SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2\operatorname{sn}^2 x(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h\right]y$$

ÉQUATION OÙ ν, ν_1, ν_2, DÉSIGNENT DES NOMBRES QUELCONQUES,

n, n_1, n_2, n_3 DES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS,

ET h UNE CONSTANTE ARBITRAIRE.

PREMIER MÉMOIRE

PAR

C^{te} de SPARRE

À LYON.

Ce mémoire a été inspiré par l'étude des beaux travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé. Toutefois les considérations dont je partirai pour obtenir l'intégrale de cette équation sont entièrement différentes de celles dont s'est servi cet illustre géomètre, et elles constituent, je crois, une méthode qui pourrait servir pour intégrer beaucoup d'autres équations différentielles linéaires du second ordre.

Introduction.

A la fin d'une note publiée dans le tome 89 du Journal de Crelle M. Hermite a fait remarquer que l'équation de Lamé est un cas particulier de l'équation suivante:

$$y'' + 2(\nu + 1)\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

qui comprend aussi comme cas particulier l'équation étudiée par M. PICARD (Comptes rendus, tome 89, page 74)

$$y'' + n\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' + ay = 0$$

lorsqu'on y fait $n = 2(\nu + 1)$.

De plus M. HERMITE fait remarquer, dans la note en question, que cette équation n'est pas seule, et qu'il faut y joindre les deux suivantes:

$$y'' + 2(\nu + 1)\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

$$y'' - 2(\nu + 1)\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} y' = [(n - \nu)(n + \nu + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

M. HERMITE suppose dans ces trois équations que ν est un nombre entier positif pouvant être nul, et n un entier au moins égal à ν, et il indique que dans ce cas leur intégrale est

$$y = cF(x) + c'F(-x)$$

$F(x)$ étant, comme pour l'équation de LAMÉ, une fonction doublement périodique de seconde espèce avec le seul pôle $x = iK'$.

D'autre part M. DARBOUX, dans une communication publiée dans les Comptes rendus à la date du 19 Juin 1882 a fait voir que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\mu(\mu + 1)}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{\mu'(\mu' + 1)}{\operatorname{cn}^2 x}\operatorname{dn}^2 x + \frac{\mu''(\mu'' + 1)}{\operatorname{dn}^2 x}k^2 \operatorname{cn}^2 x + n(n + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h\right]y$$

qui comprend aussi comme cas particulier l'équation de LAMÉ a une intégrale uniforme lorsque μ, μ', μ'' et n sont entiers, et que par suite son intégrale en vertu du beau théorème de M. PICARD s'exprime par les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

I.

L'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h\right]y$$

que j'ai indiquée en commençant, comprend comme cas particuliers, ainsi qu'il est bien facile de le voir, les trois équations de M. Hermite ainsi que celle de M. Darboux.

Nous ferons remarquer de plus que la méthode que nous allons suivre pour arriver à l'intégrale nous permettra de l'obtenir, non seulement lorsque ν, ν_1, ν_2 sont entiers et positifs mais encore lorsque ces constantes sont quelconques.

Nous avons dit que nous supposions que les constantes n, n_1, n_2, n_3 étaient des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, je ferai remarquer de suite que l'on ne nuit pas à la généralité de la question en les supposant tous positifs, car si n par exemple est négatif et égal à $-n'$, n' étant positif, le seul terme en n qui est

$$(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1)$$

devient

$$(-n' + \nu + \nu_1 + \nu_2)(-n' - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) = (n' - \nu - \nu_1 - \nu_2)(n' + \nu + \nu_1 + \nu_2 - 1)$$

On voit donc qu'on obtiendra le même résultat en supposant n positif et égal à $n' - 1$.

On verrait, bien facilement, qu'il en est de même pour les autres quantités n_1, n_2 et n_3.

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de l'équation supposer, ainsi que nous le ferons dans la suite, n, n_1, n_2 et n_3 positifs.

Voici maintenant le procédé que j'emploirai pour arriver à l'intégrale de l'équation (1).

Considérons d'abord l'équation

$$y'' - \frac{P'}{P}y' = aP^2y \tag{2}$$

où P désigne une fonction quelconque de x et a une constante également quelconque.

Posons

$$y = e^z$$

Notre équation deviendra

$$z'' + z'^2 - \frac{P'}{P}z' = aP^2$$

et l'on satisfait à cette équation en posant

$$z'^2 = aP^2$$

d'où l'on déduit

$$z' = \sqrt{a}P$$

et par suite

$$\frac{z''}{z'} = \frac{P'}{P}$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc

$$y = Ae^{\sqrt{a}\int Pdx} + Be^{-\sqrt{a}\int Pdx}$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

Posons maintenant

$$y = uz$$

u désignant une fonction arbitraire de x.

La transformée en z de l'équation (2) sera

$$z'' - \left(\frac{P'}{P} - 2\frac{u'}{u}\right)z' + \left(\frac{u''}{u} - \frac{P'}{P}\frac{u'}{u} - aP^2\right)z = 0$$

et en posant de nouveau

$$V = \frac{P}{u^2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{P'}{P} - 2\frac{u'}{u} = \frac{V'}{V}$$

notre équation deviendra.

$$z'' - \frac{V'}{V}z' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{P'^2}{P^2} - D_x\frac{P'}{P} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} + D_x\frac{V'}{V} + 2aP^2\right]z \tag{3}$$

et d'après ce qui précède l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$z = \frac{y}{u}$$

ou

$$z = \sqrt{\frac{V}{P}}\left[Ae^{\sqrt{a}\int Pdx} + Be^{-\sqrt{a}\int Pdx}\right] \tag{4}$$

C'est de l'équation (3) dont nous nous servirons pour trouver l'intégrale de l'équation (1).

Pour cela nous chercherons la partie principale du développement de l'expression

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{P'^2}{P^2} - D_x\frac{P'}{P} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} + D_x\frac{V'}{V} + 2aP^2\right] \tag{5}$$

Correspondant:

1° à un zéro ou à un infini de V;

2° à un zéro de P;

3° à un infini simple de P;

4° à un infini multiple de P.

1° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un zéro ou à un infini de V.

Soit

$$V = R(\varepsilon^m + s\varepsilon^{m+1} + \dots)$$

le développement de V relatif à un zéro ou à un infini d'ordre m; m étant positif si c'est un zéro et négatif si c'est un infini.

On en déduira

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{m + (m+1)s\varepsilon + \dots}{1 + s\varepsilon + \dots}$$

ou

$$\frac{V'}{V} = \frac{m}{\varepsilon} + s + \dots$$

ce qui donne

$$D_\varepsilon \frac{V'}{V} = -\frac{m}{\varepsilon^2} \qquad \frac{V'^2}{V^2} = \frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{2ms}{\varepsilon}$$

On a donc pour la partie principale du développement correspondant à un zéro ou à un infini d'ordre m de V

$$-\frac{1}{4}\frac{m}{\varepsilon^2}(2+m) - \frac{ms}{2\varepsilon}$$

(m étant positif pour un zéro, négatif pour un infini).

2° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un zéro de P.

Soit

$$P = N(\varepsilon^n + r\varepsilon^{n+1} + \dots)$$

le développement de P relatif à un zéro d'ordre n de P.

On aura d'une façon toute semblable pour la partie principale du développement de l'expression (5)

$$\frac{1}{4}\frac{n}{\varepsilon^2}(2+n) + \frac{nr}{2\varepsilon}$$

3° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un infini simple de P.

Soit

$$P = N\left(\frac{1}{\varepsilon} + t\right)$$

le développement correspondant de P, on aura pour la partie principale correspondante du développement de l'expression (5)

$$-\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{t}{2\varepsilon} + aN^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2t}{\varepsilon}\right)$$

c'est à dire

$$-\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}+\frac{t}{2\varepsilon}\right)(1-4aN^2)$$

4° Partie principale du développement de l'expression (5) correspondant à un infini multiple de P.

