 4$ tritt in $(3, 11)$ als Anfangskoeffizient auf.]

61. **Strukturisomere disubstituierte Paraffine.** Die Anzahl der strukturisomeren Alkohole $C_n H_{2n+1} OH$, welche durch R_n abgezählt wird, ist offenbar dieselbe, wie die Anzahl irgendwelcher monosubstituierter Paraffine $C_n H_{2n+1} X$, wobei X ein gegebenes einwertiges Radikal bedeutet (das nicht gerade ein Alkyl ist), z. B. $-Cl$, $-Br$, $-OH$ u. s. w.

Wir wollen nun ermitteln die Anzahl der verschiedenen strukturisomeren disubstituierten Paraffine von der Formel $C_n H_{2n} X Y$, wobei X und Y zwei gegebene, voneinander und von den Alkylen verschiedene einwertige Radikale sind (z. B. $X = -OH$, $Y = -Cl$). Wir wollen sofort die abzählende Potenzreihe ermitteln, worin die besagte Anzahl der Koeffizient von x^n ist.

Die Strukturformel von $C_n H_{2n} X Y$ ist ein Baum mit n vierkantigen Punkten und $2n + 2$ Endpunkten, und die letzteren sind in 3 Arten eingeteilt: $2n$ sind H , einer ist X , einer ist Y . Betrachten wir in diesem Baum den *Verbindungsweg* von X und Y und nennen wir m die Anzahl der C -Atome, welche auf diesem Verbindungsweg liegen.

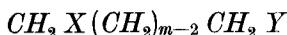
Wenn $m = 0$ ist, so ist $n = 0$, es handelt sich um die (rein formal aufzufassende) Verbindung $X Y$, die wir jedoch mitbetrachten wollen.

Wenn $m = 1$ ist, so handelt es sich um ein Derivat des $C X Y H_2$ (des disubstituierten Methans), das dadurch entsteht, dass die beiden $-H$ durch beliebige Alkylradikale ersetzt werden. Die beiden $-H$ sind hierbei (Struktur-, nicht Stereoisomerie!) vertauschbar, ihre Gruppe ist die symmetrische \mathfrak{S}_2 , deren Zyklenzeiger in Nr. 21 aufgestellt ist. Durch Einsetzen von $r(x)$ in Nr. 21 (\mathfrak{S}_2) und durch Berücksichtigung des C -Atomes in $C X Y H_2$ entsteht die abzählende Potenzreihe der der Bedingung $m = 1$ entsprechenden speziellen disubstituierten Paraffine

$$(3, 13) \quad x \frac{r(x)^2 + r(x^2)}{2} = x R(x).$$

(Die Abkürzung $R(x)$ wird uns noch wiederholt dienlich sein.)

Wenn $m > 1$ ist, d. h. wenn X und Y nicht an dasselbe C gebunden sind, handelt es sich um ein Derivat der Verbindung



(eines an den beiden Enden substituierten normalen Paraffins); das Derivat entsteht durch Einsetzen von Paaren von Alkylradikalen anstelle der m Paare von $-H$. Die Strukturformelgruppe (Nr. 56) ist, wie man leicht sieht, das direkte Produkt (Nr. 27) zu m Faktoren

$$\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_2.$$

(Wegen der Verschiedenheit von X und Y ist kein Paar von $-H$ mit einem andern vertauschbar). Der Zyklenzeiger ist, gemäss Nr. 27,

$$\left(\frac{f_1^2 + f_2}{2} \right)^m.$$

Indem man die $-H$ durch Alkyle, also f durch die abzählende Potenzreihe $r(x)$ der Alkyle ersetzt (wie in Nr. 58) und zur Berücksichtigung der m Stück C -Atome der Ausgangsverbindung den Faktor x^m hinzufügt, entsteht die abzählende Potenzreihe der hier in Frage kommenden speziellen disubstituierten Paraffine

$$(3, 14) \quad x^m \left(\frac{r(x)^2 + r(x^2)}{2} \right)^m = [x R(x)]^m.$$

Durch Summierung von (3, 14) über $m = 0, 1, 2, \dots$ erhält man als die abzählende Potenzreihe aller strukturisomeren disubstituierten Paraffine $C_n H_{2n} X Y$

$$(3, 15) \quad \frac{1}{1 - x R(x)}.$$

D. h. der Koeffizient von x^n in der Potenzreihenentwicklung von (3, 15) um $x = 0$ ist die Anzahl der strukturell verschiedenen $C_n H_{2n} X Y$.

62. **Trisubstituierte Paraffine.** Ein trisubstituiertes Paraffin mit drei voneinander verschiedenen einwertigen Substituenten X, Y, Z (von welchen natürlich keiner ein Alkyl sein darf), hat die Molekularformel $C_n H_{2n-1} X Y Z$. Die Struktur-

formel ist ein Baum. Betrachten wir in diesem Baum die drei Verbindungswege XY , YZ und ZX . Es ist, wie leicht zu sehen, ein und zwar nur ein Punkt allen dreien gemeinsam, der ein vierkantiger Punkt (ein C -Atom) ist, und den wir als das »Verkehrszentrum« des Baumes oder kurz als den »Punkt V « bezeichnen wollen.

Man kann nun den vollen Baum in 5 Schritten und dementsprechend die abzählende Potenzreihe der strukturisomeren $C_n H_{2n-1} X Y Z$ aus 5 Faktoren aufbauen (Multiplikation der abzählenden Potenzreihen im Falle der Unabhängigkeit, vgl. Nr. 17).

Zuerst legt man den Punkt V hin, und dementsprechend hat man den Faktor x (ein C -Atom).

Dann verbindet man V mit X und legt in die Verbindungslinie eine bestimmte Anzahl m von C -Atomen hinein und schliesst an jedes ein Paar von Alkylradikalen an ($m = 0, 1, 2, \dots$). Diese Konstruktion ergibt den Faktor $(3, 15)$, das Resultat der vorangehenden Nummer.

Man verbindet V mit Y und führt die vorangehende Konstruktion nochmals durch: Noch ein Faktor $(3, 15)$.

Die Verbindung von V mit Z bringt einen weiteren Faktor $(3, 15)$.

Schliesslich wird an V ein Alkylradikal angeschlossen; dem entspricht der Faktor $r(x)$.

Die abzählende Potenzreihe der strukturisomeren $C_n H_{2n-1} X Y Z$ ist

$$(3, 16) \quad \frac{x r(x)}{[1 - x R(x)]^3}$$

63. Mehrfach substituierte Paraffine. Bei mehr als dreimal substituierten Paraffinen wird die abzählende Potenzreihe der Strukturisomeren verwickelter. Ich will aber ihren Aufbau, ohne auf die Einzelheiten des Beweises einzutreten, beschreiben.

Die Strukturformel eines l -mal substituierten Paraffins mit l verschiedenen Substituenten, eines $C_n H_{2n+2-l} X' X'' \dots X^{(l)}$, ist ein Baum, von dessen $2n + 2$ Endpunkten l , nämlich $X', X'', \dots X^{(l)}$, ausgezeichnet sind. Wir wollen an diesem Baum die folgenden beiden Operationen, so oft wie möglich, vornehmen.

a) Weglassen eines nicht-ausgezeichneten Endpunktes, samt der dazu führenden Strecke.

b) Weglassen eines zweikantigen Punktes und Verschmelzung der beiden anschliessenden Strecken zu einer Strecke.

Zum Schluss bleibt ein *reduzierter Baum* übrig, der nur ausgezeichnete, u. zw. genau l Endpunkte hat, benannt mit $X', X'', \dots X^{(l)}$, und der ausser Endpunkten nur drei- und vierkantige Punkte besitzt.

Man bezeichne, wie in Nr. 30, die Anzahl der ein-, der drei- und der vierkantigen Punkte des reduzierten Baumes mit p_1, p_3 bzw. p_4 , und die Anzahl seiner Strecken mit s . Es ist

$$p_1 = l$$

und es bestehen [vgl. (2, 1), (2, 2), (2, 3); man bemerke dass $\mu = 0$ ist] die Beziehungen

$$l + p_3 + p_4 = s + 1, \quad l + 3p_3 + 4p_4 = 2s,$$

aus welchen

$$(3, 17) \quad \begin{aligned} s &= 2l - 3 - p_4 \leq 2l - 3, \\ p_3 + p_4 &= s + 1 - l \leq l - 2 \end{aligned}$$

folgt. Somit sind s, p_3, p_4 nur endlich vieler Werte fähig: *Es gibt, bei gegebenem l , nur endlich viele topologisch verschiedene reduzierte Bäume.* Es besteht die Regel: *Der Wert der abzählenden Potenzreihe der strukturisomeren $C_n H_{2n+2-l} X' X'' \dots X^{(l)}$ ist*

$$(3, 18) \quad \sum \frac{x^{p_3+p_4} r(x)^{p_3}}{[1 - x R(x)]^s};$$

die Summe ist über sämtliche topologisch verschiedene reduzierte Bäume erstreckt, die zum gegebenen Wert von l gehören.

Die Einfachheit der in den beiden vorangehenden Nummern für $l=2$ und $l=3$ hergeleiteten Formeln beruht darauf, dass in diesen Fällen nur je ein reduzierter Baum existiert. Die Summe (3, 18) besteht also in diesen Fällen aus einem einzigen Glied; dieses ist

$$(3, 15), \text{ wenn } l=2, \quad p_3=0, \quad p_4=0, \quad s=1,$$

$$(3, 16) \text{ wenn } l=3, \quad p_3=1, \quad p_4=0, \quad s=3.$$

Zur Ergänzung sei noch bemerkt: *Die Anzahl derjenigen reduzierten Bäume, für welche in den Ungleichungen (3, 17) das Gleichheitszeichen gilt, d. h. die Anzahl derjenigen topologisch verschiedenen Bäume mit l individuell unterschiedenen Endpunkten, deren von den Endpunkten verschiedene Punkte alle dreikantig und gleichartig sind, ist*

$$(3, 19) \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l - 5) = \frac{(2l - 4)!}{2^{l-2} \cdot (l - 2)!}.$$

Die Anzahl (3, 19) fällt für $l = 2$ und $l = 3$ zu 1 aus; es ist leicht sie durch Induktion herzuleiten.¹

64. **Strukturisomere Cycloparaffine $C_n H_{2n}$.** Die Strukturformel dieser Verbindungen ist ein Graph von Zusammenhangszahl 1, der zwei Bedingungen unterworfen ist:

1) Es sind alle Punkte, die nicht Endpunkte sind, vierkantig ($C-H$ -Graph im Sinne der Nr. 35).

