RECHERCHES SUR LES CHAÎNES DE MARKOFF.

Premier Mémoire.

PAR

V. ROMANOVSKY

à TACHKENT.

Dans le présent mémoire je m'occuperai des chaînes discrètes de Markoff et, en premier lieu, des chaînes simples. Je laisse de côté l'histoire des chaînes de Markoff aussi que l'exposé de leur état actuel. Le lecteur en trouvera l'exposition bien intéressante dans l'article des MM. J. Hadamard et M. Fréchet »Sur les probabilités discontinues des évènements en chaîne», publié dans *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* 13 (1933), 92—97.

Puisque la théorie des matrices stochastiques et de leurs zéros joue un rôle fondamental dans la théorie des chaînes de Markoff et est intimement liée à la théorie des matrices non-négatives développée par G. Frobenius[1] je commencerai mon mémoire par un exposé des résultats de G. Frobenius acompagné avec des nouvelles démonstrations ou des indications des démonstrations des plus graves de ces résultats et des développements de la théorie de G. Frobenius qui sont indispensables pour le suivant et qui concernent les matrices stochastiques.

Chapitre I. **Matrices non-négatives et matrices stochastiques.**

1. Définitions et notations. Une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

---

[1] G. Frobenius a publié trois mémoires concernant les matrices non-négatives:

1. Ueber Matrizen aus positiven Elementen I. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1908, 471—476.

2. Ueber Matrizen aus positiven Elementen II. Ibidem, 1909, 514—518.

3. Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen. Ibidem, 1912, 456—477.

Ils sont cités plus loin comme Fr. 1, Fr. 2 et Fr. 3.

où les éléments sont des nombres réels, est dite non-négative si

$$a_{\alpha\beta} \geqq 0 \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}).$$

Nous la désignons par A ou $Mt(a_{\alpha\beta})$ et nous écrirons

$$A \geqq 0$$

au lieu des inégalités précédentes. On dit qu'elle est positive et on écrit $A > 0$ si les éléments $a_{\alpha\beta}$ sont tous positifs.

Une matrice non-négative

$$\Phi \equiv Mt(\varphi_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

est dite stochastique si elle remplit deux conditions:

1°. $$\sum_{\beta} \varphi_{\alpha\beta} = 1 \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}).$$

2°. Nulle ligne et nulle colonne de Φ n'est pas vide, c'est-à-dire ne contient pas exclusivement des zéros.

Une matrice stochastique Φ peut être non-négative ou positive selon que $\Phi \geqq 0$ ou $\Phi > 0$.

Soit

$$E \equiv Mt(c_{\alpha\beta})$$

une matrice unitaire, où

$$c_{\alpha\alpha} = 1 \quad (\alpha = \overline{1, n}) \quad \text{et} \quad c_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = \overline{1, n};\ \alpha \neq \beta).$$

Alors, en désignant généralement un déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

par $|C|$, les équations

$$|\lambda E - A| \equiv A(\lambda) = 0,$$
$$|\lambda E - \Phi| \equiv \Phi(\lambda) = 0$$

sont appelées équations caractéristiques et leurs racines nombres caractéristiques ou zéros des matrices A et Φ respectivement.

2. *Propriétés fondamentales des matrices non-négatives et des matrices stochastiques. I. Si $A > 0$, l'équation caractéristique $A(\lambda) = 0$ a une racine r qui est réelle, positive, simple et plus grande en valeur absolue que toutes les autres racines de cette équation.*

Le lecteur trouvera une démonstration de cette proposition dans Fr. 1 (p. 471). La racine r est nommée par G. Frobenius racine maximale de $A(\lambda) = 0$. Nous l'appellerons zéro maximal de A.

II. *En désignant par $A_{\beta\alpha}(\lambda)$ le mineur de l'élément $\lambda e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$ du déterminant $|\lambda E - A|$ on a*

$$A_{\beta\alpha}(\lambda) > 0 \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

si $\lambda \geqq r$ et $A > 0$. (Fr. 1, p. 472).

On peut encore dire que la matrice adjointe de la matrice $\lambda E - A$ est positive pour $\lambda \geqq r$ si $A > 0$, parce que cette matrice adjointe est une matrice dont les éléments sont $A_{\beta\alpha}(\lambda)$.

III. *Si $A > 0$, le zéro maximal r de A est contenu entre la plus grande et la plus petite des quantités*

$$a_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}) \qquad \text{(Fr. 1, p. 476).}$$

IV. *Toute matrice stochastique Φ a pour zéro maximal $\lambda_0 = 1$; ce zéro est simple et plus grand en valeur absolue que tous les autres zéros de Φ si Φ est positif; en ce cas tous les mineurs $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ de $\Phi(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq 1$.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes précédents de G. Frobenius. En effet, on a

$$\varphi_\alpha = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{pour} \quad \alpha = \overline{1, n},$$

donc, par III, $\lambda_0 = 1$ est le zéro maximal de Φ si $\Phi > 0$. Les autres affirmations du théorème IV découlent de I et II.

D'ailleurs ce théorème peut être démontré directement et très simplement.

Quel que soit Φ, positif ou non-négatif, on peut écrire

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\varphi_{12} & \dots & -\varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda - 1 & -\varphi_{n2} & \dots & \lambda - \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

en ajoutant à la première colonne toutes les autres, d'où l'on voit que $\lambda_0 = 1$ est un zéro de Φ.

Ensuite, en partant du système

$$\lambda x_\beta = \sum_\alpha x_\alpha \varphi_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}) \tag{1}$$

qui a une solution non-nulle, si λ est un zéro de Φ, on obtient

$$|\lambda| \sum_\beta |x_\beta| \leqq \sum_\alpha |x_\alpha| \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} = \sum_\alpha |x_\alpha|,$$

d'où, pour tout zéro de Φ,

$$|\lambda| \leqq 1.$$

Donc, $\lambda_0 = 1$ est bien zéro maximal de Φ.

Soit $\lambda = 1$ et $\Phi > 0$. Le système (1) a alors une solution

$$x_\beta^0 \neq 0 \qquad (\beta = \overline{1, n}).$$

Démontrons que x_β^0 sont tous d'un même signe. Pour ce but nous tirons du système (1) une conséquence qui sera très utile dans la suite.

Supposons que $\lambda = |\lambda| (\cos\theta + i \sin\theta)$ soit un zéro de Φ. Alors le système (1) aura une solution

$$x_\beta = |x_\beta| (\cos\theta_\beta + i \sin\theta_\beta) \qquad (\beta = \overline{1, n}),$$

où x_β ne sont pas tous nuls, et on obtiendra de (1)

$$|\lambda| |x_\beta| \cos(\theta + \theta_\beta) = \sum_\alpha |x_\alpha| \varphi_{\alpha\beta} \cos\theta_\alpha,$$

$$|\lambda| |x_\beta| \sin(\theta + \theta_\beta) = \sum_\alpha |x_\alpha| \varphi_{\alpha\beta} \sin\theta_\alpha,$$

d'où

$$|\lambda| |x_\beta| = \sum_\alpha |x_\alpha| \varphi_{\alpha\beta} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta - \theta) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}). \tag{2}$$

C'est la conséquence que nous avions en vue.

On en déduit

$$|\lambda| \sum_\beta |x_\beta| = \sum_\alpha |x_\alpha| \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta - \theta).$$

Pour $\lambda = 1$ on a $\theta = 0$ et $\theta_\alpha = 0$ ou π, donc $\cos(\theta_\alpha - \theta_\beta - \theta) = \pm 1$ et comme dans ce cas

$$\sum_\beta |x_\beta^0| = \sum_\alpha |x_\alpha^0| \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta)$$

on voit que, pour $\Phi > 0$, $\cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) = 1$ $(\alpha, \beta = \overline{1, n})$, donc tous $\theta_\alpha = 0$ ou π et tous les x_β^0 sont d'un même signe. On peut les prendre tous positifs et nul entre eux n'est pas égal à zéro parce que, dans le cas contraire, tous les autres x_β^0 le seraient aussi en vertu des identités

$$x_\beta^0 = \sum_\alpha x_\alpha^0 \varphi_{\alpha\beta},$$

ce qui ne peut pas avoir lieu, car $\Phi(1) = 0$.

Donc, pour $\lambda = 1$ et $\Phi > 0$, le système (1) a une solution positive x_β^0 $(\beta = \overline{1, n})$. C'est une solution unique à un facteur constant près et l'on peut écrire

$$x_1^0 : x_2^0 : \cdots : x_n^0 = \Phi_{\alpha 1}(1) : \Phi_{\alpha 2}(1) : \cdots : \Phi_{\alpha n}(1) \tag{3}$$

d'où l'on tire que $\Phi_{\alpha\beta}(1)$ sont tous différents de zéro et d'un même signe.

On établit ensuite sans peine que

$$\Phi'(\lambda) = \sum_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda), \tag{4}$$

d'où et de la remarque précédente on voit que $\Phi'(1) \neq 0$, c'est-à-dire que $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de Φ.

Prenons maintenant le système

$$\lambda x_\beta = \sum_\alpha x_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = \overline{2, n}) \tag{5}$$

dont l'équation caractéristique est

$$\Phi_{11}(\lambda) = 0.$$

Soit λ_1 une racine de cette équation. Alors (5) admet une solution non-nulle $x_\beta^{(1)}$ $(\beta = \overline{2, n})$ et l'on aura

$$|\lambda_1| \sum_\beta |x_\beta^{(1)}| \leqq \sum_\alpha |x_\alpha^{(1)}| \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} < \sum_\alpha |x_\alpha^{(1)}| \qquad (\alpha, \beta = \overline{2, n})$$

Φ étant supposée positive. Par conséquent, toutes les racines de l'équation

$\Phi_{11}(\lambda) = 0$ sont en valeur absolue moindre que l'unité. Cela démontre que $\Phi_{11}(\lambda)$ est positif dans l'intervalle $(1, +\infty)$.

Par le même procédé on démontre que $\Phi_{22}(\lambda), \ldots, \Phi_{nn}(\lambda)$ et, plus généralement, tous les mineurs principaux des divers ordres que nous désignerons par $\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_m | \alpha_1 \ldots \alpha_m}(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq 1$. Mais alors, de la remarque faite plus haut à propos des égalités (3), on conclut que tous les mineurs $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq 1$.

On peut encore raisonner autrement. Supposons que tous les mineurs non-principaux de $\Phi(\lambda)$ et des ordres moindres que $n-1$ soient positifs pour $\lambda \geqq 1$. Alors les identités de la forme

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \varphi_{\alpha\beta}\, \Phi_{\alpha\beta|\alpha\beta}(\lambda) + \sum_{\gamma, \delta} \varphi_{\alpha\gamma}\varphi_{\delta\beta}\, \Phi_{\alpha\beta\gamma|\alpha\beta\delta}(\lambda) \tag{6}$$

nous font voir que $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) > 0$ $(\alpha, \beta = \overline{1, n})$ pour $\lambda \geqq 1$.

Il ne reste que vérifier que tous les mineurs d'un déterminant comme

$$\begin{vmatrix} \lambda - \varphi_{\sigma\sigma} & -\varphi_{\sigma\tau} \\ -\varphi_{\tau\sigma} & \lambda - \varphi_{\tau\tau} \end{vmatrix}$$

sont tous positifs pour $\lambda \geqq 1$, ce qu'on vérifie tout de suite. Donc les inégalités

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \geqq 1 \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}) \tag{7}$$

sont de nouveau démontrées.

De plus, cette démonstration nous fait voir la justesse de la proposition suivante:

V. *Tous les mineurs de tous les ordres de $\Phi(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq 1$, si $\Phi > 0$.*

Les mêmes raisonnements appliqués à une matrice stochastique qui a des éléments égals à zéro nous montrent que tous les mineurs de tous les ordres d'une telle matrice sont non-négatifs. De cette remarque et des égalités

$$\Phi'(\lambda) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda), \quad \Phi''(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta} \Phi_{\alpha\beta|\alpha\beta}(\lambda), \ldots$$

qu'il est facile à établir on déduit le théorème:

VI. *Pour que $\lambda_0 = 1$ soit un zéro de multiplicité m de Φ, il faut et il suffit que tous les mineurs principaux de $\Phi(\lambda)$ des ordres $n-1, n-2, \ldots, n-m+1$*

soient nuls, l'un au moins des mineurs principaux d'ordre $n-m$ étant différent de zéro.

3. Matrices décomposables et indécomposables. On dit qu'une matrice

$$A = Mt(a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

est décomposable si l'on peut la mettre, par une permutation identique des lignes et des colonnes, sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

où P, Q, R, S sont des sous-matrices, P et S étant des matrices carrées et Q, R des matrices rectangulaires, et où l'une des matrices Q et R au moins est égale à zéro.

La matrice A est indécomposable si nous ne pouvons pas la décomposer de la manière indiquée.

G. Frobenius a établi les propositions suivantes sur les matrices décomposables et indécomposables qui s'appliquent presque sans modifications aux matrices stochastiques.

o VII.[1] *Si un des mineurs principaux de $A(r)$, soit $P(r)$, est égal à zéro, $A(r)$ est décomposable. Si, en outre, aucun mineur principal de $P(r)$ n'est pas égal à zéro, $P(r)$ est une des parties indécomposables de $A(r)$.* (Fr. 3, p. 459, III).

r signifie ici, comme plus haut, la racine maximale de $A(\lambda) = 0$. Remarquons encore que $P(r)$ est dit partie indécomposable de $A(r)$ si la matrice correspondante P est indécomposable, P et $P(r)$ étant liés par la relation

$$P(r) = |rE - P|.$$

o VIII. *Si la matrice A est indécomposable les n quantités*

$$a_{\alpha\beta}^{(0)}, \; a_{\alpha\beta}^{(1)}, \; a_{\alpha\beta}^{(2)}, \; \ldots, \; a_{\alpha\beta}^{(n-1)}$$

ne peuvent pas s'évanouir toutes en même temps pour aucun choix des indices α, β. (Fr. 3, p. 461, IV).

---

[1] Par le signe o placé devant le numéro d'un théorème nous indiquons que ce théorème, avec des modifications convenables qui sont toujours évidentes, est appliquable aux matrices stochastiques les plus générales, c'est-à-dire ayant des éléments quelconques.

On a posé ici

$$a_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha = \beta, \\ 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta; \end{cases}$$

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} = a_{\alpha\beta};$$

$$a_{\alpha\beta}^{(2)} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta};$$

$$a_{\alpha\beta}^{(3)} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma}^{(2)} a_{\gamma\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}^{(2)};$$

etc., c'est-à-dire $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ sont les éléments de A^k.

Par contre, dans une matrice décomposable on peut toujours indiquer les indices α, β tels que $a_{\alpha\beta}^{(k)} = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Cela découle de l'identité

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & 0 \\ Q^k & R^k \end{pmatrix}$$

qui a lieu, si l'on a la décomposition

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & R \end{pmatrix}.$$

0 IX. *Pour que r soit le zéro maximal de A de multiplicité k, il faut et il suffit que k des parties indécomposables de $A(\lambda)$ se réduisent à zéro pour $\lambda = r$.*

(Fr. 3, p. 461, V).

Supposons que A soit décomposable comme il suit:

$$A = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \ldots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

où $P_{\alpha\beta}$ sont des sous-matrices de A, $P_{\alpha\alpha}$ étant des matrices carrées indécomposables. Alors le théorème énoncé veut dire que la condition nécessaire et suffisante pour que r soit le zéro maximale multiple d'ordre k ($k \leqq m$) est l'évanouissement de k des quantités $P_{\alpha\alpha}(\lambda)$ pour $\lambda = r$, en posant toujours

$$P_{\alpha\alpha}(\lambda) = |\lambda E - P_{\alpha\alpha}|.$$

IX bis. *Pour que $\lambda_0 = 1$ soit un zéro de multiplicité k de la matrice stochastique Φ il faut et il suffit qu'elle ait, mise sous la forme*

$$\Phi = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{m3} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix} \qquad m \geqq k,$$

k champs diagonals indécomposables et isolés.

Nous appelons les sous-matrices $L_{\alpha\beta}$ champs de Φ, les sous-matrices $L_{\alpha\alpha}$ champs diagonals de Φ et nous disons qu'un champ diagonal $L_{\alpha\alpha}$ est isolé, si les champs

$$L_{\alpha 1},\ L_{\alpha 2},\ \dots,\ L_{\alpha, \alpha-1},$$

situés dans la même ligne avec $L_{\alpha\alpha}$, sont tous nuls.

La suffisance de la condition énoncée se manifeste de ce que

$$L_{\alpha_1\alpha_1},\ L_{\alpha_2\alpha_2},\ \dots,\ L_{\alpha_k\alpha_k}$$

étant indécomposables et isolés les équations

$$L_{\alpha_i\alpha_i}(\lambda) = 0 \qquad (i = \overline{1, k})$$

admettent chacune $\lambda_0 = 1$ comme une racine simple.

Pour faire voir sa nécessité remarquons d'abord que, par le théorème précédent, Φ a k champs diagonals indécomposables admettant $\lambda_0 = 1$ comme zéro. Donc on doit avoir

$$L_{\alpha_i\alpha_i}(1) = 0 \qquad (i = \overline{1, k})$$

$L_{\alpha_i\alpha_i}$ étant indécomposables. Démontrons que ces champs sont en outre isolés.

Considérons un de ces champs en le désignant par $L_{\alpha\alpha}$. Puisqu'il est indécomposable tous les mineurs de $L_{\alpha\alpha}(1)$ sont positifs, comme il résulte du théorème XII démontré plus loin et indépendemment de IX bis.

Supposons que

$$L_{\alpha 1},\ L_{\alpha 2},\ \dots,\ L_{\alpha, \alpha-1}$$

ne soient pas tous nuls. Alors, en désignant les éléments de $L_{\alpha\alpha}$ par $\psi_{\gamma\delta}$ ($\gamma, \delta = \overline{1, s}$; $s =$ ordre de $L_{\alpha\alpha}$), nous concluons que les sommes

$$\psi_\gamma = \sum_\delta \psi_{\gamma\delta} \qquad (\gamma, \delta = \overline{1, s})$$

ne peuvent pas être toutes égales à 1. Soit

$$\psi_{\gamma_0} \neq 1, \text{ donc } < 1.$$

Ajoutons maintenant à la colonne δ de $L_{\alpha\alpha}(\lambda)$ toutes les autres colonnes et développons $L_{\alpha\alpha}(\lambda)$ suivant les éléments de cette colonne: nous aurons

$$L_{\alpha\alpha}(\lambda) = (\lambda - \psi_1)\, \Psi_{1\delta} + \cdots + (\lambda - \psi_{\gamma_0})\, \Psi_{\gamma_0\delta} + \cdots + (\lambda - \psi_s)\, \Psi_{s\delta},$$

où $\Psi_{\gamma\delta}$ sont les mineurs de $L_{\alpha\alpha}(\lambda)$ de la colonne δ. On voit de cette identité que $\lambda_0 = 1$ ne peut pas être un zéro de $L_{\alpha\alpha}$, parce que $\Psi_{\gamma\delta}(1)$ sont tous positifs, $L_{\alpha\alpha}$ étant indécomposable, et $1 - \psi_{\gamma_0}$ est plus grand que zéro, donc $L_{\alpha\alpha}(1) > 0$.

On en conclut que $L_{\alpha\alpha}$ doit être isolé, puisque $L_{\alpha\alpha}(1) = 0$ et $L_{\alpha\alpha}$ est indécomposable: la nécessité de notre condition se trouve ainsi démontré.

X. *Si r est le zéro maximal multiple de A, une des alternatives doit avoir place: ou il est égal au plus grand des éléments $a_{\alpha\alpha}$ ou, s'il ne l'est pas, dans tout mineur principal d'ordre $n-1$ de $A(\lambda)$ s'évanouit pour $\lambda = r$ un mineur principal d'ordre $n-2$.* (Fr. 3, p. 461, VI).

Nous avons vu (IV) que le zéro maximal d'une matrice stochastique est toujours égal à l'unité. Donc, le théorème X, appliqué aux matrices stochastiques, peut s'énoncer comme il suit:

XI. *Si $\lambda_0 = 1$ est un zéro multiple de Φ, ou l'un des éléments $\varphi_{\alpha\alpha}$ est égal à 1 (et alors tous les autres éléments de la ligne α sont nuls) ou dans tout mineur principal $\Phi_{\alpha\alpha}(1)$ $(\alpha = \overline{1, n})$ de $\Phi(1)$ s'évanouit l'un des mineurs $\Phi_{\alpha\beta|\alpha\beta}(1)$.*

o XII. *Si A est indécomposable tous les mineurs $A_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq r$.*

On déduit des théorèmes VII et XII que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice non-négative A soit indécomposable est que tous les mineurs $A_{\alpha\beta}(\lambda)$ doivent être positifs pour $\lambda \geqq r$.

4. Matrices stochastiques décomposables et indécomposables. Nous ajouterons aux théorèmes exposés dans le numéro précédent quelques autres qui sont dans le même ordre d'idées et qui concernent spécialement les matrices stochastiques.

XIII. *Soit*

$$\Phi = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

une décomposition de Φ, où R est indécomposable et P positif. Alors, pour que $\lambda_0 = 1$ soit un zéro multiple de Φ, il faut et il suffit que Q soit nul. En ce cas $\lambda_0 = 1$ est un zéro double de Φ.

La suffisance de la condition énoncée est presque évidente. P est une matrice stochastique, si $Q = 0$, donc a $\lambda_0 = 1$ pour zéro qui est alors, pour P, simple, car P est positif. En ce cas $\lambda_0 = 1$ est un zéro double de Φ, parce que, R étant une matrice stochastique et indécomposable, $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de R et $\Phi(\lambda) = P(\lambda)R(\lambda)$.

Démontrons la nécessité de la condition. Nous avons déjà remarqué que $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de R. Par conséquent, il ne peut être un zéro multiple pour Φ que sous la condition que $P(\lambda)$ s'évanouisse pour $\lambda = 1$, parce que $\Phi(\lambda) = P(\lambda)R(\lambda)$. Mais $P > 0$, donc (III) le zéro maximal de P doit être contenu entre la plus grande et la plus petite des sommes de ses éléments prises par lignes. Il y aurait nécessairement parmi ces sommes des sommes moindres que l'unité si Q contenait des éléments non nuls et alors le zéro maximal de P ne pourrait pas être égal à 1. Donc, pour que $P(1)$ soit égal à zéro, il faut que, P étant positif, Q soit égal à zéro.

Remarquons ici que, suivant la terminologie de G. Frobenius, la matrice Φ est dite complètement décomposable si elle peut être mise sous la forme telle que, par exemple,

$$\Phi = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix},$$

où tous les champs sont égals à zéro sauf les champs diagonals.

XIV. *Pour que $\lambda_0 = 1$ soit un zéro multiple de Φ il faut et il suffit que les mineurs*

$$\Phi_{\beta\gamma|\beta\alpha}(1) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, n)$$

soient nuls pour tout élément $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$.

En effet, prenons $\Phi_{\beta\beta}(\lambda)$ et ajoutons à une colonne quelconque, soit γ $(\gamma \neq \beta)$, de ce déterminant toutes les autres colonnes. Alors, en développant $\Phi_{\beta\beta}(\lambda)$ suivant les éléments de cette colonne, nous aurons

$$\Phi_{\beta\beta}(\lambda) = \sum_{\alpha} (\lambda - \varphi'_\alpha)\, \Phi_{\beta\gamma|\beta\alpha}(\lambda) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, n),$$

où

$$\varphi'_\alpha = \varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\alpha 2} + \cdots + \varphi_{\alpha n} = 1 - \varphi_{\alpha\beta}.$$

Soit maintenant $\lambda = 1$ un zéro multiple de Φ. Alors, par VI, on doit avoir $\Phi_{\beta\beta}(1)=0$ $(\beta=\overline{1,n})$. Mais on a toujours $\Phi_{\beta\gamma|\beta\alpha}(1)\geqq 0$ et $1-\varphi'_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}$, donc, si $\varphi_{\alpha\beta}\neq 0$, on doit avoir $\Phi_{\beta\gamma|\beta\alpha}(1)=0$ pour tout $\gamma\neq\beta$.

Inversement, si pour tout $\varphi_{\alpha\beta}\neq 0$ on a

$$\Phi_{\beta\gamma|\beta\alpha}(1)=0 \qquad (\gamma=1,2,\ldots,\beta-1,\beta+1,\ldots,n)$$

on aura $\Phi_{\beta\beta}(1)=0$ $(\beta=\overline{1,n})$ et $\lambda=1$ sera au moins un zéro double de Φ.

XV. *Si l'on a la décomposition*

$$\Phi=\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{m3} & \ldots & L_{mm} \end{pmatrix}$$

et si le système

$$x_\beta=\sum_\alpha x_\alpha\varphi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta=\overline{1,n})$$

a une solution positive

$$x_\beta^0>0 \qquad (\beta=\overline{1,n})$$

on aura

$$\begin{aligned} &L_{21}=0,\\ &L_{31}=L_{32}=0,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &L_{m1}=L_{m2}=\cdots=L_{m,m-1}=0,\end{aligned}$$

et les matrices $L_{\alpha\alpha}$ $(\alpha=\overline{1,m})$ auront $\lambda_0=1$ pour zéro maximal.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème XIII, Fr. 3, p. 466. Mais nous le démontrerons ici, en suivant les raisonnements de G. Frobenius, pour introduire quelques définitions et procédés qui seront utils dans la suite.

Soit, pour simplicité,

$$\Phi=\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ Q & R & 0 \\ S & T & U \end{pmatrix}$$

P, R, U étant des sous-matrices carrées des ordres k, l, m respectivement. Le système écrit plus haut peut être mis sous la forme condensée

$$(8) \qquad X=X\Phi$$

qui est usuelle dans la théorie des matrices. En posant

$$X_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \ X_2 = (x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}), \ X_3 = (x_{k+l+1}, \ldots, x_k)$$

on peut remplacer (8) par le système

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 P + X_2 Q + X_3 R, \\ X_2 &= X_2 R + X_3 T, \ X_3 = X_3 U. \end{aligned} \tag{9}$$

De même, le système adjoint de (8),

$$y_\alpha = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} y_\beta \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}) \tag{10}$$

ou

$$Y = \Phi Y, \tag{11}$$

peut être remplacé par le système

$$\begin{aligned} Y_1 &= P Y_1, \ Y_2 = Q Y_1 + R Y_2, \\ Y_3 &= S Y_1 + T Y_2 + U Y_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Le système (11) a une solution positive évidente

$$y_\alpha^0 = 1 \qquad (\alpha = \overline{1, n}) \tag{13}$$

que nous désignerons par Y_0. Supposons que (8) ait une solution positive X_0:

$$x_\beta^0 > 0, \qquad (\beta = \overline{1, n}).$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} X_1^0 Y_1^0 &= X_1^0 P Y_1^0 + X_2^0 Q Y_1^0 + X_3^0 R Y_1^0 \\ &= X_1^0 Y_1^0 + X_2^0 Q Y_1^0 + X_3^0 R Y_1^0, \end{aligned}$$

d'où

$$X_2^0 Q Y_1^0 + X_3^0 R Y_1^0 = 0,$$

donc

$$X_2^0 Q Y_1^0 = 0, \quad X_3^0 R Y_1^0 = 0$$

puisque les produits scalaires $X_2^0 Q Y_1^0$ et $X_3^0 R Y_1^0$ sont non-négatifs. Ces égalités montrent qu'on doit avoir

$$Q = 0, \quad R = 0$$

car $X_2^0 > 0$, $X_3^0 > 0$ et $Y_1^0 > 0$.

En multipliant ensuite l'égalité $X_2^0 = X_2^0 R + X_3^0 T$ par Y_2^0 et en tenant compte que $Y_2^0 = R Y_3^0$, on obtiendra $X_3^0 T Y_2^0 = 0$, d'où $T = 0$.

Donc Q, S, T sont égals à zéro. Par conséquent P, R, U sont des matrices stochastiques et $\lambda_0 = 1$ est le zéro maximal de chacune d'elles.

XVI. *Si Φ est indécomposable, mais, pour un m entier et positif, Φ^m est décomposable, Φ^m est complètement décomposable.*

Φ étant indécomposable tout mineur $\Phi_{\alpha\beta}(1)$ est positif (par XII), donc $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de Φ et le système $X = X\Phi$ admet une solution positive X^0. Alors on peut écrire

$$X^0 \Phi = X^0 \Phi^2 \quad \text{ou} \quad X^0 = X^0 \Phi^2 .$$

De même on aura $X^0 = X^0 \Phi^3$ et ainsi de suite. Donc $X^0 = X^0 \Phi^m$: le système $X = X\Phi^m$ admet une solution positive.

On a ensuite

$$\sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_\gamma \varphi_{\alpha\gamma} \sum_\beta \varphi_{\gamma\beta} = 1 ,$$

$$\sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(3)} = \sum_\gamma \varphi_{\alpha\gamma}^{(2)} \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} = 1 ,$$

et généralement

$$\sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(m)} = 1 ,$$

d'où il résulte que la matrice Φ^m est une matrice stochastique et le système $Y = \Phi^m Y$ admet la solution $y_\alpha^0 = 1$ $(\alpha = \overline{1, n})$.

Par conséquent, en vertu du théorème XV, Φ^m est complètement décomposable.

Nous concluons ce numéro en indiquant le théorème important suivant, du à G. Frobenius:

o XVII. *Une matrice décomposable A ne peut pas être décomposé en parties (ou champs) indécomposables de deux manières différentes.* (Fr. 3, p. 474, § 12).

On suppose toujours que A est non-négatif.

5. Matrices primitives et imprimitives. Nous dirons avec G. Frobenius qu'une matrice non-négative A est primitive si son zéro maximal r est plus grand en valeur absolue que tout autre zéro r' de A: $|r| > |r'|$. Par contre, la matrice A est imprimitive, si parmi les zéros $r' \neq r$ il y a tels que $|r'| = |r|$.

De même, une matrice stochastique Φ est dite primitive si tout son zéro λ_h, différant de $\lambda_0 = 1$, est tel que $|\lambda_h| < 1$. S'il y a parmi ces zéros λ_h de tels que $|\lambda_h| = 1$, nous dirons que Φ est imprimitive.

Nous exposerons maintenant les théorèmes les plus importants sur les matrices primitives et imprimitives trouvés et démontrés par G. Frobenius et quelques théorèmes nouveaux qui concernent en particulier les matrices stochastiques primitives et imprimitives.

o XVIII. *Si A est une matrice non-négative et primitive une de ses puissance, A^p, est positive aussi que toutes les puissances suivantes $A^{p+1}, A^{p+2}, \ldots$. Inversement, si l'une des puissances de A est positive, A est une matrice primitive.*
(Fr. 3, p. 463, IX).

o XIX. *Dans une matrice imprimitive A tous ses éléments principals, $a_{\alpha\alpha}$, sont nuls.* (Fr. 3, p. 463, X).

o XX. *Toute puissance d'une matrice primitive est primitive. Et si, n étant l'ordre de A, $A, A^2, \ldots, A^n$ sont indécomposable, A est primitive.*
(Fr. 3, p. 464, XI).

o XXI. *Soit*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a'\lambda^{n'} + a''\lambda^{n''} + \cdots$$

fonction caractéristique d'une matrice indécomposable non-négative A, où $n > n' > n'' > \cdots$ et $a', a'', \ldots$ sont différents de zéro. Soit k le plus grand diviseur commun des différences $n - n', n' - n'', \ldots$. Alors A est primitive, si $k = 1$. Par contre, A est imprimitive, si $k > 1$, et alors A^k est la plus basse puissance de A qui se décompose complètement en parties primitives dont le nombre est k. Si l'on pose

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-k} + a_2\lambda^{n-2k} + \cdots + a_m\lambda^{n-mk},$$
$$\psi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \cdots + a_m,$$

l'équation $\psi(\lambda) = 0$ a une racine qui est positive, simple et plus grande en valeur absolue que toute autre de ses racines. (Fr. 3, p. 468, XIV).

o XXII. *Soit A une matrice non-négative, indécomposable et imprimitive, dont la plus basse puissance, qui se décompose complètement en parties indécomposable et primitives, est A^k. Alors, par une permutation identique des lignes et des colonnes, on peut la mettre sous la forme cyclique suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{k-1,k} \\ L_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

où toutes les parties, ou sous-matrices, sont nulles, sauf $L_{12}, L_{23}, \dots, L_{k-1,k}, L_{k1}$. (Fr. 3, p. 469, § 9).