Soit le développement de P correspondant à un infini d'ordre n

$$P = N\left(\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{t_1}{\varepsilon^{n-1}}+\frac{t_2}{\varepsilon^{n-2}}+\dots\right)$$

d'où

$$P^2 = N^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n}}+\frac{2t_1}{\varepsilon^{2n-1}}+\frac{t_1^2+2t_2}{\varepsilon^{2n-2}}+\dots\right)$$

On aura par suite pour la partie principale correspondante du développement de l'expression (5)

$$\frac{n}{4\varepsilon^2}(n-2)-\frac{nt_1}{2\varepsilon}+aN^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n}}+\frac{2t_1}{\varepsilon^{2n-1}}+\frac{t_1^2+2t_2}{\varepsilon^{2n-2}}+\dots\right)$$

II.

Ceci posé nous allons comparer l'équation (1) à l'équation (3).

On voit d'abord que l'on doit poser

$$-\frac{V'}{V} = 2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}$$

d'où l'on déduit

(6) $$V = \operatorname{dn}^{2\nu}x\operatorname{cn}^{2\nu_1}x\operatorname{sn}^{2\nu_2}x$$

Nous remarquerons ensuite que le coefficient de y dans (1) n'ayant que des infinis doubles, P ne pourra admettre que des infinis simples. De plus l'équation (1) ainsi que la valeur (6) de V ne changeant pas lorsque l'on remplace x par $-x$, nous prendrons pour P une fonction doublement périodique qui ne change pas non plus lorsqu'on remplace x par $-x$. Comme d'ailleurs le coefficient de y dans (1) admet comme infinis 0, K, iK', $K + iK'$, ces quantités qui sont aussi des zéros ou des infinis de V devront être également pour P des zéros ou des infinis.

Si on considère maintenant un infini simple de P, cet infini ne figurera pas dans l'expression (5) si le résidu correspondant satisfait à la relation

$$1 - 4\alpha N^2 = 0,$$

α étant une constante arbitraire, il en résulte que l'on pourra prendre pour P des infinis simples quelconques, pourvu que les résidus correspondants soient tous égaux en valeur absolue, car alors par un choix convenable de α on pourra faire en sorte qu'aucun de ces infinis ne figure dans l'expression (5), (c'est ce que nous ferons). Nous prendrons donc pour zéros de P, 0, K, $K + iK'$ et iK'.

Les parties principales des développements du coefficient de y dans l'équation (1) pour ces quatre infinis sont

$$\frac{(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1)}{\varepsilon^2} = \frac{n_3(n_3 + 1) - \nu_2(\nu_2 + 1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1)}{\varepsilon^2} = \frac{n_2(n_2 + 1) - \nu_1(\nu_1 + 1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1)}{\varepsilon^2} = \frac{n_1(n_1 + 1) - \nu(\nu + 1)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1)(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)}{\varepsilon^2} = \frac{n(n + 1) - (\nu + \nu_1 + \nu_2)(\nu + \nu_1 + \nu_2 - 1)}{\varepsilon^2}$$

Comme d'ailleurs les termes provenant de V dans les parties principales des développements de l'expression (5) pour les mêmes infinis sont:

$$-\frac{\nu_2(\nu_2 + 1)}{\varepsilon^2}, \quad -\frac{\nu_1(\nu_1 + 1)}{\varepsilon^2}, \quad -\frac{\nu(\nu + 1)}{\varepsilon^2}, \quad \lambda - \frac{(\nu + \nu_1 + \nu_2)(\nu + \nu_1 + \nu_2 - 1)}{\varepsilon^2},$$

les termes qui devront provenir des zéros 0, K, $K + iK'$ et iK' de P seront

$$\frac{n_3(n_3 + 1)}{\varepsilon^2}, \quad \frac{n_2(n_2 + 1)}{\varepsilon^2}, \quad \frac{n_1(n_1 + 1)}{\varepsilon^2}, \quad \frac{n(n + 1)}{\varepsilon^2}.$$

En nous reportant à ce que nous avons dit, il en résulte que P devra admettre ces zéros avec les degrés de multiplicité $2n_3$, $2n_2$, $2n_1$, $2n$. Nous sommes donc amenés à prendre pour P l'expression suivante:

$$(7)\qquad P = R\frac{H^{2n_3}(x)H_1^{2n_2}(x)\Theta_1^{2n_1}(x)\Theta^{2n}(x)}{H(x-a_1)H(x+a_1)H(x-a_2)H(x+a_2)\,\ldots\, H(x-a_\beta)H(x+a_\beta)}$$

où

$$\beta = n + n_1 + n_2 + n_3$$

et où R désigne une constante arbitraire.

Les résidus de P étant supposés tous égaux en valeur absolue ou, ce qui revient au même, à cause du facteur arbitraire R, tous égaux à plus ou moins un.

Sous cette forme on reconnaît de suite que P est une fonction doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$, qui ne change pas lorsqu'on y remplace x par $-x$. Comme de plus les parties principales des développements de l'expression (5) correspondant aux infinis 0, K, $K+iK'$ et iK' ne contiendront pas de termes en $\frac{1}{\varepsilon}$, par suite de la forme prise pour P, (puisque les développements de P correspondant à ces zéros ne contiennent que des puissances paires) il en résulte que l'expression (5) et le coefficient de y dans l'équation (1) auront mêmes parties principales pour les développements relatifs aux quatre infinis 0, K, $K+iK'$ et iK'.

Si maintenant nous prenons $\alpha = \frac{1}{4}$, comme tous les résidus de P sont supposés égaux à plus ou moins un, aucune des quantités $a_1, a_2, \ldots a_\beta$ qui sont des infinis simples de P ne sera un infini pour l'expression (5), par suite cette expression et le coefficient de y dans l'équation (1) ayant mêmes infinis et mêmes parties principales pour les développements correspondants ne pourront différer que par une constante, et nous allons voir que l'on peut disposer des quantités a de manière que cette constante soit nulle.

Tous les résidus de P étant supposés égaux à l'unité en valeur absolue, et ceux qui correspondent à des valeurs de a égales et de signes contraires, étant eux-mêmes égaux et de signes contraires, on pourra écrire aussi

$$(8) \qquad P = \frac{H'(x-a_1)}{H(x-a_1)} - \frac{H'(x+a_1)}{H(x+a_1)} + \ldots + \frac{H'(x-a_\beta)}{H(x-a_\beta)} - \frac{H'(x+a_\beta)}{H(x+a_\beta)} + C$$

C désignant une constante, ce que nous écrirons de la manière suivante:

$$P = \sum_1^\beta \left[\frac{H'(x-a_i)}{H(x-a_i)} - \frac{H'(x+a_i)}{H(x+a_i)}\right] + C$$

Pour la constante C on aura en exprimant que P est nul pour x égal à 0, K, $K+iK'$ et iK'

$$(9) \qquad \frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}$$

Il faut remarquer toute fois que si l'une des quantités n_3, n_2, n_1, n était nulle l'expression correspondante de $\frac{C}{2}$ disparaîtrait. En égalant la 4^e expression de $\frac{C}{2}$ à chacune des trois autres on aura entre les quantités a les trois équations suivantes

$$\sum_1^\beta \left(\frac{H'(a_i)}{H(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0, \quad \sum_1^\beta \left(\frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0, \quad \sum_1^\beta \left(\frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} - \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}\right) = 0,$$

équations qui peuvent s'écrire ainsi

$$(10) \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn} a_i} = 0, \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{sn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{cn} a_i} = 0, \qquad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i}{\operatorname{dn} a_i} = 0.$$

(Il suffit pour passer des unes aux autres de se rappeler les expressions des dérivées logarithmiques de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.)

Il y aura maintenant à exprimer que les $2n_3 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$, que les $2n_2 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = K$, que les $2n_1 - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = K + iK'$ et enfin que les $2n - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = iK'$.