2) Zwei Punkte sind höchstens durch eine Strecke miteinander verbunden. (Es sind die Doppelbindungen $C=C$ und damit die Homologen des Äthylens $C_2 H_4$ ausgeschlossen.)

Wenn man von einem solchen Graphen einen Endpunkt samt der darin endenden Strecke fortlässt, und diese Operation solange wiederholt, als es angeht, gelangt man schliesslich zu einem *Ring*, d. h. zu einem (zusammenhängenden!) Graphen von m Punkten und m Strecken, von denen jede Strecke in zwei verschiedenen Punkten endet und jeder Punkt zwei verschiedene Strecken begrenzt, $m = 3, 4, 5, \dots$ [es ist $m \neq 2$ wegen der Bedingung 2)]. Ein solcher Ring ist das Kohlenstoffskelett (C -Graph im Sinne der Nr. 35 und 37) eines rein ringförmigen Cycloparaffins. Die nicht rein ringförmigen Cycloparaffine entstehen durch Substituieren von Alkylradikalen in ein rein ringförmiges, sie sind die Homologen von einem rein ringförmigen Cycloparaffin.

Für ein gegebenes m gibt es nur einen ringförmigen C -Graphen mit m Punkten, wie leicht zu sehen ist. Es entsteht daraus, mittels der Konstruktion der Nr. 37, ein topologisch eindeutig bestimmter $C-H$ -Graph: Für ein gegebenes m gibt es der Struktur nach nur ein rein ringförmiges Cycloparaffin. Dieses ist im einfachsten Falle $m = 3$ das oben (Nr. 56—58) ausführlich diskutierte Cyclopropan.

Wenn wir das im Falle $m = 3$ ausführlich Überlegte richtig verallgemeinern, können wir die Strukturformelgruppe des einzigen rein ringförmig struktuierten

¹ Wir haben im vorangehenden nur solche mehrfach substituierte Paraffine behandelt, in welchen alle Substituenten voneinander verschieden waren. Bei Gleichheiten zwischen den Substituenten ist die Behandlung auch möglich, aber die Beschreibung und erst recht die Begründung der Formeln wird so umständlich, dass ich mich begnüge auf die erzeugenden Funktionen hinzuweisen, die ich an anderen Orte für 2 und 3 Substituenten gegeben habe. Vgl. PÓLYA 4, S. 440.

$C_m H_{2m}$ aufstellen: Es hat den Grad $2m$, die Ordnung $2m \cdot 2^m$ und es ist $\mathfrak{D}_m[\mathfrak{S}_2]$ mit den Bezeichnungen der Nr. 21 und 27. Somit ist der Zyklenzeiger der Strukturformelgruppe des rein ringförmigen $C_m H_{2m}$ [vgl. Nr. 21 (\mathfrak{D}_s), (\mathfrak{S}_2), ferner (1, 39), (1, 40)]

$$(3, 20) \quad \frac{1}{2m} \sum_{k|m} \varphi(k) \left(\frac{f_k^2 + f_{2k}}{2} \right)^{\frac{m}{k}} + \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{f_1^2 + f_2}{2} \left(\frac{f_2^2 + f_4}{2} \right)^{\mu-1} \\ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{f_1^2 + f_2}{2} \right)^2 + \frac{f_2^2 + f_4}{2} \right] \left(\frac{f_2^2 + f_4}{2} \right)^{\mu-1}, \end{cases}$$

wobei die obere Zeile für ungerades $m = 2\mu - 1$ und die untere für gerades $m = 2\mu$ in Betracht kommt. Um hieraus die abzählende Potenzreihe der Homologen des rein ringförmigen $C_m H_{2m}$ zu erhalten, ist nach Nr. 58, entsprechend der chemischen Substitution der Alkyldradikale für $-H$, die abzählende Potenzreihe $r(x)$ der strukturisomeren Alkyldradikale für f zu substituieren; ferner ergeben die m Kohlenstoffatome in $C_m H_{2m}$ selber einen Faktor x^m . So entsteht aus (3, 20), unter Benutzung der Abkürzung (3, 13)

$$(3, 21) \quad \frac{1}{2m} \sum_{k|m} \varphi(k) [x^k R(x^k)]^{\frac{m}{k}} + \begin{cases} \frac{1}{2} x R(x) [x^2 R(x^2)]^{\mu-1} \\ \frac{1}{4} \{ [x R(x)]^2 + x^2 R(x^2) \} [x^2 R(x^2)]^{\mu-1}. \end{cases}$$

Wenn (3, 21) über $m = 3, 4, 5, \dots$ summiert wird, so entsteht die abzählende Potenzreihe der strukturisomeren Cycloparaffine, welche mit P bezeichnet werden soll. Übersichtlicher ist die Summation über $m = 1, 2, 3, \dots$ auszuführen. So ergibt sich

$$x R(x) + \frac{x^2}{2} [R(x)^2 + R(x^2)] + P = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k|m} \varphi(k) [x^k R(x^k)]^{\frac{m}{k}} + \left\{ \frac{x}{2} R(x) + \frac{x^2}{4} [R(x)^2 + R(x^2)] \right\} \sum_{\mu=1}^{\infty} [x^2 R(x^2)]^{\mu-1}.$$

Folglich ist

$$(3, 22) \quad P + \left\{ x R(x) + \frac{x^2}{2} [R(x)^2 + R(x^2)] \right\} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x^2 R(x^2)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=l=m}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k l} [x^k R(x^k)]^l \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[x^k R(x^k)]^l}{l} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - x^k R(x^k)}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Potenzreihe

$$P = x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 12x^6 + 29x^7 + 73x^8 + \dots,$$

worin der Koeffizient von x^n die Anzahl der doppelbindungsfreien, strukturi-
isomeren $C_n H_{2n}$ ist.

65. **Kohlenwasserstoffe** $C_n H_{2n+2-2\mu}$. Die Strukturformel einer solchen Verbindung ist ein $C-H$ -Graph von der Zusammenhangszahl μ [vgl. Nr. 36 a]. Wie es in der vorangehenden Nummer für $\mu = 1$ geschehen ist, ist es auch für irgend ein festes $\mu \geq 2$ möglich, die abzählende Potenzreihe der strukturi-
isomeren $C_n H_{2n+2-2\mu}$ aufzustellen. Sie fällt sogar, vom funktionentheoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, für $\mu \geq 2$ einfacher aus, als im Falle $\mu = 1$: Sie ist eine rationale Funktion von endlich vielen Grössen aus der Reihe $x, r(x), r(x^2), r(x^3), \dots$. Die Formeln werden aber so umständlich, dass ich mich auf wenige Andeutungen betreffs den Fall $\mu = 2$ beschränke.

Man gehe aus von dem Graphen eines gegebenen $C_n H_{2n-2}$, und führe daran die beiden in Nr. 63 unter a) und b) beschriebenen Operationen so oft als nur möglich aus (da es jetzt keine ausgezeichneten Endpunkte gibt, kommen nach und nach alle Endpunkte in Wegfall). Zuletzt bleibt eine von den drei in Fig. 5 dargestellten Formen zurück. Betrachten wir, der Bestimmtheit halber, eine von diesen drei Formen, z. B. diejenige, von welcher jede Strecke in zwei verschiedenen Punkten endet. (Diese ist die einzige von den drei Formen, welche im Sinne der Begriffsbestimmung in Nr. 29 ein Graph genannt werden kann; man vergesse nicht die Forderung II!) Setzen wir auf die drei Strecken bzw. k, l, m Punkte (wodurch diese Strecken bzw. in $k+1, l+1, m+1$ Strecken geteilt werden), so entsteht das Kohlenstoffskelett (der C -Graph) eines gewissen Stammkörpers $C_{k+l+m+2} H_{2k+2l+2m+2}$. Man kann dessen Strukturformelgruppe bestimmen; sie ist vom Grade $2k+2l+2m+2$ und von der Ordnung $12, 4$ oder 2

jenachdem $k = l = m$ oder $k = l \neq m$ oder alle drei Zahlen k, l, m voneinander verschieden sind. Man kann den Zyklenzeiger dieser Gruppe aufstellen und dann,

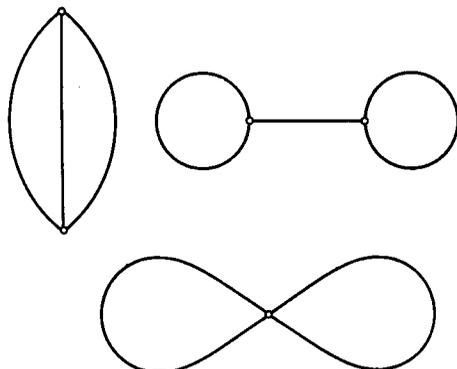


Fig. 5.

durch Einsetzung von $r(x)$, die abzählende Potenzreihe für die Homologen erhalten, d. h. für diejenigen $C_n H_{2n-2}$, welche aus dem besagten Stammkörper durch Einsetzung von Alkylradikalen entstehen. Die Summation über die Wertetripel k, l, m führt bloss auf geometrische Reihen. Von dem auf diese Weise erhaltenen Ausdruck führe ich nur einen Bestandteil, den »Hauptbestandteil«

(3, 23)

$$\frac{1}{12} \frac{x^2 r(x)^2}{[1 - xR(x)]^3}$$

an. Es besteht (3, 23) aus 2 Faktoren. Der erste, konstante Faktor ist das Reziproke der höchsten Ordnung 12, die die Gruppe von einem der betrachteten Stammkörper erreichen kann; der zweite, von x abhängige Faktor hat die Gestalt des Summanden in (3, 18) mit

$$p_3 = 2, \quad p_4 = 0, \quad s = 3,$$

und entspricht der *unabhängigen* Besetzung der 3 Strecken und der 2 Punkte des Graphen. [Die Punkte werden durch je ein Alkylradikal besetzt, die Strecke durch m C-Atome und anschliessend an jedes durch 2 Alkyle, wobei über $m = 0, 1, 2, \dots$ summiert wird; vgl. die Entstehung von (3, 15) und von (3, 16).]