Nous appellerons dans la suite $L_{12}, L_{23}, \dots, L_{k1}$ champs principaux de la matrice imprimitive A mise sous la forme (14) et toutes les autres sous-matrices $L_{\alpha\beta}$ champs non-principaux.

Nous dirons que la matrice indécomposable et imprimitive A est de l'indice k, si la plus basse puissance de A, qui se décompose complètement en parties primitives, est A^k. Nous dirons aussi qu'une telle matrice est cyclique de l'indice k. Cette dénomination est justifiée par le fait qu'elle peut être mise sous la forme indiquée (14) et aussi par les considérations suivantes.

Supposons que A soit indécomposable. Alors A ne peut pas contenir des colonnes ou des lignes dont tous les éléments soient nuls, de sorte que toute colonne et toute ligne contiennent au moins un élément $a_{\alpha\beta}$ qui n'est pas nul. Il en résulte que nous pouvons toujours trouver une suite d'éléments

$$a_{\alpha\beta_1}, \quad a_{\beta_1\beta_2}, \quad \dots, \quad a_{\beta_{k-1}\alpha}$$

qui sont tous différents de zéro, les indices $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ étant tout différents l'un de l'autre. Nous appelons une telle suite *cycle* de l'ordre k de la matrice A et A *matrice cyclique de l'indice* k, si tous ses cycles sont des ordres divisibles par k, k étant le plus grand diviseur commun de ces ordres.

Il est clair que $a_{\alpha\alpha} = 0$ $(\alpha = \overline{1, n})$, si $k \geqq 2$, et que $a_{\beta\alpha} = 0$ toutes les fois que $a_{\alpha\beta} \neq 0$, si $k > 2$.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant.

0 XXIII. *Pour qu'une matrice non-négative et indécomposable A ait pour zéros toutes les racines de l'équation*

$$\lambda^k - r^k = 0, \tag{15}$$

où r est le zéro maximal de A, il faut et il suffit que A soit une matrice cyclique de l'indice k.

Ce théorème est démontré dans ma note de Bulletin de la Société Mathématique de France, LXI (1933), pp. 219—219. Je reproduirai ici sa démonstration, car il joue un rôle important dans la suite.

Nous commencerons par la démonstration de la suffisance de la condition énoncée.

On peut écrire le développement du déterminant $A(\lambda)$ dans la forme

$$A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{h=1}^{n} (-1)^h \lambda^{n-h} \sum_{\alpha(h)} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{16}$$

où $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] = +1$ ou -1 suivant que la permutation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ consiste d'un nombre pair ou impair d'inversions et $\sum\limits_{\alpha(h)}$ désigne une somme prise pour toutes les permutations $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui laissent fixes $n-h$ des indices $1, 2, \ldots, n$, ces indices étant pris dans toutes les combinaisons possibles et les éléments correspondants $a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2}, \ldots, a_{i_{n-h} i_{n-h}}$, qui entrent dans le produit $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$, étant remplacés par l'unité.

Or la matrice A est cyclique de l'indice k, donc, sous le signe $\sum\limits_{\alpha(h)}$ on ne rencontrera que des termes composés de cycles ayant des ordres divisibles par k, d'où il résulte que le nombre h doit être un multiple de k. On en voit que $A(\lambda)$ peut être écrit sous la forme

$$A(\lambda) = \lambda^n + A_1 \lambda^{n-k} + A_2 \lambda^{n-2k} + \cdots + A_\mu \lambda^{n-\mu k}, \tag{17}$$

où $\mu k \leqq n$.

Soit maintenant λ_1 une racine quelconque de (15). On aura

$$\begin{aligned} A(\lambda_1) &= \lambda_1^n [1 + A_1 r^{-k} + A_2 r^{-2k} + \cdots + A_\mu r^{-\mu k}] \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{r}\right)^n [r^n + A_1 r^{n-k} + \cdots + A_\mu r^{n-\mu k}] \\ &= A(r) = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve la suffisance de notre condition.

Remarquons qu'on obtient aussi l'égalité (17) en partant de la formule bien connue

$$A(\lambda) = \lambda^n - \frac{\lambda^{n-1}}{1!} \sum_{\alpha_1} a_{\alpha_1 \alpha_1} + \frac{\lambda^{n-2}}{2!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \alpha_1} & a_{\alpha_1 \alpha_2} \\ a_{\alpha_2 \alpha_1} & a_{\alpha_2 \alpha_2} \end{vmatrix} - \cdots.$$

Pour démontrer la nécessité de la condition, prenons une des racines primitives de (15), soit

$$\lambda_1 = r\left(\cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}\right).$$

Alors le système $\lambda_1 X = XA$ aura une solution non-nulle

$$x_\beta^0 = |x_\beta^0|(\cos\theta_\beta + i\sin\theta_\beta) \qquad (\beta = \overline{1, n})$$

et l'on peut écrire, en vertu de la relation (2),

$$(18) \qquad r\,|x_\beta^0| = \sum_\alpha |x_\alpha^0|\,a_{\alpha\beta}\cos\left(\theta_\alpha - \theta_\beta - \frac{2\pi}{k}\right) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}).$$

Cette égalité nous montre qu'on aura

$$(19) \qquad r\,|x_\beta^0| < \sum_\alpha |x_\alpha^0|\,a_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

si pour tout $a_{\alpha\beta} \neq 0$ on suppose $\cos\left(\theta_\alpha - \theta_\beta - \frac{2\pi}{k}\right) \neq 1$. Nous allons prouver que cette supposition est impossible.

Soit $\cos\left(\theta_\alpha - \theta_\beta - \frac{2\pi}{k}\right) \neq 1$ pour un $a_{\alpha\beta} \neq 0$. Alors nous aurons (19). La conclusion reste vraie à fortiori, si $\cos\left(\theta_\alpha - \theta_\beta - \frac{2\pi}{k}\right) \neq 1$ pour tout $a_{\alpha\beta} \neq 0$.

Remarquons maintenant que, A étant indécomposable, tous $A_{\alpha\beta}(r)$ sont positifs (par XII), donc le système $rY = AY$ a une solution positive

$$y_\alpha^0 > 0 \qquad (\alpha = \overline{1, n}).$$

Multiplions les deux côtés de (19) par y_β^0 et faisons la somme pour $\beta = \overline{1, n}$: on aura une impossibilité

$$r\sum_\beta |x_\beta^0|\,y_\beta^0 < \sum_\alpha |x_\alpha^0| \sum_\beta a_{\alpha\beta}\,y_\beta^0 = r\sum_\alpha |x_\alpha^0|\,y_\alpha^0.$$

Donc nous devons avoir $\cos\left(\theta_\alpha - \theta_\beta - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$ chaque fois que $a_{\alpha\beta} \neq 0$.

Mais nous avons remarqué plus haut que la matrice A, qui est indécomposable, doit avoir des cycles tels que

$$a_{\alpha\beta_1},\ a_{\beta_1\beta_2}, \ldots,\ a_{\beta_{m-1}\alpha},$$

où tous les éléments sont différents de zéro. Par conséquent, pour un tel cycle,

$$\cos\left(\theta_\alpha - \theta_{\beta_1} - \frac{2\pi}{k}\right) = 1, \ldots, \cos\left(\theta_{\beta_{m-1}} - \theta_\alpha - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$$

ou

$$\theta_\alpha - \theta_{\beta_1} - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_1\pi, \ldots, \theta_{\beta_{m-1}} - \theta_\alpha - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_m\pi,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ étant des nombres entiers. En ajoutant ces égalités on obtient

$$-m\frac{2\pi}{k} = 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m)\pi,$$

d'où il résulte que m doit être divisible par k.

De cette manière nous voyons que les ordres de tous les cycles doivent être des multiples de k, si A admet comme zéros les racines de l'équation (15): la nécessité de notre condition est ainsi démontrée.

On peut maintenant voir qu'une matrice de l'indice k est en même temps une matrice cyclique de l'indice k et inversement. En effet, si A est de l'indice k, on peut l'écrire sous la forme cyclique (14), d'où l'on voit immédiatement que A est cyclique de l'indice k. Inversement, si A est cyclique de l'indice k, son équation caractéristique est nécessairement de la forme (17), donc A ne peut être que de l'indice k et doit être réductible à la forme (14). Ainsi nous pouvons conclure:

o XXIV. *Pour qu'une matrice non-négative et indécomposable A soit cyclique de l'indice k, il faut et il suffit qu'on puisse la mettre sous la forme* (14).

Tirons quelques conséquences du théorème XXIII.

o XXV. *Si $A(0) \equiv A \neq 0$, la matrice A ne peut être cyclique que d'un indice qui est un diviseur de l'ordre de A. Donc, si l'ordre n de A est nombre premier, A est ou non-cyclique ou cyclique de l'indice n.*

Dans le dernier cas on peut mettre A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

o XXVI. *Si A est une matrice indécomposable et cyclique de l'indice k, l'équation caractéristique de A peut écrite comme il suit:*

$$A(\lambda) = \lambda^{\nu}(\lambda^k - r^k)(\lambda^k - C_1 r^k) \cdots (\lambda^k - C_\mu r^k) = 0,$$

où

$$\nu \geqq 0 \quad et \quad |C_1| < 1, \ldots, |C_\mu| < 1 \qquad (\nu + \mu k + k = n).$$

6. Propriétés des mineurs des matrices stochastiques. Dans ce numéro nous considérerons exclusivement les matrices stochastiques et leurs mineurs. Nous appelons mineur $\Phi_{\alpha\beta}$ de la matrice Φ la matrice qu'on obtient en supprimant dans Φ la ligne β et la colonne α.

XXVII. *Pour toute matrice stochastique Φ*

$$\sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_h) = 0, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

λ_h étant un zéro de Φ tel que $|\lambda_h| \neq 1$.

Puisque $\Phi(\lambda_h) = 0$, le système $\lambda_h X = X\Phi$ admet une solution non-nulle x_β^0 $(\beta = \overline{1, n})$. Donc, si $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_h)$ ne sont pas tous nuls (alors notre théorème est vrai), on peut écrire

$$x_1^0 : x_2^0 : \cdots : x_n^0 = \Phi_{\alpha 1}(\lambda_h) : \Phi_{\alpha 2}(\lambda_h) : \cdots : \Phi_{\alpha n}(\lambda_h). \tag{20}$$

Mais des identités $\lambda_h x_\beta^0 = \sum_\alpha x_\alpha^0 \varphi_{\alpha\beta}$ on tire

$$\lambda_h \sum_\beta x_\beta^0 = \sum_\alpha x_\alpha^0 \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} = \sum_\alpha x_\alpha^0,$$

d'où

$$\sum_\alpha x_\alpha^0 = 0 \tag{21}$$

et (20) et (21) montrent que le théorème est vrai.

XXVIII. *Soit Φ une matrice stochastique indécomposable, imprimitive et de l'indice k, réduite à la forme cyclique*

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & L_{k-1,k} \\ L_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

où $L_{h,h+1}$ $(h = \overline{1,k};$ $k+1$ *étant remplacé par* 1 *dans* $L_{k,k+1})$ *est une sous-matrice à* l_h *lignes et* l_{h+1} *colonnes* $(l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n)$; *soit encore* λ_{0h} *une des racines de l'équation* $\lambda^k - 1 = 0$ *différente de* 1. *Alors, quel que soit* $\beta = \overline{1,n}$,

$$(23)\qquad \begin{cases} \Phi_{1\beta}(\lambda_{0h}) = \Phi_{2\beta}(\lambda_{0h}) = \cdots = \Phi_{l_1\beta}(\lambda_{0h}), \\ \Phi_{l_1+1,\beta}(\lambda_{0h}) = \cdots = \Phi_{l_1+l_2,\beta}(\lambda_{0h}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1,\beta}(\lambda_{0h}) = \cdots = \Phi_{n\beta}(\lambda_{0h}); \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} \Phi_{l_1+1,\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}\,\Phi_{1\beta}(\lambda_{0h}), \\ \Phi_{l_1+l_2+1,\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^2\,\Phi_{1\beta}(\lambda_{0h}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{k-1}\,\Phi_{1\beta}(\lambda_{0h}), \end{cases}$$

et

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{k} \Phi_{\alpha_i,\beta}(\lambda_{0h}) = 0,$$

si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *satisfont aux conditions*

$$l_1 + \cdots + l_{h-1} < \alpha_h \leqq l_1 + \cdots + l_h, \qquad (h = \overline{1,k}).$$

En effet, le système

$$(26)\qquad \lambda Y = \Phi Y,$$

à cause de (22), se réduit à

$$(27)\qquad \lambda Y_1 = L_{12} Y_2,\ \lambda Y_2 = L_{23} Y_3, \ldots, \lambda Y_k = L_{k1} Y_1,$$

où

$$Y_1 = (y_1, \ldots, y l_1),\ Y_2 = (y l_1 + 1, \ldots, y l_1 + l_2), \ldots,\ Y_k = (y l_1 + \cdots + l_{k-1} + 1, \ldots, y_n).$$

Pour $\lambda = \lambda_{0h}$ (26) aura une solution non-nulle

$$Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0),$$

car, Φ étant indécomposable et cyclique de l'indice k, $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de Φ (par IX) et λ_{0h} l'est aussi (par XXVI). Alors, $\Phi'(\lambda_{0h}) = \sum_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h})$ étant différent de zéro, $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$ ne sont pas tous nuls et l'on aura

$$(28)\qquad y_1^0 : y_2^0 : \cdots : y_n^0 = \Phi_{1\beta}(\lambda_{0h}) : \Phi_{2\beta}(\lambda_{0h}) : \cdots : \Phi_{n\beta}(\lambda_{0h}).$$

Cette solution Y^0, à un facteur constant près, est unique, et, par (27), on voit tout de suite qu'on peut l'écrire comme il suit:

$$(29)\qquad \begin{cases} y_1^0 = y_2^0 = \cdots = y_{l_1}^0 = 1, \\ y_{l_1+1}^0 = y_{l_1+2}^0 = \cdots = y_{l_1+l_2}^0 = \lambda_{0h}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{l_1+\cdots+l_{k-1}+1}^0 = \cdots = y_n^0 = \lambda_{0h}^{k-1}. \end{cases}$$

En effet, ces quantités satisfont (27) pour $\lambda = \lambda_{0h}$.

De (29) et (28) on voit immédiatement que les égalités (23) et (24) sont justes.

On aura ensuite

$$\sum_{i=1}^{k} y_{\alpha_i}^0 = 1 + \lambda_{0h} + \cdots + \lambda_{0h}^{k-1} = \frac{1 - \lambda_{0h}^k}{1 - \lambda_{0h}} = 0,$$

donc, par (28),

$$(30)\qquad \sum_{i=1}^{k} \Phi_{\alpha_i, \beta}(\lambda_{0h}) = 0,$$

si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont choisis de telle manière que

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_{h-1} < \alpha_h \leqq l_1 + l_2 + \cdots + l_h, \qquad (h = \overline{1, k}).$$

L'égalité (22) peut être écrite sous la forme

$$\Phi = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1k} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{k1} & L_{k2} & \ldots & L_{kk} \end{pmatrix},$$

en posant $L_{\theta\tau} = 0$ quand la sous-matrice $L_{\theta\tau}$ n'appartient pas à la suite des champs principaux $L_{12}, L_{23}, \ldots, L_{k1}$ qui ne sont pas nuls. Nous dirons qu'un mineur $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ appartient au champ $L_{\theta\tau}$ s'il correspond à l'élément $\varphi_{\beta\alpha}$ qui est un des éléments de la sous-matrice $L_{\theta\tau}$, c'est-à-dire si $\varphi_{\beta\alpha} < L_{\theta\tau}$, en employant le signe bien connu de la théorie des ensembles.

Envisageons maintenant les quantités $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda)$ et $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ $(\alpha \neq \beta)$. On a les développements

$$(31)\qquad \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda) = \lambda^{n-1} - \frac{\lambda^{n-2}}{1} \sum_{\alpha_1}{}' \varphi_{\alpha_1\alpha_1} + \frac{\lambda^{n-3}}{1,2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2}{}' \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \varphi_{\alpha_1\alpha_2} \\ \varphi_{\alpha_2\alpha_1} & \varphi_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix} - \cdots,$$

$$(32)\quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda^{n-2}\varphi_{\alpha\beta} - \frac{\lambda^{n-3}}{1}\sum_{\alpha_1}{}'' \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \varphi_{\alpha\alpha_1} \\ \varphi_{\alpha_1\beta} & \varphi_{\alpha_1\alpha_1} \end{vmatrix} + \frac{\lambda^{n-4}}{1\cdot 2}\sum_{\alpha_1,\alpha_2}{}'' \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \varphi_{\alpha\alpha_1} & \varphi_{\alpha\alpha_2} \\ \varphi_{\alpha_1\beta} & \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \varphi_{\alpha_1\alpha_2} \\ \varphi_{\alpha_2\beta} & \varphi_{\alpha_2\alpha_1} & \varphi_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix} - \cdots,$$

où les sommes sont prises pour toutes les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sauf la valeur α dans le premier développement et les valeurs α et β dans le second. Posons, pour brièveté,

$$(33)\qquad S_{\alpha\alpha}^{(h)} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_h}{}' \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1\alpha_h} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_h\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_h\alpha_h} \end{vmatrix},$$

$$(34)\qquad S_{\alpha\beta}^{(h)} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{h-1}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \varphi_{\alpha\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha\alpha_{h-1}} \\ \varphi_{\alpha_1\beta} & \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1\alpha_{h-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_{h-1}\beta} & \varphi_{\alpha_{h-1}\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{h-1}\alpha_{h-1}} \end{vmatrix}.$$

et démontrons le théorème suivant.

XXIX. *Les mineurs $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda)$ et $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ $(\alpha \neq \beta)$ du déterminant $\Phi(\lambda)$ d'une matrice stochastique qui est indécomposable, imprimitive, de l'indice k et mise dans la forme cyclique* (22), *ont les développements:*

$$(35)\qquad \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda) = \lambda^{n-1} + (-1)^k \frac{\lambda^{n-k-1}}{k!} S_{\alpha\alpha}^{(k)} + (-1)^{2k} \frac{\lambda^{n-2k-1}}{(2k)!} S_{\alpha\alpha}^{(2k)} + \cdots;$$

$$(36)\qquad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = (-1)^{s-1} \frac{\lambda^{n-s-1}}{(s-1)!} S_{\alpha\beta}^{(s)} + (-1)^{s+k-1} \frac{\lambda^{n-s-k-1}}{(s+k-1)!} S_{\alpha\beta}^{(s+k)} + \cdots$$

pour $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i+s},\ s > 0,$ *et*

$$(37)\quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = (-1)^{k-s-1} \frac{\lambda^{n-k+s-1}}{(k-s-1)!} S_{\alpha\beta}^{(k-s)} + (-1)^{2k-s-1} \frac{\lambda^{n-2k+s-1}}{(2k-s-1)!} S_{\alpha\beta}^{(2k-s)} + \cdots$$

pour $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i-s},\ s \geqq 0.$

Considérons d'abord $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda)$. Évidemment, $\varphi_{\alpha_1\alpha_1} = 0$ $(\alpha_1 = \overline{1, n})$. De même, tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \varphi_{\alpha_1\alpha_2} \\ \varphi_{\alpha_2\alpha_1} & \varphi_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix}$$

sont nuls, si $k > 2$, car Φ est cyclique de l'indice k. En général, un déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1\alpha_h} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_h\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_h\alpha_h} \end{vmatrix}$$

doit être égal à o, si $h \not\equiv 0 \pmod{k}$, car autrement on aurait dans Φ des cycles dont les ordres ne sont pas divisibles par k. De cette manière, en tenant compte des égalités (31) et (33), on vérifie que (35) a lieu.

Considérons ensuite $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$, $\alpha \neq \beta$. Soit $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,i+s}$, où s est un nombre entier positif ou négatif ou zéro.

Supposons que $\varphi_{\alpha\beta} = 0$ et considérons le déterminant

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \varphi_{\alpha\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha\alpha_{h-1}} \\ \varphi_{\alpha_1\beta} & \varphi_{\alpha_1\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1\alpha_{h-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_{h-1}\beta} & \varphi_{\alpha_{h-1}\alpha_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{h-1}\alpha_{h-1}} \end{vmatrix}.$$

Je dis que tous les membres du développement de ce déterminant sont nuls, si $h \not\equiv s \pmod{k}$.

Pour le démontrer, remarquons que les membres de Δ_h sont de l'une de deux formes: 1) $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha_1\alpha'_1}\varphi_{\alpha_2\alpha'_2}\ldots\varphi_{\alpha_{h-1}\alpha'_{h-1}}$, où $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{h-1}$ est une permutation des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$; ou 2) $\varphi_{\alpha\alpha'_1}\varphi_{\alpha_1\alpha'_2}\ldots\varphi_{\alpha_{h-1}\alpha'_h}$, où $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_h$ est une permutation des nombres $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ dans laquelle $\alpha'_1 \neq \beta$.

Mais tout $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha_1\alpha'_1}\ldots\varphi_{\alpha_{h-1}\alpha'_{h-1}} = 0$, car $\varphi_{\alpha\beta} = 0$, et il reste à vérifier que tout membre de la seconde forme est égal à o, si $h \not\equiv s \pmod{k}$.

Or, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} M &= \varphi_{\alpha\alpha'_1}\varphi_{\alpha\alpha'_2}\ldots\varphi_{\alpha_{h-1}\alpha'_h} \\ &= (\varphi_{\alpha\gamma_1}\varphi_{\gamma_1\gamma_2}\ldots\varphi_{\gamma_{p-1}\beta})(\varphi_{\gamma_p\gamma_{p+1}}\varphi_{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}}\ldots\varphi_{\gamma_{r-1}\gamma_p})\ldots \end{aligned}$$

en permutant les facteurs et mettant en évidence les groupes cycliques des facteurs tels que

$$\varphi_{\gamma_p\gamma_{p+1}}\varphi_{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}}\ldots\varphi_{\gamma_{r-1}\gamma_p}$$

et un seul groupe

$$\varphi_{\alpha\gamma_1}\varphi_{\gamma_1\gamma_2}\ldots\varphi_{\gamma_{p-1}\beta},$$

qui est incomplètement cyclique.

En remarquant qu'aucun facteur de M ne peut pas être différent de zéro, s'il n'appartient pas à un champ principal de Φ, on voit que les facteurs des groupes de M doivent nécessairement appartenir aux champs principaux consécutifs pour que M soit différent de zéro. Donc nous devons avoir

$$\varphi_{\alpha\gamma_1} < L_{i,i+1}, \; \varphi_{\gamma_1\gamma_2} < L_{i+1,i+2}, \; \ldots, \; \varphi_{\gamma_{p-1}\beta} < L_{i+p-1,i+p}$$

pour $s \geqq 0$ et

$$\varphi_{\alpha\gamma_1} < L_{i,i+1}, \; \varphi_{\gamma_1\gamma_2} < L_{i+1,i+2}, \; \ldots, \; \varphi_{\gamma_{k-i},\gamma_{k-i+1}} < L_{k,1},$$
$$\varphi_{\gamma_{k-i+1},\gamma_{k-i+2}} < L_{1,2}, \; \ldots, \; \varphi_{\gamma_{p-1}\beta} < L_{q-1,q}$$

pour $s < 0$, c'est-à-dire on doit avoir

$$p \equiv s \pmod{k} \text{ pour } s > 0$$

et

$$p = k - i + q, \; q \equiv i + s \pmod{k} \text{ pour } s < 0.$$

Dans tous les cas nous devons avoir

$$p \equiv s \pmod{k}. \tag{38}$$

Supposons que cette condition soit satisfaite et considérons les produits cycliques tels que

$$\varphi_{\gamma_p\gamma_{p+1}}\varphi_{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}} \cdots \varphi_{\gamma_{r-1}\gamma_p}.$$

De la supposition fondamental que Φ est cyclique de l'indice k il résulte tout de suite que ce produit est égal à 0, si

$$r - p \not\equiv 0 \pmod{k}. \tag{38 bis}$$

Les congruences (38) et (38 bis) nous montrent, évidemment, que $\Delta_h = 0$, si $h \not\equiv s \pmod{k}$. On en voit sans difficulté que les égalités (36) et (37) sont bien vraies quand $\varphi_{\alpha\beta} = 0$ et $< L_{i,i+s}$, où s est nombre entier $\gtreqless 0$. Pour le voir, on n'a qu'à écrire (32) sous la forme

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^{h-1} \frac{\lambda^{n-h-1}}{(h-1)!} S_{\alpha\beta}^{(h)} \tag{39}$$

et à tenir compte de ce que

$$S_{\alpha\beta}^{(h)} = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}}'' \varDelta_h.$$

Supposons enfin que $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$. Alors on doit avoir soit

$$\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,i+1}, \qquad (i = \overline{1, k-1}),$$

soit

$$\varphi_{\alpha\beta} < L_{k,1}.$$

Dans tous les cas le membre

$$\varphi_{\alpha\beta}\,\varphi_{\alpha_1\alpha'_1} \cdots \varphi_{\alpha_{h-1}\alpha'_{h-1}}$$

sera nul, si

$$h - 1 \not\equiv 0 \pmod{k},$$

et les membres tels que

$$(\varphi_{\alpha\gamma_1}\varphi_{\gamma_1\gamma_2} \cdots \varphi_{\gamma_{p-1}\beta})(\varphi_{\gamma_p\gamma_{p+1}}\varphi_{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}} \cdots \varphi_{\gamma_{r-1}\gamma_p}) \cdots$$

seront nuls, si

$$h \not\equiv s \pmod{k},$$

où $s = 1$ ou $-(k-1)$ suivant que $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,i+1}$, $(i = \overline{1, k-1})$, ou $\varphi_{\alpha\beta} < L_{k,1}$. Donc, par (39), on voit que, pour $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$, les coefficients

$$S_{\alpha\beta}^{(k+1)},\ S_{\alpha\beta}^{(2k+1)},\ \ldots$$

seuls ne sont pas nuls en général, de sorte que nous aurous dans ce cas

$$(40) \qquad \varPhi_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda^{n-2}\varphi_{\alpha\beta} + (-1)^k \frac{\lambda^{n-k-2}}{k!} S_{\alpha\beta}^{(k+1)} + (-1)^{2k} \frac{\lambda^{n-2k-2}}{(2k)!} S_{\alpha\beta}^{(2k+1)} + \cdots.$$

On vérifiera facilement que ce développement est un cas spécial des développements (36) et (37) pour $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$ et $< L_{i,i+1}$ $(i = \overline{1, k-1};\ s = 1)$ ou $< L_{k,1}$ $(s = k-1)$.

Remarquons maintenant que dans les relations (36) et (37) le dernier membre qui contient la plus basse puissance de λ sera d'un même degré en λ pour tous $\varPhi_{\alpha\beta}(\lambda)$ appartenant à un même champ $L_{i,i+s}$ $(s \gtreqless 0)$, parce que ce degré a pour exposant $n - s - tk - 1$ $(s \gtreqless 0)$, où t est le plus grand entier tel que $n - s - tk - 1 \geqq 0$, et cet exposant ne dépend que de n et s.

Cette remarque nous montre qu'on peut écrire

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda) = \lambda^{k-1}\,\varphi_{\alpha\alpha}(\lambda^k);$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda^{k-s-1}\,\varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \text{ si } \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i+s},\ s \geqq 0;$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda^{s-1}\,\varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \quad \text{si } \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i-s},\ s > 0,$$

dans le cas où n est divisible par k. Quand n n'est pas divisible par k et le reste de la division de n par k est ν, $1 \leqq \nu \leqq k-1$,

$$(41)\quad \begin{cases} \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda) = \lambda^{\nu-1}\,\varphi_{\alpha\alpha}(\lambda^k); \\ \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \begin{Bmatrix} \lambda^{\nu-s-1} & \varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \text{ pour } \nu > s \\ \lambda^{k+\nu-s-1} & \varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \text{ pour } \nu \leqq s \end{Bmatrix},\ \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i+s},\ s \geqq 0; \\ \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \begin{Bmatrix} \lambda^{\nu+s-1} & \varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \text{ pour } \nu+s-1 < k \\ \lambda^{\nu+s-k-1} & \varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k) \text{ pour } \nu+s-1 \geqq k \end{Bmatrix},\ \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i-s},\ s > 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas $\varphi_{\alpha\alpha}(\lambda^k)$, $\varphi_{\alpha\beta}(\lambda^k)$ désignent des polynomes dont l'argument est λ^k.

En particulier nous avons cette conséquence du théorème XXIX.

XXX. *Si l'ordre n de la matrice Φ, considérée dans* XXIX, *n'est pas divisible par k et le reste de la division de n par k est ν, on aura*

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\nu-1}\,\Phi_{\alpha\alpha}(1);$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\nu-s-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \nu > s,$$

$$= \lambda_{0h}^{k+\nu-s-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \nu \leqq s$$

quand $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i+s}$ *et* $s \geqq 0$, *et*

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\nu+s-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \nu+s-1 < k,$$

$$= \lambda_{0h}^{\nu+s-k-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \nu+s-1 \geqq k$$

quand $\varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i-s}$ *et* $s > 0$; λ_{0h} *est une des racines de l'équation* $\lambda^k - 1 = 0$. *Si n est divisible par k, on aura*

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{k-1}\,\Phi_{\alpha\alpha}(1);$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{k-s-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i+s},\ s \geqq 0;$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{s-1}\,\Phi_{\alpha\beta}(1) \quad \text{pour } \varphi_{\alpha\beta} < L_{i,\,i-s},\ s > 0.$$

Remarque. Les règles qui définissent le facteur devant $\Phi_{\alpha\beta}(1)$ dans les parties droites des égalités de ce théorème sont un peu compliquées. Mais on peut les remplacer par une seule règle équivalente qui est plus commode dans les applications du théorème XXX et qui en découle immédiatement. Elle est la suivante:

Pour $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h})$ on a toujours

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h}) &= \lambda_{0h}^{\nu-1}\,\Phi_{\alpha\alpha}(1) \text{ pour } n \equiv \nu \pmod{k},\\ &= \lambda_{0h}^{k-1}\,\Phi_{\alpha\alpha}(1) \text{ pour } n \equiv 0 \pmod{k};\end{aligned}$$

pour $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$ ces exposants $\nu-1$ ou $k-1$ restent invariables tant que $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ est dans le même champ que $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda)$ et augmentent ou diminuent de s unités quand $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ se déplace de s champs à droite ou à gauche de $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda)$, à condition de remplacer $\nu \pm s - 1$ ou $k \pm s - 1$ par le nombre positif le plus proche de l'un ou de l'autre de ces nombres et congruent à eux modulo k, si l'un ou l'autre d'eux devient plus grand que k ou négatif.