Mais l'on a

$$D_x P = \sum_1^\beta \left(D_x \frac{H'(x-a_i)}{H(x-a_i)} - D_x \frac{H'(x+a_i)}{H(x+a_i)}\right)$$

et par suite en vertu d'une relation bien connue

$$D_x P = \sum_1^\beta [k^2 \operatorname{sn}^2(x + a_i + iK') - \operatorname{sn}^2(x - a_i + iK')]$$

On conclue premièrement de cette expression que toutes les dérivées d'ordre impair de P sont nulles pour x égal à 0, K, $K + iK'$ et iK'.

Nous aurons donc seulement à écrire que les $n_3 - 1$ premières dérivées d'ordre pair de P sont nulles pour $x = 0$, les $n_2 - 1$ premières pour $x = K$, les $n_1 - 1$ premières pour $x = K + iK'$, et enfin les $n - 1$ premières également d'ordre pair pour $x = iK'$.

Cela fera donc $\beta - 4$ équations qui jointes aux trois équations (10) font en tout $\beta - 1$ équations. Mais comme il y a β quantités a il en restera une d'arbitraire, et on pourra en disposer de façon que l'expression (5) qui ne diffère que par une constante du coefficient de y dans l'équation (1) lui soit égal.

Revenons aux $\beta - 4$ équations dont nous avons parlé en dernier lieu, elles peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0, \quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_3 - 3} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0 \\
\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0, \quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_2 - 3} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0 \\
\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0, \quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n_1 - 3} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0 \\
\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2 a_i = 0, \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2 a_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n - 3} \operatorname{sn}^2 a_i = 0
\end{array}\right.$$

Mais on peut les mettre sous une forme différente qui sera en général plus avantageuse.

Considérons par exemple les équations

$$\sum_1^\beta D_{a_i}^{2s-1} \operatorname{sn}^2 a_i = 0$$

qui correspondent aux différentes valeurs de s. Celles qui correspondent aux premières valeurs de s seront:

1° pour $s = 1$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2 a_i = 2 \sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0$$

2° pour $s = 2$

$$\sum_1^\beta D_{a_i}^3 \operatorname{sn}^2 a_i = 8 \sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i [-(1 + k^2) + 3k^2 \operatorname{sn}^2 a_i] = 0$$

Cette équation devient en tenant compte de l'équation précédente

$$\sum_1^\beta \operatorname{sn}^3 a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0$$

On ferait voir bien facilement que la loi est générale, il suffirait d'établir que la dérivée d'ordre $2s-1$ de $\operatorname{sn}^2 a_i$ est égale au produit de $\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i$ par un polynome en $\operatorname{sn}^2 a_i$ de degré $s-1$. Or nous avons vérifié le fait pour les deux premières valeurs de s, et on ferait voir que si le fait est vrai pour une valeur de s il l'est aussi pour la valeur suivante.

On obtiendra donc la série des équations suivantes

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^\beta \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \\ &\sum_1^\beta \operatorname{sn}^3 a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_1^\beta \operatorname{sn}^{2n-3} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = 0 \end{aligned} \right.$$

Les autres équations se transforment d'une manière toute semblable, et en remplaçant de plus $\operatorname{sn}(a_i + K)$, $\operatorname{sn}(a_i + K + iK')$, $\operatorname{sn}(a_i + iK')$ par leurs valeurs ainsi que $\operatorname{cn}(a_i + K)$, $\operatorname{dn}(a_i + K)$, ..., on obtiendra les équations suivantes

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{dn}^3 a_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn}^3 a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{dn}^5 a_i} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn}^{2n_1-3} a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{dn}^{2n_1-1} a_i} = 0 \\
\sum_1^\beta \frac{\operatorname{dn} a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{cn}^3 a_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{dn}^3 a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{cn}^5 a_i} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{dn}^{2n_2-3} a_i \operatorname{sn} a_i}{\operatorname{cn}^{2n_2-1} a_i} = 0 \\
\sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn}^3 a_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn}^5 a_i} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{\operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn}^{2n_3-1} a_i} = 0
\end{array}\right.$$

Reste à trouver la dernière équation qui exprime que la différence constante de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1) se réduit à zéro.

Pour cela faisons $x = iK' + \varepsilon$ et égalons les valeurs des termes constants dans les développements correspondants de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1).

Si dans le coefficient de y dans l'équation (1) nous faisons $x = iK' + \varepsilon$, nous obtenons pour le terme constant du développement

$$k^2(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) + (n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) +$$
$$+ \frac{1 + k^2}{3}(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h$$

Si l'on fait $x = iK' + \varepsilon$, $\frac{P'}{P}$ devient

$$2n_3 \frac{\Theta'(\varepsilon)}{\Theta(\varepsilon)} + 2n_2 \frac{\Theta'_1(\varepsilon)}{\Theta_1(\varepsilon)} + 2n_1 \frac{H'_1(\varepsilon)}{H_1(\varepsilon)} + 2n \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} - \sum_1^\beta \left[\frac{\Theta'(\varepsilon - a_i)}{\Theta(\varepsilon - a_i)} + \frac{\Theta'(\varepsilon + a_i)}{\Theta(\varepsilon + a_i)}\right]$$

et par suite en se bornant dans le développement de $\frac{P'}{P}$ au terme en ε il sera

$$\frac{2n}{\varepsilon} - 2\left[\frac{n(1 + k^2)}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^\beta k^2 \operatorname{sn}^2 a_i\right]\varepsilon$$

On en déduit pour le terme constant dans le développement de l'expression $\frac{1}{4}\frac{P'^2}{P^2} - \frac{1}{2} D_x \frac{P'}{P}$

$$-(2n-1)\left[n\frac{1+k^2}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i\right]$$

On a ensuite

$$\frac{V'}{V} = 2\nu \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} + 2\nu_1 \frac{H'_1(x)}{H_1(x)} + 2\nu_2 \frac{H'(x)}{H(x)} - 2(\nu + \nu_1 + \nu_2)\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

et en changeant x en $iK' + \varepsilon$ on en déduit pour le développement correspondant de $\frac{V'}{V}$

$$-2\frac{\nu + \nu_1 + \nu_2}{\varepsilon} + 2\left[(\nu + \nu_1 + \nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]\varepsilon$$

et par suite pour le terme constant dans le développement de

$$-\frac{1}{4}\frac{V'^2}{V^2} + \frac{1}{2} D_x \frac{V'}{V}$$

$$(2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1)\left[(\nu + \nu_1 + \nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]$$

et comme P est nul pour $x = iK'$, on aura enfin pour le terme constant dans le développement de l'expression (5) relatif à $x = iK' + \varepsilon$

$$-(2n-1)\left[\frac{n(1+k^2)}{3} + n_2 k^2 + n_1 - \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i\right] +$$
$$+ (2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1)\left[(\nu + \nu_1 + \nu_2)\frac{1+k^2}{3} - \nu - k^2\nu_1\right]$$

En égalant cette expression à celle déjà trouvée pour le terme constant dans le développement du coefficient de y dans l'équation (1) on aura

$$(13) \qquad h = (2n-1)\sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i - (n + n_1 + \nu_1 + \nu_2)(n + n_1 - \nu_1 - \nu_2) -$$
$$- k^2(n + n_2 + \nu + \nu_2)(n + n_2 - \nu - \nu_2)$$

En faisant au lieu de $x = iK' + \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $x = K + \varepsilon$, $x = K + iK' + \varepsilon$, on obtiendra les trois autres expressions de h qui suivent:

$$
(13)\quad\left\{\begin{aligned}
h &= (2n_3-1)\sum_1^{\beta} k^2\,\mathrm{sn}^2(a_i+iK') - (n_3+n_2+\nu_1+\nu_2)(n_3+n_2-\nu_1-\nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_3+n_1+\nu+\nu_2)(n_3+n_1-\nu-\nu_2) \\
h &= (2n_2-1)\sum_1^{\beta} k^2\,\mathrm{sn}^2(a_i+K+iK') - (n_2+n_3+\nu_1+\nu_2)(n_2+n_3-\nu_1-\nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_2+n+\nu+\nu_2)(n_2+n-\nu-\nu_2) \\
h &= (2n_1-1)\sum_1^{\beta} k^2\,\mathrm{sn}^2(a_i+K) - (n_1+n+\nu_1+\nu_2)(n_1+n-\nu_1-\nu_2) - \\
&\qquad - k^2(n_1+n_3+\nu+\nu_2)(n_1+n_3-\nu-\nu_2)
\end{aligned}\right.
$$

Si l'une des quantités n était nulle, l'expression correspondante de h disparaîtrait.

