ALLGEMEINE THEORIE
DER
RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

(KONFORME ABBILDUNG UND UNIFORMISIERUNG)

VON

PAUL KOEBE
IN LEIPZIG

PREISGEKRÖNT VON S. M. KÖNIG GUSTAV V.
AM 27. DEZEMBER 1920

Karl Weierstrass   *Henri Poincaré*

in memoriam

»Ab his via sternitur ad maiora»
Gauss. Riemann.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Uniformisierungstheorie, vorbereitet durch wichtige Arbeiten von Riemann, Schwarz, Schottky, Fuchs, sodann durch Klein und Poincaré in kühnem Vorstoss programmatisch entworfen im Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der automorphen Funktionen, wo die Probleme der Uniformisierung als Umkehrprobleme auftraten, hat in den letzten zwei Jahrzehnten eine definitive systematische Begründung und Verselbständigung erfahren, die ihre besondere Benennung als Uniformisierungstheorie rechtfertigt. Das Jahr 1907 brachte in einer Arbeit von POINCARÉ (Acta math. 31) und zwei Arbeiten des Verfassers (Gött. Nachr.) die Begründung des *allgemeinen Uniformisierungstheorems* der analytischen Funktionen, und weiter folgte eine Reihe von Arbeiten des Verfassers (insbesondere Math. Annalen 67, 69, 72, 75), die das ganze Uniformisierungsprogramm in eigener Gestaltung organisch entwickelten und durchführten.[1]

Die Idee der Uniformisierung, ursprünglich aus Riemannschen physikalisch-potentialtheoretischen Grundvorstellungen der Funktionentheorie hervorgewachsen, bietet sich naturgemäss auch auf dem Boden der Weierstrassischen funktionentheoretischen Grundvorstellungen dar.

Die Tatsache der Darstellbarkeit auch verzweigter Funktionselemente mittels zweier eindeutiger Potenzreihen einer Hilfsvariabeln *(lokale uniformisierende Variable)*, die von Element zu Element wechselt, legt die Frage nach solchen Veränderlichen ζ nahe, vermöge deren das ganze analytische Gebilde (z, w) mit einem Schlage in eindeutiger Parameterdarstellung $z = \varphi_1(\zeta)$, $w = \varphi_2(\zeta)$ geliefert wird, eine Darstellung, die nach einem bekannten Satze von MITTAG-LEFFLER dann immer auch durch einheitliche analytische Ausdrücke bewirkt werden kann. Als besonders bedeutsam erscheint dabei von vornherein der Fall, wo der Variabilitätsbereich des Uniformisierungsparameters ζ, wie bei den lokalen Uniformisierenden, von der Fläche eines Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, evtl. von der ganzen Ebene gebildet wird.

Diese Auffassung bringt die Forderung nach einer Begründung der Uniformisierungstheorie in Weierstrassischem Geiste mit sich. Insbesondere wird das Bestreben dahin zu gehen haben, das ganz unweierstrassische methodische Element der Randwertaufgaben der Potentialtheorie, das früher eine wesentliche Rolle spielte, auszuschliessen und an seine Stelle die Potenzreihe und die direkten komplexen Rechenprozesse treten zu lassen. In diesem Sinne hat der Verfasser zunächst im Jahre 1914 in den Sitzungsberichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften eine Voranzeige »*Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung*», datiert vom 25. Febr. 1914, veröffentlicht, deren Grundgedanke zu einem wesentlichen Teile für die vorliegende Abhandlung massgebend ist. Derselben Tendenz dient eine Folge »*Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung*», von der bisher sechs erschienen sind, I und III im Journ. f. Math., Bd. 145 und 147, II und IV in Acta math., Bd. 40 und 41, V und VI in Math. Zeitschr., Bd. 2 und 7. In diesen Arbeiten finden sich auch genauere Literatur-

[1] Ein vollständiges Verzeichnis der bisherigen Arbeiten des Verfassers findet man in »I. C. Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch» Bd. V, Verlag Chemie, Leipzig-Berlin.

hinweise sowohl betr. die weiteren einschlägigen Arbeiten des Verfassers, als auch betr. hinzukommende Arbeiten anderer Autoren, unter denen im Hinblick auf die darin enthaltenen rein funktionentheoretischen Tendenzen die Arbeiten der Herren CARATHEODORY, BIEBERBACH, MYRBERG besonders zu betonen sind.

Die besprochene neuere Tendenz ist, wie schon angedeutet, auch für die gegenwärtige, in vier Teile gegliederte Abhandlung massgebend. Die beiden ersten Teile beschränken sich auf algebraische Funktionen bzw. geschlossene Riemannsche Flächen, für welche die Hauptuniformisierenden allgemein bestimmt werden. Im ersten Teile werden hauptsächlich die *hyperelliptischen Riemannschen Flächen* behandelt. Die Hauptuniformisierenden werden hier durch Anwendung von *Iterationsmethoden* gefunden. Trotz der Verwandtschaft mit entsprechenden Teilen der Abhandlung II der erwähnten Serie »Abhandlungen» des Verfassers bestehen doch hinreichend bemerkenswerte Verschiedenheiten in der Durchführung, sodass eine Wiederaufnahme des Falles der hyperelliptischen Riemannschen Flächen angemessen und im Hinblick auf den Gesamtplan der Arbeit geboten erschien, um ihr den Charakter der Geschlossenheit und Unabhängigkeit zu verleihen. Diese Iterationsmethoden führen auch zur Bestimmung von relativ verzweigten Uniformisierenden beliebiger algebraischer Riemannscher Flächen; und eine solche, ζ_1, dient im zweiten Teile als Grundlage zur Bestimmung der Hauptuniformisierenden ζ einer beliebig gegebenen *algebraischen Funktion* $w(z)$ bzw. der zugehörenden Riemannschen Fläche F, die aus ζ_1 vermittels eines *unendlichen Produktes* gewonnen wird.