Donc, si l'on imagine la matrice Φ écrite dans la forme

$$\Phi = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1k} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kk} \end{pmatrix}$$

les exposants de λ_{0h} des égalités dans XXX ont respectivement les valeurs

$$\begin{matrix} k-1 & 0 & 1 & \dots & k-2 \\ k-2 & k-1 & 0 & \dots & k-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \end{matrix}$$

quand $n \equiv 0 \pmod{k}$ et les valeurs

$$\begin{matrix} \nu-1 & \nu & \nu+1 & \dots & \nu+k-1 \\ \nu-2 & \nu-1 & \nu & \dots & \nu+k-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu-k & \nu-k+1 & \nu-k+2 & \dots & \nu-1 \end{matrix}$$

quand $n \equiv \nu \pmod{k}$ à condition de réduire les nombres négatifs ou positifs et plus grands que k de cette table aux nombres positifs les plus petits et congruents à eux modulo k.

XXXI. *Soit* $\lambda = \lambda_1 \neq 1$ *un zéro de la matrice stochastique* Φ, *qui est indécomposable, imprimitive et de l'indice* k. *Alors pour tout* $\alpha = \overline{1, n}$

$$\sum_{\beta < L_{ih}} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_1) = 0, \tag{42}$$

où $\sum\limits_{\beta < L_{ih}}$ *signifie que la somme est prise pour toutes les valeurs de* β *correspondant à un champ* L_{ih} *quelconque de* Φ.

En effet, en supposant que Φ est de la forme (22), on peut écrire le système $\lambda_1 X = X\Phi$ sous la forme

$$\lambda_1 X_2 = X_1 L_{12},\ \lambda_1 X_3 = X_2 L_{23},\ \ldots,\ \lambda_1 X_k = X_{k-1} L_{k-1,k},\ \lambda_1 X_1 = X_k L_{k1}.$$

Ce système admet une solution non-nulle

$$X_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{l_1}^{(1)}),\ \ldots,\ X_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_{l_k}^{(k)})$$

de sorte que

$$\lambda_1 x_\beta^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{l_1} x_\alpha^{(1)} \varphi_{\alpha, l_1+\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, l_2)$$

$$\lambda_1 x_\beta^{(3)} = \sum_{\alpha=1}^{l_2} x_\alpha^{(2)} \varphi_{l_1+\alpha, l_1+l_2+\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, l_3)$$

et ainsi de suite.

On a évidemment

$$\sum_{\beta=1}^{l_2} \varphi_{\alpha, l_1+\beta} = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l_1)$$

$$\sum_{\beta=1}^{l_3} \varphi_{l_1+\alpha, l_1+l_2+\beta} = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l_2)$$

etc., donc

$$\lambda_1 \Sigma x^{(2)} = \Sigma x^{(1)},\ \lambda_1 \Sigma x^{(3)} = \Sigma x^{(2)},\ \ldots,\ \lambda_1 \Sigma x^{(k)} = \Sigma x^{(k-1)},\ \lambda_1 \Sigma x^{(1)} = \Sigma x^{(k)},$$

d'où

$$\lambda_1^2 \Sigma x^{(3)} = \Sigma x^{(1)},\ \lambda_1^3 \Sigma x^{(4)} = \Sigma x^{(1)},\ \ldots,\ \lambda_1^{k-1} \Sigma x^{(k)} = \Sigma x^{(1)}$$

et enfin

$$\lambda_1^k \Sigma x^{(k)} = \Sigma x^{(k)}.$$

Mais $\lambda_1 \neq 1$, par conséquent $\Sigma x^{(k)} = 0$, donc $\Sigma x^{(1)} = 0$, $\Sigma x^{(2)} = 0, \ldots,$ $\Sigma x^{(k-1)} = 0$.

En remarquant que les nombres $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{l_k}^{(k)}$ sont proportionnels aux $\Phi_{\alpha 1}(\lambda_1), \Phi_{\alpha 2}(\lambda_1), \ldots, \Phi_{\alpha n}(\lambda_1)$ on obtient des égalités précédentes les relations (42).

XXXII. *Soit* Φ *une matrice considérée dans* XXXI. *Alors*

(43) $$\sum_{\alpha < L_{ii}} \Phi_{\alpha\alpha}(1) = \frac{\Phi'(1)}{k} \qquad (i = \overline{1, k}),$$

En effet, le système $X = X\Phi$ a dans ce cas, à un facteur constant près, une solution positive unique

$$X^0 = (X_1^0, X_2^0, \ldots, X_k^0),$$

où

$$X_h^0 = (x_{10}^{(h)}, x_{20}^{(h)}, \ldots, x_{l_h 0}^{(h)}) \qquad (h = \overline{1, k})$$

sont les solutions du système

$$X_2 = X_1 L_{12}, \; X_3 = X_2 L_{23}, \ldots, X_1 = X_k L_{k1}.$$

Comme dans le théorème précédent on en conclut que

$$\Sigma x_0^{(1)} = \Sigma x_0^{(2)} = \cdots = \Sigma x_0^{(k)},$$

d'où

(44) $$\sum_{\beta < L_{11}} \varphi_{\alpha\beta}(1) = \sum_{\beta < L_{22}} \varphi_{\alpha\beta}(1) = \cdots = \sum_{\beta < L_{kk}} \varphi_{\alpha\beta}(1) \qquad (\alpha = \overline{1, n}).$$

Considérons maintenant le système $Y = \Phi Y$ qui admet, à un facteur constant près, une solution unique

$$y_1^0 = y_2^0 = \cdots = y_n^0 = 1,$$

d'où

(45) $$\Phi_{1\beta}(1) = \Phi_{2\beta}(1) = \cdots = \Phi_{n\beta}(1) \qquad (\beta = \overline{1, n}).$$

De ces relations et de (44) on voit que

(46) $$\sum_{\beta < L_{ii}} \Phi_{\alpha\beta}(1) = \sum_{\alpha < L_{ii}} \Phi_{\alpha\alpha}(1) \qquad (i = \overline{1, k})$$

donc

$$\sum_{\alpha < L_{i\,i}} \Phi_{\alpha\alpha}(1) \equiv A \qquad (i = \overline{1, k}),$$

A étant un nombre constant.

Mais

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_{\alpha\alpha}(1) = \Phi'(1),$$

d'où

$$\Phi'(1) = kA, \; A = \frac{\Phi'(1)}{k},$$

ce qui prouve (43).

Pour la matrice Φ que nous considérons ici, en nous appuyant sur la théorème XXVI, nous pouvons écrire

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{\nu}(\lambda^k - 1)(\lambda^k - a_1) \ldots (\lambda^k - a_\mu),$$

où $|a_1| < 1, \ldots, |a_\mu| < 1$ et $k + \mu k + \nu = n.$ On en voit que

$$\Phi'(1) = k(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_\mu),$$

d'où

$$\sum_{\alpha < L_{i\,i}} \Phi_{\alpha\alpha}(1) = (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_\mu) \qquad (i = \overline{1, k}). \tag{47}$$

On voit, de plus, que

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_\mu) > 0,$$

car $\Phi_{\alpha\alpha}(1)$ sont tous positifs.

XXXIII. *Supposons que la matrice Φ, stochastique et de l'ordre n, ait $\lambda_0 = 1$ pour zéro de multiplicité k et qu'elle soit mise sous la forme*

$$\Phi = \left\{\begin{array}{cccccccc} L_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & L_{22} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & L_{k\,k} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ L_{k+1,\,1} & L_{k+1,\,2} & \ldots & L_{k+1,\,k} & L_{k+1,\,k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\nu\,1} & L_{\nu\,2} & \ldots & L_{\nu\,k} & L_{\nu,\,k+1} & L_{\nu,\,k+2} & \ldots & L_{\nu\,\nu} \end{array}\right\},$$

où tous $L_{\alpha\alpha}$ $(\alpha = \overline{1, \nu})$ sont indécomposables et $L_{11}, \ldots, L_{k\,k}$ sont isolés. Alors

1° $\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda) \equiv 0$ *pour tout* α *qui appartient à un des champs* $L_{\theta\theta}(\theta = \overline{1, k})$ *et pour tout* β *tel que* $\Phi_{\alpha\beta}$ *n'appartient pas à un de ces champs* $L_{\theta\theta}$*;*

2° $\Phi_{\alpha\beta}(1) = 0$, $\Phi'_{\alpha\beta}(1) = 0, \ldots, \Phi^{(k-1)}_{\alpha\beta}(1) = 0$ *pour* $\alpha, \beta = \overline{1, n}$.

On démontre 1° en remarquant que, sous les conditions imposées à α et β, le déterminant $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ aura une bande d'éléments qui consiste de l_θ lignes et ne contient que $l_\theta - 1$ colonnes non vides. Cette bande correspond au champ $L_{\theta\theta}$ dans lequel tombe, ou, en d'autres termes, auquel appartient α. En développant $\Phi_{\alpha\beta}$ au moyen du théorème de Laplace suivant les mineurs de l'ordre l_θ (l'ordre de $L_{\theta\theta}$) formés des éléments de la bande considérée, on voit que tous ces mineurs sont nuls, d'où $\Phi_{\alpha\beta}(L) \equiv 0$ pour α et β précisés dans l'énoncé du théorème.

Ensuite, 2° est vrai quand α et β satisfont aux conditions de 1°, car alors $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) \equiv 0$. Dans le cas où ces conditions pour α et β ne sont pas satisfaites nous avons deux possibilités: ou α et β appartiennent à un même des champs $L_{\theta\theta}(\theta = \overline{1, k})$; ou α et β ne satisfont pas aux conditions de 1° et n'appartiennent pas à un même de ces champs.

Considérons la première possibilité. Supposons que α et β appartiennent au champ $L_{\theta\theta}$, $1 \leqq \theta \leqq k$. Alors, en désignant par $L^{\alpha\beta}_{\theta\theta}$ la matrice qu'on obtient en supprimant dant $L_{\theta\theta}$ la colonne α et la ligne β, on aura

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = L_{11}(\lambda) \ldots L_{\theta-1,\theta-1}(\lambda) L^{\alpha\beta}_{\theta\theta}(\lambda) L_{\theta+1,\theta+1}(\lambda) \ldots L_{kk}(\lambda) \ldots L_{\nu\nu}(\lambda),$$

d'où on conclut tout de suite que

$$\Phi_{\alpha\beta}(1) = \Phi'_{\alpha\beta}(1) = \cdots = \Phi^{(k-2)}_{\alpha\beta}(1) = 0.$$

Passons à la seconde possibilité. Deux cas se présentent: 1) β appartient à un des champs $L_{\theta\theta}$, $1 \leqq \theta \leqq k$, et α appartient à un des champs $L_{k+h,k+h}$, $h = 1, 2, \ldots, \nu - k$; 2) α et β appartiennent à un même de ces derniers champs ou aux champs différents $L_{k+h,k+h}$ et $L_{k+g,k+g}$.

Dans le premier cas nous aurons dans $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ une bande qui consiste de $l_\theta - 1$ lignes et de l_θ colonnes non vides, θ étant l'indice du champs $L_{\theta\theta}$, $1 \leqq \theta \leqq k$, auquel appartient β. En s'aidant du théorème de Laplace et en développant $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ suivant les mineurs de cette bande, nous mettrons $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ dans la forme

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = L_{11}(\lambda) \ldots L_{\theta-1,\theta-1}(\lambda) A_{\theta\theta}(\lambda) L_{\theta+1,\theta+1}(\lambda) \ldots L_{kk}(\lambda) B(\lambda),$$

de laquelle on voit que 2° est vrai.

Dans le second cas on voit facilement que

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = L_{11}(\lambda) L_{22}(\lambda) \ldots L_{kk}(\lambda) A(\lambda),$$

$A(\lambda)$ désignant un certain facteur qui ne s'évanouit pas en général pour $\lambda = 1$. On en conclut de nouveau que 2° est vrai. De plus, on voit que dans ce cas on a aussi $\Phi_{\alpha\beta}^{(k-1)}(1) = 0$.

Ainsi notre théorème se trouve complètement démontré.

Chapitre II. **Les chaînes discrètes de Markoff.**

7. *Généralités.* On sait bien à présent ce que s'appellent chaînes de Markoff. Néanmoins, pour plus de clarté, nous rappelons ici au lecteur les définitions fondamentales.

Considérons n événemments incompatibles

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

et une suite indéfinie des épreuves dans chacune desquelles un de ces événements doit avoir nécessairement lieu. Soient

$$p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0n}$$

les probabilités des A dans l'épreuve initiale, de numéro 0; on a $\Sigma p_{0k} = 1$.

Les probabilités des A dans les épreuves succédant à l'initiale sont déterminées par la règle suivante: dans l'épreuve $k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) A_β, $1 \leqq \beta \leqq n$, a la probalité $\varphi_{\alpha\beta}$ si l'on sait que dans l'épreuve numéro k on a observé A_α, $1 \leqq \alpha \leqq n$.

Cette règle nous conduit tout de suite aux relations fondamentales

$$(1) \qquad p_{k+1\,|\,\beta} = \sum_\alpha p_{k\,|\,\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}),$$

qui ont lieu pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et dans lesquelles $p_{k\,|\,\alpha}$ désigne la probabilité de A_α dans l'épreuve numéro k quand les résultats des épreuves numéros $0, 1, \ldots, k-1$ sont indéterminés.

De la définition des $\varphi_{\alpha\beta}$ on voit que

$$(2) \qquad \sum_{\beta=1}^{k} \varphi_{\alpha\beta} = 1 \qquad (\alpha = \overline{1, n}),$$

et que $\varphi_{\alpha\beta} \geqq 0$, $(\alpha, \beta = \overline{1, n})$. Nous supposons encore que dans la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

aucune colonne et aucune ligne ne sont pas vides ou, en d'autres termes, chaque colonne et chaque ligne contiennent au moins un élément qui n'est pas nul. Cette supposition est équivalente à la condition bien naturelle que dans chacune des épreuves, en commençant par l'épreuve numéro 1, aucun des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'est pas impossible, donc ne se supprime pas dès qu'on dépasse l'épreuve initiale, et que nous n'avons pas parmi les A un événement qui termine les épreuves de sorte que, dès qu'il apparaît, on ne peut plus prolonger les épreuves.

Toutes ces conditions concernant $\varphi_{\alpha\beta}$ étant admises on voit que Φ est une matrice stochastique de l'ordre n.

Nous appelons le matrice Φ *loi* de la chaîne considérée de Markoff qui sera dite simple et discrète dans nos conditions. On appelle les probabilités $\varphi_{\alpha\beta}$ *probabilités de transition* du système des événements A_α ou de la chaîne considérée de Markoff.

On peut aussi considérer des chaînes de Markoff simples et continues ou complexes et discrètes ou complexes et continues. Mais nous les laisserons de côté et ne considérerons ici que les chaînes simples discrètes qui sont, en tous cas, fondamentales et servent de base pour les recherches plus profondes et pour les applications des probabilités en chaîne dans la physique mathématique.

8. Solution générale du système (1). D'après (1)

$$p_{k\,|\,\beta} = \sum_{\alpha} p_{k-1\,|\,\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

d'où, en utilisant cette formule pour $p_{k-1\,|\,\alpha}$ et en y remplaçant $p_{k-1\,|\,\alpha}$ par $\sum\limits_{\gamma} p_{k-2\,|\,\gamma}\, \varphi_{\gamma\alpha}$, on obtient

$$p_{k\,|\,\beta} = \sum_{\gamma} p_{k-2\,|\,\gamma} \sum_{\alpha} \varphi_{\gamma\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} p_{k-2\,|\,\gamma}\, \varphi^{(1)}_{\gamma\beta} \tag{4}$$

en posant

$$\varphi_{\gamma\beta}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\gamma\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta}^{(1)},\ \varphi_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv \varphi_{\alpha\beta}.$$

En continuant ce procédé on vient à la relation

(5) $$p_{k\,|\,\beta} = \sum_{\alpha} p_{0\,\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}),$$

où

(6) $$\varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{n} \varphi_{\alpha\gamma}\, \varphi_{\gamma\beta}^{(k-1)}.$$

On vérifie sans peine qu'on a aussi

(6 bis) $$\varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{n} \varphi_{\alpha\gamma}^{(k-1)}\, \varphi_{\gamma\beta}.$$

Nous recourrons maintenant à une formule de M. O. Perron[1] qui est la suivante. Soit

$$A = Mt(a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

et

$$A(\varrho) = |\varrho E - A| = (\varrho - \varrho_1)^{m_1}(\varrho - \varrho_2)^{m_2} \dots (\varrho - \varrho_s)^{m_s} = 0$$

l'équation caractéristiques de A ayant les racines $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$ des multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_s$. Alors, en posant

$$a_{\alpha\beta}^{(\nu)} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\, a_{\gamma\beta}^{(\nu-1)} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}^{(\nu-1)}\, a_{\alpha\gamma},\ (a_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv a_{\alpha\beta})$$

et en désignant par $g_{\alpha\beta}(\varrho)$ le mineur du déterminant $A(\varrho)$ correspondant à l'élément $a_{\beta\alpha}$, on aura

(7) $$a_{\alpha\beta}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{(m_\lambda - 1)!}\, D_\varrho^{m_\lambda - 1} \left[\frac{\varrho^\nu\, g_{\alpha\beta}(\varrho)}{\psi_\lambda(\varrho)}\right]_{\varrho=\varrho_\lambda} \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}),$$

où $D_\varrho^{m_\lambda-1}$ désigne la dérivée de l'ordre $m_\lambda - 1$ prise par rapport à ϱ et

(8) $$\psi_\lambda(\varrho) = \frac{A(\varrho)}{(\varrho - \varrho_\lambda)^{m_\lambda}}.$$

[1] O. Perron, Mathematische Annalen, 64 (1907), p. 257.

Cette formule reste aussi vraie pour $\nu = 0$, si l'on pose $a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, et $= 1$ pour $\alpha = \beta$.

Dans le cas où $A(\varrho) = 0$ a les racines simples $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ la formule générale (7) se remplace par la formule

$$a_{\alpha\beta}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varrho_\lambda^\nu g_{\alpha\beta}(\varrho_\lambda)}{A'(\varrho_\lambda)}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Prenons maintenant la matrice Φ du système (1) et supposons qu'elle ait les zéros

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$

des multiplicités

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_s$$

respectivement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ étant différents de $\lambda_0 = 1$. Alors la formule (7) nous donne

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} D_\lambda^{m_i - 1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\psi_i(\lambda)}\right]_{\lambda = \lambda_i}, \tag{10}$$

où $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ désigne le mineur du déterminant

$$\Phi(\lambda) = |\lambda E - \Phi|$$

correspondant à l'élément $\varphi_{\beta\alpha}$ et

$$\Psi_i(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)} m_i = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (\lambda - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

En se servant de cette expression de $\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$ on tire de (5) cette formule fondamentale pour $p_{k\,|\,\beta}$:

$$p_{k\,|\,\beta} = \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} D_\lambda^{m_i - 1} [\lambda^k \Psi_{i\beta}(\lambda)]_{\lambda = \lambda_i}, \tag{11}$$

où

$$\Psi_{i\beta}(\lambda) = \frac{1}{\psi_i(\lambda)} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{0\,\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda). \tag{12}$$

Ainsi nous avons trouvé la solution la plus générale des équations (1). Plus loin nous exposerons un autre procédé pour les résoudre.

9. *Chaînes discrètes de Markoff dans le cas des matrices indécomposables et primitives.* Nous allons maintenant examiner les conséquences qu'on peut tirer de la formule générale (11) quand la matrice Φ satisfait aux conditions spéciales par rapport à ses zéros.

Supposons en premier lieu que Φ soit une matrice indécomposable et primitive. Alors, comme nous savons, tous les mineurs $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont positifs pour $\lambda \geqq 1$ donc $\lambda_0 = 1$ sera un zéro simple, car $\Phi'(1) = \sum_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(1)$ est positif. En outre, Φ n'aura pas des zéros du module 1. En résumé, $\Phi(\lambda)$ est dans notre cas de la forme

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}; \; |\lambda_i| < 1 \qquad (i = \overline{1, s}),$$

et la formule (11) peut s'écrire

$$(13) \qquad p_{k|\beta} = \Psi_{0\beta}(1) + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} D_\lambda^{m_i - 1} [\lambda_k \Psi_{i\beta}(\lambda)]_{\lambda = \lambda_i},$$

où

$$(14) \qquad \Psi_{0\beta}(1) = \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)},$$

parce que

$$\Psi_0(1) = (1 - \lambda_s)^{m_1} \ldots (1 - \lambda_s)^{m_s} = \Phi'(1).$$

Considérons $\Psi_{0\beta}(1)$. $\Phi_{\alpha\beta}(1)$ et $\Phi'(1)$ étant positifs c'est un nombre positif. Ensuite le système $Y = \Phi Y$ admet évidemment une solution positive $Y_\alpha^0 = 1$ $(\alpha = \overline{1, n})$ qui, abstraction faite d'un facteur constant, est une solution unique de ce système. Donc, en vertu des relations

$$y_1^0 : y_2^0 : \ldots : y_n^0 = \Phi_{1\beta}(1) : \Phi_{2\beta}(1) : \ldots : \Phi_{n\beta}(1),$$

on a

$$\Phi_{1\beta}(1) = \Phi_{2\beta}(1) = \cdots = \Phi_{n\beta}(1).$$

Par conséquent,

$$\frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum_\beta \Phi_{\beta\beta}(1)},$$

d'où

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)} = 1.$$

On obtient ensuite

$$\Psi_{0\beta}(1) = \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum_\beta \Phi_{\beta\beta}(1)} \sum_\alpha p_{0\alpha} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum_\beta \Phi_{\beta\beta}(1)},$$

donc, en posant

$$p_\beta = \Psi_{0\beta}(1),$$

on trouve

$$p_\beta = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum_\beta \Phi_{\beta\beta}(1)}, \tag{15}$$

p_β, $\beta = \overline{1, n}$, étant des nombres positifs et tels que

$$\sum_{\beta=1}^{n} p_\beta = 1. \tag{16}$$

Enfin

$$p_{k\,|\,\beta} = p_\beta + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} D_\lambda^{m_i-1} [\lambda^k \Psi_{i\beta}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_i}, \tag{17}$$

d'où il est évident que

$$\lim_{k\to\infty} p_{k\,|\,\beta} = p_\beta, \tag{18}$$

puisque $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, s}$, et $\Psi_{i\beta}(\lambda)$, aussi que leurs dérivées, sont finis pour $\lambda = \lambda_i$.

On voit que les nombres positifs p_β sont les probabilités limites ou finales vers lesquelles tendent les probabilités $p_{k\,|\,\beta}$ avec le nombre croissant des épreuves. Le fait bien remarquable est que les probabilités p_β ne dépendent pas des probabibilités initiales $p_{0\alpha}$: les égalités (15) nous montrent qu'elles dépendent uniquement de la loi de la chaîne Φ.

Nous pouvons résumer les résultats acquis dans le théorème suivant.

Théorème A. *Si la matrice stochastique Φ, loi de la chaîne considérée de Markoff, est indécomposable et primitive et a les zéros*

$$1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$$

dont les multiplicités sont

$$1,\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ étant nécessairement du module < 1, les probabilités $p_{k\,|\,\beta}$ sont définies

par les égalités (17), *où* p_β *sont donnés par* (15) *et répresentent les probabilités finales vers lesquelles tendent* $p_{k|\beta}$ *quand le nombre des épreuves augmente indéfiniement; les probabilités* p_β *ne dépendent pas des probabilités initiales des événements* A_β.

De la formule (17) on tire aisément que

$$\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(m_i-1)!}D_\lambda^{m_i-1}[\lambda_k\Psi_{i\beta}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_i}=0. \tag{19}$$

En effet, d'après (6 bis),

$$\sum_{\beta=1}^{n}\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}=\sum_{\gamma=1}^{n}\varphi_{\alpha\gamma}^{(k-1)},$$

donc

$$\sum_{\beta=1}^{n}\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}=\sum_{\beta=1}^{n}\varphi_{\alpha\beta}=1 \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

et

$$\sum_{\beta=1}^{n}p_{k|\beta}=\sum_{\alpha}p_{0\alpha}\sum_{\beta}\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}=1.$$

De cette relation et de (16) on obtient (19).

Mais on peut procéder directement et obtenir des résultats plus détaillés.

Soit λ_i un des zéros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ différents de 1. Le système $\lambda_i X = X\Phi$ admet une solution non-nulle

$$x_\beta^{(i)},\quad \beta=\overline{1,n}$$

et, si $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_i)$ ne sont pas tous nuls, nous pouvons écrire

$$x_1^{(i)}:x_2^{(i)}:\ldots:x_n^{(i)}=\Phi_{\alpha 1}(\lambda_i):\Phi_{\alpha 2}(\lambda_i):\ldots:\Phi_{\alpha n}(\lambda_i).$$

Mais

$$\lambda_i\sum_{\beta}x_\beta^{(i)}=\sum_{\alpha}x_\alpha^{(i)}\sum_{\beta}\varphi_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha}x_\alpha^{(i)},$$

d'où $\sum\limits_{\alpha}x_\alpha^{(i)}=0$, donc

$$\sum_{\beta=1}^{n}\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_i)=0 \qquad (\alpha=\overline{1,n}). \tag{20}$$

Quand tous les $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_i)=0$ cette relation est triviale.

Soient maintenant λ', λ'', $|\lambda'| < 1$, $|\lambda''| < 1$, deux zéros différents de Φ. La relation (20) nous conduit alors à celle-ci

$$\sum_\beta \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda') - \Phi_{\alpha\beta}(\lambda'')}{\lambda' - \lambda''} = 0,$$

d'où, en faisant tendre λ'' vers λ', on voit que

$$\sum_\beta \Phi'_{\alpha\beta}(\lambda') = 0$$

si λ', $|\lambda'| < 1$, est un zéro double de Φ. En continuant ce raisonnement bien connu on verra que

$$(21) \qquad \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_i) = 0, \quad \sum_\beta \Phi'_{\alpha\beta}(\lambda_i) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}^{(m_i-1)}(\lambda_i) = 0$$

si λ_i, $|\lambda_i| < 1$, est un zéro de Φ dont l'ordre de multiplicité est m_i.

Moyennant ces égalités on vérifie sans peine que

$$(22) \qquad \sum_{\beta=1}^{n} [D_\lambda^h \Psi_{i\beta}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_i} = 0 \qquad (h = \overline{0, m_i - 1}; \ |\lambda_i| < 1),$$

d'où l'on tire immédiatement (19).

Exemple 1. Considérons une chaîne dont la loi est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique de Φ est

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.3 & -0.2 & -0.5 \\ -0.2 & \lambda - 0.5 & -0.3 \\ -0.7 & -0.2 & \lambda - 0.1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.3)(\lambda + 0.4) = 0,$$

d'où

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_1 = 0.3; \quad \lambda_2 = -0.4.$$

Les expressions générales des $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont données par la table

β	$\varphi_{1\beta}(\lambda)$	$\varphi_{2\beta}(\lambda)$	$\varphi_{3\beta}(\lambda)$
1	$\lambda^2 - 0.6\lambda - 0.01$	$0.2\lambda + 0.19$	$0.7\lambda - 0.31$
2	$0.2\lambda + 0.08$	$\lambda^2 - 0.4\lambda - 0.32$	$0.2\lambda + 0.08$
3	$0.5\lambda - 0.19$	$0.3\lambda + 0.01$	$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.11$

de laquelle on calcule:

β	$\Phi_{1\beta}(1)$	$\Phi_{2\beta}(1)$	$\Phi_{3\beta}(1)$
1	0.39	0.39	0.39
2	0.28	0.28	0.28
3	0.31	0.31	0.31

β	$\Phi_{1\beta}(0.3)$	$\Phi_{2\beta}(0.3)$	$\Phi_{3\beta}(0.3)$
1	-0.10	0.25	-0.10
2	0.14	-0.35	0.14
3	-0.04	0.10	-0.04

β	$\Phi_{1\beta}(-0.4)$	$\Phi_{2\beta}(-0.4)$	$\Phi_{3\beta}(-0.4)$
1	0.39	0.11	-0.59
2	0.00	0.00	0.00
3	-0.39	-0.11	0.59

La formule générale (17), dans le cas de zéros simples de Φ, comme le présent, peut s'écrire

$$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^k \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_i)}{\Phi'(\lambda_i)} \qquad (k = \overline{1, n}). \tag{23}$$

En remarquant que, dans l'exemple considéré,

$$\Phi'(1) = 0.98: \quad \Phi'(0.3) = -0.49; \quad \Phi'(-0.4) = 0.98,$$

nous tirons de cette formule et des tables précédentes les expressions suivantes des probabilités $p_{k|\beta}$:

$$p_{k|1} = \frac{39}{98} + \frac{(0.3)^k}{49}[10p_{01} - 25p_{02} + 10p_{03}] + \frac{(-0.4)^k}{98}[39p_{01} + 11p_{02} - 59p_{03}],$$

$$p_{k|2} = \frac{28}{98} + \frac{(0.3)^k}{49}[-14p_{01} + 35p_{02} - 14p_{03}],$$

$$p_{k|3} = \frac{31}{98} + \frac{(0.3)^k}{49}[4p_{01} - 10p_{02} + 4p_{03}] + \frac{(-0.4)^k}{98}[-39p_{01} - 11p_{02} + 59p_{03}].$$

Les probabilités finales sont

$$p_1 = \frac{39}{98}, \quad p_2 = \frac{28}{98}, \quad p_3 = \frac{31}{98}.$$

Exemple 2. Soit

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 - 1.2\lambda^2 + 0.21\lambda - 0.01 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.1)^2;$$

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.1;$$

β	$\Phi_{1\beta}(\lambda)$	$\Phi_{2\beta}(\lambda)$	$\Phi_{3\beta}(\lambda)$
1	$\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.02$	$0.2\lambda + 0.12$	$0.4\lambda - 0.08$
2	$0.2\lambda - 0.02$	$\lambda^2 - 0.9\lambda + 0.08$	$0.2\lambda - 0.02$
3	$0.3\lambda + 0.01$	$0.5\lambda - 0.19$	$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.11$

β	$\Phi_{1\beta}(1)$	$\Phi_{2\beta}(1)$	$\Phi_{3\beta}(1)$
1	0.32	0.32	0.32
2	0.18	0.18	0.18
3	0.31	0.31	0.31

β	$\Phi_{1\beta}(0.1)$	$\Phi_{2\beta}(0.1)$	$\Phi_{3\beta}(0.1)$
1	-0.04	0.14	-0.04
2	0.00	0.00	0.00
3	0.04	-0.14	0.04

β	$\Phi'_{1\beta}(0.1)$	$\Phi'_{2\beta}(0.1)$	$\Phi'_{3\beta}(0.1)$
1	-0.50	0.20	0.40
2	0.20	-0.70	0.20
3	0.30	0.50	-0.60

$$\Phi'(1) = 0.81; \quad \psi_1(\lambda) = \lambda - 1; \quad \psi_1(0.1) = -0.90; \quad \psi'(0.1) = 1.00;$$

$$p_{k|1} = \frac{32}{81} + \frac{(0.1)^k}{81}[(36k + 49)p_{01} - (126k + 32)p_{02} + (36k - 32)p_{03}],$$

$$p_{k|2} = \frac{18}{81} + \frac{(0.1)^k}{81}[\quad - 18p_{01} \quad + 63p_{02} \quad - 18p_{03}],$$

$$p_{k|3} = \frac{31}{81} + \frac{(0.1)^k}{81}[(-36k - 31)p_{01} + (126k - 31)p_{02} - (36k - 50)p_{03}].$$

Les probabilités finales sont

$$p_1 = \frac{32}{81}, \quad p_2 = \frac{18}{81}, \quad p_3 = \frac{31}{81}.$$

10. Cas de la matrice Φ indécomposable et imprimitive. Supposons maintenant que la matrice Φ soit indécomposable et imprimitive.