Nous ferons remarquer qu'en égalant entre elles les quatre valeurs de h on obtiendrait trois équations qui sont des conséquences de celles établies précédemment.

Nous avons supposé précédemment $\alpha = \frac{1}{4}$.

On en déduit $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}$.

On aura ensuite

$$\int P dx = L\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}{H(x+a_1)H(x+a_2)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)} + Cx$$

et par suite l'intégrale générale donnée par la formule (4)

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{V}{P}}\left[Ae^{a\int Pdx} + Be^{-a\int Pdx}\right]$$

sera

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\,\mathrm{cn}^{\nu_1} x\,\mathrm{sn}^{\nu_2} x\,\frac{\sqrt{H(x-a_1)H(x+a_1)H(x-a_2)H(x+a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)H(x+a_\beta)}}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)}$$

$$\cdot\left[A\sqrt{\frac{H(x-a_1)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}{H(x+a_1)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)}}\,e^{\frac{c}{2}x} + B\sqrt{\frac{H(x+a_1)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)}{H(x-a_1)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}}\,e^{-\frac{c}{2}x}\right]$$

ce qui peut s'écrire

$$(14) \qquad \mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x - a_1)H(x - a_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, H(x - a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} + \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x + a_1)H(x + a_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, H(x + a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

où $\frac{C}{2}$ a la valeur donnée à la page (114) par les formules (9).

Les expressions (9) de $\frac{C}{2}$ supposent toute fois que les quatre quantités n, n_1, n_2 et n_3 ne sont pas nulles en même temps.

Examinons donc le cas où l'on a

$$n = n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

Dans ce cas P se réduit à une constante C_1 et par suite en vertu de la formule (4) l'intégrale générale de l'équation (1) devient (en prenant $\alpha = 1$)

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A e^{C_1 x} + B e^{-C_1 x}\right]$$

et on aura pour déterminer cette constante C_1 en fonction de h la relation

$$h = C_1^2 + (\nu_1 + \nu_2)^2 + k^2(\nu + \nu_2),$$

expression que l'on obtient comme les précédentes en égalant les termes constants dans les développements de l'expression (5) et du coefficient de y dans l'équation (1), pour $x = iK' + \varepsilon$ par exemple.

III.

Avant d'aller plus loin traitons encore les deux cas suivants:

1° $n_1 = n_2 = n_3 = 0, \qquad n = 1,$

cas qui comprend l'équation de Lamé pour $n = 1$.

L'intégrale sera

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x} \right]$$

et l'on aura pour déterminer a en fonction de h l'équation

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 a + (\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 - 1) + k^2(\nu + \nu_2 + 1)(\nu + \nu_2 - 1)$$

Si en particulier on a $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0$, ce qui correspond à l'équation de LAMÉ pour $n = 1$, on trouve

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 a - (1 + k^2)$$

ce qui est bien la valeur donnée par M. HERMITE.

2° Soit maintenant $n = n_2 = n_3 = 0 \qquad n_1 = 1$, cas qui comprend l'équation de M. PICARD pour $n = 1$.

L'intégrale générale sera

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a)}{\Theta_1(x)} e^{\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta_1(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} \right]$$

et l'on aura pour déterminer a en fonction de h la relation

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 (a + K) + (\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 - 1) + k^2(\nu + \nu_2 + 1)(\nu + \nu_2 - 1)$$

Si en particulier

$$\nu_1 = \nu_2 = 0, \qquad \nu = 1,$$

ce qui donne l'équation de M. PICARD pour $n = 1$, l'intégrale générale devient

$$A \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x} + B \frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} x}$$

et l'on a

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 (a + K) - 1 = -\operatorname{dn}^2 (a + K) = -\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 a}$$

Ce sont bien les résultats donnés par M. PICARD (ici $h = -\alpha$ le terme en y étant dans le second membre dans l'équation (1)).

Dans les deux exemples précédents nous avons pu obtenir l'expression de a en fonction de h, mais en général il n'en est pas ainsi, et nous obtiendrons seulement une équation ayant pour racines soit $\operatorname{sn}^2 a_1$, $\operatorname{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \operatorname{sn}^2 a_\beta$, soit $\operatorname{cn}^2 a_1$, $\operatorname{cn}^2 a_2, \ldots\ldots \operatorname{cn}^2 a_\beta$, soit enfin $\operatorname{dn}^2 a_1$, $\operatorname{dn}^2 a_2, \ldots\ldots \operatorname{dn}^2 a_\beta$, suivant qu'il sera plus avantageux d'obtenir l'une ou l'autre de ces trois équations.

Toute fois avant de nous occuper de la détermination de cette équation nous ferons la remarque suivante.

Si l'on a $n = n_1 = n_2 = n_3$ et si dans ce cas $\operatorname{sn}^2 a_i$ est une racine de l'équation qui a pour racines $\operatorname{sn}^2 a_1$, $\operatorname{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \operatorname{sn}^2 a_\beta$, cette équation admettera aussi les racines $\operatorname{sn}^2(a_i + K)$, $\operatorname{sn}^2(a_i + iK')$, $\operatorname{sn}^2(a_i + K + iK')$.

On peut dans ce cas, puisque $n = n_1 = n_2 = n_3$, prendre pour les équations qui déterminent les quantités a les équations (9)

$$\sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)}$$

et les équations (11)

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2 a_i = 0, \ldots\ldots, \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \operatorname{sn}^2 a_i = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0, \ldots\ldots, \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \operatorname{sn}^2(a_i + K) = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0, \ldots\ldots, \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \operatorname{sn}^2(a_i + iK') = 0$$

$$\sum_1^\beta D_{a_i} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0, \ldots\ldots, \sum_1^\beta D_{a_i}^{2n-3} \operatorname{sn}^2(a_i + K + iK') = 0$$

et l'on voit de suite que ces équations ne changent pas si l'on remplace a_i par l'une des quantités $a_i + K$, $a_i + iK'$, $a_i + K + iK'$, par suite dans ce cas le degré de l'équation pourra s'abaisser au degré $n = \frac{\beta}{4}$.

IV.

Occupons nous maintenant de déterminer cette équation, en supposant d'abord $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, hypothèse qui donnera comme cas particulier l'équation de Lamé pour n quelconque.

Posons pour ce cas

$$\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = u_i$$

et

$$\operatorname{sn}^2 a_i = x_i$$

Les équations qui déterminent les quantités a deviendront:

$$\sum_1^n u_i = 0, \quad \sum_1^n x_i u_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^n x_i^{n-2} u_i = 0$$

Si par suite on résout ces équations par rapport aux quantités u, on aura

$$\frac{u_1}{\Delta_1} = -\frac{u_2}{\Delta_2} = \ldots\ldots = (-1)^{i-1}\frac{u_i}{\Delta_i} = \ldots\ldots = (-1)^{n-1}\frac{u_n}{\Delta_n}$$

où

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots\ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_3 & \ldots\ldots & x_n \\ x_1^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots\ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots\ldots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Nous poserons de plus

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots\ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n),$$

$f(x)$ étant par suite la fonction qui, égalée à zéro, nous donnera l'équation cherchée.