Den beiden anderen Formen der Fig. 5 entsprechen ebenfalls abzählende Potenzreihen, deren »Hauptbestandteile« bzw.

$$\frac{1}{8} \frac{x^2 r(x)^2}{[1 - xR(x)]^3}, \quad \frac{1}{8} \frac{x}{[1 - xR(x)]^2}$$

sind. Beide Ausdrücke entsprechen derselben Gruppenordnung 8, und bzw. den Zahlenwerten

$$p_3 = 2, \quad p_4 = 0, \quad s = 3,$$

$$p_3 = 0, \quad p_4 = 1, \quad s = 2.$$

Die Bezeichnung »Hauptbestandteil« wird in Nr. 79 näher erklärt.

IV. ASYMPTOTISCHE BESTIMMUNG DER BETRACHTETEN KOMBINATORISCHEN ANZAHLEN.

Funktionentheoretische Eigenschaften.

66. Wir wollen nun die Potenzreihen $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$, deren kombinatorische Bedeutung im Vorangehenden festgestellt wurde, funktionentheoretisch untersuchen, ihren Konvergenzradius, ihre Singularitäten auf dem Konvergenzreis, ihre analytische Fortsetzung bestimmen. Wir müssen uns dabei natürlich auf die Funktionalgleichungen stützen, welche diese Potenzreihen definieren. Ich stelle zunächst diese Gleichungen mit einigen analogen in geeigneter Bezeichnung und Reihenfolge zusammen:

$$(4, 1) \quad f = 1 + xf = \sum_0^{\infty} x^n,$$

$$(4, 2) \quad q = f = 1 + xff_2,$$

$$(4, 3) \quad r = f = 1 + xff_2 + x(f^3 - 3ff_2 + 2f_3)/6,$$

$$(4, 4) \quad s = f = 1 + xff_2 + 2x(f^3 - 3ff_2 + 2f_3)/6,$$

$$(4, 5) \quad f = 1 + xf^3 = 1 + \sum_1^{\infty} \binom{3n}{n-1} \frac{x^n}{n};$$

$$(4, 6) \quad r - 1 = f = x \left(1 + f + \frac{f^2 + f_2}{2} + \frac{f^3 + 3ff_2 + 2f_3}{6} \right),$$

$$(4, 7) \quad t = f = x \left(1 + f + \frac{f^2 + f_2}{2} + \frac{f^3 + 3ff_2 + 2f_3}{6} + \dots \right);$$

$$(4, 8) \quad f = xe^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n,$$

$$(4, 9) \quad t = f = x e^{\frac{f}{1} + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{3} + \dots},$$

$$(4, 10) \quad f = x e^{\frac{f}{1} + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{3} + \dots} = \frac{x}{1-f} = \sum_1^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Die durch die Gleichung zu bestimmende Funktion ist überall mit f bezeichnet und es wird die Abkürzung (1, 18) benützt. Die Funktionalgleichung (4) von $r(x)$ kommt zweimal, in zwei verschiedenen Formen, als (4, 3) und

(4, 6) vor, die von t ebenfalls zweimal, als (4, 7) und (4, 9), vgl. (1'') und (1'). Die Gleichung (4, 1) bestimmt die geometrische Reihe, die Gleichungen (4, 5) und (4, 10) algebraische Funktionen, die Gleichung (4, 8) die Umkehrfunktion einer elementaren ganzen transzendenten Funktion; für diese vier Funktionen sind die entsprechenden Maclaurinschen Reihen angegeben; diese sind, z. B. aus der Lagrangeschen Umkehrformel, leicht erhältlich. Für die kombinatorische Bedeutung der Reihen (4, 5), (4, 8), (4, 10) vgl. bzw. den Text zu den Formeln (2, 15), (2, 37), (2, 27). Zu (4, 6) vgl. Nr. 44.

67. *Jede der Funktionalgleichungen (4, 1) bis (4, 10) bestimmt eindeutig eine ihr genügende, nach wachsenden nichtnegativen Potenzen von x geordnete Potenzreihe. Für das absolute Glied dieser Potenzreihe ergeben die ersten fünf Gleichungen den Wert 1, die letzten fünf den Wert 0; die übrigen Koeffizienten der Potenzreihe sind positive Zahlen und zwar, den Fall der Gleichung (4, 8) ausgenommen, ganze Zahlen. Die Koeffizientenfolge ist nicht abnehmend.*

Alle ausgesprochenen Behauptungen kann man den Rekursionsformeln entnehmen, welche die Koeffizientenvergleichung ergibt. Z. B. ist in Gleichung (4, 6) der Koeffizient von x^n links R_n (für $n \geq 1$) und rechts ein Polynom in R_1, R_2, \dots, R_{n-1} [vgl. (2, 56)]: hieraus folgt die eindeutige Bestimmtheit; die Koeffizienten des besagten Polynoms sind nichtnegativ und es tritt darin, von xf herrührend, das Glied R_{n-1} auf: hieraus folgt $R_n \geq R_{n-1}$. U. s. w. Die Behauptungen über Positivität, Ganzzahligkeit und Wachsen der Koeffizienten ergeben sich auch (etwas bequemer) aus der kombinatorischen Bedeutung; einige, die elementaren Funktionen betreffende Behauptungen können auch aus der angegebenen expliziten Form der Koeffizienten festgestellt werden.

Die hier betrachtete, nach nichtnegativen Potenzen von x fortschreitende, durch die Gleichung eindeutig bestimmte Reihe wird im folgenden kurz als die zur betreffenden Gleichung *gehörige* Potenzreihe bezeichnet.

68. *Die zehn Gleichungen (4, 1) bis (4, 10) seien, wie angeschrieben, zu drei Staffeln zusammengefasst; die erste Staffel enthält die ersten fünf, die nächste Staffel die nächsten zwei, die letzte die letzten drei Gleichungen. Von zwei Potenzreihen, die zu zwei Gleichungen derselben Staffel gehören, wird die vorangehende durch die nachfolgende majoriert.*

Diese Behauptung ist schon in der Einleitung ausgesprochen worden, in Form der sieben unter (10) und (12) vereinigten Ungleichungen. Alle Unglei-

chungen sind inzwischen durch kombinatorische Betrachtungen bewiesen worden [vgl. insbesondere (2, 7), (2, 8), (2, 16) und (2, 17), (2, 9), (2, 38) und (2, 39), (2, 28) und (2, 29)]. Man kann sie aber auch aus den Rekursionsformeln beweisen; es wird genügen die Ungleichung $R_n \leq S_n$ darzutun.

Es ist $R_0 = S_0 = 1$; wir wollen induktiv verfahren und die Ungleichungen

$$(4, 11) \quad R_0 \leq S_0, \quad R_1 \leq S_1, \quad \dots \quad R_{n-1} \leq S_{n-1}$$

als schon bewiesen annehmen ($n \geq 1$).

Es bedeute

$$f(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \dots$$

eine Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten U_0, U_1, U_2, \dots . Man entwickle die beiden Ausdrücke

$$x \frac{f(x)^3 + 3f(x)f(x^2) + 2f(x^3)}{6}, \quad x \frac{f(x)^3 - 3f(x)f(x^2) + 2f(x^3)}{6}$$

nach Potenzen von x und bezeichne den Koeffizienten von x^n bzw. mit

$$F(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}), \quad G(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}).$$

In dieser Bezeichnung ist, gemäss (4, 3) und (4, 4),

$$(4, 12) \quad R_n = F(R_1, R_2, \dots, R_{n-1}),$$

$$(4, 13) \quad S_n = F(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}) + G(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}).$$

Sowohl F wie G sind Polynome in den Unbestimmten U_0, U_1, \dots, U_{n-1} . Es hat F offenbar nichtnegative Koeffizienten; daher ist, gemäss der Voraussetzung (4, 11) der vollständigen Induktion,

$$(4, 14) \quad F(R_1, R_2, \dots, R_{n-1}) \leq F(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}).$$

Unter den Koeffizienten von G können zwar auch negative vorkommen, jedoch nimmt G für nichtnegative ganzzahlige Werte von U_0, U_1, \dots, U_{n-1} nichtnegative Werte an (vgl. die Schlussbemerkung in Nr. 23) und S_0, S_1, \dots, S_{n-1} sind positive ganze Zahlen, vgl. Nr. 67. Somit ist

$$(4, 15) \quad G(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}) \geq 0.$$

Aus (4, 12), (4, 13), (4, 14), (4, 15) folgt, wie zu beweisen war, dass

$$R_n \leq S_n.$$

69. Die zu den Gleichungen (4, 1) bis (4, 10) gehörigen Potenzreihen haben sämtlich nichtverschwindenden Konvergenzradius.

Für die Gleichungen

$$(4, 1), (4, 5), (4, 8), (4, 10)$$

geht diese Behauptung aus der angegebenen expliziten Form der Koeffizienten ohne weiteres hervor; die Konvergenzradien sind, wie man leicht aus dem Verhältnis sukzessiver Koeffizienten berechnet, bzw.

$$1, \quad \frac{4}{27}, \quad \frac{1}{e}, \quad \frac{1}{4}.$$

Für die Konvergenzradien der vier Potenzreihen

$$q(x), \quad r(x), \quad s(x), \quad t(x),$$

welche, wie schon in der Einleitung gesagt, bzw.

$$\alpha, \quad \rho, \quad \sigma, \quad \tau$$

heissen sollen, ergibt sich die Behauptung aus den in der vorangehenden Nr. 68 besprochenen, schon in der Einleitung ausgesprochenen Ungleichungen (10) und (12); es ergibt sich, genauer gesagt, noch nicht das volle Resultat, das in der Einleitung unter (13) und (14) angekündigt wurde, sondern nur das schwächere, das dem Ersetzen des $>$ durch \geq im vollen Resultat entspricht.

In sämtlichen Fällen (4, 1) bis (4, 10) definiert also die zur Gleichung gehörige Potenzreihe ein Funktionselement von Zentrum 0; dieses Funktionselement soll im folgenden ebenfalls als zur Gleichung gehörig bezeichnet werden; die zu den Gleichungen (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 7) gehörigen Funktionselemente werden beziehungsweise durch die Potenzreihen $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$ dargestellt.