Etant indécomposable elle admet, comme dans le cas précédent, $\lambda_0 = 1$ comme zéro simple, et puisqu'elle est imprimitive elle peut être, d'après XXII, réduite à la forme

$$(24)\qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{m-1,m} \\ L_{m1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

en supposant qu'elle est cyclique de l'indice m. Alors, par XXVI, l'équation caractéristique de Φ sera

$$\Phi(\lambda) = \lambda^\nu(\lambda^m - 1)(\lambda^m - C_1)\dots(\lambda^m - C_\mu) = 0,$$

où $\nu = 0$, si $n \equiv 0 \pmod m$ et $\neq 0$, si $n \not\equiv 0 \pmod m$ et $|C_i| < 1$ $(i = \overline{1, \mu})$. Mais parmi les nombres C_i il peut être m_1 égals à a_1, m_2 égals à $a_2, \dots, m_s$ égals à a_s, de sorte que la forme définitive de $\Phi(\lambda)$ sera

$$(25)\qquad \Phi(\lambda) = \lambda^\nu(\lambda^m - 1)(\lambda^m - a_1)^{m_1}\dots(\lambda^m - a_s)^{m_s}.$$

Cela étant nous pouvons, d'après (10), écrire:

$$(26)\qquad \varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{h=0}^{m-1} \lambda_{0h}^k \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})}{\Phi(\lambda_{0h})} + \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{h=1}^{m_g} D_\lambda^{m_g-1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\psi_{gh}(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_{gh}}$$
$$+ \frac{1}{(\nu-1)!} D_\lambda^{\nu-1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right]_{\lambda=0},$$

en désignant par λ_{0h} $(h = \overline{0, m-1})$ les racines de l'équation

$$\lambda^m - 1 = 0,$$

par $\lambda_{gh}(g = \overline{1, s};\ h = \overline{1, m_g})$ les racines des équations

$$\lambda^m - a_g = 0, \qquad (g = \overline{1, s})$$

et en posant

$$(27)\qquad \psi_{gh}(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_{gh})^{m_g}},$$

$$(28)\qquad \varphi(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^\nu} = (\lambda^m - 1)(\lambda^m - a_1)^{m_1}\dots(\lambda^m - a_s)^{m_s}.$$

Φ étant indécomposable et tous $\Phi_{\alpha\beta}(1)$ positifs, nous trouvons, comme plus haut, que $\Phi_{1\beta}(1) = \Phi_{2\beta}(1) = \dots = \Phi_{n\beta}(1)$, $\beta = \overline{1, n}$, d'où

$$(29) \qquad \frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum\limits_{\beta} \Phi_{\beta\beta}(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(\lambda_{00})}{\sum\limits_{\beta} \Phi_{\beta\beta}(\lambda_{00})} = p_\beta > 0$$

et

$$\sum_{\beta} p_\beta = 1$$

$(\lambda_{00} = 1)$.

Le nombre ν est fixe et fini et k peut être arbitrairement grand. Il en résulte que

$$(30) \qquad \frac{1}{(\nu - 1)!} D_\lambda^{\nu-1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right]_{\lambda=0} \equiv 0 \text{ pour } k \geqq \nu;$$

pour $k < \nu$ cette quantité n'est pas nulle en général. En répétant les raisonnements qui nous ont conduit aux égalités (21), nous vérifierons que

$$(31) \qquad \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad \sum_{\beta} \Phi'_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}^{(\nu-1)}(0) = 0, \qquad (\alpha = \overline{1, n}),$$

d'où

$$(32) \qquad \frac{1}{(\nu - 1)!} \sum_{\beta} D_\lambda^{\nu-1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right]_{\lambda=0} = 0, \qquad (\alpha = \overline{1, n})$$

dans le cas $k < \nu$; pour $k \geqq \nu$ cela découle de (30).

On peut aussi voir que

$$(33) \qquad \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{gh}) = 0, \quad \sum_{\beta} \Phi'_{\alpha\beta}(\lambda_{gh}) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}^{(m_g-1)}(\lambda_{gh}) = 0, \qquad (\alpha = \overline{1, n}).$$

De ces égalités on tire que

$$(34) \qquad \sum_{\beta} \left\{ \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{h=1}^{m_g} D_\lambda^{m_g-1} \left[\frac{\lambda^k \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\psi_{gh}(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_{gh}} \right\} = 0, \qquad (\alpha = \overline{1, n}).$$

Maintenant, en s'aidant de la relation $p_{k|\beta} = \sum\limits_{\alpha} p_{0\alpha} \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$, on peut écrire

$$(35) \qquad p_{k|\beta} = p_\beta + P'_{k|\beta} + P''_{k|\beta} + Q_{k|\beta}$$

en posant

$$(36) \qquad P'_{k|\beta} = \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^k \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})}{\Phi'(\lambda_{0h})},$$

$$(37) \qquad P''_{k|\beta} = \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{h=1}^{m_g} D_\lambda^{m_g-1} \left[\frac{\lambda^k}{\psi_{gh}(\lambda)} \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_{gh}},$$

$$Q_{k\,|\,\beta} = \frac{1}{(\nu - 1)!} D_\lambda^{\nu-1} \left[\frac{\lambda^k}{\varphi(\lambda)} \sum_\alpha p_{0\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) \right]_{\lambda=0}. \tag{38}$$

Examinons les nombres $P'_{k\,|\,\beta}$, $P''_{k\,|\,\beta}$ et $Q_{k\,|\,\beta}$.

Il est évident que $Q_{k\,|\,\beta}$ varie irrégulièrement quand k accepte les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ et est toujours nulle pour $k = \nu, \nu + 1, \ldots$ De plus, à cause de (32), on a toujours

$$\sum_{\beta=1}^{n} Q_{k\,|\,\beta} = 0. \tag{39}$$

De même, il est évident que

$$\lim_{k \to \infty} P''_{k\,|\,\beta} = 0, \tag{40}$$

car $|\lambda_g| < 1$ pour $g = \overline{1, s}$ et $h = \overline{m_g}$. On a, comme pour $Q_{k\,|\,\beta}$,

$$\sum_{\beta=1}^{n} P''_{k\,|\,\beta} = 0, \tag{41}$$

ce qui résulte de (34).

Restent, enfin, les quantités $P'_{k\,|\,\beta}$. Elles varient avec k d'une manière très remarquable.

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_m$ les ordres des sous-matrices carrées $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$ (qui sont vides) correspondant à la forme (24) de Φ, de sorte que les champs principaux $L_{12}, L_{23}, \ldots, L_{m1}$ ont l_1 lignes et l_2 colonnes, l_2 lignes et l_3 colonnes, $\ldots$, l_m lignes et l_1 colonnes respectivement.

Considérons maintenant la somme $\sum_\alpha p_{0\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$. Quand α parcourt les valeurs $1, 2, \ldots, l_1$ les quantités $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$ restent dans un même champ $L_{1,t}$, t étant un des nombres $1, 2, \ldots, m$ et dépendant de la valeur de l'indice β. De même, quand α parcourt les valeurs

$$l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, l_1 + l_2;$$
$$l_1 + l_2 + 1, l_1 + l_2 + 2, \ldots, l_1 + l_2 + l_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_1 + \cdots + l_{m-1} + 1, l_1 + \cdots + l_{m-1} + 2, \ldots, n$$

$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$ restera respectivement dans les champs

$$L_{2,t};\ L_{3,t};\ \ldots;\ L_{m,t}.$$

D'après XXX,

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\nu-t}\Phi_{\alpha\beta}(1) \text{ pour } \nu - t \geqq 0$$
$$= \lambda_0^{m+\nu-t}\Phi_{\alpha\beta} \text{ pour } \nu - t < 0$$

ou

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\theta}\Phi_{\alpha\beta}(1) = \lambda_{0h}^{\theta}\Phi_{\beta\beta}(1),$$

où $\theta = \nu - t$ ou $m + \nu - t$ suivant les cas indiqués, quand α prend l'une des valeurs $1, 2, \ldots, q_1$. Pour les valeurs

$$\alpha = l_1 + 1,\ l_1 + 2, \ldots, l_1 + l_2$$

$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})$ appartiendra au champ $L_{2,t}$, donc, d'après la remarque faite à propos de XXX, θ augmentera d'une unité et nous aurons

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{\theta+1}\Phi_{\alpha\beta}(1) = \lambda_{0h}^{\theta+1}\Phi_{\beta\beta}(1).$$

On peut continuer ce raisonnement et on arrive de cette manière au résultat suivant.

Soient

$$(42) \qquad \begin{cases} q_1 = p_{01} + p_{02} + \cdots + p_{0l_1}, \\ q_2 = p_{0,l_1+1} + p_{0,l_1+2} + \cdots + p_{0,l_1+l_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m = p_{0,l_1+\cdots+l_{n-1}+1} + p_{0,l_1+\cdots+l_{n-1}+2} + \cdots + p_{0n}. \end{cases}$$

Alors

$$(43) \qquad \sum_\alpha p_{0\alpha}\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \Phi_{\beta\beta}(1)[\lambda_{0h}^{\theta}q_1 + \lambda_{0h}^{\theta+1}q_2 + \cdots + \lambda_{0h}^{\theta+m-1}q_m].$$

En remarquant que dans notre cas

$$\Phi'(\lambda_{0h}) = \sum_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h}) = \sum_\alpha \lambda_{0h}^{\nu-1}\Phi_{\alpha\alpha}(1) = \lambda_{0h}^{\nu-1}\Phi'(1)$$

nous aurons à l'aide de (43)

$$P'_{k|\beta} = \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^{k} \sum_\alpha p_{0\alpha}\frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})}{\Phi'(\lambda_{0h})}$$

$$= \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\Phi'(1)}\sum_{h=1}^{m-1}\lambda_{0h}^{k-\nu+1+\theta}[q_1 + \lambda_{0h}q_2 + \lambda_{0h}^2 q_3 + \cdots + \lambda_{0h}^{m-1}q_m].$$

On sait les relations

$$\sum_{h=0}^{m-1} \lambda_{0h}^{\mu m+\mu_1} = 0, \qquad (1 \leqq \mu_1 \leqq m-1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{h=0}^{m-1} \lambda_{0h}^{\mu m} = m \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité. De là

$$\sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^{\mu m+\mu_1} = -1, \qquad \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^{\mu m} = m-1$$

et

$$\sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^{k-\nu+1+\theta}[q_1 + \lambda_{0h} q_2 + \cdots + \lambda_{0h}^{m-1} q_m] =$$
$$= -q_1 - q_2 - \cdots - q_{\gamma-1} + (m-1) q_\gamma - q_{\gamma+1} - \cdots - q_m,$$

si $k - \nu + 1 + \theta + \gamma - 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Puisque $\Sigma q = 1$, on a

(44) $$\sum_{h=1}^{m-1} \lambda_{0h}^{k-\nu+1+\theta}[q_1 + \lambda_{0h} q_2 + \cdots + \lambda_{0h}^{m-1} q_m] = m q_\gamma - 1$$

et, en tenant compte de (29),

(45) $$P'_{k|\beta} = p_\beta (m q_\gamma - 1).$$

Mais $k - \nu + 1 + \theta + \gamma - 1 = k - t + \gamma$ ou $k - t + m + \gamma$, suivant les valeurs de θ, et ce nombre doit être divisible par m et γ doit être un des nombres $1, 2, \ldots, m$. On en voit que γ est celui des nombres $1, 2, \ldots, m$ qui satisfait à la condition

(46) $$\gamma \equiv t - k \pmod{m},$$

où t est à son tour défini par la relation

(47) $$\varphi_{1\beta} < L_{1t}.$$

Ces deux conditions déterminent complètement la valeur (45) de $P'_{k|\beta}$.

Prenons maintenant la somme $p_\beta + P'_{k|\beta}$. On a

(48) $$p_\beta + P'_{k|\beta} = p_\beta + p_\beta (m q_\gamma - 1) = m p_\beta q_\gamma.$$

Examinons quelques propriétés de cette quantité.

On remarque d'abord que q_γ ne varie pas quand β prend les valeurs pour lesquelles $\varphi_{1\beta}$ ne sort pas du champ L_{1t}. Quand β parcourt les valeurs $1, 2, \ldots, n$, t, et par suite γ, parcourrent dans un certain ordre les valeurs $1, 3, \ldots, m$.

Ces remarques nous conduisent à la relation

$$\sum_{\beta=1}^{n} (p_\beta + P'_{k|\beta}) = m \sum_{t=1}^{m} q_\gamma \sum_{\beta < L_{tt}} \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\Phi'(1)}$$
$$= \sum_{\gamma=1}^{m} q_\gamma = 1,$$

où nous utilisons XXXII et la relation $\sum_{\gamma=1}^{m} q = 1$, qui est évidente. Donc,

$$\sum_{\beta=1}^{n} (p_\beta + P'_{k|\beta}) = \sum_{\beta=1}^{n} m\, p_\beta\, q_\gamma = 1,$$

ce qu'on peut aussi conclure des relations

$$\sum_{\beta} p_{k|\beta} = 1, \quad \sum_{\beta} P''_{k|\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p} Q_{k|\beta} = 0.$$

Par conséquent, les nombres $m p_\beta q_\gamma$, étant positifs, peuvent être interprétés comme des probabilités. Et nous pouvons le faire en effet.

D'après XXXII, dans notre cas,

$$\sum_{\beta < L_{tt}} \Phi_{\beta\beta}(1) = \frac{\Phi'(1)}{m},$$

c'est-à-dire

$$m\, p_\beta = m \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum\limits_{\beta < L_{tt}} \Phi_{\beta\beta}(1)} = \frac{p_\beta}{\sum\limits_{\beta < L_{tt}} p_\beta}. \tag{49}$$

Or, cette quantité peut être expliqué comme il suit.

Partageons les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans les ensembles partiels

$$\left\{\begin{array}{llll} B_1 = (A_1, & A_2, & \ldots, A_{l_1} &), \\ B_2 = (A_{l_1+1}, & A_{l_1+2}, & \ldots, A_{l_1+l_2}), & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ B_m = (A_{l_1+\cdots+l_{m-1}+1}, & A_{l_1+\cdots+l_{m-1}+2}, & \ldots, A_n &) \end{array}\right. \tag{50}$$

que nous appellons *ensembles en chaîne*, car, comme on le voit de (24), l'apparition de l'un des événements de l'ensemble B_1 ne fait possible que l'apparition de l'un des B_2 dans l'épreuve suivante qui, à son tour, ne peut être succédé que par un des B_3, et ainsi de suite, les ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_m$ se réalisant chacun dans l'un de ses membres l'un après l'autre. On voit que, dans notre cas, l'hazard ne porte pas sur les ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_m$, leur succession étant complètement définie par le premier événement, mais seulement sur les événements dans chacun de ces ensembles.

Cela étant établi, si l'on sait qu'après un certain nombre d'épreuves on est amené dans l'ensemble B_t correspondant au champ L_{tt}, on doit considérer

$$mp_\beta = \frac{p_\beta}{\sum\limits_{\beta < L_{tt}} p_\beta} = p_{\beta < L_{tt}} \tag{51}$$

comme probabilité de l'événement A_β qui fait partie de l'ensemble B_t, ce que nous avons désigné par le symbole $p_{\beta<L_{tt}}$.

D'autre part

$$q_\gamma = p_{0,\, l_1+\cdots+l_{\gamma-1}+1} + \cdots + p_{0,\, l_1+\cdots+l_\gamma},$$

d'après le théorème d'addition des probabilités, n'est pas autre chose que la probabilité d'observer un des événements B_γ dans l'épreuve initiale, l'ensemble B_γ étant défini par (46) et (47).

On voit maintenant que

$$p_\beta + P'_{k|\beta} = q_\gamma p_{\beta<L_{tt}} \tag{52}$$

est la probabilité d'un événement qui consiste dans la réalisation simultanée de deux autres événements: 1° l'apparition de l'un des événements de l'ensemble B_γ dans l'épreuve initiale; 2° l'apparition de A_β qui fait partie de l'ensemble B_t dans l'épreuve numéro k.

Remarquons encore que $P''_{k|\beta} \to 0$ et $Q_{k|\beta} = 0$ quand $k \to \infty$ par des valeurs quelconques et que $q_\gamma p_{\beta<L_{tt}}$ conserve la même valeur pour β fixe et k tendant vers l'infini par les valeurs de la forme $k = \mu m + t + \gamma$, t étant un nombre fixe défini par la condition $\varphi_{1\beta} < L_{1t}$ et γ un nombre constant pris de la suite $1, 2, \ldots, m$. Donc, $q_\gamma p_{\beta<L_{tt}}$ est la probabilité finale de l'événement A_β quand on ne sait rien des résultats des épreuves considérées et quand on considère le nombre indéfini des épreuves des numéros

$$t+\gamma,\quad m+t+\gamma,\quad 2m+t+\gamma,\ \ldots.$$

Cette probabilité se change avec le changement de β et de γ. Quand β reste constant et k parcourt toutes les valeurs entières et positives, γ parcourt périodiquement les valeurs $1, 2, \ldots, m$, donc la probabilité prend périodiquement les valeurs

$$(53) \qquad q_1 p_{\beta<L_{tt}},\quad q_2 p_{\beta<L_{tt}},\ \ldots,\ q_m p_{\beta<L_{tt}}$$

avec les termes additifs $P''_{k|\beta}$ et $Q_{k|\beta}$ dont le premier tend vers zéro pour $k\to\infty$ et le second devient nul, dès que k surpasse une certaine valeur.

Nous voyons que les oscillations constantes de $p_{k|\beta}$, représentées par la suite (53), sont périodique avec la période m.

En s'appuyant, enfin, sur le théorème XXXI on trouve les relations

$$\sum_{\beta<L_{tt}} P''_{k|\beta}=0,\qquad \sum_{\beta<L_{tt}} Q_{k|\beta}=0,$$

d'où

$$(54) \qquad \sum_{\beta<L_{tt}} p_{k|\beta}=q_\gamma,$$

car, par (51)

$$\sum_{\beta<L_{tt}} p_{\beta<L_{tt}}=1.$$

Les relations (54) sont aussi évidentes de la forme même de Φ dans notre cas et de la remarque qui a été faite sur les ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

Nous résumons les faits établis les plus importants dans le théorème suivant:

Théorème B. *Soit donnée une chaîne de Markoff dont la loi Φ, une matrice indécomposable et imprimitive, soit réduite à la forme*

$$\Phi=\begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & L_{m-1,\,m} \\ L_{m1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

où m est l'indice de cyclicité de Φ; soit

$$\Phi(\lambda)=\lambda^\nu(\lambda^m-1)(\lambda^m-a_1)^{m_1}\ldots(\lambda^m-a_s)^{m_s}=0$$

$$(\nu>0,\ |a_1|<1,\ \ldots,\ |a_s|<1)$$

l'équation caractéristique de Φ. Alors la probabilité $p_{k|\beta}$ de A_β est

$$p_{k|\beta} = q_\gamma p_{\beta<L_{tt}} + P''_{k|\beta} + Q_{k|\beta},$$

où $P''_{k|\beta}$ et $Q_{k|\beta}$ ont les valeurs (37) et (38) et tendent vers zéro avec $k \to \infty$,

$$q_\gamma = p_{0,\, l_1+\cdots+l_{\gamma-1}+1} + \cdots + p_{0,\, l_1+\cdots+l_\gamma}$$

est la probabilité de l'ensemble

$$B_\gamma = (A_{l_1+\cdots+l_{\gamma-1}+1}, \ldots, A_{l_1+\cdots+l_\gamma})$$

dans l'épreuve initiale et

$$p_{\beta<L_{tt}} = \frac{p_\beta}{\sum\limits_{\beta<L_{tt}} p_\beta} = \frac{m\,\Phi_{\beta\beta}(1)}{\Phi'(1)}$$

est la probabilité de l'événement A_β dans l'ensemble B_t, quand on sait que A_β doit rentrer dans cet ensemble, les nombres γ et t étant définis par les conditions

$$\varphi_{1\beta} < L_{1t}; \quad 1 \leqq \gamma \leqq m; \quad k \equiv t - \gamma \pmod{m}.$$

Quand $k \to \infty$, la probabilité $p_{k|\beta}$ parcourt périodiquement les valeurs

$$q_1 p_{\beta<L_{tt}}, \quad q_2 p_{\beta<L_{tt}}, \quad \ldots, \quad q_m p_{\beta<L_{tt}}$$

avec les écarts $P''_{k|\beta} + Q_{k|\beta}$ qui tendent vers zéro et sont tels que

$$\sum_{\beta<L_{tt}} P''_{k|\beta} = 0, \qquad \sum_{\beta<L_{tt}} Q_{k|\beta} = 0 \qquad\qquad (t = \overline{1, m})$$

de sorte que

$$\sum_{\beta<L_{tt}} p_{k|\beta} = q_\gamma.$$

Remarque. Si l'on suppose que pour la matrice Φ considérée dans ce numéro la fonction caractéristique $\Phi(\lambda)$ ne contient pas le facteur λ^ν, de sorte que $\nu = 0$, on doit, d'après XXX et en supposant $\varphi_{1\beta} < L_{1t}$, prendre

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{m-t}\, \Phi_{\alpha\beta}(1),$$

d'où $\theta = m - t$, et

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\lambda_{0h}) = \lambda_{0h}^{m-1}\, \Phi_{\alpha\alpha}(1).$$

On en conclut que le nombre $k-\nu+1+\theta+\gamma-1$ considéré plus haut se remplacera maintenant par $k-m+1+m-t+\gamma-1=k-t+\gamma$, c'est-à-dire aura la même valeur que plus haut. Donc, toutes nos déductions resteront les mêmes avec la seule modification que, pour $\nu=0$, la quantité $Q_{k|\beta}$ ne figurera du tout dans l'expression de $p_{k|\beta}$ qui sera maintenant

$$p_{k|\beta}=q_\gamma p_{\beta<L_{tt}}+P''_{k|\beta}.$$

Exemple 3. Nous considérerons deux illustrations de la théorie exposée dans ce numéro.

Soit donnée une chaîne dont la loi est

$$\Phi=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice Φ est évidemment indécomposable, imprimitive et de l'indice 3; elle est donnée dans la forme cyclique et L_{12} est composé des nombres 0.1, 0.5, 0.4; L_{23} des nombres 1, 1, 1 et L_{31} d'un seul nombre 1.

On trouve facilement

$$\Phi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -0.1 & -0.5 & -0.4 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^5-\lambda^2.$$

Donc les zéros de Φ sont

$$\lambda_{00}=1,\quad \lambda_{01}=e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \lambda_{02}=e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

qui sont simple, et

$$\lambda=0$$

de multiplicité $\nu=2$.

On trouve ensuite:

$$\Phi'(\lambda)=5\lambda^4-2\lambda;\quad \Phi'(\lambda_{00})=3;\quad \Phi'(\lambda_{01})=3\lambda_{01};\quad \Phi'(\lambda_{02})=3\lambda_{02};$$

$$\varphi(\lambda)=\lambda^3-1;$$

β	$\Phi_{1\beta}(\lambda)$	$\Phi_{2\beta}(\lambda)$	$\Phi_{3\beta}(\lambda)$	$\Phi_{4\beta}(\lambda)$	$\Phi_{5\beta}(\lambda)$
1	λ^4	λ^2	λ^2	λ^2	λ^3
2	$0.1\,\lambda^3$	$\lambda^4-0.9\,\lambda$	$0.1\,\lambda$	$0.1\,\lambda$	$0.1\,\lambda^2$
3	$0.5\,\lambda^3$	$0.5\,\lambda$	$\lambda^4-0.5\,\lambda$	$0.5\,\lambda$	$0.5\,\lambda^2$
4	$0.4\,\lambda^3$	$0.4\,\lambda$	$0.4\,\lambda$	$\lambda^4-0.6\,\lambda$	$0.4\,\lambda^2$
5	λ^2	λ^3	λ^3	λ^3	λ^4

β	$\Phi_{1\beta}(1)$	$\Phi_{2\beta}(1)$	$\Phi_{3\beta}(1)$	$\Phi_{4\beta}(1)$	$\Phi_{5\beta}(1)$
1	1	1	1	1	1
2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
5	1	1	1	1	1

β	$\Phi_{1\beta}(\lambda_{01})$	$\Phi_{2\beta}(\lambda_{01})$	$\Phi_{3\beta}(\lambda_{01})$	$\Phi_{4\beta}(\lambda_{01})$	$\Phi_{5\beta}(\lambda_{01})$
1	λ_{01}^2	λ_{01}	λ_{01}	λ_{01}	1
2	0.1	$0.1\,\lambda_{01}^2$	$0.1\,\lambda_{01}^2$	$0.1\,\lambda_{01}^2$	$0.1\,\lambda_{01}$
3	0.5	$0.5\,\lambda_{01}^2$	$0.5\,\lambda_{01}^2$	$0.5\,\lambda_{01}^2$	$0.5\,\lambda_{01}$
4	0.4	$0.4\,\lambda_{01}^2$	$0.4\,\lambda_{01}^2$	$0.4\,\lambda_{01}^2$	$0.4\,\lambda_{01}$
5	λ_{01}	1	1	1	λ_{01}^2

$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{02})$ s'obtiennent de $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{01})$ en remplaçant λ_{01} par λ_{02} et $\Phi_{\alpha\beta}(0)$ sont tous nuls.

An moyen de ces résultats et des formules générales on trouve que $Q_{k|\beta}=0$ pour $k \geqq 1$ et

$$p_{k|1}=\frac{10}{30}[s_k q_1 + s_{k+1} q_2 + s_{k-1} q_3],$$

$$p_{k|2}=\frac{1}{30}[s_{k-1} q_1 + s_k q_2 + s_{k+1} q_3],$$

$$p_{k|3}=\frac{5}{30}[s_{k-1} q_1 + s_k q_2 + s_{k+1} q_3],$$

$$p_{k|4}=\frac{4}{30}[s_{k-1} q_1 + s_k q_2 + s_{k+1} q_3],$$

$$p_{k|5}=\frac{10}{30}[s_{k+1} q_1 + s_{k-1} q_2 + s_k q_3],$$

où

$$q_1 = p_{01}, \quad q_2 = p_{02} + p_{03} + p_{04}, \quad q_3 = p_{05};$$

$$s_k = \lambda_{00}^k + \lambda_{01}^k + \lambda_{02}^k.$$

Les sommes s_k sont nulles pour $k = 3\mu + 1$ ou $3\mu + 2$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ et $= 3$ pour $k = 3\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ La table des $p_{k|\beta}$ nous donne donc pour ces formes de k la table suivante des valeurs des $p_{k|\beta}$:

$k = 3\mu$	$3\mu+1$	$3\mu+2$
$p_{k\|1} = q_1$	q_3	q_2
$p_{k\|2} = \frac{1}{10} q_2$	$\frac{1}{10} q_1$	$\frac{1}{10} q_3$
$p_{k\|3} = \frac{5}{10} q_2$	$\frac{5}{10} q_2$	$\frac{5}{10} q_3$
$p_{k\|4} = \frac{4}{10} q_2$	$\frac{4}{10} q_1$	$\frac{4}{10} q_3$
$p_{k\|5} = q_3$	q_2	q_1.

Ces valeurs sont bien conformes à nos résultats générals. Par exemple, prenons $k = 5$ et trouvons $p_{5|4}$. On a $\beta = 4$, $\varphi_{14} < L_{12}$, donc $t = 2$, $t - k = -3$, d'où $\gamma = 3$. Donc

$$p_{5|4} = q_3 \cdot \frac{p_4}{\sum\limits_{\beta < L_{22}} p_\beta} = q_3 \cdot \frac{\frac{4}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{5}{30} + \frac{4}{10}} = \frac{4}{10} q_3.$$

On trouve la même valeur de la formule

$$p_{k|4} = \frac{4}{30} [s_{k-1} q_1 + s_k q_3 + s_{k+1} q_3],$$

en y posant $k = 5$ et en remarquant que $s_{k-1} = s_4 = 0$, $s_k = s_5 = 0$, $s_{k+1} = s_6 = 3$.

Pour $k = 0$ nos formules donnent $p_{0|\beta} = p_{0\,\beta}$ $(\beta = \overline{1, s})$, si nous remarquons que dans ce cas $Q_{k|\beta}$ n'est pas en général nul. En effet, on a dans notre cas:

$$Q_{k|\beta} = \frac{1}{1!} D_\lambda \left[\frac{\lambda^k}{\varphi(\lambda)} \sum_\nu p_{0\,\alpha}\, \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \sum_\alpha p_{0\alpha} \left[\frac{k\,\lambda^{k-1}\, \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) + \lambda^k\, \Phi'_{\alpha\beta}(\lambda)}{\varphi(\lambda)} - \frac{\lambda^k\, \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)\, \varphi'(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)}\right]_{\lambda=0}$$

$$= \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi'_{\alpha\beta}(0)}{\varphi(0)} \quad \text{pour} \quad k = 0,$$

donc

$$p_{0|1} = \frac{10}{30} \cdot 3\, q_1 + \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi'_{\alpha\,1}(0)}{\varphi(0)} = q_1 = q_{01};$$

$$p_{0|2} = \frac{1}{30} \cdot 3\, q_2 + \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi'_{\alpha\,2}(0)}{\varphi(0)}$$

$$= \frac{1}{10} q_2 + 0.9\, p_{02} - 0.1\, p_{03} - 0.1\, p_{04}$$

$$= p_{02};$$

etc.

Exemple 4. Prenons encore la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est évidemment indécomposable, imprimitive et de l'indice 3. Puisque son degré est divisible par 3, elle ne doit pas avoir le zéro $\lambda = 0$. En effet, on trouve

$$\Phi(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 0.025),$$

d'où les zéros de Φ

$$\lambda_{00} = 1, \quad \lambda_{01} = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \lambda_{02} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$\lambda_{10} = \sigma, \quad \lambda_{11} = \sigma\,\lambda_{01}, \quad \lambda_{12} = \sigma\,\lambda_{02} \qquad (\sigma = -\sqrt[3]{0.025}).$$

Les $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont donnés par la table A.

Table A: $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$.

β	$\alpha=1$	2	3	4	5	6
1	$\lambda^5-0.5\lambda^2$	$0.5\lambda^2$	$0.65\lambda^3-0.15$	$0.4\lambda^3+0.1$	$0.2\lambda^4+0.3\lambda$	$0.7\lambda^4-0.2\lambda$
2	$0.525\lambda^2$	$\lambda^5-0.475\lambda^2$	$0.35\lambda^3+0.175$	$0.6\lambda^3-0.075$	$0.8\lambda^4-0.275\lambda$	$0.3\lambda^4+0.225\lambda$
3	$0.3\lambda^4+0.06\lambda$	$0.4\lambda^4-0.04\lambda$	$\lambda^5-0.64\lambda^2$	$0.36\lambda^2$	$0.38\lambda^3-0.02$	$0.33\lambda^3+0.03$
4	$0.7\lambda^4-0.035\lambda$	$0.6\lambda^4+0.065\lambda$	$0.665\lambda^2$	$\lambda^5-0.335\lambda^2$	$0.62\lambda^3+0.045$	$0.67\lambda^3-0.005$
5	$0.45\lambda^3-0.015$	$0.4\lambda^3+0.035$	$0.1\lambda^4+0.335\lambda$	$0.6\lambda^4-0.165\lambda$	$\lambda^5-0.565\lambda^2$	$0.435\lambda^2$
6	$0.55\lambda^3+0.04$	$0.6\lambda^3-0.01$	$0.9\lambda^4-0.31\lambda$	$0.4\lambda^4+0.19\lambda$	$0.59\lambda^2$	$\lambda^5-0.41\lambda^2$

$\Phi_{\alpha\beta}(1)$ sont donnés par les égalités:

$$\Phi_{\alpha 1}(1)=0.5,\ \Phi_{\alpha 2}(1)=0.525,\ \Phi_{\alpha 3}(1)=0.36,\ \Phi_{\alpha 4}(1)=0.665,\ \Phi_{\alpha 5}(1)=0.435,\ \Phi_{\alpha 6}(1)=0.59$$
$$(\alpha=1,2,\ldots,6).$$

On en obtient

$$p_1=\frac{\Phi_{11}(1)}{\Sigma\,\Phi_{\alpha\alpha}(1)}=\frac{500}{3075},\quad p_2=\frac{525}{3075},\quad p_3=\frac{360}{3075},\quad p_4=\frac{665}{3075},\quad p_5=\frac{435}{3075},\quad p_6=\frac{590}{3075}.$$

On trouve $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{01})$ de la table B où chaque ligne a un facteur numérique commun à tous les membres de la ligne et placé au côté.