Mais on aura en vertu d'un théorème connu, le théorème de VANDERMONDE

$$\varDelta = \left|\begin{array}{l} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots\ldots (x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_n - x_{n-1}) \end{array}\right.$$

$$\varDelta_1 = \left|\begin{array}{l} (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_2) \\ (x_4 - x_3)(x_5 - x_3) \ldots\ldots (x_n - x_3) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_n - x_{n-1}) \end{array}\right.$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\varDelta_n = \left|\begin{array}{l} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots\ldots (x_{n-1} - x_1) \\ (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots\ldots (x_{n-1} - x_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{n-1} - x_{n-2}) \end{array}\right.$$

On a d'ailleurs

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_n)$$
$$f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots\ldots (x_2 - x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'(x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots\ldots (x_n - x_{n-1})$$

et on en deduit

$$\Delta = (-1)^{n-1}\Delta_1 f'(x_1) = \ldots\ldots = (-1)^{n-i}\Delta_i f'(x_i) = \ldots\ldots = \Delta_n f'(x_n)$$

Par suite en remplaçant $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots \Delta_i, \ldots\ldots \Delta_n$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, les équations dont nous nous occupons deviendront

$$\lambda = u_1 f'(x_1) = u_2 f'(x_2) = \ldots\ldots = u_i f'(x_i) = \ldots\ldots = u_n f'(x_n),$$

λ désignant la valeur commune de ces expressions.

En remplaçant $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ par leur valeur, ces équations s'écriront:

$$(15) \qquad \lambda = \mathrm{sn}\, a_1 \,\mathrm{cn}\, a_1 \,\mathrm{dn}\, a_1 f'(x_1) = \mathrm{sn}\, a_2 \,\mathrm{cn}\, a_2 \,\mathrm{dn}\, a_2 f'(x_2) = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = \mathrm{sn}\, a_i \,\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i f'(x_i) = \ldots\ldots = \mathrm{sn}\, a_n \,\mathrm{cn}\, a_n \,\mathrm{dn}\, a_n f'(x_n)$$

Telles sont les équations qui doivent servir à déterminer les quantités a ou plutôt les coefficients de la fonction $f(x)$ qui, égalée à zéro, a pour racines $\mathrm{sn}^2 a_1, \mathrm{sn}^2 a_2, \ldots\ldots \mathrm{sn}^2 a_n$.

Soit

$$f(x) = x^n + a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}$$

On aura d'abord en vertu de la relation (13)

$$h = (2n-1)\sum_1^n k^2 \mathrm{sn}^2 a_i - (n + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu_1 - \nu_2) - k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)$$

(puisque dans le cas présent $n_1 = n_2 = n_3 = 0$)

$$(16) \qquad a_0 = -\sum \mathrm{sn}^2 a_i = -\frac{h + (n + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu_1 - \nu_2) + k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)}{(2n-1)k^2}$$

a_0 est donc connu en fonction de h, ν, ν_1 et ν_2 qui sont les données de la question.

Elevons les équations (15) au carré, elle deviendront

$$(17)\qquad \lambda^2 = x_1(1-x_1)(1-k^2x_1)f'^2(x_1) = x_2(1-x_2)(1-k^2x_2)f'^2(x_2) = \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = x_i(1-x_i)(1-k^2x_i)f'^2(x_i) = \ldots\ldots = x_n(1-x_n)(1-k^2x_n)f'^2(x_n)$$

Nous en déduirons le calcul des coefficients de $f(x)$ en nous basant sur la remarque suivante:

L'équation

$$x(1-x)(1-k^2x)f'^2(x) - \lambda^2 = 0$$

qui est de degré $2n+1$ admettra en vertu des équations (17) les racines $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, son premier membre sera donc divisible par $f(x)$ et l'on aura par suite

$$(18)\qquad x(1-x)(1-k^2x)f'^2(x) - \lambda^2 = f(x)f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynome entier en x de degré $n+1$.

En prenant la dérivée de l'équation (18), on en déduira

$$(19)\qquad f'(x)\Big[[1-2(1+k^2)x+3k^2x^2]f'(x) + 2[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f''(x)\Big] =$$
$$= f'(x)f_1(x) + f(x)f'_1(x)$$

Mais tous les infinis de P étant simples on doit supposer toutes les racines de $f(x)$ différentes, il en résulte que $f'(x)$ qui divise le 1[er] membre et qui est premier avec $f(x)$ doit diviser $f'_1(x)$ et comme $f'_1(x)$ est de degré n et $f'(x)$ de degré $n-1$, on aura, A et B désignant des constantes

$$(20)\qquad f'_1(x) = (Ax+B)f'(x)$$

Si par suite on pose

$$f_2(x) = [1-2(1+k^2)x+3k^2x^2]f'(x) + 2[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f''(x),$$

l'équation (19) deviendra en la divisant par $f'(x)$

$$f_2(x) = f_1(x) + (Ax+B)f(x);$$

prenant de nouveau la dérivée de cette équation et remplaçant $f'_1(x)$ par sa valeur donnée par l'équation (20) on aura

$$(21)\qquad f'_2(x) = 2(Ax+B)f'(x) + Af(x)$$

Mais en prenant $\alpha_{-1} = 1$ nous pouvons écrire

$$f(x) = \sum_{0}^{n} \alpha_{i-1} x^{n-i}$$

et par suite

$$f'(x) = \sum_{0}^{n-1} (n - i)\alpha_{i-1} x^{n-i-1}$$

$$f''(x) = \sum_{0}^{n-2} (n - i)(n - i - 1)\alpha_{i-1} x^{n-i-2}$$

et en convenant de plus de prendre $\alpha_i = 0$ pour $i < -1$ ou $i > n - 1$, nous aurons

$$f_2(x) = \sum_{-1}^{n} [\alpha_{i-2}(n - i + 1)(2n - 2i + 1) - 2(1 + k^2)\alpha_{i-1}(n - i)^2 + \\ + k^2(n - i - 1)(2n - 2i - 1)\alpha_i] x^{n-i}$$

et aussi

$$2(Ax + B)f'(x) + Af(x) = \sum_{-1}^{n-1} [A(2n - 2i - 1)\alpha_i + 2B(n - i)\alpha_{i-1}] x^{n-i-1}$$

et en identifiant alors les deux membres de l'équation (21) on aura les $n + 1$ équations suivantes qui correspondent aux valeurs -1, 0, 1, ... $n - 1$ de i

$$(n - i)[\alpha_{i-2}(n - i + 1)(2n - 2i + 1) - 2(1 + k^2)\alpha_{i-1}(n - i)^2 + \\ + k^2(n - i - 1)(2n - 2i - 1)\alpha_i] = A(2n - 2i - 1)\alpha_i + 2B(n - i)\alpha_{i-1} \tag{22}$$

Les deux premières de ces équations sont:

$$(n + 1)k^2 n(2n + 1) = A(2n + 1)$$

$$n[-2(1 + k^2)n^2 + k^2(n - 1)(2n - 1)\alpha_0] = A(2n - 1)\alpha_0 + 2Bn$$

et elles donnent

$$A = n(n + 1)k^2$$

$$B = -n^2(1 + k^2) - (2n - 1)k^2\alpha_0$$

Portant ces valeurs de A et de B dans l'équation (22) on en déduira

$$(23) \quad a_i = \frac{[i(2n-i)(1+k^2)+(2n-1)k^2a_0]2(n-i)a_{i-1}+(n-i)(n-i+1)(2n-2i+1)a_{i-2}}{k^2(2n-2i-1)(i+1)(2n-i)},$$

α_0 étant donné par la formule (16), la formule (23) permettra de calculer de proche en proche tous les coefficients de $f(x)$.