70. Besprechen wir zunächst die analytische Fortsetzung des durch $q(x)$ dargestellten Funktionselementes.

Wie es aus der ersten Ungleichung unter (10) hervorgeht, ist der Konvergenzradius α von $q(x)$ entweder $= 1$ oder < 1 . Die erste Eventualität ist jedoch auszuschliessen: Denn wäre $\alpha = 1$, also $q(x)$ und folglich auch $q(x^2)$ im Einheitskreise konvergent, so müsste die Potenzreihe

$$\alpha q(x^2) = x + x^3 + \dots$$

mit lauter nichtnegativen Koeffizienten entlang der Strecke der reellen Achse von $x = 0$ bis $x = 1$ von 0 bis zu einem Werte oberhalb 2 wachsen, also in einem Zwischenpunkte ξ den Wert 1 annehmen; dann hätte aber die Funktion

$$(4, 16) \quad q(x) = \frac{1}{1 - xq(x^2)}$$

[ich ziehe (4, 2) heran] im Punkte ξ , $0 < \xi < 1$, einen Pol, obzwar sie im ganzen Einheitskreis, gemäss der Annahme $\kappa = 1$, regulär sein sollte. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn wir die Annahme $\kappa = 1$ verwerfen. Somit ist bewiesen, dass $\kappa < 1$.

Die Potenzreihe $q(x)$ konvergiert im Kreis $|x| < \kappa$, die Potenzreihe $q(x^2)$ im Kreise $|x^2| < \kappa$, d. h. $|x| < \sqrt{\kappa}$; da $\kappa < 1$, also $\kappa < \sqrt{\kappa}$, ist das Konvergenzgebiet von $q(x^2)$ umfassender, als das von $q(x)$; die auf dem Konvergenzkreise von $q(x)$ notwendigerweise vorhandenen singulären Stellen können nur von dem Nenner auf der rechten Seite von (4, 16) herrühren, sind also Stellen, für welche

$$(4, 17) \quad xq(x^2) = 1$$

gilt. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber eine Potenzreihe, worin alle Koeffizienten von ungeradem Index positiv, alle von geradem Index 0 sind. Der Maximalbetrag einer solchen Potenzreihe entlang eines Kreises vom Mittelpunkte 0 wird in zwei und nur zwei Punkten erreicht: auf der positiven und auf der negativen reellen Achse, und das Vorzeichen des maximalen Funktionswertes stimmt mit dem Vorzeichen von x überein. Daher besitzt die Gleichung (4, 17) eine Wurzel, die auf der positiven reellen Achse liegt, u. zw. dem Ursprung näher liegt, als alle anderen Wurzeln; in dieser Wurzel verschwindet die Derivierte der linken Seite von (4, 17) nicht, wieder wegen der Positivität der Koeffizienten von $xq(x^2)$, und daher ist diese Wurzel einfach. Diese Wurzel bestimmt, gemäss (4, 16), den Konvergenzradius von $q(x)$.

Zusammengefasst: *Auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe $q(x)$ liegt nur ein einziger singulärer Punkt, der Punkt $x = \kappa$, u. zw. hat $q(x)$ im Punkte $x = \kappa$ einen Pol erster Ordnung.*

71. Eine weitere Ausnützung der eben angewendeten Schlussweise ergibt, dass die analytische Fortsetzung von $q(x)$ im Innern des Einheitskreises meromorph ist. Die Schlussweise stützt sich auf die Funktionalgleichung (4, 16) und diese ist ersichtlicherweise mit dem Kettenbruch (8') äquivalent. Man kann nun

die Fortsetzung von $q(x)$ durch eine kleine Variation der Schlussweise mittels der Entwicklung des Kettenbruches bewerkstelligen; dabei bemerkt man den folgenden Abkürzungsweg.

Man setze

$$(4, 18) \quad q(x) = \frac{\psi(x^2)}{\psi(x)}.$$

Für die neueingeführte Funktion $\psi(x)$ ergibt (4, 2) die neue Funktionalgleichung

$$(4, 19) \quad \psi(x) = \psi(x^2) - x\psi(x^4),$$

welche den Vorteil hat linear zu sein. Der Potenzreihenansatz

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ergibt die rekursiven Relationen

$$(4, 20) \quad a_{2m} = a_m, \quad a_{4m+1} = -a_m, \quad a_{4m+3} = 0$$

für $m = 0, 1, 2, \dots$, welche die Koeffizientenfolge eindeutig bestimmen, sobald a_0 gegeben ist. Ich nehme

$$(4, 21) \quad a_0 = 1$$

an; es ergibt sich

$$\psi(x) = 1 - x - x^2 - x^4 + x^5 - x^8 + x^9 + \dots$$

als eine Potenzreihe, deren Koeffizienten nur die drei Werte 0, 1 und -1 annehmen, die also im Einheitskreise konvergiert.

Nun gehe man von der Potenzreihe $\psi(x)$ aus und definiere eine Funktion $q(x)$ durch (4, 18). Diese Funktion $q(x)$ ist im Punkte $x=0$ regulär, wegen (4, 21), und erfüllt die Funktionalgleichung (4, 2), wegen (4, 19). Da aber (4, 2), wie in Nr. 67 gesagt wurde, nur durch eine einzige Potenzreihe mit nichtnegativen ganzzahligen Potenzen von x befriedigt werden kann, ist die durch (4, 18) definierte Funktion mit unserem früheren $q(x)$ identisch. Es ist $q(x)$ in (4, 18) dargestellt, als der Quotient von zwei im Einheitskreise konvergierenden Potenzreihen, und dies setzt in Evidenz, dass $q(x)$ im Innern des Einheitskreises meromorph ist.

Es ist hervorzuheben, dass in der Darstellung (4, 18) von $q(x)$ Zähler und Nenner »teilerfremd« sind, d. h. keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Es ist nämlich ausgeschlossen, dass ein x_0 existiert, so dass

$$0 < |x_0| < 1, \quad \psi(x_0) = 0, \quad \psi(x_0^2) = 0.$$

Wäre dies der Fall, so hätten wir, gemäss (4, 19), auch

$$\psi(x_0^4) = 0,$$

und durch Wiederholung des Schlusses mit $x_0^2, x_0^4, x_0^8, \dots$ anstelle von x_0 erhielten wir

$$\psi(x_0^8) = \psi(x_0^{16}) = \psi(x_0^{32}) = \dots = 0,$$

also eine Folge von unendlich vielen Nullstellen mit dem Häufungspunkt 0. Dies ist ausgeschlossen; also haben $\psi(x)$ und $\psi(x^2)$ keine gemeinsame Nullstelle in ihrem Konvergenzbereich $|x| < 1$.

Man kann mit Benutzung der Kettenbruchdarstellung (8') und durch Schlussweisen, die von der Theorie der Sturmschen Ketten her geläufig sind, beweisen, dass $q(x)$ unendlich viele Pole auf der Strecke zwischen den Punkten $x = z$ und $x = 1$ besitzt. Man hebe folgende Eigenschaften von $q(x)$ hervor:

Erstens hat $q(x) = Q_0 + Q_1 x + \dots$ ganzzahlige Entwicklungskoeffizienten; zweitens ist $q(x)$ im Innern des Einheitskreises meromorph;

drittens ist $q(x)$ keine rationale Funktion (z. B. wegen der unendlich vielen Pole; auch durch Vergleich von Graden, mit direkter Verwendung von (4, 2) leicht zu zeigen).

Aus diesen drei Eigenschaften folgt, auf Grund eines allgemeinen Satzes¹, dass *der Rand des Einheitskreises eine singuläre Linie für $q(x)$ ist*. Man kann diese Tatsache auch ohne Benutzung des allgemeinen Satzes, aber durch bessere Ausnützung des Kettenbruches (8') nachweisen, was ich andeuten aber nicht ausführen will.

72. Jetzt soll die analytische Fortsetzung des Funktionselements $r(x)$ besprochen werden.

Es konvergieren die Potenzreihen $r(x), r(x^2), r(x^3)$ in Kreisen vom Mittelpunkte 0, deren Radien bzw. $\varrho, \varrho^{1/2}, \varrho^{1/3}$ sind. Man beachte, dass, gemäss Nr. 68 und 70, $\varrho \leq z < 1$, also

$$\varrho < \varrho^{1/2} < \varrho^{1/3}$$

ist. Man setze $r(x) = y$ und betrachte die Funktionalgleichung (4, 3) in der Form

¹ F. CARLSON, Math. Zeitschrift, 9 (1921), S. 1—13. G. PÓLYA, Proc. London Math. Soc. (2) 21 (1921), S. 22—38.

$$(4, 22) \quad xy^3 - 3[2 - xr(x^2)]y + 2[3 + xr(x^2)] = 0.$$

Die Funktion $y = r(x)$ genügt der Gleichung 3-ten Grades (4, 22), deren Koeffizienten in der Kreisfläche $|x| < \varrho^{1/2}$ regulär sind. Bei der analytischen Fortsetzung des Funktionselements $y = r(x)$ innerhalb dieser Kreisfläche kann eine Singularität sich nur auf zwei Arten einstellen:

Entweder muss der höchste Koeffizient der Gleichung (4, 22) verschwinden; es kommt nur die Stelle $x = 0$ in Betracht.

Oder muss die Gleichung (4, 22) eine mehrfache Wurzel y haben; dann muss die partielle Ableitung der linken Seite nach y verschwinden, d. h.

$$(4, 23) \quad xy^2 = 2 - xr(x^2)$$

sein. Wie die Elimination von y aus (4, 22) und (4, 23) zeigt, kommen nur solche Stellen in Betracht, für welche die Gleichung

$$(4, 24) \quad [2 - xr(x^2)]^3 - x[3 + xr(x^2)]^2 = 0$$

besteht. Solche Stellen können sich im Innern des Kreises $|x| < \varrho^{1/2}$, wo ja die linke Seite von (4, 24) regulär bleibt, nicht häufen, und in der Umgebung solcher Stellen bleibt der singular werdende Funktionszweig beschränkt, also stetig.

Nun handelt es sich um die singulären Stellen der Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreis, $|x| = \varrho$, der ja ganz im Innern der Fläche $|x| < \varrho^{1/2}$ verläuft. Der Punkt $x = 0$ liegt nicht auf diesem Kreis, daher muss die zweite der oben erwähnten Alternativen eintreffen: Die auf dem Konvergenzkreis liegenden singulären Stellen genügen den Gleichungen (4, 23) und (4, 24), und das Funktionselement $r(x)$ bleibt in ihnen stetig. Insbesondere muss die Potenzreihe $r(x)$ endlich bleiben, wenn x der reellen Achse entlang dem Punkt ϱ sich nähert; da diese Potenzreihe lauter positive Koeffizienten hat, bleibt sie, nach einer geläufigen Schlussweise, auch für $x = \varrho$, und folglich auf dem ganzen Kreisrande $|x| = \varrho$ *absolut konvergent*. Die für die singulären Punkte x auf dem Konvergenzrande gültige Gleichung (4, 23) ist also in der Form

$$(4, 25) \quad x \frac{r(x)^2 + r(x^2)}{2} = 1$$

zu schreiben, wo auf der linken Seite die *Potenzreihen* $r(x)$, $r(x^2)$ einzusetzen sind.