Table B: $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{01})$.

β	$\alpha=1$	2	3	4	5	6	facteurs
1	λ_{01}^2	λ_{01}^2	1	1	λ_{01}	λ_{01}	$\times$ 0.500
2	λ_{01}^2	λ_{01}^2	1	1	λ_{01}	λ_{01}	$\times$ 0.525
3	λ_{01}	λ_{01}	λ_{01}^2	λ_{01}^2	1	1	$\times$ 0.360
4	λ_{01}	λ_{01}	λ_{01}^2	λ_{01}^2	1	1	$\times$ 0.665
5	1	1	λ_{01}	λ_{01}	λ_{01}^2	λ_{01}^2	$\times$ 0.435
6	1	1	λ_{01}	λ_{01}	λ_{01}^2	λ_{01}^2	$\times$ 0.590

En remplaçant dans les valeurs de $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{01})$ λ_{01} par λ_{02} on obtient $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{02})$. $\Phi_{\alpha\beta}(\sigma)$ se trouvent de la table C.

Table C: $\Phi_{\alpha\beta}(\sigma)$.

β	$\alpha = 1$	2	3	4	5	6
1	$-0.525\,\sigma^2$	$-0.5\,\sigma^2$	-0.16625	0.09	$0.295\,\sigma$	$-0.2175\,\sigma$
2	$0.525\,\sigma^2$	$0.5\,\sigma^2$	0.16625	-0.09	$-0.295\,\sigma$	$0.2165\,\sigma$
3	$-0.0525\,\sigma$	$-0.05\,\sigma$	$-0.665\,\sigma^2$	$0.36\,\sigma^2$	-0.0295	0.02175
4	$0.0525\,\sigma$	$0.05\,\sigma$	$0.665\,\sigma^2$	$-0.36\,\sigma^2$	0.0295	-0.02175
5	0.02625	0.025	$0.3325\,\sigma$	$-0.18\,\sigma$	$-0.59\,\sigma^2$	$0.435\,\sigma^2$
6	-0.02625	-0.025	$-0.3325\,\sigma$	$0.18\,\sigma$	$0.59\,\sigma^2$	$-0.435\,\sigma^2$

On obtient $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{11})$ et $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{12})$, en remplaçant dans la table C $\sigma^0 = 1$, σ et σ^2 par

$$\lambda_{11}^0 = 1, \quad \lambda_{11} = \lambda_{01}\,\sigma, \quad \lambda_{11}^2 = \lambda_{01}^2\,\sigma^2$$

et

$$\lambda_{12}^0 = 1, \quad \lambda_{12} = \lambda_{02}\,\sigma, \quad \lambda_{12}^2 = \lambda_{02}^2\,\sigma^2$$

respectivement.

Calculons maintenant les quantités $p_\beta + P'_{k|\beta} = \sum_{h=0}^{2} \lambda_{0h}^k \sum_\alpha p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{0h})}{\Phi'(\lambda_{0h})}$ en tenant compte que $\Phi'(\lambda_{0h}) = 3.075\,\lambda_{0h}^2$. Les valeurs trouvées des $\Phi_{\alpha\beta}(1)$, $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{01})$ et $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{02})$ nous donnent:

$$p_1 + P'_{k|1} = \frac{500}{3075}\left[s_k\,q_1 + s_{k-2}\,q_2 + s_{k-1}\,q_3\right],$$

$$p_2 + P'_{k|2} = \frac{525}{3075}\left[s_k\,q_1 + s_{k-2}\,q_2 + s_{k-1}\,q_3\right],$$

$$p_3 + P'_{k|3} = \frac{360}{3075}\left[s_{k-1}\,q_1 + s_k\,q_2 + s_{k-2}\,q_3\right],$$

$$p_4 + P'_{k|4} = \frac{665}{3075}\left[s_{k-1}\,q_1 + s_k\,q_2 + s_{k-2}\,q_3\right],$$

$$p_5 + P'_{k|5} = \frac{435}{3075}\left[s_{k-2}\,q_1 + s_{k-1}\,q_2 + s_k\,q_3\right],$$

$$p_6 + P'_{k|6} = \frac{590}{3075}\left[s_{k-2}\,q_1 + s_{k-1}\,q_2 + s_k\,q_3\right],$$

où

$$q_1 = p_{01} + p_{02}, \quad q_2 = p_{02} + p_{04}, \quad q_3 = p_{05} + p_{06}, \quad s_k = \lambda_{00}^k + \lambda_{01}^k + \lambda_{02}^k.$$

Au moyen des valeurs des $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{10})$, $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{11})$ et $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{12})$, par la formule

$$P''_{\alpha|\beta} = \sum_{h=0}^{2} \lambda_{1h}^{k} \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_{1h})}{\Phi'(\lambda_{1h})},$$

on trouve:

$$P''_{k|1} = \frac{\sigma^k}{3075}[s_k(525\,p_{01} - 500\,p_{02}) + s_{k-2}(166.25\,p_{03} - 90\,p_{04})\sigma^{-2}$$
$$- s_{k-1}(295\,p_{05} - 217.5\,p_{06})\sigma^{-1}],$$

$$P''_{k|3} = \frac{\sigma^k}{3075}[s_{k-1}(52.5\,p_{01} + 50\,p_{02})\sigma^{-1} + s_k(665\,p_{03} - 360\,p_{04})$$
$$+ s_{k-2}(29.5\,p_{05} - 21.75\,p_{06})\sigma^{-2}],$$

$$P''_{k|5} = \frac{\sigma^k}{3075}[s_{k-2}(26.25\,p_{01} - 25\,p_{02})\sigma^{-2} - s_{k-1}(332.5\,p_{03} - 180\,p_{04})\sigma^{-1}$$
$$+ s_k(590\,p_{05} - 435\,p_{06})];$$

$$P''_{k|2} = -P''_{k|1}, \quad P''_{k|4} = -P_{k|3}, \quad P''_{k|6} = -P''_{k|5}.$$

En ajoutant $p_\beta + P'_{k|\beta}$ et $P''_{k|\beta}$ on obtient enfin $p_{k|\beta}$. Ces probabilités, pour k des formes 3μ, $3\mu+1$, $3\mu+2$ ont les valeurs:

$$p_{3\mu|1} = \frac{500}{1025}q_1 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(525\,p_{01} - 500\,p_{02}),$$

$$p_{3\mu+1|1} = \frac{500}{1025}q_3 - \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(295\,p_{05} - 217.5\,p_{06}),$$

$$p_{3\mu+2|1} = \frac{500}{1025}q_2 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(166.25\,p_{03} - 90\,p_{04});$$

$$p_{3\mu|1} = \frac{360}{1025}q_2 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(665\,p_{01} - 360\,p_{04}),$$

$$p_{3\mu+1|3} = \frac{360}{1025}q_1 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(52.5\,p_{01} + 50\,p_{02}),$$

$$p_{3\mu+2|3} = \frac{360}{1025}q_3 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(29.5\,p_{05} - 21.75\,p_{06});$$

$$p_{3\mu|5} = \frac{435}{1025}q_3 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(590\,p_{05} - 435\,p_{06}),$$

$$p_{3\mu+1|5} = \frac{435}{1025}q_2 - \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(332.5\,p_{03} - 180\,p_{04}),$$

$$p_{3\mu+2|5} = \frac{435}{1025}q_1 + \frac{\sigma^{3\mu}}{1025}(26.25\,p_{01} - 25\,p_{02});$$

$$p_{3\mu|2} = q_1 - p_{3\mu|1}\,, \quad p_{3\mu+1|2} = q_3 - p_{3\mu+1|1}\,, \quad p_{3\mu+2|2} = q_2 - p_{3\mu+2|1}\,;$$

$$p_{3\mu|4} = q_2 - p_{3\mu|3}\,, \quad p_{3\mu+1|4} = q_1 - p_{3\mu+1|3}\,, \quad p_{3\mu+2|4} = q_3 - p_{3\mu+2|3}\,;$$

$$p_{3\mu|6} = q_3 - p_{3\mu|5}\,, \quad p_{3\mu+1|6} = q_2 - p_{3\mu+1|5}\,, \quad p_{3\mu+2|6} = q_1 - p_{3\mu+2|5}\,.$$

11. Cas de la matrice Φ décomposable. Soit donnée une chaîne de Markoff avec la loi Φ qui est de la forme:

$$(55) \qquad \Phi = \begin{Vmatrix} L_{11} & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & L_{22} & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots L_{mm} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ L_{m+1,1} & L_{m+1,2} & \ldots L_{m+1,m} & L_{m+1,m+1} & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\nu 1} & L_{\nu 2} & \ldots L_{\nu m} & L_{\nu,m+1} & L_{\nu,m+2} & \ldots L_{\nu\nu} \end{Vmatrix},$$

où tous les champs diagonals $L_{\alpha\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,\nu})$ sont indécomposables et les champs $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$ sont isolés, les champs diagonals restants ne l'étant pas. Cette matrice Φ a évidemment $\lambda_0 = 1$ pour zéro de multiplicité m.

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ les ordres des matrices carrées $L_{\alpha\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,\nu})$. Nous partagerons les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en groupes

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= (A_1, A_2, \ldots, A_{l_1}), \\ A^{(2)} &= (A_{l_1+1}, A_{l_1+2}, \ldots, A_{l_1+l_2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^{(\nu)} &= (A_{l_1+\cdots+l_{\nu-1}+1}, \ldots, A_n). \end{aligned}$$

Alors on peut faire les remarques suivantes.

Si l'épreuve initiale nous amène dans un des groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$, nous y resterons pour toutes les épreuves suivantes. Par cette cause on peut appeler ces groupes *groupes isolés*, Si l'épreuve initiale nous amène dans un des groupes $A^{(m+1)}, \ldots, A^{(\nu)}$, soit $A^{(t)}$, $t \geqq m+1$, nous y resterons tant que les épreuves suivantes ne donneront que les événements de ce groupe. On ne peut pas évidemment quitter ce groupe pour arriver dans un des groupes supérieurs $A^{(t+1)}$, $A^{(t+2)}, \ldots, A^{(\nu)}$, parce que les probabilités $\varphi_{\alpha\beta}$ sont toutes nulles pour

$$\alpha \leqq l_1 + l_2 + \cdots + l_t \quad \text{et} \quad \beta > l_1 + l_2 + \cdots + l_t.$$

Nous ne pouvons que passer du groupe $A^{(t)}$ à un des groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(t-1)}$, ce qui arrivera, si dans une des épreuves, qui suivent celle qui nous a amené à $A^{(t)}$, nous aurons un des événements des groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(t-1)}$; cela est possible parce que, suivant notre supposition, L_{tt} n'est pas isolé, donc L_{t1}, $L_{t2}, \ldots, L_{t,t-1}$ ne sont pas tous nuls. Une fois arrivé à un groupe inférieur $A^{(t_1)}$, $t_1 < t$, nous ne pouvons, dans les épreuves suivantes, que rester dans ce groupe ou passer dans un groupe inférieur à $A^{(t_1)}$ ce qui est possible seulement pour $t_1 \geqq m + 1$. Et ainsi de suite. Si une épreuve nous amène à un des groupes isolés $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$, nous y resterons toujours, comme il est remarqué plus haut. On voit que les groupes $A^{(m+1)}, A^{(m+2)}, \ldots, A^{(\nu)}$ sont les groupes transitoirs et qu'on les passe toujours dans un sens: des groupes supérieurs aux groupes inférieurs.

Les dernières remarques sont précisées par le théorème suivant qu'on pourrait appeler loi de réduction des chaînes à matrices décomposables ou, simplement, des chaînes décomposables.

Théorème C. *La probabilité de rester toujours dans un groupe transitoir $A^{(t)}$, $t > m$, tend vers zéro quand le nombre des épreuves augmente indéfiniment.*

Désignons par $p'_{k|h}$ $(h = l_1 + \cdots + l_{t-1} + 1, \ldots, l_1 + \cdots + l_t)$ la probabilité de l'événement A_h du groupe $A^{(t)}$ dans la $k^{\text{ième}}$ épreuve calculée sous la condition que dans les épreuves précédentes ne sont observés que les événements de ce même groupe $A^{(t)}$. Nous démontrerons que

$$p'_{k|h} \to 0 \quad \text{pour} \quad k \to \infty, \tag{56}$$

si $A^{(t)}$ est un des groupes transitoirs, ce qui est équivalent à la supposition que les matrices $L_{t1}, L_{t2}, \ldots, L_{t,t-1}$ ne sont pas toutes nulles.

Nous avons

$$p'_{0|h} = p_{0h},$$

$$p'_{1|h} = \sum_{g=a+1}^{a+l_t} p'_{0|g}\,\varphi_{gh} = \sum_{g=a+1}^{a+l_t} p_{0g}\,\varphi_{gh}, \qquad (a = l_1 + l_2 + \cdots + l_{t-1})$$

$$p'_{2|h} = \sum_{g_1=a+1}^{a+l_t} p'_{1|g_1}\,\varphi_{g_1 h} = \sum_{g'}\sum_{g} p_{0g}\,\varphi_{gg_1}\,\varphi_{g_1 h}$$

$$= \sum_{g} p_{0g}\,\bar{\varphi}^{(2)}_{gh}, \quad \bar{\varphi}^{(2)}_{gh} = \sum_{g_1=a+1}^{a+l_t} \varphi_{gg_1}\,\varphi_{g_1 h} = \sum_{g_1} \varphi_{gg_1}\,\bar{\varphi}^{(1)}_{g_1 h},$$

et ainsi de suite. Enfin

$$(57) \qquad p'_{kh} = \sum_{g=a+1}^{a+l_t} p_{0g}\,\overline{\varphi}_{gh}^{(k)}, \quad \overline{\varphi}_{gh}^{(k)} = \sum_{g_1=a+1}^{a+l_t} \varphi_{gg_1}\,\overline{\varphi}_{g_1 h}^{(k-1)}.$$

Les éléments φ_{gh} qui interviennent dans ces formules sont les éléments de la sous-matrice L_{tt}. Soit $\overline{\Phi}(\lambda)$ la fonction caractéristiquue de L_{tt}. Alors toutes les racines de l'équation $\overline{\Phi}(\lambda) = 0$ ont des modules moindres que 1 comme il suit du théorème IX-bis, les sous-matrices $L_{t1}, \ldots, L_{t,t-1}$ n'étant pas toutes nulles. Donc, on peut écrire

$$\overline{\Phi}(\lambda) = (\lambda^m - r^m)(\lambda^m - \varrho_1^m)^{m_1} \cdots (\lambda^m - \varrho_\mu^m)^{m_\mu}\,\lambda^\sigma,$$

où $0 < r < 1$, $|\varrho_1| < r, \ldots, |\varrho_\mu| < r$, $m \geqq 1$, $\sigma \geqq 0$ (on doit tenir compte de ce que L_{tt} est indécomposable).

On en obtient par la formule de Perron

$$\overline{\varphi}_{gh}^{(k)} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_{0\alpha}^k \frac{\overline{\Phi}_{gh}(\lambda_{0\alpha})}{\overline{\Phi}'(\lambda_{0\alpha})} + \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{\mu} \frac{1}{(m_\beta - 1)!}\left[D_\lambda^{m_\beta - 1}\left(\lambda^k \frac{\overline{\Phi}_{gh}(\lambda)}{\overline{\psi}_{\beta\gamma}(\lambda)}\right)\right]_{\lambda=\lambda_{\beta\gamma}},$$

en désignant par $\overline{\Phi}_{gh}(\lambda)$ le mineur de $\overline{\Phi}(\lambda)$ correspondant à l'élément φ_{hg}, par $\overline{\psi}_{\beta\gamma}(\lambda)$ le quotient

$$\frac{\overline{\Phi}(\lambda)}{(\lambda - \lambda_{\beta\gamma})^{m_\beta}}$$

et par $\lambda_{0\alpha}$ et $\lambda_{\beta\gamma}$ les racines des équations $\lambda^m - r^m = 0$ et $\lambda^m - \varrho_\beta^m = 0$.

Cette expression de $\overline{\varphi}_{gh}^{(k)}$ nous montre tout de suite que

$$\overline{\varphi}_{gh}^{(k)} \to 0 \quad \text{pour} \quad k \to \infty,$$

d'où, par (57), on arrive à (56).

Notre théorème reste aussi vrai si nous considérons la probabilité de rester toujours dans $A^{(t)}$, $t > m$, après y être arrivé dans une épreuve quelconque qui n'est pas initiale. En effet, cette supposition n'équivalente qu'à un changement des probabilités initiales p_{0g} dans (57) aux probabilites des $A_{a+1}, A_{a+2}, \ldots, A_{a+l_t}$

dans une certaine épreuve quand s'accomplit le passage d'un groupe supérieur à $A^{(t)}$ au groupe $A^{(t)}$.

Le théorème démontré nous amène à la conclusion que, pour k assez grand, on peut, avec une probabilité aussi peu différente de la certitude que l'on veut, affirmer que nous serons amenés définitivement à l'un des groupes isolés $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(t)}$, si le hazard ne l'a pas fait dès le commencement, ou, en d'autres termes, que la chaîne considérée se réduira à une autre chaîne qui ne contient que les événements de ce groupe isolé à qui nous serons amenés. En effet, nous avons supposé que les sous-matrices

$$L_{m+1,\, m+1}, \ldots, L_{\nu\nu}$$

ne sont pas isolées, donc pour chacune d'elles le théorème C est vrai et comme on ne peut pas passer d'un des groupes $A^{(m+1)}, A^{(m+2)}, \ldots, A^{(\nu)}$ qu'à un groupe inférieur on voit aisément que notre conclusion est juste.

Une fois arrivé à un des groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$ nous resterons toujours dans ce groupe. Les matrices correspondants $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$ sont supposées isolées et indécomposables, donc nous aurons dès lors un des cas étudiés dans les numéros précédents. Néanmoins il est intéressant d'étudier les probabilités $p_{k|\beta}$ pour la loi (55). Nous allons le faire pour le cas quand les sous-matrices $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$ sont primitives.

Etablissons d'abord quelques théorèmes auxiliaires.

XXXIV. *Soit*

$$\frac{1}{(m-1)!} D_\lambda^{m-1}\left[\lambda^k \frac{\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\psi_0(\lambda)}\right] = \lambda^k A_{\alpha\beta}(\lambda) + \lambda^{k-1} A_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda) + \cdots + \lambda^{k-m+1} A_{\alpha\beta}^{(m-1)}(\lambda),$$

où

$$\psi_0(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda-1)^m}.$$

Alors, pour le cas (55), *les quantités*

$$A_{\alpha\beta}(1),\ A_{\alpha\beta}^{(1)}(1), \ldots, A_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1), \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}),$$

sont les solutions des systèmes

$$X = X\Phi \ \textit{et}\ Y = \Phi Y,$$

c'est-à-dire on a identiquement

$$(58) \qquad A_{\alpha\gamma}^{(h)}(1) = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}^{(h)}(1)\,\varphi_{\beta\gamma},\ (h = 0, 1, \ldots, m-1;\ A_{\alpha\gamma}^{(0)} \equiv A_{\alpha\gamma})$$

$$(59) \qquad A_{\alpha\beta}^{(h)}(1) = \sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma}\, A_{\gamma\beta}^{(h)}(1).$$

En effet de la théorie des équations aux différences finies on sait que

$$A_{\alpha\beta}(1)\,.\,1^k,\ A_{\alpha\beta}^{(1)}(1)\,.\,1^k,\ \ldots,\ A_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1)\,.\,1^k$$

sont les solutions des équations aux différences finies

$$u_{k+1|\beta} = \sum_{\alpha} u_{k|\alpha}\,\varphi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}).$$

On en voit tout de suite que les relations (58) se vérifient identiquement.

La démonstration des identités (59) est toute pareille.

XXXV. *Pour la matrice* (55) *les quantités*

$$(60) \qquad A_{\alpha\beta}^{(1)}(1),\ A_{\alpha\beta}^{(2)}(1),\ \ldots,\ A_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1) \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

sont toutes nulles. Les quantités $A_{\alpha\beta}(1)$ ne sont pas en général nulles dans les champs $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$ et dans les champs qui sont contenus dans les bandes verticales situées au dessus des champs $L_{m+1,m+1}, \ldots, L_{\nu\nu}$ et sont nulles dans les champs $L_{m+1,m+1}, \ldots, L_{\nu\nu}$. Enfin, les mêmes quantités $A_{\alpha\beta}(1)$ ont des valeurs constantes pour chacunes des lignes des champs $L_{11}, L_{22}, \ldots, L_{mm}$.

1°. Les quantités (60) représentent évidemment des expressions linéaires et homogènes des quantités $\Phi_{\alpha\beta}(1), \Phi'_{\alpha\beta}(1), \ldots, \Phi_{\alpha\beta}^{(m-2)}(1)$, qui sont nulles pour $\alpha, \beta = \overline{1, n}$ (par XXXIII), donc les quantités (60) sont toutes nulles.

2°. Par conséquent

$$D^{m-1}\left[\frac{\lambda^k\,\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)}{\Psi_0(\lambda)}\right]_{\lambda=1} = \frac{\Phi_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1)}{\psi_0(1)}$$

et, en se rappelant la démonstration du n° 2 du théorème XXXIII, on voit que les quantités $A_{\alpha\beta}(1)$, qui sont égales à

$$\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\Phi_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1)}{\psi_0(1)},$$

ne sont pas nulles en général dans les champs $L_{11}, \ldots, L_{mm}$ et sont nulles dans les autres champs diagonaux.

3°. Le système $Y = \Phi Y$, dont les solutions sont $A_{\alpha\beta}(1)$, peut s'écrire comme il suit:

$$
(61) \quad \begin{gathered} Y_1 = L_{11} Y_1, \ldots, Y_m = L_{mm} Y_m \\ Y_{m+1} = L_{m+1,1} Y_1 + \cdots + L_{m+1,m+1} Y_{m+1}, \ldots, Y_\nu = L_{\nu 1} Y_1 + \cdots + L_{\nu\nu} Y_\nu . \end{gathered}
$$

Pour plus de simplicité dans les raisonnements qui suivent écrivons la matrice Φ dans la forme

$$
(55 \text{ bis}) \qquad \Phi = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & L_{mm} & 0 \\ L'_{m+1,1} & L'_{m+1,2} & L'_{m+1,3} & \ldots & L'_{m+1,m} & L'_{m+1,m+1} \end{pmatrix}
$$

en posant en particulier

$$
L'_{m+1,m+1} = \begin{pmatrix} L_{m+1,m+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ L_{m+2,m+1} & L_{m+2,m+2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\nu,m+1} & L_{\nu,m+2} & L_{\nu,m+3} & \ldots & L_{\nu\nu} \end{pmatrix};
$$

$L'_{m+1,1}, L'_{m+1,2}, \ldots$ ont les significations pareilles.

Alors le système (61) s'écrira

$$
(62) \quad \begin{gathered} Y_1 = L_{11} Y_1, \ldots, Y_m = L_{mm} Y_m, \\ Y'_{m+1} = L'_{m+1,1} Y_1 + \cdots + L'_{m+1,m} Y_m + L'_{m+1,m+1} Y'_{m+1}. \end{gathered}
$$

On trouve une solution de ce système, en posant

$$
(63) \qquad Y_1^0 = 0, \ldots, Y_{h-1}^0 = 0,\ Y_{h+1}^0 = 0, \ldots, Y_m^0 = 0;
$$

$$
(64) \qquad Y_h^0 = (y_{1h} = a, \ldots, y_{l_h h} = a)
$$

(a = constante arbitraire) et en résolvant le système

$$
(65) \qquad Y'_{m+1} = L'_{m+1,h} Y_h^0 + \cdots + L'_{m+1,m+1} Y'_{m+1}
$$

(h est un des nombres $1, 2, \ldots, m$). En effet, les quantités (63) et (64) satisfont évidemment les équations

$$
Y_1 = L_{11} Y_1, \ldots, Y_m = L_{mm} Y_m
$$

et le système (65) a une seule solution déterminée, parce que son déterminant $|E - L'_{m+1,\,m+1}|$ est différent de zéro et positif, car les racines de l'équation

$$|E\lambda - L'_{m+1,\,m+1}| = 0$$

sont toutes absolument moindres que 1 et la matrice $L'_{m+1,\,m+1}$ est non-négative.

Considérons d'autre part les quantités $A_{\alpha\beta}(1)$ pour β représentant le numéro de l'une des lignes de L_{hh}. Elles sont les solutions des équations $Y = \Phi Y$. Mais le système $Y_h = L_{hh} Y_h$ n'a pas d'autre solution non nulle que la solution indiquée plus haut, car L_{hh} est indécomposable. Donc, dans une ligne de L_{hh}, toutes les quantités $A_{\alpha\beta}(1)$ correspondantes sont nécessairement égales entre elles.

Cette considération s'applique évidemment à chacun des champs $L_{11}, \ldots, L_{mm}$, donc la propriété des $A_{\alpha\beta}(1)$, démontrée tout à l'heure pour L_{hh}, s'observe pour tous les champs $L_{11}, \ldots, L_{mm}$.

Etudions de plus près les quantités

$$A_{\alpha\beta}(1) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\Phi_{\alpha\beta}^{(m-1)}(1)}{\psi_0(1)}. \tag{66}$$

Soit β le numéro d'une ligne de L_{hh}. Alors, comme nous avons démontré, $A_{\alpha\beta}(1)$ conserve une même valeur quand α prend les valeurs égales aux numéros des colonnes de L_{hh} et est nulle quand α est le numéro d'une colonne des champs

$$L_{11}, \ldots, L_{h-1,\,h-1}, L_{h+1,\,h+1}, \ldots, L_{mm};$$

quand α est le numéro d'une colonne de $L'_{m+1,\,m+1}$, nous avons $A_{\alpha\beta}(1) \neq 0$. Désignons par $p_\beta^{(h)}$ la valeur constante de $A_{\alpha\beta}(1)$ sur la ligne β dans L_{hh} $(1 \leqq h \leqq m)$ et par $p_\beta^{(s)}$ la valeur de $A_{\alpha\beta}(1)$ sur le même ligne et sur la colonne $s\,(s = l+1, l+2, \ldots, n)$. Alors il découle de nos raisonnements que $p_\beta^{(h)}$ constituent l'ensemble Y_h^0 et $p_\beta^{(s)}$ l'ensemble Y'_{m+1}, ces deux ensembles représentant la solution unique des équations (65). En considérant dans ces équations Y'_{m+1} comme inconnues et Y_h^0 comme donées on obtient facilement les expressions de la forme

$$p_\beta^{(s)} = c_s^{(h)} p_\beta^{(h)} \tag{67}$$

$$(s = l+1, l+2, \ldots, n;\ l = l_1 + l_2 + \cdots + l_m),$$

où $c_s^{(h)}$ sont certaines constantes positives (cela découle du fait que tous les mineurs de $|\lambda E - L'_{m+1,m+1}|$ sont positifs pour $\lambda = 1$).

Soient maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ et $m_1, m_2, \ldots, m_s$ les zéros de Φ différents de 0 et leurs multiplicités, de sorte que

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)^m (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}; \ |\lambda_i| < 1, \qquad i = \overline{1, s}.$$

Alors, en tenant compte des théorèmes XXXIII et XXXV, on peut écrire

$$\begin{aligned} p_{k|\beta} &= \left(q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}\right) p_\beta^{(h)} \\ &+ \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{0\,\alpha}\, D_\lambda^{m_g - 1} \left[\frac{\lambda^k\, \Phi_{\alpha\,\beta}(\lambda)}{\psi_g(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_g}, \end{aligned} \tag{68}$$

où

$$q_h = p_{0,\, l_1 + \cdots + l_{h-1}+1} + \cdots + p_{0,\, l_1 + \cdots + l_h},$$

$$l_1 + \cdots + l_{h-1} + 1 \leqq \beta \leqq l_1 + \cdots + l_h, \qquad (h = \overline{1, m}),$$

et

$$p_{k|\beta} = \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{0\,\alpha}\, D_\lambda^{m_g - 1} \left[\frac{\lambda^k\, \Phi_{\alpha\,\beta}(\lambda)}{\psi_g(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_g} \tag{69}$$

pour $l_1 + \cdots + l_m + 1 \leqq \beta \leqq n$.

On en voit que, pour $k \to \infty$,

$$p_{k|\beta} \to \left(q_h + \sum_{\alpha=l_1+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}\right) p_\beta^{(h)}$$

quand A_β est un événement du groupe $A^{(h)}$ $(h = \overline{1, m})$ et

$$p_{k|\beta} \to 0$$

quand A_β est un événement des groupes $A^{(m+1)}, \ldots, A^{(\nu)}$, conformément au théorème C.

On démontre encore sans difficulté la propriété suivante des $p_\beta^{(h)}$:

XXXVI. *On a*

$$\sum_{\beta < L_{h\,h}} p_\beta^{(h)} = 1 \qquad (h = \overline{1, m}). \tag{70}$$

En effet, toujours $\sum_{\beta=1}^{n} p_{k|\beta} = 1$, donc

$$1 = \sum_{h=1}^{m} \sum_{\beta<L_{hh}} \left(q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}\right) p_\beta^{(h)}, \tag{71}$$

parce que, comme on démontre facilement,

$$\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{g=1}^{s} \frac{1}{(m_g - 1)!} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\lambda^{m_g-1} \left[\frac{\lambda^k\, \Phi_{\alpha\,\beta}(\lambda)}{\psi_g(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_g} = 0.$$

L'identité (71) a lieu, quels que soient $p_{0\,\alpha}$. Posons donc $p_{0\,\alpha} = 0$ pour toutes les valeurs de α, excepté les valeurs

$$l_1 + \cdots + l_{h-1} + 1 \leqq \alpha \leqq l_1 + \cdots + l_h;$$

alors $q_h = 1$ et (71) nous donne l'égalité (70), que nous avions à démontrer.

Considérons encore la somme $\sum_{\beta<L_{hh}} p_{k|\beta}$. Evidemment

$$\sum_{\beta<L_{hh}} p_{k|\beta} \to \sum_{\beta<L_{hh}} \left(q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}\right) p_\beta^{(h)}$$

$$= q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}.$$

On en voit que

$$\sum_{h=1}^{m} \left(q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}\right) = 1.$$

Par conséquent, on peut interpréter les nombres positifs $q_h + \sum_{\alpha=l+1}^{n} p_{0\,\alpha}\, c_\alpha^{(h)}$ comme les probabilités finales des groupes $A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}$ calculées à la supposition qu'on ne sait rien des résultats des épreuves en nombre illimité. Quant aux nombres $p_\beta^{(h)}$ il représentent les probabilités finales des A_β quand on sait que le nombre illimité des épreuves nous doit conduire au groupe $A^{(h)}$.