L'équation $f(x)=0$ admet pour racines $\mathrm{sn}^2 a_1$, $\mathrm{sn}^2 a_2$, ... $\mathrm{sn}^2 a_n$, mais lorsque le signe de l'une des quantités a_1, a_2, ... a_n aura été choisi arbitrairement, les signes de toutes les autres seront déterminés par ce fait que ces quantités doivent satisfaire aux relations (15)

$$\mathrm{sn}\, a_1 \,\mathrm{cn}\, a_1 \,\mathrm{dn}\, a_1 f'(\mathrm{sn}^2 a_1) = \ldots\ldots = \mathrm{sn}\, a_i \,\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i f'(\mathrm{sn}^2 a_i) = \ldots\ldots$$

L'intégrale générale étant ensuite donnée par la formule (14) où l'on fait $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ sera

$$(24) \qquad \mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_n)}{\Theta^n(x)} e^{\frac{C}{2}x} + \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_n)}{\Theta^n(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right]$$

où

$$\frac{C}{2} = \sum_1^n \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}$$

Le problème pourrait donc être considéré comme résolu puisque l'équation $f(x)=0$ ferait connaitre les quantités a au signe près, en donnant $\mathrm{sn}^2 a_1$, $\mathrm{sn}^2 a_2$, ... $\mathrm{sn}^2 a_n$ et que la concordance des signes de ces quantités est donnée par les relations (15).

Toute fois M. Hermite a fait voir dans son beau mémoire sur l'équation de Lamé que l'intégrale de cette équation pouvait être obtenue d'une façon complètement explicite et c'est ce même but que nous allons nous proposer d'obtenir, en nous inspirant des travaux de ce grand géomètre.

V

Pour cela remarquons que la fonction doublement périodique de 2^{de} espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots\ldots H(x-a_n)}{\theta^n(x)}e^{\frac{C}{2}x}$$

peut s'écrire de la manière suivante

$$(25)\quad e^{\frac{(n+1)\pi i}{2K}x}\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots\ldots H(x-a_n)H(x+\omega)}{\theta^{n+1}(x)}\frac{\theta(x)}{H(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{2K}x+\frac{C}{2}x}$$

Mais si l'on prend $\omega=\sum_1^n a_i+(n+1)iK'$, le 1^{er} facteur de l'expression (25) sera une fonction doublement périodique de x. Nous allons maintenant nous proposer de calculer les coefficients de cette fonction doublement périodique ainsi que ω et $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients connus $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$.

Toute fois nous allons d'abord obtenir l'expression de la quantité que nous avons désignée par λ^2. Nous partirons pour cela de l'équation (18)

$$[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f'^2(x)-\lambda^2=f(x)f_1(x)$$

on a d'ailleurs l'équation (20)

$$f'_1(x)=(Ax+B)f'(x)$$

Si donc on pose

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\alpha_0\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots+\alpha_{n-1}x$$

on aura, D désignant une constante

$$(26)\qquad f_1(x)=(Ax+B)f(x)-AF(x)+D$$

L'équation (18) deviendra alors

$$[x-(1+k^2)x^2+k^2x^3]f'^2(x)-\lambda^2=(Ax+B)f'(x)-AF(x)f(x)+Df(x)$$

et en égalant dans les deux membres le terme constant et le coefficient du terme en x on aura

$$-\lambda^2 = Ba_{n-1}^2 + Da_{n-1}$$

$$a_{n-2}^2 = Aa_{n-1}^2 + 2Ba_{n-1}a_{n-2} - Aa_{n-1}^2 + Da_{n-2};$$

on tire de là

$$\lambda^2 = a_{n-1}[Ba_{n-1} - a_{n-2}]$$

ou en remplaçant B par sa valeur (page 127)

$$\lambda^2 = -a_{n-1}\Big[a_{n-2} + a_{n-1}[(1+k^2)n^2 + (2n-1)k^2a_0]\Big] \tag{27}$$

Ceci fait proposons nous d'obtenir la fonction doublement périodique

$$Ae^{\frac{\pi(n+1)}{2K}ix}\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_n)H(x+\omega)}{\theta^{n+1}(x)};$$

cette fonction étant doublement périodique d'ordre $n+1$, on pourra la mettre sous la forme[1]

$$M\varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\psi(\operatorname{sn}^2 x)$$

où M désigne une constante, où $\varphi(x)$ est un polynôme entier de degré m, n étant égal à $2m$ ou à $2m-1$, et où $\psi(x)$ est un polynôme entier de degré $m-1$ si $n = 2m$, de degré $m-2$ si $n = 2m-1$ ($\psi(x)$ est donc dans tous les cas de degré $n-m-1$).

Il s'agit maintenant de déterminer les polynômes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Mais on devra avoir d'abord

$$M\varphi(\operatorname{sn}^2 a_i) - \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i\psi(\operatorname{sn}^2 a_i) = 0$$

et aussi en vertu des équations (15)

$$\lambda - \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i f'(\operatorname{sn}^2 a_i) = 0$$

On déduit de ces deux équations

$$\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = \frac{M\varphi(\operatorname{sn}^2 a_i)}{\psi(\operatorname{sn}^2 a_i)} = \frac{\lambda}{f'(\operatorname{sn}^2 a_i)}$$

---

[1] Voir traité de Calcul différentiel et intégral de LACROIX, note de M. HERMITE.

ou en prenant $M = \lambda$

$$\psi(\mathrm{sn}^2 a_i) = \varphi(\mathrm{sn}^2 a_i) f'(\mathrm{sn}^2 a_i)$$

et cette équation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $\mathrm{sn}^2 x$ qui annulent $f(x)$, on en conclue

$$\psi(x) = \varphi(x) f'(x) - \theta(x) f(x) \tag{28}$$

$\theta(x)$ devant, pour que cette équation soit possible, être de degré $m - 1$.

On pourra d'ailleurs toujours déterminer les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\theta(x)$ par les conditions que ces fonctions doivent remplir.

En effet dans tous les cas $\psi(x)$ sera de degré $n - m - 1$; on aura donc à exprimer que les coefficients des puissances de x supérieures à $n - m - 1$ sont nuls, et comme le second membre est de degré $n + m - 1$, cela fera $2m$ équations qui étant linéaires et homogènes par rapport aux coefficients inconnus permetteront de les déterminer à un facteur constant près. Les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\theta(x)$ étant connus on en déduira de suite ceux de $\psi(x)$.

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant ainsi déterminés, on aura, puisque nous avons pris $M = \lambda$, et en choisissant convenablement le facteur A,

$$\frac{Ae^{\frac{\pi(n+1)i}{2K}x} H(x - a_1) H(x - a_2) \ldots\ldots H(x - a_n) H(x + \omega)}{\theta^{n+1}(x)} = \tag{29}$$
$$= \lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

car la fonction doublement périodique d'ordre $(n + 1)$

$$\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

qui admet en vertu des relations (28) et (15) les zéros $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ admettra aussi, puisque la somme de ces infinis est $(n + 1)iK'$, le zéro $-\left(\sum a_i + (n + 1)iK'\right) = -\omega$, en vertu du théorème de M. Liouville. Les deux membres de l'équation (29) seront donc identiques, avec un choix convenable du facteur constant A.

On aura ensuite en changeant x en $-x$

$$(-1)^{n+1} Ae^{-\frac{\pi(n+1)i}{2K}x} \frac{H(x + a_1) H(x + a_2) \ldots\ldots H(x + a_n) H(x - \omega)}{\theta^{n+1}(x)} = \tag{30}$$
$$= \lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{sn}^2 x)$$

Nous allons maintenant calculer les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ et déterminer ensuite la valeur de ω.