Da die Potenzreihe $r(x)$ lauter positive Koeffizienten hat, ist der Punkt $x = \varrho$ des Konvergenzkreises sicher singular; also besteht die Gleichung (4, 25)

für $x = \varrho$. Nun hat aber die Potenzreihe links in (4, 25) (abgesehen vom absoluten Glied, das verschwindet) lauter positive Koeffizienten, und daher wird sie im Punkte $x = \varrho$ einen grösseren absoluten Betrag annehmen, als in allen anderen Punkten des Kreises $|x| = \varrho$. Somit ist die Gleichung (4, 25) nur im Punkte $x = \varrho$ des Kreises $|x| = \varrho$ erfüllt: *Es ist $x = \varrho$ der einzige auf dem Konvergenzkreis von $r(x)$ liegende singuläre Punkt.*

Es ist nun leicht festzustellen, dass das Funktionselement $r(x)$ in der Umgebung von $x = \varrho$ nach Potenzen von $\sqrt{x - \varrho}$ entwickelbar ist, und dass die Entwicklung so beginnt:

$$(4, 26) \quad r(x) = a - b \sqrt{1 - \frac{x}{\varrho}} + \dots,$$

wobei a und b positive Zahlen bezeichnen; es ist

$$(4, 27) \quad a = r(\varrho),$$

$$(4, 28) \quad b = \sqrt{2 \frac{r(\varrho) - 1 + r(\varrho) r'(\varrho^2) \varrho^3 + r'(\varrho^3) \varrho^4}{\varrho r(\varrho)}}.$$

Die Verfolgung der Gleichung (4, 3) über den Kreis $|x| = \varrho^{1/2}$ hinaus ergibt, dass die Fortsetzung von $r(x)$ in jedem ganz im Innern des Einheitskreises gelegenen Gebiet algebraisch ist, d. h. nur endlich viele Zweige und endlich viele algebraische Verzweigungspunkte hat. Die Anzahl der Zweige dürfte unendlich werden, wenn das Gebiet sich wachsend dem Einheitskreis nähert.

Zu späteren Zwecken wollen wir uns noch folgendes Nebenresultat merken: *Die Gleichung (4, 25) hat in der abgeschlossenen Kreisfläche $|x| \leq \varrho$ die einzige Lösung $x = \varrho$.*

73. Durch Schlüsse, die denen der vorangehenden Nummer durchaus ähnlich sind, kann man die zur Bestimmung der Funktionen $s(x)$ und $t(x)$ dienenden Gleichungen

$$x y^3 - 3 y + 2 x s(x^3) + 3 = 0,$$

$$-y + x e^y \exp\left(\frac{t(x^3)}{2} + \frac{t(x^3)}{3} + \dots\right) = 0$$

behandeln. Zur Bestimmung der Singularitäten an der Konvergenzgrenze erhält man bzw.

$$(4, 29) \quad x s(x)^2 = 1,$$

$$(4, 30) \quad t(x) = 1,$$

welche Gleichungen den vorher behandelten (4, 17) und (4, 25) durchaus analog sind: Man kann in sie die Potenzreihen noch auf dem Konvergenzkreise einsetzen und sie haben daselbst, wegen der Positivität der Koeffizienten, nur eine Lösung, nämlich den positiven Punkt des Konvergenzkreises: *Auf der Konvergenzgrenze der Potenzreihe $s(x)$ liegt nur der singuläre Punkt $x = \sigma$, auf der von $t(x)$ nur $x = \tau$.* Die Funktionen lassen sich um diesen singulären Punkt herum nach Potenzen von $\sqrt{x - \sigma}$ bzw. von $\sqrt{x - \tau}$ entwickeln, und zwar beginnen diese Entwicklungen, wie (4, 26), mit

$$a' - b' \sqrt{1 - \frac{x}{\sigma}} + \dots \text{ bzw. } a'' - b'' \sqrt{1 - \frac{x}{\tau}} + \dots,$$

wobei a', b', a'', b'' positive Zahlen sind.

74. Kehren wir zurück zur Betrachtung der Reihe $r(x)$. Wie aus Nr. 72 hervorgeht, können wir den Konvergenzradius ρ von $r(x)$ sowohl anhand der Gleichung (4, 24) wie aus (4, 25) bestimmen. Wir wollen beide Möglichkeiten verwenden.

a) Die Gleichung (4, 25) ist, wie in Nr. 72 besprochen, für $x = \rho$ erfüllt, sie ist also wegen der Positivität der Koeffizienten der Potenzreihen auf der linken Seite, für keinen positiven Wert von x erfüllt, der $< \rho$ ist. Wir gewinnen das Kriterium: *Eine positive Zahl x ist dann und nur dann kleiner als ρ , wenn erstens $r(x)$ konvergiert und zweitens die linke Seite von (4, 25) kleiner als 1 ausfällt.*

Untersuchen wir den Wert $x = \sigma$; für diesen Wert konvergiert, wie in Nr. 73 angedeutet, die Reihe $s(x)$ und erfüllt die Gleichung (4, 29). Somit ist

$$(4, 31) \quad \sigma s(\sigma)^2 = 1;$$

man beachte, dass, wegen (10), $r(\sigma)$ konvergiert und

$$(4, 32) \quad r(\sigma) \leq s(\sigma);$$

ferner ist wegen der Positivität der Koeffizienten und wegen $r(0) = 1$

$$(4, 33) \quad r(\sigma)^2 > r(\sigma) > r(\sigma^2).$$

Aus (4, 31), (4, 32), (4, 33) folgt

$$1 = \sigma s(\sigma)^2 \geq \sigma r(\sigma)^2 > \sigma \frac{r(\sigma)^2 + r(\sigma^2)}{2}.$$

Also ist, gemäss dem ausgesprochenen Kriterium, $\sigma < \varrho$.

Auf dieselbe Art kann man alle in der Einleitung unter (13) und (14) erwähnten Ungleichungen beweisen.

b) Anhand der Gleichung (4, 24) kann man das folgende Kriterium aussprechen: *Wenn x ein positiver Wert ist, für den die Reihe $r(x^2)$ konvergiert, so ist x kleiner oder gleich oder grösser als ϱ , jenachdem*

$$\frac{x [3 + x r(x^2)]^2}{[2 - x r(x^2)]^3} < 1 \text{ oder } = 1 \text{ oder } > 1$$

ist. Dieses Kriterium erlaubt den Konvergenzradius ϱ mit Hilfe konvergenter Reihen zu berechnen. Man muss aber zur numerischen Durchführung eine Restabschätzung für die Reihe $r(x)$ besitzen. Wir gelangen dazu aus (10) und (12); diesen Ungleichungen gemäss ist

$$(4, 34) \quad R_n \leq T_n \leq \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Nun nimmt

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n}$$

bei wachsenden n beständig ab; somit ist

$$\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} > \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4} > \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4^2} > \dots,$$

und hieraus findet man mit Rücksicht auf (4, 34) die für $0 < x < \frac{1}{4}$ gültige

Restabschätzung

$$R_n x^n + R_{n+1} x^{n+1} + R_{n+2} x^{n+2} + \dots < \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{1-4x}.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung kann man anhand des obigen Kriteriums ϱ numerisch berechnen und auf ähnliche Weise kann man σ behandeln. Ich fand, dass

$$(4, 35) \quad 0,35 < \varrho < 0,36, \quad 0,30 < \sigma < 0,31.$$

Asymptotische Werte der Koeffizienten gewisser Potenzreihen.

75. Wir haben im Vorangehenden das funktionentheoretische Verhalten der Potenzreihen $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$ auf dem Konvergenzkreise festgestellt. Wir werden nun daraus eine Reihe von Folgerungen ziehen, indem wir eine leicht beweisbare und wohlbekanntere Beziehung zwischen den Singularitäten und den Koeffizienten von Potenzreihen uns zunutze machen, welche in dem folgenden Hilfssatz formuliert ist.¹

Hilfssatz. *Die Potenzreihe*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

soll auf ihrem Konvergenzkreise nur einen einzigen singulären Punkt $x = \alpha$ besitzen, in dessen Umgebung die dargestellte Funktion die Gestalt

$$(4, 36) \quad f(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-s} g(x) + \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-t} h(x)$$

hat. Hierin bedeuten

$g(x)$ und $h(x)$ analytische Funktionen, die in der Umgebung des Punktes $x = \alpha$ regulär sind; insbesondere ist $g(\alpha) = A \neq 0$.

s und t sind reelle Konstanten; s ist von allen nichtpositiven ganzen Zahlen, von $0, -1, -2, \dots$ verschieden; es ist entweder $t < s$ oder $t = 0$.

Dann ist für unendlich wachsendes n

$$a_n \sim \alpha^{-n} n^{s-1} \frac{A}{\Gamma(s)}.$$

Es liegt in der Voraussetzung dieses Hilfssatzes, dass das zweite Glied rechts in (4, 36) entweder regulär oder auf alle Fälle »leichter« singulär ist als das erste Glied rechts; das zweite Glied ist insbesondere dann regulär, wenn $t = 0$ ist. Die Behauptung besagt, dass der Koeffizient a_n sich asymptotisch gleich verhält, wie der Koeffizient von x^n in der Potenzreihenentwicklung von

$$A \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-s}.$$

¹ Vgl. z. B. R. JUNG, Commentarii Math. Helvetici, 3 (1931), S. 266–306, die Sätze A, S. 269 und 1, S. 275.