Exemple 5. Comme une illustration des divers résultats acquis dans ce numéro nous considérerons une chaîne dont la loi est représentée par la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

On calcule pour cette matrice

$$\Phi(\lambda) = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \equiv (\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3)(\lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7)(\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.06)$$
$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 0.3)(\lambda - 0.1)(\lambda - 0.6)(\lambda - 0.7);$$
$$\Psi_0(\lambda) = \lambda^4 - 1.1\lambda^3 + 0.13\lambda^2 + 0.045\lambda - 0.0126,$$
$$\Phi'(0.1) = 0.0972, \; \Phi'(-0.3) = -0.6084,$$
$$\Phi'(0.6) = -0.0072, \; \Phi'(0.7) = 0.0054.$$

Les mineurs $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$, leurs valeurs pour les divers zéros de Φ et les valeurs de $\Phi'_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont donnés dans les tables ci-dessous:

β	$\Phi_{1\beta}(\lambda)$	$\Phi_{2\beta}(\lambda)$	$\Phi_{3\beta}(\lambda)$	$\Phi_{4\beta}(\lambda)$
1	$(\lambda-0.4)\,\Phi_2\,\Phi_3$	$0.6\,\Phi_2\,\Phi_3$	0	0
2	$0.7\,\Phi_2\,\Phi_3$	$(\lambda-0.3)\,\Phi_2\,\Phi_3$	0	0
3	0	0	$(\lambda-0.9)\,\Phi_1\,\Phi_3$	$0.1\,\Phi_1\,\Phi_3$
4	0	0	$0.2\,\Phi_1\,\Phi_3$	$(\lambda-0.8)\,\Phi_1\,\Phi_3$
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0

β	$\Phi_{5\beta}(\lambda)$	$\Phi_{6\beta}(\lambda)$
1	$0.4(\lambda-0.3)(\lambda-0.4)\,\Phi_2$	$0.12(\lambda-0.4)\,\Phi_2$
2	$0.28(\lambda-0.3)\,\Phi_2$	$0.084\,\Phi_2$
3	$(0.06\lambda-0.052)\,\Phi_1$	$(\lambda-0.4)(0.3\lambda-0.26)\,\Phi_1$
4	$(0.02\lambda-0.004)\,\Phi_1$	$(\lambda-0.4)(0.1\lambda-0.02)\,\Phi_1$
5	$(\lambda-0.3)\,\Phi_1\,\Phi_2$	$0.3\,\Phi_1\,\Phi_2$
6	$0.2\,\Phi_1\,\Phi_4$	$(\lambda-0.4)\,\Phi_1\,\Phi_2$

β	$\Phi_{1\beta}(\lambda)$	$\Phi_{2\beta}(\lambda)$	$\Phi_{3\beta}(\lambda)$	$\Phi_{4\beta}(\lambda)$	$\Phi_{5\beta}(\lambda)$	$\Phi_{6\beta}(\lambda)$
1	0.0648	0.0648	0	0	0.0504	0.0216
2	0.0756	0.0756	0	0	0.0588	0.0252
3	0	0	0.0468	0.0468	0.0104	0.0312
4	0	0	0.0936	0.0936	0.0208	0.0624

$$\Phi_{\alpha 5}(1) = \Phi_{\alpha 6}(1) = 0; \; \alpha = \overline{1,6}.$$

β	$\Phi_{1\beta}(-0.3)$	$\Phi_{2\beta}(-0.3)$	$\Phi_{3\beta}(-0.3)$	$\Phi_{4\beta}(-0.3)$	$\Phi_{5\beta}(-0.3)$	$\Phi_{6\beta}(-0.3)$
1	−0.3276	0.2808	0	0	0.2184	−0.1092
2	0.3276	−0.2808	0	0	−0.2184	0.1092

$$\Phi_{\alpha\beta}(-0.3) = 0; \; \alpha = \overline{1,6}; \; \beta = 3, 4, 5, 6.$$

β	$\Phi_{1\beta}(0.7)$	$\Phi_{2\beta}(0.7)$	$\Phi_{3\beta}(0.7)$	$\Phi_{4\beta}(0.7)$	$\Phi_{5\beta}(0.7)$	$\Phi_{6\beta}(0.7)$
3	0	0	−0.0036	0.0018	0.0030	−0.0045
4	0	0	0.0036	−0.0018	−0.0030	0.0045

$$\Phi_{\alpha\beta}(0.7) = 0; \; \alpha = \overline{1,6}; \; \beta = 1, 2, 5, 6.$$

β	$\Phi_{5\beta}(0.1)$	$\Phi_{6\beta}(0.1)$
1	0.1296	−0.01944
2	−0.3024	0.04536
3	0.1656	−0.02484
4	0.0072	−0.00108
5	0.3888	−0.05832
6	−0.3888	0.05832

$$\Phi_{\alpha\beta}(0.1) = 0; \; \alpha = \overline{1,4}; \; \beta = \overline{1,6}.$$

β	$\Phi_{5\beta}(0.6)$	$\Phi_{6\beta}(0.6)$
1	0.00096	0.00096
2	0.00336	0.00336
3	0.00576	0.00576
4	−0.00288	−0.00288
5	−0.00432	−0.00432
6	−0.00288	−0.00288

$$\Phi_{\alpha\beta}(0.6) = 0; \; \alpha = \overline{1,4}; \; \beta = \overline{1,6}.$$

À l'aide de ces tables nous obtenons les valeurs suivantes de $p_{k|\beta}$:

$$p_{k|1} = \frac{648}{1404} q_1 + \frac{504}{1404} p_{05} + \frac{216}{1404} p_{06}$$

$$+ \frac{(-0.3)^k}{6084} (3276 p_{01} - 2808 p_{02} - 2184 p_{05} + 1092 p_{06})$$

$$+ \frac{(0.1)^k}{372} (1296 p_{05} - 1944 p_{06}) - \frac{(0.6)^k}{72} (96 p_{05} + 96 p_{06})$$

$$= \frac{6}{13}\left(p_{01} + p_{02} + \frac{7}{9}p_{05} + \frac{1}{3}p_{06}\right) + \frac{(-0.3)^k}{39}(21\,p_{01} - 18\,p_{02} - 14\,p_{05} + 7\,p_{06})$$

$$+ \frac{(0.1)^k}{3}(4\,p_{05} - 6\,p_{06}) - \frac{4}{3}(0.6)^k(p_{05} + p_{06}),$$

$$p_{k|2} = \frac{7}{13}\left(p_{01} + p_{02} + \frac{7}{9}p_{05} + \frac{1}{3}p_{06}\right) + \frac{(-0.3)^k}{39}(-21\,p_{01} + 18\,p_{02} + 14\,p_{05} - 7\,p_{06})$$

$$+ \frac{14}{9}(0.1)^k(-2\,p_{05} + 3\,p_{06}) - \frac{14}{3}(0.6)^k(p_{05} + p_{06}),$$

$$p_{k|3} = \frac{1}{3}\left(p_{03} + p_{04} + \frac{2}{9}p_{05} + \frac{2}{3}p_{06}\right) + \frac{(0.7)^k}{18}(-12\,p_{03} + 6\,p_{04} + 10\,p_{05} - 15\,p_{06})$$

$$+ \frac{23}{27}(0.1)^k(2\,p_{05} - 3\,p_{06}) + 8\,(0.6)^k(p_{05} + p_{06}),$$

$$p_{k|4} = \frac{2}{3}\left(p_{03} + p_{04} + \frac{2}{9}p_{05} + \frac{2}{3}p_{06}\right) + \frac{(0.7)^k}{18}(12\,p_{03} - 6\,p_{04} - 10\,p_{05} + 15\,p_{06})$$

$$+ \frac{1}{27}(0.1)^k(2\,p_{05} - 3\,p_{06}) + 4\,(0.6)^k(p_{05} + p_{06});$$

$$p_{k|5} = 2\,(0.1)^k(2\,p_{05} - 3\,p_{06}) + 6\,(0.6)^k(p_{05} + p_{06}),$$

$$p_{k|6} = -2\,(0.1)^k(2\,p_{05} - 3\,p_{06}) + 4\,(0.6)^k(p_{05} + p_{06}).$$

On voit que les probabilités finales sont

$$p_1 = \frac{6}{13}\left(p_{01} + p_{02} + \frac{7}{9}p_{05} + \frac{1}{3}p_{06}\right),$$

$$p_2 = \frac{7}{13}\left(p_{01} + p_{02} + \frac{7}{9}p_{05} + \frac{1}{3}p_{06}\right),$$

$$p_3 = \frac{1}{3}\left(p_{03} + p_{04} + \frac{2}{9}p_{05} + \frac{2}{3}p_{06}\right),$$

$$p_4 = \frac{2}{3}\left(p_{03} + p_{04} + \frac{2}{9}p_{05} + \frac{2}{3}p_{06}\right);$$

$$p_5 = 0,\ p_6 = 0.$$

Cet exemple nous montre, que dans le cas considéré dans ce numéro les probabilités finales dépendent des probabilités initiales, comme d'ailleurs il est évident des égalités (68).

Nous indiquons encore, en terminant ce numéro, deux propriétés suivantes de Φ.

XXXVII. *Soit $\lambda_s^{(h)}$ un des zéros de la sous-matrice L_{hh} qui est différent de* 1. *Alors $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_s^{(h)}) = 0$ partout, sauf dans les champs L_{hh} et $L_{h,m+1}$, quand $h = \overline{1,m}$, et partout, sauf dans les champs $L'_{1,m+1}, L'_{2,m+1}, \ldots, L'_{m+1,m+1}$, quand $h = m+1$.*

XXXVIII. *Si $\lambda_s^{(h)}$ est un zéro de L_{hh} différent de* 1 *et ayant la multiplicité m_s et $\lambda_t^{(m+1)}$ est un zéro de $L'_{m+1,m+1}$ de multiplicité m_t, on a*

$$\sum_{\beta < L_{hh}} \Phi_{\alpha\beta}^{(m_s-l)}(\lambda_s^{(h)}) = 0 \qquad (h = \overline{1,m};\ l = \overline{1,m_s})$$

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Phi_{\alpha\beta}^{(m_t-l)}(\lambda_t^{(m+1)}) = 0 \qquad (l = \overline{1,m_t}).$$

La démonstration de ces propriétés est immédiate et nous l'ommettons ici.

12. Une autre méthode pour la recherche des probabilités $p_{k|\beta}$. Les résultats des numéros précédents sont trouvés au moyen de la formule de Perron pour $\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$. Nous indiquerons maintenant une autre méthode pour les obtenir qui est pareille à la méthode qu'on emploie dans l'étude des développements des noyaux itérés suivant les fonctions fondamentales dans la théorie des équations intégrales de Fredholm.

A. Considérons d'abord une matrice stochastique Φ qui est indécomposable, primitive et dont les zéros sont tous simples. Soient

$$\lambda_0 = 1;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1};\ |\lambda_i| < 1 \qquad (i = \overline{1, n-1})$$

ces zéros.

Prenons maintenant les systèmes adjoints des équations linéaires

$$u_\beta^{(0)} = \sum_\alpha u_\alpha^{(0)} \varphi_{\alpha\beta}; \quad v_\alpha^{(0)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} v_\beta^{(0)}; \qquad (\alpha, \beta = \overline{1,n}). \tag{72}$$

Le second de ces systèmes a une solution évidente

$$v_\alpha^{(0)} = 1 \qquad (\alpha = \overline{1,n}) \tag{73}$$

et le premier une solution

$$u_\beta^{(0)} = C\Phi_{\alpha\beta}(1) \qquad (\beta = \overline{1,n};\ \alpha \text{ fixe}), \tag{73 bis}$$

qui est positive si $C > 0$ (C est une constante arbitraire). Puisque $\lambda_0 = 1$ est un zéro simple de Φ les solutions (73) et (73 bis) sont unique à des facteurs constants près. Il en résulte que

$$\Phi_{1\beta}(1) = \Phi_{2\beta}(1) = \cdots = \Phi_{n\beta}(1) \qquad (\beta = \overline{1, n}).$$

Posons

$$\frac{1}{C} = \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(1) = \sum_\alpha \Phi_{\alpha\alpha}(1) = \Phi'(1).$$

Alors

$$u_\beta^{(0)} = \frac{\Phi_{\alpha\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\Phi'(1)} = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum\limits_\beta \Phi_{\beta\beta}(1)}. \tag{74}$$

Prenons ensuite les systèmes ($g = 1, n-1$):

$$\lambda_g u_\beta^{(g)} = \sum_\alpha u_\alpha^{(g)} \varphi_{\alpha\beta}; \quad \lambda_g v_\alpha^{(g)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} v_\beta^{(g)} \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}). \tag{75}$$

Ils ont les solutions

$$\begin{cases} u_\beta^{(g)} = C\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_g) & (\beta = \overline{1, n};\ \alpha \text{ fixe}) \\ v_\alpha^{(g)} = C_1 \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_g) & (\alpha = \overline{1, n};\ \beta \text{ fixe}), \end{cases} \tag{76}$$

où $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda_g)$ ne sont pas tous nuls, car λ_g est un zéro simple de Φ.

Démontrons maintenant le théorème suivant.

XXXIX. *Pour* $h \neq g$

$$\sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^{(g)} v_\alpha^{(h)} = 0 \tag{77}$$

et

$$\sum_{\gamma=1}^n \Phi_{\alpha\gamma}(\lambda_g) \Phi_{\gamma\beta}(\lambda_h) = 0, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n}). \tag{78}$$

En particulier

$$\sum_{\beta=1}^n u_\beta^{(g)} = 0 \qquad (g - \overline{1, n-1}); \qquad \sum_{\beta=1}^n \Phi_{\alpha\beta}(\lambda_g) = 0 \qquad (\alpha = \overline{1, n};\ g = \overline{1, n-1}). \tag{79}$$

En effet, on tire des équations (75)

$$\lambda_g \sum_\beta u_\beta^{(g)} v_\beta^{(h)} = \sum_\alpha \sum_\beta u_\alpha^{(g)} \varphi_{\alpha\beta} v_\beta^{(h)} = \lambda_h \sum_\alpha u_\alpha^{(g)} v_\alpha^{(h)},$$

d'où, pour $g \neq h$, (77). De (77) et (76) on obtient (78). Les relations (79) découlent de (77) et (78) quand on prend dans (77) $h = 0$.

Nous supposerons dans le suivant que les constantes C et C_1 dans (76) sont choisies de telle manière que $u_\beta^{(g)}$ et $v_\beta^{(g)}$ soient normalisés, de sorte que $\sum_\beta u_\beta^{(g)} v_\beta^{(g)} = 1$ $(g = \overline{1, n-1})$.

Introduisons ensuite les itérations

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(k+1)} = \sum_\gamma \varphi_{\alpha\gamma} \varphi_{\gamma\beta}^{(k)} = \sum_\gamma \varphi_{\alpha\gamma}^{(k)} \varphi_{\gamma\beta}$$

et considérons les relations évidentes

$$(80) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_\beta^{(0)} &= \sum_\alpha u_\alpha^{(0)} \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}, \qquad v_\alpha^{(0)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(k)} v_\beta^{(0)}; \\ \lambda_g^k u_\beta^{(g)} &= \sum_\alpha u_\alpha^{(g)} \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad \lambda_g^k v_\alpha^{(g)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(k)} v_\beta^{(g)} \end{aligned} \right.$$

qui sont des identités pour les solutions (73), (74) et (76).

Alors on a le théorème suivant.

XL. *Si Φ est indécomposable et primitive et a les zéros distincts*

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_{n-1}$$

on a identiquement

$$(81) \qquad \varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = u_\beta^{(0)} + \sum_{g=1}^{n-1} \lambda_g^k u_\beta^{(g)} v_\alpha^{(g)}.$$

En effet, si l'on pose

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \Gamma_0 v_\alpha^{(0)} + \Gamma_1 v_\alpha^{(1)} + \cdots + \Gamma_{n-1} v_\alpha^{(n-1)}$$

et si l'on multiplie cette relation par $u_\alpha^{(g)}$ on obtiendra, en ajoutant les résultats pour $\alpha = \overline{1, n}$ et en tenant compte de l'orthogonalité et de la normalité des $u_\alpha^{(g)}$ et $v_\alpha^{(g)}$,

$$\sum_\alpha u_\alpha^{(g)} \varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = \Gamma_g \sum_\alpha u_\alpha^{(g)} v_\alpha^{(g)} = \Gamma_g$$

ou, à cause de (80),

$$\Gamma_g = \lambda_g^k u_\beta^{(g)} \qquad (g = \overline{0, n-1}),$$

d'où (81).

Théorème D. *Dans le cas considéré*

$$p_{k\,|\,\beta} = p_\beta + \sum_{g=1}^{n-1} \lambda_g^k V_g u_\beta^{(g)} \qquad (\beta = \overline{1, n}), \tag{82}$$

où

$$p_\beta = u_\beta^{(0)} \text{ et } V_g = \sum_\alpha p_{0\alpha} v_\alpha^{(g)}, \tag{83}$$

et

$$\sum_\beta p_\beta = 1, \quad \sum_\beta u_\beta^{(g)} = 0 \qquad (g = \overline{1, n-1}). \tag{84}$$

En effet, on obtient facilement (82) en partant de la relation fondamentale

$$p_{k\,|\,\beta} = \sum_\alpha p_{0\alpha} \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$$

et en y substituant l'expression (81) pour $\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$. Les relations (84) découlent tout de suite de (74) et (77).

B. Considérons encore le cas où la matrice Φ est indécomposable et primitive mais, outre le zéro simple $\lambda_0 = 1$, a les zéros multiples

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_\mu$$

dont les ordres de multiplicité sont

$$m_1, \ m_2, \ \ldots, \ m_\mu.$$

Alors avant tout on a:

XLI. *Le rang du déterminant $\Phi(\lambda_g)$, λ_g étant un des zéros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n'est pas moindre que $n - m_g$.*

En effet, on le voit de l'identité

$$\Phi(\lambda) = \Phi(a) + \frac{\lambda - a}{1} \sum_{\alpha_1} \Phi_{\alpha_1\,|\,\alpha_1}(a) + \frac{(\lambda - a)^2}{2!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \Phi_{\alpha_1\alpha_2\,|\,\alpha_1\alpha_2}(a) + \cdots,$$

où a est un nombre constant arbitraire et $\Phi_{\alpha_1\,|\,\alpha_1}(a)$, $\Phi_{\alpha_1\alpha_2\,|\,\alpha_1\alpha_2}(a), \ldots$ sont les mineurs principaux de $\Phi(a)$ des ordres $n-1, n-2, \ldots$

Donc les systèmes

$$\lambda_g u_\beta^{(g)} = \sum_\alpha u_\alpha^{(g)} \varphi_{\alpha\beta} \text{ et } \lambda_g v_\alpha^{(g)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} u_\beta^{(\alpha)}$$

admettent des solutions définies et linéairement indépendantes

$$u_{\beta i}^{(g)} \qquad (\beta = \overline{1, n}) \text{ et } u_{\alpha i}^{(g)} \qquad (\alpha = \overline{1, n})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \mu_g)$$

en nombre $\mu_g \leqq m_g$. On peut supposer que ces solutions sont orthogonales et normales, parce que si l'on avait les solutions

$$u_{\beta i}^{(g)} \text{ et } v_{\alpha i}^{(g)}$$

qui ne seraiènt pas orthogonales et normales, mais linéairement indépendantes, on pourrait toujours, par un procédé bien connue, les remplacer par leurs combinaisons linéaires et homogènes qui représentaient des solutions orthogonales et normales.

En s'aidant de ces solutions on mettra facilement $\varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$ sous la forme

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(k)} = u_{\beta}^{(0)} + \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^{(k)} \psi_{\alpha\beta}^{(g)}, \tag{85}$$

où

$$\psi_{\alpha\beta}^{(g)} = \sum_{i=1}^{\mu_g} u_{\beta i}^{(g)} v_{\alpha i}^{(g)}. \tag{86}$$

Ce résultat nous conduit à l'expression suivante de $p_{k|\beta}$ dans le cas actuel:

$$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^k \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \psi_{\alpha\beta}^{(g)} \qquad (p_\beta = u_\beta^{(0)}). \tag{87}$$

Nous ne considérerons pas les autres cas de la matrice Φ, parce qu'il est facile de le faire suivant les lignes tracées plus haut.

13. Chaînes stabilisées. Des numéros précédents nous pouvons faire cette conclusion générale sur la conduite des probabilités $p_{k|\beta}$ quand le nombre k varie. Dans le cas, où la matrice Φ admet $\lambda_0 = 1$ comme un zéro simple et n'a pas d'autres zéros du module 1, les $p_{k|\beta}$ ont des limites définies qui ne dépendent pas des probabilités initiales $p_{0\alpha}$ et qui représentent les probabilités finales des événements A_β. C'est le seul cas dans lequel existent les probabilités finales indépendantes des probabilités initiales, parce que, si Φ a des zéros du module 1 autres que $\lambda_0 = 1$ ou a $\lambda_0 = 1$ pour un zéro multiple, $p_{k|\beta}$ ou n'a pas une limite déterminée, parcourant asymptotiquement et périodiquement certaines valeurs positives, ou a une limite déterminée mais dépendante des probabilités initiales.

Supposons que Φ ait $\lambda_0 = 1$ pour zéro simple et qu'il n'ait pas d'autres zéros du module 1. Alors $p_{k|\beta}$ ont des limites déterminées p_β indépendantes des probabilités initiales et il peut se produire un phénomène stochastique intéressant: si l'on choisit pour les probabilités initiales $p_{0\alpha}$ des événements A_α les probabilités finales p_α, on aura une chaîne que nous appellerons chaîne stabilisée. Sa propriété caractéristique est que *les probabilités $p_{k|\beta}$ pour toutes les valeurs de k sont égales aux p_β, donc conservent les mêmes valeurs pour toutes les épreuves.*

En effet, en prenant le cas plus général B du numéro précédent, on a, par (87),

$$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{g=1}^{s} \lambda_g^k \sum_\alpha p_\alpha \psi_{\alpha\beta}^{(g)},$$

en supposant $p_{0\alpha} = p_\alpha$. Mais $p_\alpha = u_\alpha^{(0)}$, donc, en s'aidant de (86),

$$\sum_\alpha p_\alpha \psi_{\alpha\beta}^{(g)} = \sum_{i=1}^{\mu_g} u_{\beta i}^{(g)} \sum_\alpha u_\alpha^{(0)} v_{\alpha i}^{(g)} = 0 \qquad (g = \overline{1, s})$$

parce que $u_\alpha^{(0)}$ et $v_{\alpha i}^{(g)}$ sont orthogonals. Par conséquent,

$$p_{k|\beta} = p_\beta \qquad (\beta = \overline{1, n}).$$

On voit donc que dans le cas d'une chaîne stabilisée chacun des événements A_β aura pour toutes les épreuves une même probabilité constante p_β. Mais on ne doit pas confondre cette chaîne d'épreuves avec les épreuves quand la probabilité de A_β dans une épreuve quelconque est un nombre constant p_β quels que soient les résultats des autres épreuves. En effet, si l'on sait, par exemple, que dans l'épreuve initiale nous avons constaté l'événement A_α et si les résultats de toutes les autres épreuves restent inconnus, la probabilité de A_β dans la $k^{\text{ième}}$ épreuve sera

$$\sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}} \varphi_{\alpha\gamma_1} \varphi_{\gamma_1\gamma_2} \cdots \varphi_{\gamma_{k-1}\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^{(k)},$$

ce qui n'est pas égal à p_β.

De même la probabilité d'avoir dans l'épreuve initiale l'événement A_α et dans la $k^{\text{ième}}$ épreuve l'événement A_β sous la condition que les résultats des autres épreuves restent indéterminés est

$$\sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}} p_\alpha \varphi_{\alpha\gamma_1} \varphi_{\gamma_1\gamma_2} \cdots \varphi_{\gamma_{k-1}\beta} = p_\alpha \varphi_{\alpha\beta}^{(k)}$$

et la probabilité d'avoir dans les épreuves des numéros

$$0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_s < k$$

les événements

$$A_\alpha, \; A_{\alpha_1}, \; A_{\alpha_2}, \; \ldots, \; A_{\alpha_s}, \; A_\beta$$

sous la condition qu'on ne sait pas les résultats des autres épreuves est

$$p_\alpha \varphi_{\alpha\alpha_1}^{(l_1)} \varphi_{\alpha_1\alpha_2}^{(l_2-l_1)} \cdots \varphi_{\alpha_{s-1}\alpha_s}^{(l_s-l_{s-1})} \varphi_{\alpha_s\beta}^{(k-l_s)}$$

Chapitre III. **Moments des variables stochastiques discrètes liées en chaînes simples de Markoff.**

14. Généralités. Soit x une variable stochastique qui peut recevoir les valeurs finies et bien déterminées

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

avec les probabilités

$$p_{01}, \; p_{02}, \; \ldots, \; p_{0n}$$

respectivement dans l'épreuve initiale. Soit $P_{x_\alpha}(x_\beta)$ la probabilité de l'égalité $x = x_\beta$ dans une épreuve quelconque quand on sait que $x = x_\alpha$ dans l'épreuve précédente. Nous poserons

$$P_{x_\alpha}(x_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = \overline{1, n})$$

en supposant que $\varphi_{\alpha\beta}$ sont constants pour toutes les épreuves, de sorte que, en considérant les valeurs de x dans les épreuves des numéros 0, 1, 2, ..., nous obtiendrons une chaîne simple discrète de Markoff, dont la loi est donnée par la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Il est avantageux de considérer avec x les quantités stochastiques u_0, u_1, $u_2, \ldots$ liées aux épreuves numéros 0, 1, 2, ... respectivement et prenant dans les épreuves correspondantes les mêmes valeurs que x, de sorte que la probabilité de l'égalité $u_{h+1} = x_\beta$ quand on sait que $u_h = x_\alpha$ est précisement $\varphi_{\alpha\beta}$. On peut dire que les quantités u_0, u_1, u_2, ... sont liées à la chaîne considérée des épreuves caractérisée par la loi Φ, ou, simplement, à la chaîne Φ.

Introduisons encore, en suivant les notations de Markoff, les quantités suivantes:

$$a_k = E(u_k) = \text{espérence mathématique de } u_k, \tag{88}$$

calculée à la condition que les valeurs de $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ restent indéterminées, et

$$A_\alpha^{(i)} = E(u_{k+i}) \text{ à la condition } u_k = x_\alpha, \tag{89}$$

en supposant en même temps que les valeurs des autres quantités u_h restent indéterminées.

Remarquons quelques propriétés simples de a_k et $A_k^{(i)}$.

XLII. *On a*

$$a_k = \sum_\beta p_{k|\beta} x_\beta \tag{90}$$

et

$$A_\alpha^{(i)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} x_\beta. \tag{91}$$

Ces relations sont évidentes. La seconde nous montre que $A_\alpha^{(i)}$ ne dépend que de α et i, de sorte que le nombre k, qui, par (89), entre dans la définition de $A_\alpha^{(i)}$, peut prendre une valeur quelconque.

XLIII. *Nous avons la relation*

$$a_{k+i} = \sum_\alpha p_{k|\alpha} A_\alpha^{(i)}. \tag{92}$$

En effet, par (90) et (91),

$$a_{k+i} = \sum_\beta p_{k+i|\beta}\, x_\beta$$
$$= \sum_\beta \left(\sum_\alpha p_{k|\alpha}\, \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} \right) x_\beta$$

$$= \sum_{\alpha} p_{k|\alpha} \sum_{\beta} \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} x_\beta$$

$$= \sum_{\alpha} p_{k|\alpha} A_{\alpha}^{(i)}.$$

XLIV. *Nous avons*

(93) $$A_{\alpha}^{(i)} = \sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma} A_{\gamma}^{(i-1)}.$$

En effet,

$$A_{\alpha}^{(i)} = \sum_{\beta} \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} x_\beta = \sum_{\beta} \left(\sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma} \varphi_{\gamma\beta}^{(i-1)} \right) x_\beta$$

$$= \sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma} \sum_{\beta} \varphi_{\gamma\beta}^{(i-1)} x_\beta$$

$$= \sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma} A_{\gamma}^{(i-1)}.$$

Nous ne considérons plus loin que les chaînes que nous appellerons *normales*, en comprenant sous cette dénomination les chaînes dont les lois sont représentées par les matrices indécomposables et primitives. Alors, Φ étant la loi d'une chaîne normale, so fonction caractéristique est de la forme

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_\mu)^{m_\mu},$$

où $|\lambda_g| < 1 \qquad (g = 1, \mu)$.

Nous savons qu'une chaîne normale possède des probabilités finales bien déterminées et indépendantes des probabilités initiales. Nous savons encore que pour une chaîne normale

$$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^k \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \psi_{\alpha\beta}^{(g)},$$

où p_β est la probabilité finale de l'égalité $x = x_\beta$ et $\psi_{\alpha\beta}^{(g)}$ représentent des quantités finies et bien déterminées.

Nous écrirons encore

(94) $$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{\alpha} p_{0\alpha} \Psi_{\alpha\beta}^{(k)}$$

en posant

(95) $$\Psi_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{g=1}^{s} \lambda_g^k \psi_{\alpha\beta}^{(g)}.$$

Enfin nous écrirons

(96) $$p_{k|\beta} = p_\beta + \sum_{g=1}^{s} \lambda_g^k \Psi_\beta(\lambda_g),$$

en posant

(97) $$\Psi_\beta(\lambda_g) = \sum_\alpha p_{0\,\alpha} \Psi_{\alpha\beta}^{(g)}.$$

XLV. *Soit*

(98) $$a = \sum_\beta p_\beta x_\beta.$$

Alors, pour une chaîne normale,

(99) $$\lim_{i\to\infty} a_{k+i} = \lim_{i\to\infty} A_\alpha^{(i)} = a$$

quels que soient k et α.

En effet,

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(i)} = p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^i \Psi_{\alpha\beta}^{(g)},$$

donc

$$A_\alpha^{(i)} = \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} x_\beta = \sum_\beta p_\beta x_\beta + \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^i \sum_\beta \Psi_{\alpha\beta}^{(g)} x_\beta$$

$$\to \sum_\beta p_\beta x_\beta \text{ pour } i \to \infty,$$

car $|\lambda_g| < 1$ ($g = \overline{1, \mu}$). Ensuite

$$a_{k+i} = \sum_\alpha p_{k|\alpha} A_\alpha^{(i)} \to \sum_\alpha p_{k|\alpha}\, a = a$$

pour $i \to \infty$.

XLVI. *Nous avons*

(100) $$\lim_{k\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}}{k} = a.$$

C'est une simple conséquence de la première des égalités (99) et du théorème bien connu suivant:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n^{m+1}} = \frac{A}{m+1},$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n^m} = A.$$

15. Dispersion de la somme des quantités u_h. Dans l'étude de la somme des quantités u_h ou, ce qui est la même chose, de la somme des valeurs de x dans les épreuves consécutives un rôle important joue la dispersion de cette somme et nous allons l'examiner tout d'abord.

Soit, pour brièveté, $u'_h = u_h - a$. Envisageons l'espérance mathématique de l'expression $(u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_{s-1})^2$, en désignant par s le nombre des épreuves.