Posons

$$(31) \quad \begin{cases} \varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_m x^m \\ \theta(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{m-1} x^{m-1} \\ \psi(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \ldots\ldots + R_{n-m-1} x^{n-m-1} \end{cases}$$

En égalant à zéro dans le second membre de l'équation (28) les coefficients des puissances de x supérieures à $n-m-1$ nous aurons les $2m$ équations suivantes

$$(32) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{i=m} (n-m-i+1) A_i a_{m+i-2} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{m+i-1} B_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=m} (n-m-i+2) A_i a_{m+i-3} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{m+i-2} B_i = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=0}^{i=m} (n-i) A_i a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_i B_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=m-1} (n-i) A_{i+1} a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-1} a_{i-1} B_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=m-2} (n-i) A_{i+2} a_{i-1} - \sum_{i=0}^{i=m-2} a_{i-1} B_{i+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ nA_m - B_{m-1} = 0 \end{cases}$$

On tirera de ces équations les valeurs de $A_0, A_1, \ldots\ldots A_m, B_0, B_1, \ldots\ldots B_{m-1}$ à un facteur constant près, et en choisissant convenablement ce facteur constant on aura pour $\varphi(x)$ et $\theta(x)$ les expressions suivantes:

$$(33)\quad \varphi(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^m & 0 & \dots & 0 \\ (n-m+1)a_{m-2} & (n-m)a_{m-1} & \dots & (n-2m+1)a_{2m-2} & (-a_{m-1}) & \dots & (-a_{2m-2}) \\ (n-m+2)a_{m-3} & (n-m+1)a_{m-2} & \dots & (n-2m+2)a_{2m-3} & (-a_{m-2}) & \dots & (-a_{2m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)a_0 & \dots & (n-m)a_{m-1} & (-a_0) & \dots & (-a_{m-1}) \\ 0 & n & \dots & (n-m+1)a_{m-2} & (-1) & \dots & (-a_{m-2}) \\ 0 & 0 & \dots & (n-m+2)a_{m-3} & 0 & \dots & (-a_{m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 & \dots & (-1) \end{vmatrix}$$

et

$$(34)\quad \theta(x) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & x & \dots & x^{m-1} \\ (n-m+1)a_{m-2} & \dots & (n-2m+1)a_{2m-2} & (-a_{m-1}) & (-a_m) & \dots & (-a_{2m-2}) \\ (n-m+2)a_{m-3} & \dots & (n-2m+2)a_{2m-3} & (-a_{m-2}) & (-a_{m-1}) & \dots & (-a_{2m-3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \dots & (n-m)a_{m-1} & (-a_0) & (-a_1) & \dots & (-a_{m-1}) \\ 0 & \dots & (n-m+1)a_{m-2} & (-1) & (-a_0) & \dots & (-a_{m-2}) \\ 0 & \dots & (n-m+2)a_{m-3} & 0 & (-1) & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & n & 0 & 0 & \dots & (-1) \end{vmatrix}$$

On en déduira ensuite l'expression des coefficients de $\psi(x)$; on aura:

$$R_s = \sum_{i=0}^{i=s} (i+1)A_{s-i}a_{n-i-2} - \sum_{i=0}^{i=s} B_{s-i}a_{n-i-1}$$

et par suite

$$(35)\qquad \psi(x) = \sum_{s=0}^{s=n-m-1} x^s \sum_{i=0}^{i=s} [(i+1)A_{s-i}a_{n-i-2} - B_{s-i}a_{n-i-1}]$$

ou bien en posant d'abord

$$\rho_0 = a_{n-2} + 2a_{n-3}x + 3a_{n-4}x^2 + \ldots\ldots + (n-m)a_{m-1}x^{n-m-1}$$
$$\rho_1 = a_{n-2}x + 2a_{n-3}x^2 + \ldots\ldots + (n-m-1)a_m x^{n-m-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_{n-m-1} = a_{n-2}x^{n-m-1}$$

puis

$$-\varsigma_0 = a_{n-1} + a_{n-2}x + \ldots\ldots + a_m x^{n-m-1}$$
$$-\varsigma_1 = a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots\ldots + a_{m+1}x^{n-m-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\varsigma_{n-m-1} = a_{n-1}x^{n-m-1}$$

$$(36)\qquad \psi(x) = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \ldots & \varsigma_0 & \varsigma_1 & \ldots \\ (n-m+1)a_{m-2} & (n-m)a_{m-1} & \ldots & -a_{m-1} & -a_m & \ldots \\ (n-m+2)a_{m-3} & (n-m+1)a_{m-2} & \ldots & -a_{m-2} & -a_{m-1} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)a_0 & \ldots & -a_0 & -a_1 & \ldots \\ 0 & n & \ldots & -1 & -a_0 & \ldots \\ \cdot & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \end{vmatrix}$$

Reportons-nous maintenant aux relations (29) et (30).

En faisant le produit de ces deux relations on en déduit

$$\lambda^2\varphi^2(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x \psi^2(\operatorname{sn}^2 x) = D(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 \omega) f(\operatorname{sn}^2 x), \tag{37}$$

D désignant une constante, puisque les deux membres sont deux fonctions périodiques ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis.

Si on remplace $\operatorname{sn}^2 x$ par x, cette équation peut s'écrire

$$\lambda^2\varphi^2(x) - [x - (1 + k^2)x^2 + k^2x^3]\psi^2(x) = D(x - \operatorname{sn}^2 \omega) f(x) \tag{38}$$

Si dans les deux membres de l'équation (38) on égale les coefficients de x et les termes constants on a

$$\begin{aligned} &2\lambda^2 A_0 A_1 - R_0^2 = D(a_{n-1} - \operatorname{sn}^2 \omega a_{n-2}) \\ &\lambda^2 A_0^2 = - D \operatorname{sn}^2 \omega a_{n-1} \end{aligned} \tag{39}$$

On en déduit

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2 a_{n-1}}{R_0^2 a_{n-1} + \lambda^2 A_0(A_0 a_{n-2} - 2A_1 a_{n-1})} \tag{40}$$

On peut aussi obtenir d'autres expressions de $\operatorname{sn}^2 \omega$, qui seront souvent plus simples, en égalant dans les deux membres de l'équation (38) les coefficients des puissances $n + 1$ de x on aura:

1° Si $n = 2m$

$$- k^2 R_{m-1}^2 = D \tag{41}$$

et en joignant à cette équation la seconde des équations (39), on en déduit pour le cas de $n = 2m$

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2}{k^2 a_{n-1} R_{m-1}^2} \tag{42}$$

2° Si $n = 2m - 1$,

on aura en égalant les coefficients des puissances $n + 1$ de x dans l'équation (38)

$$\lambda^2 A_m^2 = D \tag{43}$$

et en joignant à cette équation la seconde des équations (39), on en déduit pour le cas de $n = 2m - 1$

$$\operatorname{sn}^2 \omega = -\frac{A_0^2}{A_m^2 a_{n-1}} \tag{44}$$

La valeur de ω étant connue au signe près par la formule (40) ou par l'une des formules (42) ou (44), il faut encore fixer son signe.

Pour cela nous remarquerons qu'en vertu de l'équation (30), ω est un zéro de l'expression

$$\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x) .$$

On aura donc la relation

$$\lambda = -\operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \frac{\psi(\operatorname{sn}^2 \omega)}{\varphi(\operatorname{sn}^2 \omega)} \tag{45}$$

qui fixera la concordance des signes entre ω et λ.

Ayant obtenu l'expression de ω en fonction des coefficients connus, il nous reste à obtenir l'expression de $\frac{C}{2}$ en fonction des mêmes coefficients et de ω.