76. **Asymptotische Bestimmung von Q_n , R_n , S_n , T_n .** Das am Schlusse der Nr. 70 Ausgesprochene darf auch so gefasst werden, dass

$$(4, 37) \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = q(x) = \frac{1}{1 - x q(x^2)} = K \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} + h(x)$$

ist, wobei $h(x)$ in der abgeschlossenen Kreisfläche $|x| \leq x$ regulär ist, und $-xK$ das Residuum von $q(x)$ im Pole $x = x$ bedeutet. Somit ist

$$K = \frac{1}{(x[xq(x^2)])'_{x=x}} = \frac{1}{Q_0 x + 3 Q_1 x^3 + 5 Q_2 x^5 + \dots}$$

Es hat (4, 37) die im Hilfssatz der Nr. 75 gewünschte Form mit

$$\alpha = x, \quad s = 1, \quad t = 0, \quad A = K.$$

Somit ist

$$(4, 38) \quad Q_n \sim K x^{-n}.$$

Die Darlegungen der Nr. 72, insbesondere die Formel (4, 26) zeigen, dass die Voraussetzungen des Hilfssatzes der Nr. 75 für die Potenzreihe $r(x)$ zutreffen, wobei

$$\alpha = \varrho, \quad s = -\frac{1}{2}, \quad t = 0, \quad A = -b$$

ist. Da

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

erhalten wir für R_n , die Anzahl der strukturisomeren Alkohole $C_n H_{2n+1} O H$, die asymptotische Formel

$$(4, 39) \quad R_n \sim \varrho^{-n} n^{-3/2} \frac{b}{2\sqrt{\pi}}.$$

Ich erinnere an die numerische Abschätzung (4, 35) des Konvergenzradius ϱ von $r(x)$ und an den Ausdruck (4, 28) von b . Die asymptotische Formel (4, 39) scheint auch als Näherungsformel brauchbar zu sein, sogar für Werte von n , die noch ziemlich klein sind.¹

Ebenso leicht ergeben sich auch die andern beiden in der Einleitung unter (16) zusammengestellten asymptotischen Formeln, durch einfache Nebeneinanderstellung des Hilfssatzes der Nr. 75 und der funktionentheoretischen Eigenschaften, die wir in der Nr. 73 kennen lernten.

¹ Vgl. PÓLYA, 5.

77. **Homologe Reihen.** Es sei gegeben eine chemische Verbindung, im folgenden »Stammkörper« genannt, welche s durch Alkyle $-C_nH_{2n+1}$ substituierbare $-H$ enthält. Die Strukturformelgruppe des Stammkörpers ist eine Permutationsgruppe vom Grade s , welche die s Stellen der substituierbaren H -Atome vertauscht; ihr Zyklenzeiger sei das Polynom $\psi(f_1, f_2, \dots, f_s)$. (Bezeichnung wie in Nr. 25.) Nach dem Vorbild der Nr. 58 ergibt der Koeffizient von x^n in der Potenzreihenentwicklung von

$$(4, 40) \quad \psi(r(x), r(x^2), \dots, r(x^s))$$

die Anzahl derjenigen strukturisomeren Homologen (Alkylderivate) des Stammkörpers, welche n Stück C -Atome mehr enthalten, als der Stammkörper.

Gemäss Nr. 72 hat die Funktion (4, 40) ausser dem Punkt $x = \varrho$ keinen singulären Punkt im Kreise $|x| \leq \varrho$. Dass aber der Punkt $x = \varrho$ wirklich singulär ist, ersieht man aus der Entwicklung von (4, 40) nach Potenzen von $\sqrt{x - \varrho}$ in der Umgebung von $x = \varrho$, welche, gemäss (4, 26), mit

$$(4, 41) \quad \psi(r(\varrho), \dots, r(\varrho^s)) - \psi'_{f_1}(r(\varrho), \dots, r(\varrho^s)) b \sqrt{1 - \frac{x}{\varrho}} + \dots$$

beginnt; das zweitangeschriebene Glied verschwindet nämlich sicherlich nicht, es sind ja die Koeffizienten in der partiellen Ableitung $\psi'_{f_1}(f_1, \dots, f_s)$ und ebenso die Werte $r(\varrho), r(\varrho^2), \dots$ positiv.

Die Entwicklung (4, 41) von (4, 40) zeigt, dass der Hilfssatz der Nr. 75 anwendbar ist; wir erhalten, dass der Koeffizient von x^n in der Maclaurinschen Reihe von (4, 40)

$$\sim \varrho^{-n} n^{-3/2} \frac{b}{2\sqrt{\pi}} \psi'_{f_1}(r(\varrho), \dots, r(\varrho^s)).$$

Diese Tatsache ist, mit einer in der Einleitung (Nr. 5) definierten Ausdrucksweise so auszusprechen: *Die Anzahl derjenigen strukturisomeren Homologen eines gegebenen Stammkörpers, deren Kohlenstoffinhalt den des Stammkörpers um n Einheiten übertrifft, ist der Anzahl der strukturisomeren $C_nH_{2n+1}OH$ asymptotisch proportional.* Die volle Formel zeigt, wie der Proportionalitätsfaktor mit dem Zyklenzeiger der Strukturformelgruppe des Stammkörpers zusammenhängt.

78. **Mehrfach substituierte Paraffine.** Wir wollen uns jetzt mit der durch (3, 13) definierten Funktion $R(x)$ befassen. Ihre funktionentheoretischen Eigen-

schaften sind aus Nr. 72 ersichtlich; es kommen besonders die Schlussbemerkung dieser Nummer und die Reihenentwicklung (4, 26) in Betracht. Unter gebührender Berücksichtigung des dort Gesagten erhält man leicht: *Die Funktion*

$$(4, 42) \quad \frac{1}{1-xR(x)} = \frac{1}{\rho a b} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

ist in der abgeschlossenen Kreisfläche $|x| \leq \rho$ regulär, mit Ausnahme des einzigen Punktes $x = \rho$; in der Umgebung dieses Punktes besitzt (4, 42) eine Entwicklung nach wachsenden Potenzen von $\sqrt{x - \rho}$, welche wie rechts in (4, 42) angegeben beginnt.

Nun können wir uns der Summe (3, 18) zuwenden. Diese Summe ist, wie jedes ihrer endlich vielen Glieder, kraft des eben Gesagten in der offenen Kreisfläche $|x| < \rho$ ausnahmslos regulär, hat an deren Rand den einzigen singulären Punkt $x = \rho$, und lässt sich um $x = \rho$ herum nach wachsenden Potenzen von $\sqrt{x - \rho}$ entwickeln. Ein Glied der Summe (3, 18) ist nun in dem Punkte $x = \rho$ umso »schwerer« singulär, je grösser der Exponent s des Nenners ist. Der grösste Wert von s wird gemäss (3, 17) dann erreicht, wenn

$$(4, 43) \quad p_4 = 0, \quad s = 2l - 3, \quad p_3 = l - 2$$

ist, u.zw. erreichen, gemäss der Bemerkung am Schluss der Nr. 63,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 5)$$

Glieder der Summe (3, 18) den grössten Wert von s . Die Reihenentwicklung der ganzen Summe (3, 18) um $x = \rho$ hat dasselbe Anfangsglied, wie die der Vereinigung derjenigen seiner Glieder, die mit den Werten (4, 43) gebildet sind:

$$(4, 44) \quad 1 \cdot 3 \dots (2l - 5) \frac{[x r(x)]^{l-2}}{[1-xR(x)]^{2l-3}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 5) (\rho a)^{l-2}}{(\rho a b)^{2l-3}} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{-\frac{2l-3}{2}} + \dots$$

Zur Bildung des auf der rechten Seite von (4, 44) auftretenden Anfangsgliedes ziehe man (4, 26) und (4, 42) heran.

Die Anwendung des Hilfssatzes der Nr. 75 auf (3, 18) oder, was schliesslich das Gleiche ergibt, auf (4, 44), zeigt: *Die Anzahl der strukturisomeren $C_n H_{2n+2-l} X' X'' \dots X^{(l)}$ ist*

$$\sim \varrho^{-n} n^{\frac{2l-5}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-5) (\varrho a)^{l-2}}{(\varrho a b)^{2l-3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2l-3}{2}\right)}$$

$$= \varrho^{-n} n^{\frac{2l-5}{2}} \frac{\varrho a b^3}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\varrho a b^2}\right)^l,$$

sodass die Einführung eines weiteren Substituenten der asymptotischen Anzahl einen weiteren mit der Kohlenstoffanzahl n proportionalen Faktor hinzufügt. Dieses Resultat wurde schon in der Einleitung in Aussicht gestellt. Wir haben es hier für $l \geq 2$ bewiesen, aber es bleibt auch für $l = 1$ gültig, in welchem Falle es ja mit (4, 39) gleichbedeutend ist. Ob es auch für $l = 0$, d. h. für die (unsubstituierten) Paraffine selber gültig bleibt, wissen wir noch nicht, und wir werden es erst nach den Entwicklungen der Nr. 80—86 erfahren.

79. **Kohlenwasserstoffe** $C_n H_{2n+2-2\mu}$. Betrachten wir zunächst den Fall $\mu = 1$. Die Kohlenwasserstoffe von der Formel $C_n H_{2n}$ sind entweder Äthylenhomologen oder Cycloparaffine, jenachdem sie eine Doppelbindung enthalten oder nicht. Die Anzahl der strukturisomeren Äthylenhomologen $C_n H_{2n}$ ist, gemäss Nr. 77, asymptotisch proportional $\varrho^{-n} n^{-3/2}$. Wenden wir uns also den strukturisomeren Cycloparaffinen zu; ihre abzählende Potenzreihe P ist durch (3, 22) gegeben. Aus dieser Formel ersehen wir, dass P in der abgeschlossenen Kreisfläche $|x| \leq \varrho$ einen einzigen singulären Punkt, nämlich $x = \varrho$ besitzt. Von der Summe, die in der letzten Zeile von (3, 22) steht, wird nur ein Glied für $x = \varrho$ singulär, dasjenige mit $k = 1$:

$$\frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - x R(x)} = \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{\varrho a b} \left(1 - \frac{x}{\varrho}\right)^{-\frac{1}{2}} + \dots \right],$$

vgl. (4, 42). Es ergibt sich nun leicht, dass P die Gestalt

$$(4, 45) \quad P = -\frac{1}{4} \log \left(1 - \frac{x}{\varrho}\right) + \left(1 - \frac{x}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} g(x) + h(x)$$

hat, wobei $g(x)$ und $h(x)$ in einer Umgebung des Punktes $x = \varrho$ regulär sind. Der Koeffizient von x^n in der Potenzreihenentwicklung des ersten Gliedes rechts in (4, 45) ist $1/(4n\varrho^n)$; dies überwiegt $\varrho^{-n} n^{-3/2}$, und es ist, auf Grund des Hilfssatzes der Nr. 75, sowohl der n -te Koeffizient der beiden letzten Glieder rechts in (4, 45) wie auch, wie schon gesagt, die Anzahl der Äthylenhomologen asymp-