Nous avons

$$E\left(\sum_{h=0}^{s-1} u'_h\right)^2 = \sum_h E(u'_k)^2 + 2\sum_{g,\,h} E(u'_g u'_h).$$

On trouve d'abord

$$\begin{aligned} E(u'_h)^2 &= \sum_\beta p_{h|\beta}(x_\beta - a)^2 \\ &= \sum_\beta \sum_\alpha p_{0\alpha}(p_\beta + \Psi^{(h)}_{\alpha\beta})(x_\beta - a)^2 \\ &= \sum_\beta p_\beta (x_\beta - a)^2 + \sum_\beta (x_\beta - a)^2 \sum_\alpha p_{0\alpha}\Psi^{(h)}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

et ensuite

$$E\left(\sum_h (u'_h)^2\right) = s\sum_\beta p_\beta (x_\beta - a)^2 + \sum_\beta (x_\beta - a)^2 \sum_\alpha p_{0\alpha} \sum_h \Psi^{(h)}_{\alpha\beta}.$$

Mais, par (95),

$$\begin{aligned} \sum_h \Psi^{(h)}_{\alpha\beta} &= \sum_{g=1}^{\mu} \sum_h \lambda_g^h \psi^{(g)}_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1-\lambda_g^s}{1-\lambda_g}\psi^{(g)}_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

donc, en tenant compte de (97),

$$\sum_\beta (x_\beta - a)^2 \sum_\alpha p_{0\alpha} \sum_h \Psi^{(h)}_{\alpha\beta} = \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1-\lambda_g^s}{1-\lambda_g} \sum_\beta (x_\beta - a)^2 \Psi_\beta(\lambda_g).$$

Par conséquent,

$$(101) \qquad E(\Sigma(u'_h)^2) = s\sum_\beta p_\beta (x_\beta - a)^2 + \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1-\lambda_g^s}{1-\lambda_g} \sum_\beta (x_\beta - a)^2 \Psi_\beta(\lambda_g).$$

Posons maintenant

$$s_{kl} = E(u'_k u'_{k+l}),$$

k et l étant des entiers positifs quelconques. Nous aurons

$$\begin{aligned}
s_{kl} &= \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}\varphi^{(k)}_{\alpha\beta}\varphi^{(l)}_{\beta\gamma} \\
&= \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}][p_\gamma + \Psi^{(l)}_{\beta\gamma}] \\
&= \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}]p_\gamma \\
&+ \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}]\Psi^{(l)}_{\beta\gamma} \\
&= \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}]\Psi^{(l)}_{\beta\gamma},
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\sum_\alpha p_{0\alpha}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}]p_\gamma = 0$$

à cause de $\sum_\gamma (x_\gamma - a)p_\gamma = 0$.

En sommant s_{kl} on aura

$$\begin{aligned}
s_l \equiv \sum_{k=0}^{s-l-1} s_{kl} &= \\
&= \sum_{\beta,\gamma}(x_\beta - a)(x_\gamma - a)\Psi^{(l)}_{\beta\gamma}\sum_\alpha p_{0\alpha}\sum_{k=0}^{s-l-1}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}].
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s-l-1}[p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}] &= (s-l)p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{s-l-1}\lambda_g^k\,\psi^{(g)}_{\alpha\beta} \\
&= (s-l)p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu}\frac{1-\lambda_g^{s-l}}{1-\lambda_g}\psi^{(g)}_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

$$\sum_\alpha p_{0\alpha}\sum_k [p_\beta + \Psi^{(k)}_{\alpha\beta}] = (s-l)p_\beta + \sum_{g=1}^{\mu}\frac{1-\lambda_g^{s-l}}{1-\lambda_g}\Psi_\beta(\lambda_g),$$

donc

$$s_l = \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a)(s - l) p_\beta \Psi^{(l)}_{\beta\gamma}$$

$$+ \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a) \Psi^{(l)}_{\beta\gamma} \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1 - \lambda_g^{s-l}}{1 - \lambda_g} \Psi_\beta(\lambda_g).$$

Enfin, en calculant la somme $\sum_{l=1}^{s-1} s_l$, nous aurons évidemment la somme $\sum_{g,h} E(u'_g u'_h)$, qui rentre dans l'expression de $E(\Sigma u'_h)^2$.

Nous trouvons

$$\sum_{l=1}^{s-1} (s - l) \Psi^{(l)}_{\beta\gamma} = \sum_{l} (s - l) \sum_{g} \lambda_g^l \psi^{(g)}_{\beta\gamma}$$

$$= \sum_{g} \left[\frac{s\lambda_g}{1 - \lambda_g} - \frac{\lambda_g - \lambda_g^{s+1}}{(1 - \lambda_g)^2} \right] \psi^{(g)}_{\beta\gamma}$$

et

$$\sum_{l=1}^{s-1} \Psi^{(l)}_{\beta\gamma} \sum_{g} \frac{1 - \lambda_g^{s-l}}{1 - \lambda_g} \Psi_\beta(\lambda_g) = \sum_{g,h=1}^{\mu} \psi^{(h)}_{\beta\gamma} \Psi_\beta(\lambda_g) \sum_{l=1}^{s-1} \lambda_h^l \frac{1 - \lambda_g^{s-l}}{1 - \lambda_g}$$

$$= \sum_{g,h=1}^{\mu} \left[\frac{\lambda_h - \lambda_h^s}{(1 - \lambda_g)(1 - \lambda_h)} + \frac{\lambda_g \lambda_h^s - \lambda_h \lambda_g^s}{\lambda_g - \lambda_h} \right] \Psi_\beta(\lambda_g) \psi^{(h)}_{\beta\gamma},$$

où

$$\frac{\lambda_g \lambda_h^s - \lambda_h \lambda_g^s}{\lambda_g - \lambda_h}$$

doit être remplacé par

$$-\frac{(s - 1)\lambda_g^s}{1 - \lambda_g}$$

pour $g = h$.

Par conséquent,

$$(102) \qquad \sum_{l=1}^{s-1} s_l = \sum_{g,h} E(u'_g u'_h) = \sum_{g=1}^{\mu} \left[\frac{s\lambda_g}{1 - \lambda_g} - \frac{\lambda_g - \lambda_g^{s+1}}{(1 - \lambda_g)^2} \right] (x_\beta - a)(x_\gamma - a) p_\beta \psi^{(g)}_{\beta\gamma}$$

$$+ \sum_{g,h=1} \left[\frac{\lambda_h - \lambda_h^s}{(1 - \lambda_g)(1 - \lambda_h)} + \frac{\lambda_g \lambda_h^s - \lambda_h \lambda_g^s}{\lambda_g \lambda_h} \right] \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a) \Psi_\beta(\lambda_g) \psi^{(h)}_{\beta\gamma}.$$

Ainsi nous trouvons définitivement

$$
\begin{aligned}
(103) \quad \sigma_1^2(\Sigma u_h) &= E(\Sigma u_h')^2 \\
&= s\sum_{\beta} p_\beta (x_\beta - a)^2 + \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1-\lambda_g^s}{1-\lambda_g} \sum_{\beta} (x_\beta - a)^2 \Psi_\beta(\lambda_g) \\
&+ 2\sum_{g=1}^{\mu} \left[\frac{s\lambda_g}{1-\lambda_g} - \frac{\lambda_g - \lambda_g^{s+1}}{(1-\lambda_g)^2}\right] \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a) p_\beta \psi_{\beta\gamma}^{(g)} \\
&+ 2\sum_{g,h=1}^{\mu} \left[\frac{\lambda_h - \lambda_h^s}{(1-\lambda_g)(1-\lambda_h)} + \frac{\lambda_g\lambda_h^s - \lambda_h\lambda_g^s}{\lambda_g - \lambda_h}\right] \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a)\, \Psi_\beta(\lambda_g)\, \psi_{\beta\gamma}^{(h)}.
\end{aligned}
$$

De cette expression complète de $\sigma_1^2(\Sigma u_h)$ on trouve immédiatement une expression asymptotique et plus simple:

$$
(104) \qquad \sigma_1^2(\Sigma u_h) \sim s\left[\sum_{\beta} p_\beta (x_\beta - a)^2 + \sum_{g=1}^{\mu} \frac{2\lambda_g}{1-\lambda_g} \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a) p_\beta \Psi_{\beta\gamma}^{(g)}\right].
$$

Envisageons maintenant la quantité

$$
\sigma^2(\Sigma u_h) \equiv E\left[\sum_{h=0}^{s-1} (u_h - a_h)\right]^2
$$

qui est la dispersion de la somme Σu_h.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
& E(\Sigma(u_h - a))^2 - E(\Sigma(u_h - a_h))^2 \\
&\quad = E[\Sigma(u_h - a) - \Sigma(u_h - a_h)][\Sigma(u_h - a) + \Sigma(u_h - a_h)] \\
&\quad = (\Sigma a_h - sa)\, E(2\Sigma u_h - \Sigma a_h - sa) \\
&\quad = (\Sigma a_h - sa)^2
\end{aligned}
$$

ou

$$
\sigma_1^2(\Sigma u_h) - \sigma^2(\Sigma u_h) = (\Sigma a_h - sa)^2,
$$

d'où

$$
(105) \qquad \sigma^2(\Sigma u_h) = \sigma_1^2(\Sigma u_h) - (\Sigma a_h - sa)^2.
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
a_h - a &= \sum_{\beta} p_{h|\beta} x_\beta - \sum_{\beta} p_\beta x_\beta \\
&= \sum_{\beta} x_\beta \sum_{g=1}^{\mu} \lambda_g^h \Psi_\beta(\lambda_g),
\end{aligned}
$$

et, par suite,

$$\Sigma a_h - sa = \sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g - \lambda_g^s}{1 - \lambda_g} \sum_{\beta} x_\beta \Psi_\beta(\lambda_g).$$

Cette quantité est évidemment finie pour toute valeur de s, donc, de l'égalité (105), qu'on peut maintenant écrire

$$(106) \qquad \sigma^2(\Sigma u_h) = \sigma_1^2(\Sigma u_h) - \left[\sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g - \lambda_g^s}{1 - \lambda_g} \sum_{\beta} x_\beta \Psi_\beta(\lambda_g)\right]^2,$$

on conclut que

$$(107) \qquad \sigma^2(\Sigma u_h) \sim \sigma_1^2(\Sigma u_h).$$

Résumons nos résultats.

XLVII. *En posant*

$$\sigma^2(\Sigma u_h) = E\left(\sum_{h=0}^{s-1}(u_h - a_h)\right)^2, \quad \sigma_1^2(\Sigma u_h) = E\left(\sum_{h=0}^{s-1}(u_h - a)\right)^2,$$

où u_h, a_h *et* a *sont les quantités définies dans n° 14, on a*

$$\sigma^2(\Sigma u_h) = \sigma_1^2(\Sigma u_h) - \left[\sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g - \lambda_g^s}{1 - \lambda_g} \sum_{\beta} x_\beta \Psi_\beta(\lambda_g)\right]^2,$$

$$\sigma^2(\Sigma u_h) \sim \sigma_1^2(\Sigma u_h)$$

et

$$\sigma_1^2(\Sigma u_h) \sim s\left[\sum_{\beta} p_\beta(x_\beta - a) + \sum_{g=1}^{\mu} \frac{2\lambda_g}{1 - \lambda_g} \sum_{\beta,\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a)\, p_\beta \psi_{\beta\gamma}^{(g)}\right].$$

La valeur exacte de $\sigma_1^2(\Sigma u_h)$ *est donnée par (103).*

16. Moments des produits des u_h'. Soit, pour brièveté,

$$(108) \qquad z_\alpha = x_\alpha - a, \; z = x - a$$

et introduisons les notations

$$(109) \qquad M_{m_1 m_2 \ldots m_r}^{(k_1 k_2 \ldots k_r)} = E\left[(u_{k_1} - a)^{m_1}(u_{k_1+k_2} - a)^{m_2} \ldots (u_{k_1+k_2+\cdots+k_r} - a)^{m_r}\right],$$

$$(110) \qquad \mu_m = E(z^m) = \sum_{\alpha} p_\alpha (x_\alpha - a)^m,$$

où m_i et k_i $(i = \overline{1, r})$ sont des nombres entiers positifs.

Nous allons déduire une formule fondamentale pour les moments $M^{(k_1 k_2 \dots k_r)}_{m_1 m_2 \dots m_r}$ qui sera très utile dans la suite.

XLVIII. *Les moments* $M^{(k_1 k_2 \dots k_r)}_{m_1 m_2 \dots m_r}$ *peuvent se calculer à l'aide de la formule récurrente suivante:*

$$
\begin{aligned}
M^{(k_1 k_2 \dots k_r)}_{m_1 m_2 \dots m_r} &= M^{(k_1 k_2 \dots k_{r-1})}_{m_1 m_2 \dots m_{r-1}} \mu_{m_r} \\
&+ M^{(k_1 k_2 \dots k_{r-2})}_{m_1 m_2 \dots m_{r-2}} \Sigma p_{\beta_{r-1}} \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_{r-1}}_{\beta_{r-1}} z^{m_r}_{\beta_r} \\
&+ M^{(k_1 k_2 \dots k_{r-3})}_{m_1 m_2 \dots m_{r-3}} \Sigma p_{\beta_{r-2}} \Psi^{(k_{r-1})}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}} \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_{r-2}}_{\beta_{r-2}} z^{m_{r-1}}_{\beta_{r-1}} z^{m_r}_{\beta_r} \\
(*) \qquad &+ \cdots \\
&+ M^{(k_1)}_{m_1} \Sigma p_{\beta_2} \Psi^{(k_3)}_{\beta_2\beta_3} \dots \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_2}_{\beta_2} z^{m_3}_{\beta_3} \dots z^{m_r}_{\beta_r} \\
&+ \Sigma p_{\beta_1} \Psi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2} \Psi^{(k_3)}_{\beta_2\beta_3} \dots \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} z^{m_2}_{\beta_2} \dots z^{m_r}_{\beta_r} \\
&+ \Sigma p_{0\alpha} \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1} \Psi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2} \dots \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} z^{m_2}_{\beta_2} \dots z^{m_r}_{\beta_r},
\end{aligned}
$$

où toutes les sommes doivent être prises pour

$$\alpha = \overline{1, n}; \ \beta_1 = \overline{1, n}; \ \dots; \ \beta_r = \overline{1, n}.$$

Cette formule se déduit très simplement de la définition même du moment considéré. On a

$$
\begin{aligned}
M^{(k_1 k_2 \dots k_r)}_{m_1 m_2 \dots m_r} &= \Sigma p_{0\alpha} \varphi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1} \varphi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2} \dots \varphi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} z^{m_2}_{\beta_2} \dots z^{m_r}_{\beta_r} \\
&= \Sigma p_{0\alpha} [p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] [p_{\beta_2} + \Psi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2}] \dots [p_{\beta_r} + \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r}] z^{m_1}_{\beta_1} \dots z^{m_r}_{\beta_r} \\
&= \Sigma p_{0\alpha} [p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] \dots [p_{\beta_{r-1}} + \Psi^{(k_{r-1})}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}}] z^{m_1}_{\beta_1} \dots z^{m_{r-1}}_{\beta_{r-1}} \sum_{\beta_r} p_{\beta_r} z^{m_r}_{\beta_r} \\
&+ \Sigma p_{0\alpha} [p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] \dots [p_{\beta_{r-1}} + \Psi^{(k_{r-1})}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}}] \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} \dots z^{m_r}_{\beta_r} \\
&= M^{(k_1 k_2 \dots k_{r-1})}_{m_1 m_2 \dots m_{r-1}} \mu_{m_r}
\end{aligned}
$$

$$+ \Sigma p_{0\alpha}[p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] \ldots [p_{\beta_{r-2}} + \Psi^{(k_r-2)}_{\beta_{r-3}\beta_{r-2}}] z^{m_1}_{\beta_1} \ldots z^{m_{r-2}}_{\beta_{r-2}} \sum_{\beta_{r-1}, \beta_r} p_{\beta_{r-1}} \Psi_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_{r-1}}_{\beta_{r-1}} z^{m_r}_{\beta_r}$$

$$+ \Sigma p_{0\alpha}[p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] \ldots [p_{\beta_{r-2}} + \Psi^{(k_r-2)}_{\beta_{r-3}\beta_{r-2}}] \Psi^{(k_r-1)}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}} \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} \ldots z^{m_r}_{\beta_r}$$

$$= M^{(k_1 k_2 \ldots k_{r-1})}_{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}} \mu_{m_r}$$

$$+ M^{(k_1 k_2 \ldots k_{r-2})}_{m_1 m_2 \ldots m_{r-2}} \Sigma p_{\beta_{r-1}} \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_r-1}_{\beta_{r-1}} z^{m_r}_{\beta_r}$$

$$+ \Sigma p_{0\alpha}[p_{\beta_1} + \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1}] \ldots [p_{\beta_{r-2}} + \Psi^{(k_r-2)}_{\beta_{r-3}\beta_{r-2}}] \Psi^{(k_r-1)}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}} \Psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_1}_{\beta_1} \ldots z^{m_r}_{\beta_r}$$

$$= \text{etc.}$$

En continnant de cette manière, on obtient la formule (*). On doit faire toutes les sommes pour toutes les valeurs de tout indice grec qui se rencontre deux ou trois fois sous le signe de somme.

En posant

$$(111) \quad \begin{cases} [m_1 m_2 \ldots m_t] = M^{(k_1 k_2 \ldots k_t)}_{m_1 m_2 \ldots m_t}, \\ (m_1 m_2 \ldots m_t) = \Sigma p_{\beta_1} \Psi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2} \ldots \Psi^{(k_t)}_{\beta_{t-1}\beta_t} z^{m_1}_{\beta_1} \ldots z^{m_t}_{\beta_t}, \\ (m_1 m_2 \ldots m_t)' = \Sigma p_{0\alpha} \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1} \ldots \Psi^{(k_t)}_{\beta_{t-1}\beta_t} z^{m_1}_{\beta_1} \ldots z^{m_t}_{\beta_t}, \end{cases}$$

nous pouvons écrire l'égalité (*) sous la forme plus condensée:

$$(\text{* bis}) \quad \begin{aligned} [m_1 m_2 \ldots m_r] = {} & [m_1 m_2 \ldots m_{r-1}](m_r) \\ & + [m_1 m_2 \ldots m_{r-2}](m_{r-1} m_r) \\ & + \cdots \\ & + [m_1](m_2 m_3 \ldots m_r) \\ & + (m_1 m_2 \ldots m_r) + (m_1 m_2 \ldots m_r)'. \end{aligned}$$

Dans la suite les symbôles $[m_1 m_2 \ldots m_t]$, $(m_1 m_2 \ldots m_t)$ et $(m_1 m_2 \ldots m_t)'$ seront appelés *parenthèse*, *crochet* et *crochet accentué* respectivement. Le développement (* bis) sera dit développement en crochets.

Il est aisé de voir que la parenthèse $[m_1 m_1 \ldots m_r]$ se développe à l'aide de (* bis) en une somme de membres dont chacun est un produit de certains crochets. Prenons, par exemple, la parenthèse $[2, 3, 4, 5]$. Nous obtenons successivement

$$[2, 3, 4, 5] = [2, 3, 4](5) + [2, 3](4, 5) + [2](3, 4, 5) + (2, 3, 4, 5) + (2, 3, 4, 5)'$$
$$[2, 3, 4] = [2, 3](4) + [2](3, 4) + (2, 3, 4) + (2, 3, 4)'$$
$$[2, 3] = [2](3) + (2, 3) + (2, 3)'$$
$$[2] = (2) + (2)',$$

d'où

$$[2, 3] = (2)(3) + (2)'(3) + (2, 3) + (2, 3)'$$
$$[2, 3, 4] = (2)(3)(4) + (2)'(3)(4) + (2, 3)(4) + (2, 3)'(4) + (2)(3, 4) + (2)'(3, 4) + (2, 3, 4) + (2, 3, 4)'$$

et, enfin,

$$\begin{aligned}[2, 3, 4, 5] = {} & (2)(3)(4)(5) + (2)'(3)(4)(5) + (2, 3)(4)(5) + (2, 3)'(4)(5) \\ & + (2)(3, 4)(5) + (2)'(3, 4)(5) + (2, 3, 4)(5) + (2, 3, 4)'(5) \\ & + (2)(3)(4, 5) + (2)'(3)(4, 5) + (2, 3)(4, 5) + (2, 3)'(4, 5) \\ & + (2)(3, 4, 5) + (2)'(3, 4, 5) + (2, 3, 4, 5) + (2, 3, 4, 5)'.\end{aligned}$$

On voit que $[m_1 m_2 \ldots m_r]$ peut se développer en somme de produits de crochets par la règle suivante:

XLIX. *Pour avoir le développement complet de $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ en crochets il faut former des indices $m_1, m_2, \ldots, m_r$, sans changer leur ordre, tous les crochets possibles et faire la somme des produits de ces crochets, en associant à tout produit un produit pareil où le premier crochet est accentué.*

Cette règle se traduit par l'égalité

$$\text{(112)} \qquad [m_1 m_2 \ldots m_r] = \sum_q \{(m_1 \ldots m_{q_1})(m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}) \ldots (m_{q_t+1} \ldots m_r) + (m_1 \ldots m_{q_1})'(m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}) \ldots (m_{q_t+1} \ldots m_r)\},$$

où la somme doit se répandre à toutes les valeurs des indices $q_1, q_2, \ldots, q_t$ telles que

$$\text{(112')} \qquad 1 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_t < r, \qquad t \leqq r.$$

On vérifie sans difficulté que le nombre des membres du développement (112) est égal à

$$2(C_{r-1}^0 + C_{r-1}^1 + \cdots + C_{r-1}^{r-1}) = 2^r,$$

si tous les m_i sont différents de 1. Mais, s'il y a parmi les m_i des unités, ce nombre est moindre que 2^r, parce que dans ce cas s'évanouissent identiquement tous les crochets (m_i), où $m_i = 1$, (m_i) étant égal à

$$\sum_{\beta_i} p_{\beta_i} z_{\beta_i} = \mu_1 = 0$$

pour $m_i = 1$.

Considérons maintenant les moments

$$M_{m_1 m_2 \ldots m_r} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_r} M_{m_1 m_2 \ldots m_r}^{(k_1 k_2 \ldots k_r)} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_r} [m_1 m_2 \ldots m_r] \tag{113}$$

$$(k_1 \geqq 0;\ k_2 \geqq 1,\ k_3 \geqq 1, \ldots, k_r \geqq 1;\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leqq s - 1).$$

On peut les calculer soit par la sommation de la formule (* bis) soit par la sommation de la formule (112). Il est possible d'obtenir la formule générale pour $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$ par cette voie, mais les calculs sont longs et pénibles et nous montrerons seulement comment on peut les faire et comment on calcule la valeur asymptotique de $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$.

Abordons la sommation de (112). Nous avons

$$\sum_{k_1, \ldots, k_r} [m_1 \ldots m_r] = \sum_q \left\{ \sum_{k_1 \ldots k_r} A_q + \sum_{k_1 \ldots k_r} A'_q \right\},$$

où A_q et A'_q ont des significations évidentes. On a ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 \ldots k_r} A_q &= \sum_{k_1 \ldots k_r} (m_1 \ldots m_{q_1})(m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}) \ldots (m_{q_t+1} \ldots m_r) \\ &= \sum_{k^\circ} (m_1 \ldots m_{q_1}) \sum_{k'} (m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}) \ldots \sum_{k^{(t)}} (m_{q_t+1} \ldots m_r) \sum_{k^{(t+1)}} 1, \end{aligned} \tag{114}$$

en posant

$$\begin{aligned} &k^\circ = (k_2, k_3, \ldots, k_{q_1}),\ k' = (k_{q_1+2}, k_{q_1+3}, \ldots, k_{q_2}), \ldots, \\ &k^{(t)} = (k_{q_t+2}, k_{q_t+3}, \ldots, k_r),\ k^{(t+1)} = (k_1, k_{q_1+1}, k_{q_2+1}, \ldots, k_{q_t+1}) \end{aligned} \tag{114'}$$

et en désignant par $\sum\limits_{k^\circ}$, $\sum\limits_{k'}$, ... les sommes prises par rapport aux groupes des indices indiqués par (114′). On obtient (114) en remarquant que les crochets $(m_1 \ldots m_{q_1})$, $(m_{q_1+1} \ldots m_{q_2})$, etc. ne dépendent pas des indices $k_1, k_{q_1+1}, \ldots, k_{q_t+1}$ respectivement (on le voit par (111)) et qu'on peut changer l'ordre des sommations par rapport à $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Pareillement on a

$$(115)\qquad \sum_{k_1\ldots k_r} A'_q = \sum_{\bar{k}^0} (m_1 \ldots m_{q_1})' \sum_{k'} (m_{q_1} \ldots m_{q_2}) \ldots \sum_{k^{(t)}} (m_{q_t+1} \ldots m_r) \sum_{\bar{k}^{(t+1)}} 1,$$

où

$$(115')\qquad \bar{k}^0 = (k_1, k_2, \ldots, k_{q_1}),\ \bar{k}^{(t+1)} = (k_{q_1+1}, k_{q_2+1}, \ldots, k_{q_t+1})$$

et $k', \ldots, k^{(t)}$ ont les mêmes significations que dans (114').

Voyons maintenant comment on peut éffectuer les sommations indiquées dans (114). En posant

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r,$$

$$s_0 = s - k + k_{q_t+1} + k_{q_{t-1}+1} + \cdots + k_{q_1} + k_1 - t - 1 = s - k + k^{(t+1)} - t - 1,$$

$$s_1 = s - k + k_{q_t+1} + k_{q_{t-1}+1} + \cdots + k_{q_1} - t,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_t = s - k + k_{q_t+1} + 1,$$

on trouve d'abord

$$\sum_{k^{(t+1)}} 1 = \sum_{k_1=0}^{s_0} \sum_{k_{q_1}=1}^{s_1} \cdots \sum_{k_{q_t}=1}^{s_t} 1$$

et puis

$$\sum_{k_{q_t}=1}^{s_t} 1 = s_t,$$

$$\sum_{k_{q_{t-1}}=1}^{s_{t-1}} s_t = \frac{s_{t-1}(s_{t-1}+1)}{1.2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k_1=0}^{s_1} \frac{s_1(s_1+1)\cdots(s_1+t-1)}{1.2\cdots t} = \frac{s_0(s_0+1)\cdots(s_0+t)}{1.2\cdots t(t+1)},$$

donc

$$(116)\qquad \sum_{k^{(t+1)}} 1 = \frac{s_0(s_0+1)\cdots(s_0+t)}{(t+1)!} = \frac{(s-k+k^{(t+1)}-1)\cdots(s-k+k^{(t+1)}-t-1)}{(t+1)!}$$

$$= C_{s'}^{t+1},\ s' = s - k + k^{(t+1)} - 1$$

et

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} A_q = \sum_{k^\circ} (m_1 \ldots m_{q_1}) \ldots \sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} (m_{q_t+1} \ldots m_r). \tag{117}$$

Pareillement on trouve

$$\sum_{\overline{k}^{(t+1)}} 1 = C_{s''}^t, \; s'' = s - k + \overline{k}^{(t+1)} - 1;$$

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} A'_q = \sum_{\overline{k}^\circ} (m_1 \ldots m_{q_1})' \sum_{k'} (m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}) \ldots \sum_{k^{(t)}} C_{s''}^t (m_{q_t+1} \ldots m_r). \tag{118}$$

Considérons maintenant (117). Il faut avant tout calculer la dernière somme de la partie droite de cette égalité. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} (m_{q_t+1} \ldots m_r) &= \sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} \sum_{\beta} p_{\beta_{q_t+1}} \psi^{(k_{q_t+2})}_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}} \ldots \psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} z^{m_{q_t+1}}_{\beta_{q_t+1}} \ldots z^{m_r}_{\beta_r} \\ &= \sum_{\beta} p_{\beta_{q_t+1}} z^{m_{q_t+1}}_{\beta_{q_t+1}} \ldots z^{m_r}_{\beta_r} \sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} \psi^{(k_{q_t+2})}_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}} \ldots \psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r},\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} \psi^{(k_{q_t+2})}_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}} \ldots \psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r} &= \sum_{k_{q_t+2}} \psi^{(k_{q_t+2})}_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}} \ldots \sum_{k_{r-1}} \psi^{(k_{r-1})}_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}} \sum_{k_r} C_{s'}^{t+1} \psi^{(k_r)}_{\beta_{r-1}\beta_r},\end{aligned} \tag{120}$$

où les dernières sommes doivent être calculées pour

$$\left\{\begin{aligned} k_r &= 1, 2, \ldots, s - k + k^{(t+1)} + k_r - t - 2, \\ k_{r-1} &= 1, 2, \ldots, s - k + k^{(t+1)} + k_r + k_{r-1} - t - 3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{q_t+2} &= 1, 2, \ldots, s - k + k^{(t+1)} + k^{(t)} - t - r + q_{t+2} - 1 \end{aligned}\right. \tag{121}$$

et se calculent à l'aide de la formule connue de la théorie des différences finies:

$$\sum \lambda^n \varphi(n) = \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}\left[\varphi(n) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \Delta \varphi(n) + \cdots + \left(\frac{-\lambda}{\lambda - 1}\right)^m \Delta^m \varphi(n)\right] + C, \tag{122}$$

où $\varphi(n)$ est un polynôme du degré m en n et la somme indéfinie et les différences sont prises par rapport à n.