Dans le cas qui nous occupe (où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) on a

$$\frac{C}{2} = \sum_1^n \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)}$$

Si dans les relations (29) et (30) on change x en $x + iK'$, elles deviennent:

$$\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x + iK')] - \operatorname{sn}(x + iK')\operatorname{cn}(x + iK')\operatorname{dn}(x + iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x + iK')] =$$

$$= Ae^{\frac{(n+1)\pi i}{2K}x} \frac{\Theta(x - a_1)\Theta(x - a_2) \;\ldots\ldots\; \Theta(x - a_n)\Theta(x + \omega)}{H^{n+1}(x)}$$

et

$$\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x + iK')] + \operatorname{sn}(x + iK')\operatorname{cn}(x + iK')\operatorname{dn}(x + iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x + iK')] =$$

$$= (-1)^{n+1} Ae^{-\frac{(n+1)\pi i}{2K}x} \frac{\Theta(x + a_1)\Theta(x + a_2) \;\ldots\ldots\; \Theta(x + a_n)\Theta(x - \omega)}{H^{n+1}(x)}$$

et on en déduit

$$(46)\qquad \frac{\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\theta(x+a_3)\;\ldots\ldots\;\theta(x+a_n)\theta(x-\omega)}{\theta(x-a_1)\theta(x-a_2)\theta(x-a_3)\;\ldots\ldots\;\theta(x-a_n)\theta(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K}x} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] + \operatorname{sn}(x+iK')\operatorname{cn}(x+iK')\operatorname{dn}(x+iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x+iK')]}{\lambda\varphi[\operatorname{sn}^2(x+iK')] - \operatorname{sn}(x+iK')\operatorname{cn}(x+iK')\operatorname{dn}(x+iK')\psi[\operatorname{sn}^2(x+iK')]}.$$

Posons maintenant

$$\varphi_1(x) = A_m + A_{m-1}x + \ldots\ldots + A_1x^{m-1} + A_0x^m$$

$$\psi_1(x) = R_{n-m-1} + R_{n-m-2}x + \ldots\ldots + R_1x^{n-m-2} + R_0x^{n-m-1}$$

et distinguons deux cas, suivant que n est pair ou impair.

1° n pair $\qquad\qquad n = 2m$

Alors en vertu des relations

$$\operatorname{sn}^2(x+iK') = \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 x}$$

$$\operatorname{sn}(x+iK')\operatorname{cn}(x+iK')\operatorname{dn}(x+iK') = -\frac{\operatorname{cn} x\operatorname{dn} x}{k^2\operatorname{sn}^3 x}$$

on aura en multipliant haut et bas dans le 2° membre de (46) par $k^{2m}\operatorname{sn}^{2m+1}x$

$$\frac{\theta(x+a_1)\theta(x+a_2)\;\ldots\ldots\;\theta(x+a_n)\theta(x-\omega)}{\theta(x-a_1)\theta(x-a_2)\;\ldots\ldots\;\theta(x-a_n)\theta(x+\omega)}e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K}x} =$$

$$= \frac{\lambda\operatorname{sn} x\varphi_1(k^2\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{cn} x\operatorname{dn} x\psi_1(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\lambda\operatorname{sn} x\varphi_1(k^2\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{cn} x\operatorname{dn} x\psi_1(k^2\operatorname{sn}^2 x)}(-1)^{n+1};$$

prenant ensuite la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant $x = 0$, on aura

$$2\sum_1^n\frac{\theta'(a_i)}{\theta(a_i)} - 2\frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)} - \frac{(n+1)\pi i}{K} = -2\frac{\lambda\varphi_1(0)}{\psi_1(0)}$$

C'est à dire

$$(47)\qquad \frac{C}{2} - \frac{(n+1)\pi i}{2K} = \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}$$

et par suite dans le cas de n pair et égal à $2m$ on aura pour l'équation que nous considérons (où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) en vertu des formules (24), (25), (29) et (30) l'intégrale générale qui sera donnée par la formule

$$(48) \quad \operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \Bigg[A[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)] \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}\right] x} +$$

$$+ B[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)] \frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)} e^{-\left[\frac{H'(\omega)}{H(\omega)} - \frac{\lambda A_m}{R_{m-1}}\right] x} \Bigg]$$

formule dans laquelle tout est maintenant connu.

2° n impair $\qquad n = 2m - 1$

On aura en remarquant que dans ce cas $\psi(x)$ est de degré $m - 2$, et multipliant haut et bas dans le 2e membre de (46) par $k^{2m} \operatorname{sn}^{2m} x$

$$\frac{\Theta(x + a_1)\Theta(x + a_2) \; \ldots\ldots \; \Theta(x + a_n)\Theta(x - \omega)}{\Theta(x - a_1)\Theta(x - a_2) \; \ldots\ldots \; \Theta(x - a_n)\Theta(x + \omega)} e^{-\frac{(n+1)\pi i}{K} x} =$$

$$= (-1)^{(n+1)} \frac{\lambda\varphi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x) - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\lambda\varphi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi_1(k^2 \operatorname{sn}^2 x)};$$

en prenant la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant $x = 0$, on aura

$$2\sum_1^n \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} - 2\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{(n+1)\pi i}{K} = -2\frac{k^2\psi_1(0)}{\lambda\varphi_1(0)}$$

C'est à dire

$$(49) \qquad \frac{C}{2} - \frac{(n+1)\pi i}{2K} = \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{k^2 R_{m-2}}{\lambda A_m}$$

et par suite dans le cas de n impair l'intégrale générale de l'équation (1) où l'on suppose $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ c'est à dire de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{-1}{\operatorname{sn}^2 x}\nu_2(\nu_2+1) - \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}\nu_1(\nu_1+1) - \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\nu(\nu+1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h\right]y$$

sera

$$(50)\quad \operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x\left[A[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\psi(\operatorname{sn}^2 x)]\frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)}e^{\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{k^2R_{m-2}}{\lambda A_m}\right]x} +\right.$$

$$\left. + B[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\psi(\operatorname{sn}^2 x)]\frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)}e^{-\left[\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} - \frac{k^2R_{m-2}}{\lambda A_m}\right]x}\right]$$

Je ferai remarquer que le résultat auquel nous sommes arrivés pour le cas où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ s'appliquerait presque sans changement si trois quelconques des quantités n, n_1, n_2, n_3 étaient nulles, il suffirait dans les équations (12) de considérer au lieu de $\operatorname{sn}^2 a_i$ l'une des quantités $\operatorname{sn}^2(a_i + K)$, $\operatorname{sn}^2(a_i + iK')$, $\operatorname{sn}^2(a_i + K + iK')$, suivant le cas, et alors les équations qui s'appliquent au cas présent prendraient la forme de celles dont nous sommes partis pour le cas de $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Dans un prochain mémoire nous nous proposerons de résoudre pour le cas de $n_2 = n_3 = 0$ les problèmes que nous avons résolus pour le cas précédent; et nous reviendrons ensuite à l'examen du cas général.[1]

Chateau de Vallière 15 Mars 1883.

---

(1) Une grande partie des résultats auxquels nous sommes arrivés dans ce premier mémoire avait déjà été obtenu, par d'autres méthodes pour l'équation de LAMÉ.

En dehors des beaux travaux de M. HERMITE sur ce sujet, dont nous avons parlé en commençant, et de ceux qu'il avait déjà donné dans son cours lithographié de l'école Polytechnique; nous devons citer les remarquables résultats obtenus par M. BRIOSCHI et publiés dans les tomes 9 et 10 des Annali di Matematica ainsi que dans deux notes parues dans les tomes 91 et 92 des comptes rendus de l'académie des sciences de Paris.

En particulier, dans la note publiée dans le tome 92 des comptes rendus, l'éminent analyste donne une formule récurrente, analogue à la formule (23) qui permet de calculer de proche en proche les coefficients de $f(x)$. Toutefois cette formule contient quatre coefficients consécutifs de $f(x)$ tandis que la relation (23) n'en contient que trois.

Nous ferons remarquer de plus que la relation (21) dont nous avons déduit la formule (23) ne diffère pas au fond de l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait le produit de deux intégrales particulières de l'équation différentielle du second ordre, équation donnée par M. Brioschi dans le tome 9 des Annali di Matematica et antérieurement par M. Hermite, mais les méthodes employées par les deux savants géomètres ne nous auraient pas fourni les relations (15).

Or ces relations nous étaient nécessaires, premièrement pour fixer la concordance des signes entre les quantités a lorsque l'on prend l'intégrale sous sa première forme, et ensuite pour nous permettre de passer de cette forme à celle sous laquelle nous l'avons mise en dernier lieu.