totisch proportional $q^{-n} n^{-3/2}$. Daher ist die Anzahl der strukturisomeren Kohlenwasserstoffe von der Molekularformel $C_n H_{2n}$

$$\sim \frac{q^{-n}}{4^n}$$

Über die strukturisomeren Kohlenwasserstoffe $C_n H_{2n+2-2\mu}$ mit festem $\mu \geq 2$ sollen hier nur einige Andeutungen Platz finden. In der abzählenden Potenzreihe ist der »Hauptbestandteil«, d. h. derjenige Summand, der im Punkte $x = q$ am stärksten unendlich wird, abgesehen von einem konstanten Faktor, von der gleichen Form, wie das allgemeine Glied der Summe (3, 18). Die Anzahlen p_3, p_4, s sind mit μ [vgl. (2, 1), (2, 2), (2, 3)] durch die Beziehung

$$(4, 46) \quad s - p_3 - p_4 + 1 = \mu, \quad 3p_3 + 4p_4 = 2s$$

verbunden, und dadurch bestimmt, dass s möglichst gross ist. Es folgt nun aus (4, 46)

$$s = 3(\mu - 1) - p_4.$$

Für $p_4 = 0$ erhalten wir den Grösstwert von s und es nimmt der Summand in (3, 18) die Gestalt

$$\frac{[x r(x)]^{2(\mu-1)}}{[1 - x R(x)]^{3(\mu-1)}} = C \left(1 - \frac{x}{q}\right)^{-\frac{3\mu-3}{2}} + \dots$$

an. Hieraus folgt kraft des Hilfssatzes in Nr. 75: Die Anzahl der Kohlenwasserstoffe $C_n H_{2n+2-2\mu}$ mit gegebenen μ ist asymptotisch proportional $q^{-n} n^{(3\mu-5)/2}$.

Für $\mu = 1$ stimmt dies mit dem in dieser Nummer ausführlicher bewiesenen Resultat über die $C_n H_{2n}$ überein, und es gilt auch (aber ist schwieriger zu beweisen) für $\mu = 0$; vgl. die folgenden Nummern.

Die Anzahl der strukturisomeren Paraffine.

80. Von den vier unter (17) zusammengestellten asymptotischen Formeln will ich nur die zweite, welche q_n betrifft, ausführlich beweisen. Sie hat eine mittlere Stellung: Die Formel für \varkappa_n ist viel leichter, die für σ_n ebenso schwer und die für τ_n etwas schwerer zu beweisen als die Formel für q_n . Die Anzahlen q_n und τ_n wurden schon von Cayley betrachtet; aber der Anzahl q_n wurde, wegen ihrer chemischen Bedeutung, wohl mehr Interesse entgegengebracht, als der Anzahl τ_n .

Wir haben darzutun, dass

$$\varrho_n \varrho^n n^{5/2}$$

für $n \rightarrow \infty$ einem positiven Grenzwert zustrebt.

Es ist nun, gemäss (2, 41)

$$(4, 47) \quad \varrho_n \varrho^n n^{5/2} = \varrho'_n \varrho^n n^{5/2} + \varrho''_n \varrho^n n^{5/2}.$$

Wir entnehmen (2, 50), dass

$$(4, 48) \quad \varrho'_n \varrho^n n^{5/2} = \varrho \left(\frac{1}{24} U_n + \frac{1}{4} V_n + \frac{1}{8} W_n + \frac{1}{3} W'_n + \frac{1}{4} W''_n \right),$$

wobei

$$(4, 49) \quad U_n = n^{5/2} \sum R_i \varrho^i R_j \varrho^j R_k \varrho^k R_l \varrho^l, \quad (i+j+k+l = n-1),$$

$$(4, 50) \quad V_n = n^{5/2} \sum R_i \varrho^i R_j \varrho^j R_k \varrho^{2k}, \quad (i+j+2k = n-1),$$

$$(4, 51) \quad W_n = n^{5/2} \varrho^{(n-1)/2} \sum R_i \varrho^i R_j \varrho^j, \quad (2i+2j = n-1),$$

$$(4, 52) \quad W'_n = n^{5/2} \varrho^{(n-1)/3} \sum R_i \varrho^i R_j \varrho^j \cdot \varrho^{2j-(n-1)/3}, \quad (i+3j = n-1),$$

$$(4, 53) \quad W''_n = n^{5/2} \varrho^{3(n-1)/4} \sum R_i \varrho^i, \quad (4i = n-1).$$

Die Summationen sind über solche ganzzahlige Lösungssysteme (i, j, k, l) [bzw. (i, j, k) , (i, j) , (i)] der betreffenden, am Ende der Zeile stehenden Gleichung zu erstrecken, welche der Bedingung

$$(4, 54) \quad 0 \leq i < \frac{n}{2}, \quad 0 \leq j < \frac{n}{2}, \quad 0 \leq k < \frac{n}{2}, \quad 0 \leq l < \frac{n}{2}$$

genügen. Leere Summen sind als 0 zu interpretieren. Z. B. besteht W''_n aus einem Glied oder hat den Wert 0, je nachdem $n-1$ teilbar ist durch 4 oder nicht.

Zur Auswertung der eingeführten Grössen bedienen wir uns hauptsächlich der Beziehung (4, 39). Es folgt daraus, dass eine positive Zahl C existiert, so dass

$$(4, 55) \quad R_m \varrho^m m^{3/2} < C \quad \text{für } m = 1, 2, 3, \dots,$$

ferner, dass die drei positivgliedrigen Reihen

$$(4, 56) \quad R_0 + R_1 \varrho + \dots + R_k \varrho^k + \dots = r(\varrho) = a,$$

$$(4, 57) \quad 1 R_0 + 3 R_1 \varrho^2 + \dots + (2k + 1) R_k \varrho^{2k} + \dots,$$

$$(4, 58) \quad 1 R_0^2 + 3 R_1^2 \varrho^2 + \dots + (2k + 1) R_k^2 \varrho^{2k} + \dots$$

konvergieren. Auch

$$(4, 59) \quad 0 < \varrho < 1$$

ist natürlich im folgenden häufig zu berücksichtigen.

81. Gemäss (2, 46) und wegen (4, 39) ist

$$(4, 60) \quad \varrho'' \varrho^n n^{5/2} \leq R_{n/2}^2 \varrho^n n^{5/2} = O(n^{-1/2}).$$

Ferner ist leicht festzustellen, dass

$$(4, 61) \quad W_n \rightarrow 0, \quad W'_n \rightarrow 0, \quad W''_n \rightarrow 0.$$

Bei W''_n genügt $\varrho < 1$ und die Konvergenz von $r(\varrho)$ zu berücksichtigen, bei W_n ist noch zu bemerken, dass auch das Quadrat der absolutkonvergenten Reihe $r(\varrho)$ konvergiert, bei W'_n kommt noch hinzu die aus (4, 54) und der Summationsbedingung in (4, 52) folgende Ungleichung

$$3j = n - 1 - i \geq \frac{n-1}{2}, \quad 2j \geq \frac{n-1}{3}.$$

82. Heikler ist die Behandlung von V_n . Wir teilen die Summe unter (4, 50) in zwei Teile: die Glieder für welche

$$(4, 62) \quad k \leq (n-3)/6$$

gilt, rechnen wir zu V'_n , die übrigen zu V''_n , so dass

$$(4, 63) \quad V_n = V'_n + V''_n.$$

Es ist also

$$V''_n = n^{5/2} \varrho^{(n-3)/6} \sum R_i \varrho^i R_j \varrho^j R_k \varrho^k \cdot \varrho^{k-(n-3)/6},$$

wobei die Summation nur diejenigen in V_n vorkommenden Systeme i, j, k umfasst, für welche der Exponent des letzten Faktors unter dem Summenzeichen positiv ausfällt. Da auch die dritte Potenz von $r(\varrho)$ konvergiert, folgt

$$(4, 64) \quad V''_n \rightarrow 0.$$

Es ist

$$(4, 65) \quad V'_n = n^{5/2} \sum_{k=0}^{(n-3)/6} R_k \varrho^{2k} \sum_{i,j} R_i \varrho^i R_j \varrho^j \leq n^{5/2} \sum_{k=0}^{(n-3)/6} R_k \varrho^{2k} C^2 \mu^{-3} L(k),$$

mit Rücksicht auf (4, 55). Hierbei bedeutet

μ die kleinere (nicht grössere) der beiden Zahlen i und j ,

$L(k)$ die Anzahl der Zahlenpaare i, j , welche ausser (4, 54) noch der Gleichung

$$(4, 66) \quad i + j = n - 2k - 1$$

genügen.

Es ist, wegen (4, 54) und (4, 62),

$$n - 1 = i + j + 2k < \mu + \frac{n}{2} + \frac{n-3}{3},$$

$$(4, 67) \quad \mu > \frac{n}{6}.$$

Indem man (4, 66), je nachdem n gerade oder ungerade, in einer der beiden Formen

$$\left(\frac{n}{2} - i\right) + \left(\frac{n}{2} - j\right) = 2k + 1, \quad \left(\frac{n+1}{2} - i\right) + \left(\frac{n-1}{2} - j\right) = 2k + 1$$

schreibt, stellt man leicht fest, dass

$$(4, 68) \quad L(k) \leq 2k + 1.$$

Es folgt aus (4, 65), (4, 67), (4, 68)

$$(4, 69) \quad V'_n < n^{-1/2} C^2 6^3 \sum_{k=0}^{(n-3)/6} (2k + 1) R_k \varrho^{2k} = O(n^{-1/2}),$$

da die Reihe (4, 57) konvergiert.

83. Die Summe unter (4, 49) teilen wir in drei Teile, indem wir

$$(4, 70) \quad U_n = U'_n + U''_n + U'''_n$$

setzen.

U'''_n umfasst diejenigen Glieder der Summe, in welchen alle vier Summationsindices i, j, k, l grösser als $(n-3)/6$ sind.

U''_n umfasst solche Glieder, in welchen die zwei kleinsten unter den Indices i, j, k, l einander gleich und beide $\leq (n-3)/6$ sind.

U'_n umfasst folglich solche Glieder, in welchen das Minimum von i, j, k, l nur durch eine dieser Zahlen erreicht und $\leq (n-3)/6$ ist.