En posant dans (122)

$$n = k_r, \quad \varphi(n) = C_{s'}^{t+1},$$

en appliquant ensuite (122) à la dernière somme de (120) et en tenant compte de (121), nous aurons

$$\sum_{k_r} C_{s'}^{t+1} \Psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(k_r)} = \sum_{g=1}^{\mu} \psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)} \sum_{k_r} \lambda_g^{k_r} C_{s'}^{t+1}$$

$$= \sum_{g=1}^{\mu} \psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)} \left| \frac{\lambda_g^{k_r}}{\lambda_g - 1} \left[C_{s'}^{t+1} - \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} \Delta C_{s'}^{t+1} + \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{-\lambda_g}{\lambda_g - 1} \right)^{t+1} \Delta^{t+1} C_{s'}^{t+1} \right] + C \right|_{k_r=1}^{k_r = s-k+k^{(t+1)}+k_r-t-1}.$$

Mais

$$C_{s'}^{t+1} = \frac{s'(s'-1)\ldots(s'-t)}{(t+1)!},$$

$$\Delta C_{s'}^{t+1} = -\frac{(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-t)}{t!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^t C_{s'}^{t+1} = (-1)^t (s'-t),$$

$$\Delta^{t+1} C_{s'}^{t+1} = (-1)^{t+1}$$

et toutes ces quantités, à l'exception de la dernière, se réduisent à zéro pour $k_r = s - k + k^{(t+1)} + k_r - t - 1 = s' - t + k_r$, donc

$$\left| \frac{\lambda_g^{k_r}}{\lambda_g - 1} \left[C_{s'}^{t+1} - \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} \Delta C_{s'}^{t+1} + \cdots \right] + C \right|_{k_r=1}^{k_r = s-k+k^{(t+1)}+k_r-t-1}$$

(123) $$= -\frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} \left[C_{s'}^{t+1} + \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} C_{s'-1}^{t} + \cdots + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} \right)^t C_{s'-t}^{1} \right]_{k_r=1}$$

$$= \frac{\lambda_g}{1 - \lambda_g} \left[C_{\sigma}^{t+1} + \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} C_{\sigma-1}^{t} + \cdots + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} \right)^t C_{\sigma-t}^{1} \right],$$

(124) $$\sigma = s - k + k_r + k^{(t+1)} - 2,$$

ou encore, pour simplifier l'écriture,

(125) $$= K(s, \lambda_g),$$

en posant

$$K(s,\lambda_g)=\frac{\lambda_g}{1-\lambda_g}\left[C_\sigma^{t+1}+\frac{\lambda_g}{\lambda_g-1}C_{\sigma-1}^t+\cdots+\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g-1}\right)^t C_{\sigma-t}^1\right]. \tag{126}$$

$K(s,\lambda_g)$ est une fonction rationnelle en λ_g et un polynôme du degré $t+1$ par rapport à s; les indices $k_1, k_2, \ldots$ n'y entrent que par C_σ^{t+1}, $C_{\sigma-1}^t, \ldots$; remarquons encore que

$$K(s,\lambda_g)\sim\frac{\lambda_g}{1-\lambda_g}C_\sigma^{t+1}\sim\frac{\lambda_g}{1-\lambda_g}\frac{s^{t+1}}{(t+1)!}. \tag{127}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k_r} C_{s'}^{t+1}\Psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(k_r)}=\sum_{g=1}^{\mu}K(s,\lambda_g)\,\psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)}, \tag{128}$$

donc, par (120),

$$\sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1}\Psi_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}}^{(k_{q_t+2})}\cdots\Psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(k_r)}$$
$$=\sum_{k_{q_t+2}}\Psi_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t}}^{(k_{q_t+2})}\cdots\sum_{k_{r-1}}\sum_{g=1}^{\mu}K(s,\lambda_g)\,\psi_{\beta_{r-2}\beta_r}^{(g)}\Psi_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}}^{(k_{r-1})}.$$

Mais

$$\sum_{k_{r-1}}\sum_{g=1}^{\mu}K(s,\lambda_g)\,\psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)}\Psi_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}}^{(k_{r-1})}=$$
$$=\sum_{g=1}^{\mu}\psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)}\sum_{g_1=1}^{\mu}\psi_{\beta_{r-2}\beta_{r-1}}^{(g_1)}\sum_{k_{r-1}}\lambda_{g_1}^{k_{r-1}}K(s,\lambda_g) \tag{129}$$

et, en s'aidant de nouveau de la formule (122), on verra que

$$\sum_{k_{r-1}}\lambda_{g_1}^{k_{r-1}}K(s,\lambda_g)=K(s,\lambda_g,\lambda_{g_1}),$$

où $K(s,\lambda_g,\lambda_{g_1})$ est une fonction rationnelle de λ_g et λ_{g_1} et un polynôme du degré $t+1$ par rapport à s; son valeur asymptotique est donné par l'égalité

$$K(s,\lambda_g,\lambda_{g_1})\sim\frac{\lambda_g\lambda_{g_1}}{(1-\lambda_g)(1-\lambda_{g_1})}\frac{s^{t+1}}{(t+1)!}. \tag{130}$$

En continant de cette manière on arrive enfin au résultat:

$$S \equiv \sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1} \Psi_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}}^{(k_{q_t+2})} \cdots \Psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(k_r)} =$$

$$= \sum_{g, g_1, \ldots} K(s, \lambda_g, \lambda_{g_1}, \ldots, \lambda_{g_{r-q_t-1}}) \psi_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}}^{(g_{r-q_t-1})} \cdots \psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)},$$

où la somme doit être prise pour

$$g = \overline{1, \mu}; \quad g_2 = \overline{1, \mu}; \quad \ldots; \quad g_{r-q_t-1} = \overline{1, \mu}$$

et $K(s, \lambda_g, \lambda_{g_1}, \ldots, \lambda_{g_{r-q_t-1}})$ est une fonction pareille aux fonctions $K(s, \lambda_g)$, $K(s, \lambda_g, \lambda_{g_1}), \ldots$ et ayant pour valeur asymptotique

$$\frac{\lambda_g \lambda_{g_1} \ldots \lambda_{g_{r-q_t-1}}}{(1-\lambda_g)(1-\lambda_{g_1}) \ldots (1-\lambda_{g_{r-q_t-1}})} \frac{s^{t+1}}{(t+1)!}$$

En s'aidant de ce résultat nous avons, par (119),

$$(131) \qquad \begin{aligned} \sum_{k^{(t)}} C_{s'}^{t+1}(m_{q_t+1} \ldots m_r) &= \sum_{\beta} p_{\beta_{q_t+1}} S z_{\beta_{q_t+1}}^{m_{q_t+1}} \ldots z_{\beta_r}^{m_r} \\ &= L(s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu), \end{aligned}$$

où $L(s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)$ est une fonction rationnelle de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ et un polynôme du degré $t+1$ en s ayant pour valeur asymptotique

$$(132) \qquad \begin{aligned} \frac{s^{t+1}}{(t+1)!} \mu'_{m_{q_t+1} \ldots m_r} &= \frac{s^{t+1}}{(t+1)!} \sum_{g, g_1, \ldots} \frac{\lambda_g \lambda_{g_1} \ldots \lambda_{g_{r-q_t-1}}}{(1-\lambda_g)(1-\lambda_{g_1}) \ldots (1-\lambda_{g_{r-q_t-1}})} \cdot \\ &\cdot \sum_{\beta} p_{\beta_{q_t+1}} \Psi_{\beta_{q_t+1}\beta_{q_t+2}}^{(g_{r-q_t-1})} \ldots \Psi_{\beta_{r-1}\beta_r}^{(g)} z_{\beta_{q_t+1}}^{m_{q_t+1}} \ldots z_{\beta_r}^{m_r}. \end{aligned}$$

En revenant à l'égalité (117) on voit maintenant qu'on peut écrire

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} A_q = \sum_{k^0} (m_1 \ldots m_{q_1}) \ldots \sum_{k^{(t-1)}} L(s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)(m_{q_{t-1}+1} \ldots m_{q_t}).$$

Par la methode décrite tout-à-l'heure on calculera la somme $\sum\limits_{k^{(t-1)}}$ et ainsi de suite. Le résultat final sera que la somme considérée de A_q est une fonction rationnelle de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ et un polynôme du degré $t+1$ en s ayant pour valeur asymptotique la quantité

$$(133) \qquad \frac{s^{t+1}}{(t+1)!} \mu'_{m_1 \ldots m_{q_1}} \mu'_{m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}} \ldots \mu'_{m_{q_t+1} \ldots m_r},$$

dans laquelle $\mu'_{m_1 \ldots m_{q_1}}, \ldots$ ont les significations tout à fait pareilles à celle qui est définie par (132).

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la somme (118) et nous montrent qu'elle est un polynome du degré t en s.

Soient

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} A_q = K_{q_1 q_2 \ldots q_t}(s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu),$$

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} A'_q = K'_{q_1 q_2 \ldots q_t}(s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)$$

les valeurs des sommes de A_q et A'_q qu'on obtient par la methode décrite. Alors

$$(134) \qquad M_{m_1 m_2 \ldots m_r} = \sum_q [K_{q_1 q_2 \ldots q_t} + K'_{q_1 q_2 \ldots q_t}],$$

où la somme doit être prise comme dans (112).

Cette formule nous conduit à une conclusion importante.

Soit T la valeur maximale de $t+1$ qui est certainement atteinte pour quelques membres du développement (134). Alors évidemment

$$M_{m_1 m_2 \ldots m_r} \sim \sum_q K_{q_1 q_2 \ldots q_{T-1}}$$

ou, en tenant compte de ce qu'il était dit sur les valeurs asymptotiques des sommes de A_q,

$$(135) \qquad M_{m_1 m_2 \ldots m_r} \sim \frac{s^T}{T!} \sum_q \mu'_{m_1 \ldots m_{q_1}} \mu'_{m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}} \ldots \mu'_{m_{q_{T-1}+1} \ldots m_r}.$$

Les membres $K_{q_1 q_2 \ldots q_{T-1}}$, qui nous donnent la valeur asymptotique de $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$ et qui seront appelés membres principaux de $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$, sont obtenus par la sommation par rapport à $k_1, k_2, \ldots, k_r$ des membres du développement de la parenthèse $[m_1 m_2 \ldots m_r]$ en crochets qui ont le plus grand nombre possible T de crochets-facteurs $(m_1 \ldots m_{q_1}), (m_{q_1+1} \ldots m_{q_2}), \ldots$ qui ne se réduisent pas à zéro identiquement, c'est-à-dire qui ne contiennent pas parmi eux un ou plusieurs crochets $(1) = \mu_1 = 0$. Nous appellerons de tels membres

membres principaux du développement de $[m_1 m_2 \ldots m_r]$ en crochets et le nombre T leur *ordre* ou encore *ordre de* $[m_1 m_2 \ldots m_r]$.

On peut facilement déterminer dans chaque cas particulier les membres principaux de $[m_1 m_2 \ldots m_r]$ et, par suite, à l'aide de (135), la valeur asymptotique de $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$.

Par exemple, on a, en ne retenant dans les développements que les membres principaux:

$$[5, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 2] = (5)(3)(1, 1)(1, 7)(1, 1)(1, 1)(2) \\ + (5)(3, 1)(1, 1)(7)(1, 1)(1, 1)(2) + \cdots, \quad T = 7;$$

$$[5, 3, 2, 7, 3] \quad = (5)(3)(2)(7)(3) + \cdots, \quad T = 5;$$

$$[1, 1, 1, 1, 3, 5] = (1, 1)(1, 1)(3)(5) + \cdots, \quad T = 4;$$

$$[1, 1, 1, 5, 3] \quad = (1)(1, 1)(5)(3) + (1, 1, 1)(5)(3) + \cdots, \quad T = 3.$$

On en obtient

$$M_{5, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 2} \sim \frac{s^7}{7!}[\mu_5 \mu_3 \mu_2 \mu'_{1, 7} (\mu'_{1, 1})^3 \\ + \mu_5 \mu_7 \mu_2 \mu'_{3, 1} (\mu'_{1, 1})^3],$$

$$M_{5, 3, 2, 7, 3} \sim \frac{s^5}{5!} \mu_2 \mu_3^2 \mu_5 \mu_7,$$

$$M_{1, 1, 1, 1, 3, 5} \sim \frac{s^4}{4!} \mu_3 \mu_5 (\mu'_{1, 1})^2,$$

$$M_{1, 1, 1, 5, 3} \sim \frac{s^3}{3!} [\mu_3 \mu_5 \mu'_1 \mu'_{1, 1} + \mu_3 \mu_5 \mu'_{1, 1, 1}],$$

où

$$\mu_5 = \sum_\beta p_\beta z_\beta^5,$$

$$\mu'_{1, 1} = \sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g}{1 - \lambda_g} \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha \psi_{\alpha\beta}^{(g)} z_\alpha z_\beta,$$

$$\mu'_1 = \sum_{k_1} \sum_{\alpha, \beta} p_{0\alpha} \Psi_{\alpha\beta}^{(k_1)} z_\beta,$$

$$\mu'_{1, 1, 1} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3} p_{0\alpha} \Psi_{\alpha\beta_1}^{(k_1)} \Psi_{\beta_1\beta_2}^{(k_2)} \Psi_{\beta_2\beta_3}^{(k_3)} z_{\beta_1} z_{\beta_2} z_{\beta_3},$$

etc. On doit remarquer que dans les dernières sommes les limites entre lesquelles on doit sommer par rapport à k_1 pour μ'_1 ou à k_1, k_2, k_3 pour $\mu'_{1,1,1}$ dépendent du nombre des indices du moment $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$ correspondant. Ainsi, pour nos exemples,

$$\mu'_1 = \sum_{\alpha,\beta} p_{0\alpha} z_\beta \sum_{k_1=0}^{s-5} \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} p_{0\alpha} z_\beta \sum_{g=1}^{\mu} \psi^{(g)}_{\alpha\beta} \sum_{k_1=0}^{s-5} \lambda_g^{k_1}$$

$$= \sum_{g=1}^{\mu} \frac{1-\lambda_g^{s-4}}{1-\lambda_g} \sum_{\alpha,\beta} p_{0\alpha}\, \psi^{(g)}_{\alpha\beta} z_\beta,$$

$$\mu'_{1,1,1} = \sum_{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3} p_{0\alpha} z_{\beta_1} z_{\beta_2} z_{\beta_3} \sum_{k_1=0}^{s-5} \sum_{k_2=1}^{s-k_1-4} \sum_{k_1=1}^{s-k_1-k_2-3} \Psi^{(k_1)}_{\alpha\beta_1} \Psi^{(k_2)}_{\beta_1\beta_2} \Psi^{(k_3)}_{\beta_2\beta_3}.$$

17. Moments des sommes des u'_h. Théorème limite de probabilités de ces sommes. Démontrons maintenant le théorème important suivant:

LI. *Nous avons les relations*

$$E\left(\sum_{h=0}^{s-1} u'_h\right) \sim 1.3.5\ldots(2m-1)\, s^m (A+B)^m, \tag{136}$$

où

$$A = \sum_\beta p_\beta (x_\beta - a)^2 = \mu_2, \qquad B = \sum_{g=1}^{\mu} \frac{2\lambda_g}{1-\lambda_g} \sum_{\beta,\gamma} p_\beta \psi^{(g)}_{\beta\gamma} (x_\beta - a)(x_\gamma - a) = 2\mu'_{1,1} \tag{137}$$

et

$$E\left(\sum_{h=0}^{s-1} u'_h\right)^{2m+1} = O(s^m). \tag{138}$$

La démonstration de l'égalité (136) repose sur l'identité

$$\left(\sum_{h=0}^{s-1} u'_h\right)^{2m} = \sum \frac{(2m)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_r!} (u'_{k_1})^{m_1} (u'_{k_1+k_2})^{m_2} \ldots (u'_{k_1+k_2+\cdots+k_r})^{m_r},$$

où la somme est prise pour toutes les valeurs entières et positives des indices m_i et k_i telles que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 2m, \qquad r \leqq s; \tag{139}$$

$$k_1 \geqq 0;\ k_2 \geqq 1,\ k_3 \geqq 1, \ldots,\ k_r \geqq 1;\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leqq s-1. \tag{140}$$

On peut encore écrire

$$\left(\sum_h u'_h\right)^{2m} = \sum_{m_i} \frac{(2\,m)\,!}{m_1!\,\ldots\,m_r!} \sum_{k_i} (u'_{k_1})^{m_1} \ldots (u'_{k_1+\cdots+k_r})^{m_r},$$

d'où

$$E\left(\sum_h u'_h\right)^{2m} = \sum_{m_i} \frac{(2\,m)\,!}{m_1!\,\ldots\,m_r!} \sum_{k_i} E\left[(u'_{k_1})^{m_1} \ldots (u'_{k_1+\cdots+k_r})^{m_r}\right]$$

$$= \sum_{m_i} \frac{(2\,m)\,!}{m_1!\,\ldots\,m_r!} \sum_{k_i} M^{(k_1\,k_2\,\ldots\,k_r)}_{m_1\,m_2\,\ldots\,m_r}$$

$$= \sum_{m_i} \frac{(2\,m)\,!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_r!} M_{m_1\,m_2\,\ldots\,m_r}.$$

Pour avoir (136), il faut donc démontrer la relation

$$(141)\qquad \sum_{m_i} \frac{(2\,m)!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_r!} M_{m_1\,m_2\,\ldots\,m_r} \sim 1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2\,m-1)\,s^m\,(A+B)^m.$$

Prenons pour ce but la parenthèse $[m_1\,m_2\,\ldots\,m_r]$ et démontrons que son plus grand ordre $T = m$ si m_i satisfont à (139). En d'autres termes, démontrons que le plus grand nombre T des crochets-facteurs qu'on peut former de la suite

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_r, \qquad (\Sigma\, m_i = 2\,m),$$

est égal à m, quand m_i varient de toutes les manières admissibles.

Je dis que ce nombre $T = m$ est atteint pour la parenthèse $[2, 2, \ldots, 2]$ (m fois l'indice 2) et les parenthèses qu'on en obtient en remplaçant de toutes les manières possibles les 2 par 1, 1, c'est-à-dire les parenthèses telles que, par exemple,

(α) $\quad [2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \ldots, 2], \qquad [1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \ldots 2, 1, 1], \ldots,$

et que l'ordre T de toutes les autres parenthèses, ayant $\Sigma\, m_i = 2\,m$, est moindre que m.

Appelons pour brièveté $[2, 2, \ldots, 2]$ et les parenthèses de la forme (143) *parenthèses principales* de la somme (141).

On voit tout d'abord que l'ordre des parenthèses principales est en effet $T = m$ et que chaque parenthèse principale, développée en crochets, n'a qu'un seul membre principal composé des crochets (2) et (1, 1), de sorte que, par exemple, pour les parenthèses (α), les membres principaux sont

$$(2)\,(1,\,1)\,(2)\,(2)\,(1,\,1)\,(1,\,1)\,(2)\,(2)\,\ldots\,(2)$$

et

$$(1,\,1)\,(2)\,(1,\,1)\,(1,\,1)\,(2)\,(2)\,\ldots\,(2)\,(1,\,1).$$

En essayant d'autres compositions, par exemple, pour la première parenthèse,

$$(2,\,1)\,(1,\,2)\,(2)\,(1,\,1)\,(1,\,1)\,(2)\,(2)\,\ldots\,(2),$$

on aura toujours augmentation du nombre des crochets consistant de deux indices et diminution de ceux qui consistent d'un indice, donc diminution de l'ordre du membre considéré.

Voyons ensuite que les ordres des parenthèses non principales de la somme (141) sont $< m$.

Les parenthèses non principales s'obtiennent des parenthèses principales ou même d'une seule d'elles, de la parenthèse

$$[1,\,1,\,1,\,1,\,\ldots,\,1,\,1], \qquad (2m \text{ fois } 1),$$

par le remplacement de divers groupes des unités par leur somme, de sorte qu'on aura des parenthèses qui consistent soit des indices 2 et 1, l'unité se rencontrant en groupes de nombre impair, soit des indices pairs et impairs, les indices pairs étant $\geqq 4$ ou les indices impairs étant $\geqq 3$. L'ordre des parenthèses de la dernière classe est évidement moindre que m. Quant à l'ordre des parenthèses qui contiennent seulement les indices 2 et 1, l'unité se rencontrant en groupes de nombre impair, on remarque que ces groupes impairs des unités doivent être eux mêmes en nombre pair. Par exemple, on doit avoir

$$[1,\,1,\,1,\,2,\,2,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,2,\,\ldots,\,2].$$

Or, les deux groupes $1, 1, 1$ et $1, 1, 1, 1, 1$ et le groupe $2, 2$ qui se place entre eux, donne le plus grand nombre des crochets-facteurs, $(1,\,1)\,(1,\,2)\,(2,\,1)\,(1,\,1)\,(1,\,1)$ par exemple, égal à 5 qui est moindre que 6, le plus grand nombre des crochets-facteurs qu'on peut former du groupe, par exemple,

$$1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,2,\,2,$$

consistant de mêmes indices, mais ayant les unités rassemblées en des groupes pairs. Cette remarque est générale et on voit que les parenthèses non principales considérées ont aussi les ordres $< m$.

Donc, les ordres de toutes les parenthèses non principales sont $< m$. Par conséquent, pour avoir la valeur asymptotique de la somme (141), il faut y considérer seulement les moments $M_{m_1 m_2 \ldots m_r}$ qui s'obtiennent de la sommation des parenthèses principales. Nous allons maintenant calculer les sommes de ces parenthèses.

Considérons d'abord les parenthèses principales qui consistent de $2\,l$ unités et de $m-l$ deux. Il y en a évidemment C_m^l. Soit $C_{l\,i}$ l'une d'elles et

$$S_l = \sum_i \sum_{k_1 \ldots k_r} C_{l\,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, C_m^l;\ r = m + l). \tag{142}$$

Le membre principal de $C_{l\,i}$ est un produit de $m-l$ crochets (2) et l crochets (1, 1) et son ordre est m, donc

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} C_{l\,i} \sim \frac{s^m}{m!}\mu_2^{m-l}(\mu'_{1,\,1})^l = \frac{s^m}{m!\,2^l}A^{m-l}B^l \tag{143}$$

suivant (133). Mais (133) a été obtenu sans un calcul détaillé et comme la relation (143) joue un rôle très important plus loin, nous la démontrerons à part.

Prenons pour plus de simplicité une parenthèse particulière,

$$C_{l\,i} = [2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \tag{144}$$

par exemple, et calculons la valeur asymptotique de sa somme $M_{2,2,1,1,1,1,1,1}$. Le membre principal de (144) est

$$\begin{aligned}(2)(2)(1,1)(1,1)(1,1) &= \sum_{\beta_1} p_{\beta_1} z_{\beta_1}^2 \sum_{\beta_2} p_{\beta_2} z_{\beta_2}^2 \sum_{\beta_3\,\beta_4} p_{\beta_3} \Psi^{(k_4)}_{\beta_3\beta_4} z_{\beta_3} z_{\beta_4} \,\cdot \\ &\cdot \sum_{\beta_5,\,\beta_6} p_{\beta_5} \Psi^{(k_6)}_{\beta_5\beta_6} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{\beta_7,\,\beta_8} p_{\beta_7} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7\beta_8} z_{\beta_7} z_{\beta_8} \\ &= \mu_2^2 \sum_{\beta_3,\,\beta_4} p_{\beta_3} \Psi^{(k_4)}_{\beta_3\beta_4} z_{\beta_3} z_{\beta_4} \sum_{\beta_5,\,\beta_6} p_{\beta_5} \Psi^{(k_6)}_{\beta_5\beta_6} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{\beta_7,\,\beta_8} p_{\beta_7} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7\beta_8} z_{\beta_7} z_{\beta_8}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}M_{2,2,1,1,1,1,1,1} \sim \mu_2^2 &\sum_{\beta_3,\,\beta_4} p_{\beta_3} z_{\beta_3} z_{\beta_4} \sum_{k_4} \Psi^{(k_4)}_{\beta_3\beta_4} \,\cdot \\ \cdot &\sum_{\beta_5,\,\beta_6} p_{\beta_5} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{k_6} \Psi^{(k_6)}_{\beta_5\beta_6} \,\cdot \\ \cdot &\sum_{\beta_7,\,\beta_8} p_{\beta_7} z_{\beta_7} z_{\beta_8} \sum_{k_8} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7\beta_8} \,\cdot \\ \cdot &\sum_{\substack{k_1,\,k_2,\,k_3\\ k_5,\,k_7}} 1,\end{aligned} \tag{145}$$

où on doit sommer pour

$$(146)\quad\begin{cases} k_7 = 1, 2, \ldots, s - k + k_7 - 1 = s_7, \ k = k_1 + k_2 + \cdots + k_8 \\ k_5 = 1, 2, \ldots, s - k + k_7 + k_5 - 2 = s_5 \\ k_3 = 1, 2, \ldots, s - k + k_7 + k_5 + k_3 - 3 = s_3 \\ k_2 = 1, 2, \ldots, s - k + k_7 + k_5 + k_3 + k_2 - 4 = s_2 \\ k_1 = 0, 1, 2, \ldots, s - k + k_7 + k_5 + k_3 + k_2 + k_1 - 5 = s - k_4 - k_6 - k_8 - 5 = s_1 \\ k_8 = 1, 2, \ldots, s - k_4 - k_6 - 6 = s_8 \\ k_6 = 1, 2, \ldots, s - k_4 - 7 = s_6 \\ k_2 = 1, 2, \ldots, s - 8 = s_4. \end{cases}$$

Nous avons maintenant [voir (116)]

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, \\ k_5, k_7}} 1 &= \sum_{k_1=0}^{s_1} \sum_{k_2=1}^{s_2} \sum_{k_3=1}^{s_3} \sum_{k_5=1}^{s_5} \sum_{k_7=1}^{s_7} 1 = \frac{s_1(s_1+1)\ldots(s_1+4)}{5!} \\ &= \frac{(s-k_4-k_6-k_8-1)(s-k_4-k_6-k_8-2)\ldots(s-k_4-k_6-k_8-5)}{5!} \\ &= C^5_{s-k_4-k_6-k_8-1} = C^5_{s'}, \quad s' = s - k_4 - k_6 - k_8 - 1,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k_8} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7\beta_8} \sum_{k_1,\ldots} 1 &= \sum_{k_8} C^5_{s'}\, \Psi^{(k_8)}_{\beta_7\beta_8} \\ &= \sum_{g=1}^{\mu} \psi^{(g)}_{\beta_7\beta_8} \sum_{k_8=1}^{s_8} C^5_{s'} \lambda_g^{k_8}.\end{aligned}$$

Mais, en employant l'égalité (122), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k_8=1}^{s_8} C^5_{s'} \lambda_g^{k_8} &= \left| \frac{\lambda_g^{k_8}}{\lambda_g - 1}\left[C^5_{s'} - \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1}\Delta C^5_{s'} + \cdots + \left(\frac{-\lambda_g}{\lambda_g-1}\right)^5 \Delta^5 C^5_{s'}\right] + C \right|_{k_8=1}^{k_8=s_8+1} \\ &= \left| \frac{\lambda_g^{k_8}}{\lambda_g - 1}\left[C^5_{s'} + \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} C^4_{s'-1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g-1}\right)^5 C^0_{s'-5}\right] + C \right|_{k_8=1}^{k_8=s_8+1} \\ &= \frac{\lambda_g}{1-\lambda_g}\left[C^5_{s''} + \frac{\lambda_g}{\lambda_g-1} C^4_{s''-1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g-1}\right)^4 C^1_{s''-4}\right] = K(s, \lambda_g),\end{aligned}$$

où $s'' = s - k_4 - k_6 - 2$. Donc

$$\sum_{k_8=1}^{s_8} C^5_{s'} \lambda_g^{k_8} \sim \frac{\lambda_g}{1-\lambda_g} C^5_{5''}$$

et

$$\sum_{\beta_7, \beta_8} p_{\beta_7} z_{\beta_7} z_{\beta_8} \sum_{k_8} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7 \beta_8} \sum_{k_1, \dots} 1$$

$$= \sum_{\beta_7, \beta_8} p_{\beta_7} z_{\beta_7} z_{\beta_8} \sum_{g=1}^{\mu} K(s, \lambda_g)\, \psi^{(g)}_{\beta_7 \beta_8}$$

$$\sim C^5_{s''} \sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g}{1-\lambda_g} \sum_{\beta_7, \beta_8} p_{\beta_7} \psi^{(g)}_{\beta_7 \beta_8} z_{\beta_7} z_{\beta_8}$$

$$= C^5_{s''} \mu'_{1,1} = \frac{1}{2} C^5_{s''} B.$$

Par conséquent,

$$\sum_{\beta_5, \beta_6} p_{\beta_5} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{k_6} \Psi^{(k_6)}_{\beta_5 \beta_6} \sum_{\beta_7, \beta_8} p_{\beta_7} p_{\beta_8} z_{\beta_7} z_{\beta_8} \sum_{k_8} \Psi^{(k_8)}_{\beta_7 \beta_8} \sum_{k_1, \dots} 1$$

$$\sim \frac{1}{2} B \sum_{\beta_5, \beta_6} p_{\beta_5} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{k_6} C^5_{s''} \Psi^{(k_6)}_{\beta_5 \beta_6}$$

$$= \frac{1}{2} B \sum_{\beta_5, \beta_6} p_{\beta_5} z_{\beta_5} z_{\beta_6} \sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g}{1-\lambda_g} \left[C^5_{s'''} + \frac{\lambda_g}{\lambda_g - 1} C^4_{s'''-1} + \cdots \right] \psi^{(g)}_{\beta_5 \beta_6}$$

$$\sim \frac{1}{2} B C^5_{s'''} \sum_{g=1}^{\mu} \frac{\lambda_g}{1-\lambda_g} \sum_{\beta_5, \beta_6} p_{\beta_5} \psi^{(g)}_{\beta_5 \beta_6} z_{\beta_5} z_{\beta_6}$$

$$= \frac{1}{2} B C^5_{s'''} \mu'_{1,1} = \frac{1}{4} C^5_{s'''} B^2, \qquad s''' = s - k_4 - 3.$$

Enfin, tout à fait pareillement, on trouve que la valeur asymptotique de la somme multiple de la partie droite de (145) est égal à

$$\frac{1}{8} C^5_{s-4} B^3 \mu_2^2,$$

d'où

$$M_{2,2,1,1,1,1,1,1} \sim \frac{s^5}{5!\, 2^3} A^2 B^3, \tag{147}$$

comme on devrait obtenir par (143).

Il n'est pas difficile d'appliquer la méthode exposée à une parenthèse principale quelconque et de vérifier la formule (143) dans toute la généralité.

La relation (143) est valable pour $i = 1, 2, \ldots, C_m^l$ et (142) donne

$$S_l \sim \frac{C_m^l}{m!\, 2^l} s^m A^{m-l} B^l.$$

Cette égalité asymptotique a lieu pour $l = 0, 1, 2, \ldots, m$, ce qu'on voit immédiatement de la démonstration de l'égalité (147).

La quantité S_l entre dans $E(\Sigma u'_h)^{2m}$ avec le coefficient $\frac{(2m)!}{(2!)^{m-l}(1!)^{2l}}$. Mais

$$\frac{(2m)!}{2^{m-l}} S_l \sim \frac{(2m)!}{2^{m-l}} \frac{C_m^l}{m!\, 2^l} s^m A^{m-l} B^l$$
$$= C_m^l \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1) s^m A^{m-l} B^l,$$

donc

$$E\left(\sum_h u'_h\right)^{2m} \sim 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1) s^m \sum_{l=0}^{m} C_m^l A^{m-l} B^l$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1) s^m (A+B)^m;$$

la relation (136) se trouve démontrée.

L'égalité

(138) $$E\left(\sum_h u'_h\right)^{2m+1} = O(s^m)$$

se démontre maintenant sans difficulté. En effet, pour voir qu'elle est vraie il faut seulement remarquer que les parenthèses

(148) $$[m_1 m_2 \ldots m_r], \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 2m + 1,$$

s'obtiennent des parenthèses

(149) $$[m_1 m_2 \ldots m_r], \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 2m,$$

considérées plus haut, soit par l'intercalation de l'indice supplémentaire 1 soit par l'augmentation d'un des indices par 1, et dans tous ces cas l'ordre de la parenthèse transformée (149) ne peut pas s'augmenter. Donc, l'ordre des parenthèses (148) est $\leqq m$, d'où résulte (138).

Les relations (136) et (138) nous permettent démontrer très simplement le théorème suivant sur la limite des probabilités des sommes $\sum_{h=0}^{s-1} u'_h$ pour $s \to \infty$:

Théorème E. *Pour les chaînes de Markoff, dont la loi Φ est indécomposable et primitive, donc admet $\lambda_0 = 1$ comme un zéro simple et n'a pas d'autres zéros du module* 1, *la probabilité des inégalités*

$$\alpha < \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{s-1} - sa}{\sqrt{M_2}} < \beta$$

tend pour $s \to \infty$ uniformément vers la limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

quels que soient les nombres réels α et β, pourvu qu'on ait $M_2 \neq 0$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème bien connu de Tchebycheff-Markoff et des relations (136), (138) et (104).

La relation (104) est équivalente à l'égalité

$$M_2 \sim s(A + B),$$

qui est d'ailleurs un cas particulier de (136). Donc, de (136), pour $M_2 \neq 0$, on trouve

$$\lim_{s\to\infty} E\left(\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{s-1} - sa}{\sqrt{M_2}}\right)^{2m} = 1.3.5\ldots(2m-1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt,$$

et de (138)

$$\lim_{s\to\infty} E\left(\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{s-1} - sa}{\sqrt{M_2}}\right)^{2m+1} = 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m+1} e^{-t^2}\, dt.$$

Par conséquent, en vertu du théorème de Tchébycheff-Markoff, nous avons:

$$(150) \qquad \lim_{s\to\infty} P\left(\alpha < \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{s-1} - sa}{\sqrt{M_2}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

uniformément pour toutes valeurs réelles de α et β.

En se rappelant la liaison entre les quantités u_h et la variable stochastique x considérée dans n° 14 on peut identifier la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{s-1}$ avec la somme des valeurs qu'accepte x dans les épreuves numéros 0, 1, 2, ..., $s-1$. En désignant cette somme par $x_0 + x_1 + \cdots + x_{s-1}$ on peut encore écrire (150) comme il suit

$$\lim_{s\to\infty} P(\alpha \sqrt{M_2} < x_0 + x_1 + \cdots + x_{s-1} - sa < \beta \sqrt{M_2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$