Die ganze Summe im Ausdruck (4, 49) von U_n umfasst weniger als n^3 Glieder. In denjenigen Gliedern, welche zu U'''_n gehören, ist, kraft (4, 55), jeder der vier Faktoren

$$O(n^{-3/2}).$$

Somit ist

$$(4, 71) \quad U'''_n = O(n^{5/2} \cdot n^{-12/2} \cdot n^3) = O(n^{-1/2}).$$

Derjenige Teil von U''_n , der von Gliedern mit $k=l$ herrührt, ist nicht grösser als

$$\begin{aligned} & n^{5/2} \sum_{k=0}^{(n-3)/6} R_k^2 q^{2k} \sum_{i,j} R_i q^i R_j q^j \\ & < n^{5/2} \sum_{k=0}^{(n-3)/6} R_k^2 q^{2k} C^2 \mu^{-3} L(k) \\ & < n^{-1/2} C^2 6^3 \sum_{k=0}^{(n-3)/6} (2k+1) R_k^2 q^{2k} = O(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Wir haben die Bezeichnungen μ und $L(k)$ und die Abschätzungen (4, 67) und (4, 68) aus der vorigen Nr. 82 übernommen, und der einzige Unterschied von der Rechnung, die dort zur Abschätzung von V'_n führte, war, dass wir hier die Konvergenz von (4, 58) und dort die von (4, 57) benutzten.

Merken wir uns, dass

$$(4, 72) \quad U''_n = O(n^{-1/2}).$$

84. Wir teilen die Glieder, aus denen die Summe $n^{-5/2} U'_n$ besteht, in 4 Kategorien, jenachdem i, j, k oder l die kleinste unter diesen 4 Zahlen ist; die kleinste ist ja, nach der Definition von U'_n , eindeutig bestimmt. Die Glieder haben in jeder Kategorie die gleiche Summe; daher ist (wir zeichnen l aus)

$$(4, 73) \quad U'_n = 4 \sum_{l=0}^{(n-3)/6} R_l q^l U_{n,l},$$

wobei

$$(4, 74) \quad U_{n,l} = n^{3/2} \sum_{i,j,k} R_i \varrho^i R_j \varrho^j R_k \varrho^k \\ = \sum_{i,j,k} R_i \varrho^i i^{3/2} R_j \varrho^j j^{3/2} R_k \varrho^k k^{3/2} \left(\frac{i}{n} \frac{j}{n} \frac{k}{n} \right)^{-3/2} \frac{1}{n^2}$$

ist; die Summation ist über solche Tripel (i, j, k) von ganzen Zahlen erstreckt, für welche

$$i + j + k = n - l - 1$$

$$l < i < \frac{n}{2}, \quad l < j < \frac{n}{2}, \quad l < k < \frac{n}{2}$$

gilt. Mit Rücksicht auf (4, 39) ersieht man aus der Gestalt von (4, 74), dass bei festem l für $n \rightarrow \infty$

$$(4, 75) \quad U_{n,l} \sim \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \sum_{i,j,k} \left(\frac{i}{n} \frac{j}{n} \frac{k}{n} \right)^{-3/2} \frac{1}{n^2} \\ \rightarrow \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_D \int [xy(1-x-y)]^{-3/2} dx dy \\ = \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 I.$$

Das Integrationsgebiet D des mit I bezeichneten Doppelintegrals ist durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq 1 - x - y \leq \frac{1}{2}$$

oder, gleichwertig aber kürzer, durch

$$(4, 76) \quad x \leq \frac{1}{2}, \quad y \leq \frac{1}{2}, \quad x + y \geq \frac{1}{2}$$

abgegrenzt; D ist ein Dreieck. Das Integral in (4, 75) ist ein uneigentliches Integral, in Riemannschem Sinne; dass es sich trotzdem, wie angegeben, durch eine endliche Summe von »Prismen« annähern lässt, beruht auf den speziellen Monotonieeigenschaften des Integranden, aus welchen noch weiter hervorgeht, dass $U_{n,l}$ unter einer von n und l unabhängigen festen Schranke liegt. Ich verzichte auf die ausführliche Begründung, da ja ähnliche Überlegungen für einfache uneigentliche Riemannsche Integrale geläufig sind.¹

¹ Vgl. z. B. PÓLYA u. SZEGÖ, a. a. O., Fussnote S. 194, Bd. I, S. 39–41 u. S. 198–199.

So folgt aus (4, 73) und (4, 75) mit der Bezeichnung (4, 56)

$$(4, 77) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U'_n = 4 \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 I \sum_{l=0}^{\infty} R_l \varrho^l = 4 a \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 I.$$

85. Das in (4, 75) auftretende Doppelintegral I lässt sich überraschend einfach auswerten. Es ist

$$(4, 78) \quad I = \int_0^{1/2} y^{-3/2} K dy,$$

wobei

$$\begin{aligned} K &= \int_{\frac{1}{2}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^3 \left(\frac{1-x-y}{x} \right)^{3/2}} = \frac{2}{(1-y)^2} \int_{\frac{1}{2}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{1+t^2}{\sqrt{1-2y}} dt \\ &= \frac{8y}{(1-y)^2 \sqrt{1-2y}}; \end{aligned}$$

es wurde die Substitution

$$\frac{1-x-y}{x} = t^2$$

benützt. Indem man den Wert von K in (4, 78) einsetzt, erhält man

$$(4, 79) \quad I = 8 \int_0^{1/2} \frac{dy}{(1-y)^2 \sqrt{y(1-2y)}} = 16\sqrt{2} \int_0^1 \frac{x^{-1/2} (1-x)^{-1/2}}{(1+x)^2} dx;$$

es wurde die Substitution

$$1-2y = x$$

benützt. Ein Spezialfall eines von Abel¹ ausgewerteten Integrals ist

$$\int_0^1 \frac{x^{-1/2} (1-x)^{-1/2}}{u+x} dx = \pi (u+u^2)^{-1/2}.$$

Indem man dies zuerst nach u differenziert und dann $u = 1$ setzt, erhält man aus (4, 79)

¹ N. H. ABEL, Oeuvres (1881), Bd. I, S. 254.

$$(4, 80) \quad I = \int_D \int [xy(1-x-y)]^{-3/2} dx dy = 12\pi.$$

86. Durch Zusammenfassung von (4, 47), (4, 48), (4, 60), (4, 61), (4, 63), (4, 64), (4, 69), (4, 70), (4, 71), (4, 72), (4, 77) und (4, 80) erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n \varrho^n n^{3/2} = \frac{\varrho}{24} \lim_{n \rightarrow \infty} U'_n = \frac{\varrho}{24} 4a \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 12\pi$$

oder kürzer

$$(4, 81) \quad \varrho_n \sim \varrho^{-n} n^{-3/2} \frac{\varrho a b^3}{4\sqrt{\pi}}.$$

Dies besagt, dass das Schlussresultat der Nr. 78 auch für $l = 0$ gültig bleibt; dies wurde durch die Entwicklungen der Nr. 78 vielleicht plausibel gemacht, aber keineswegs verbürgt. Der Vergleich von (4, 39) und (4, 81) mit der chemisch (oder kombinatorisch) evidenten zweiten Ungleichung unter (11) zeigt, dass

$$\varrho a b^3 \geq 2.$$

(Die numerische Rechnung ergibt, dass das Ungleichheitszeichen gilt.)

Die merkwürdige kombinatorische Anzahl ϱ_n , d. h. die Anzahl der verschiedenen strukturierten Paraffine von der Molekularformel $C_n H_{2n+2}$, welche schon Cayley beschäftigt hat, ist durch (4, 81) asymptotisch berechnet.

Literaturverzeichnis.

- C. M. BLAIR und H. R. HENZE, *Journal of the American Chemical Society* **1.** 53 (1931) S. 3042—3046; **2.** 53 (1931) S. 3077—3085; **3.** 54 (1932) S. 1098—1106; **4.** 54 (1932) S. 1538—1545; **5.** 55 (1933) S. 680—686; **6.** 56 (1934) S. 157.
- A. CAYLEY, *Collected mathematical papers*, (Cambridge 1889—1898) **1.** Bd. 3, S. 242—246; **2.** Bd. 4, S. 112—115; **3.** Bd. 9, S. 202—204; **4.** Bd. 9, S. 427—460; **5.** Bd. 9, S. 544—545; **6.** Bd. 10, S. 598—600; **7.** Bd. 11, S. 365—367; **8.** Bd. 13, S. 26—28.
- C. JORDAN. **1.** *J. f. die reine und angewandte Math.* 70 (1869) S. 185—190.
- D. KÖNIG. **1.** *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig 1936).
- A. C. LUNN und J. K. SENIOR. **1.** *Journal of physical chemistry* 33 (1929) S. 1027—1079.
- G. PÓLYA. **1.** *Helvetica chimica Acta* 19 (1936) S. 22—24. **2.** *Comptes Rendus, Académie des Sciences* 201 (1935) S. 1167—1169. **3.** *Daselbst* 202 (1936) S. 1554—1556. **4.** *Zeitschr. f. Kristallographie (A)* 93 (1936) S. 415—443. **5.** *Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich* 81 (1936) S. 243—258.
-

Inhaltverzeichnis.

	Seite
1—6. Einleitung	145
I. GRUPPEN.	
7—12. Definitionen	155
13—18. Vorbereitende Aufgaben	159
19—20. Bestimmung der Anzahl der inäquivalenten Konfigurationen für eine beliebige Permutationsgruppe	165
21—23. Spezialfälle	168
24. Verallgemeinerung	173
25—27. Beziehungen zwischen Zyklenzeiger und Permutationsgruppe	174
II. GRAPHEN.	
28—37. Definitionen	181
38—45. Setzbäume	191
46—52. Freie Bäume	201
53. Zur numerischen Berechnung	207
54. Bemerkungen über die Automorphismengruppe eines freien topologischen Baumes	208
III. CHEMISCHE VERBINDUNGEN.	
55—59. Allgemeines	210
60—65. Spezielle Fragen	217
IV. ASYMPTOTISCHE BESTIMMUNG DER BETRACHTETEN KOMBINATORISCHEN ANZAHLEN.	
66—74. Funktionentheoretische Eigenschaften	229
75—79. Asymptotische Werte der Koeffizienten gewisser Potenzreihen	240
80—86. Die Anzahl der strukturisomeren Paraffine	245
Literaturverzeichnis	253