Die Iterationsmethode für einen speziellen symmetrischen Fall, sowie eine analoge Produktbildung findet sich bereits bei POINCARÉ in Acta math., Bd. 4 bzw. 31.[1] Aber dort sind nur gewissermassen hypothetische Anwendungen dieser Ideen gegeben, indem ihre Geltung auf der Basis der Existenz der betreffenden gesuchten Grössen dargetan wird. Dass schon POINCARÉ eine direkte Behandlung der Existenzsätze im Sinne solcher Ideen als Ideal erstrebt hat, wird durch Paragraph 19 seiner Abhandlung in Acta Bd. 4 und Paragraph 11 seiner Abhandlung in Acta Bd. 31 belegt.

Im dritten Teile wird die Uniformisierung *beliebiger analytischer Funktionen* bzw. *offener Riemannscher Flächen* endlicher oder unendlich hoher Zusammenhangsordnung behandelt. Nach einigen Bemerkungen betr. die Struktur der all-

---

[1] Vgl. spätere Fussnoten, pag. 57 u. 77.

gemeinsten offenen Riemannschen Flächen, insbesondere ihre Auffassung als Grenze von »*Hauptnäherungsbereichen*», wird zunächst ein Spezialfall behandelt, nämlich die Uniformisierung von »*Spezialbereichen*», worunter Bereiche verstanden werden, die aus einer endlichen Anzahl von kongruenten Quadratflächen zusammengesetzt sind. Die Gewinnung der zu einem solchen im allgemeinen mehrblättrigen Bereiche S gehörenden Hauptuniformisierenden geschieht wieder auf dem Wege über eine verzweigte Uniformisierende ζ_1 des Bereiches S, nämlich einer Uniformisierenden mit den inneren Quadrateckpunkten des Bereichs S als Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung. Um diese Grösse ζ_1 zu konstruieren, wird zunächst eine einzelne Quadratfläche unter Anwendung der Weierstrassischen Pefunktion und der Iterationsmethoden auf ein *Orthogonalkreisbogenviereck* abgebildet (Grösse ζ_2). Von ζ_2 zu ζ_1 und weiter zu »ζ über S» überzugehen, gelingt durch wiederholte unendliche Produktbildung.

Nunmehr wird die allgemeinste Riemannsche Fläche F nach Ausschluss ihrer Unendlichpunkte und Windungspunkte in eine Fläche F' verwandelt und diese als Grenze von Spezialbereichen S_n, die zugleich Hauptnäherungsbereiche für F' sind, dargestellt. Die *zu S_n gehörende Hauptuniformisierende* $\zeta^{(n)}$ geht bei dem Grenzübergang $n \to \infty$ in die *Hauptuniformisierende der Fläche F'* über, die relativ zu F in den Unendlichpunkten und Windungspunkten unendlich hohe Relativverzweigung hat. Von ihr wird der Übergang zu ζ selbst, nämlich der *Hauptuniformisierenden von F*, wieder unter Anwendung der Methode der unendlichen *Produktbildung* vollzogen.

Wie im zweiten Teile für die geschlossenen Riemannschen Flächen, wird im dritten Teile für die allgemeinsten Riemannschen Flächen im Zusammenhange der Untersuchung der Satz gewonnen, dass zu jeder Riemannschen Fläche eine eigentlich zu ihr gehörende algebraische bezw. analytische Funktion gehört, sodass die *Probleme der Uniformisierung analytischer Funktionen und beliebiger Riemannscher Flächen* von vornherein als *äquivalent* erscheinen.

Der vierte Teil ist den allgemeinen *Riemannschen Mannigfaltigkeiten* gewidmet. Die zuvor allein betrachteten analytischen Gebilde und gewöhnlichen Riemannschen Flächen erscheinen begrifflich als Spezialfälle der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zwischen dem allgemeineren Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit und dem Begriff der gewöhnlichen Riemannschen Fläche steht, die Definition der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit vermittelnd, der Begriff der *idealen Riemannschen Fläche*, worunter eine Fläche verstanden wird, die aus, allgemein zu reden, unendlich vielen verschiedenen gewöhnlichen Riemannschen Flächenstücken gebildet wird, die durch analytische *Bezugssubstitutionen* zwischen vorhandenen freien analytischen Rändern zu einer Einheit verschmolzen gedacht werden. Die eineindeutige Beziehung der Punkte einer Mannigfaltigkeit auf die Punkte einer idealen Riemannschen Fläche, in unserer unten gegebenen Grunddefinition auf die Punkte einer »*triangulierten idealen Riemannschen Fläche*», verleiht dieser Mannigfaltigkeit den Charakter als Riemannsche Mannigfaltigkeit. In ihr erscheinen nunmehr die Begriffe der Winkelbestimmung, der konformen Abbildung, der analytischen Linie, der analytischen Funktion u.s.w. unmittelbar gegeben. Auch der Begriff der *Äquivalenz zweier Riemannscher Mannigfaltigkeiten* vermöge eineindeutiger konformer Abbildung ist unmittelbar gegeben. Gegenüber der vorstehenden bequemen allgemeinen Begriffsbestimmung sei hier sogleich die Bemerkung hinzugefügt, dass bei den tatsächlich von uns zu betrachtenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten der Winkelbegriff, von Ausnahmepunkten der Mannigfaltigkeit abgesehen, a priori gegeben erscheint, sodass die Charakterisierung der Mannigfaltigkeit als Riemannsche Mannigfaltigkeit das Problem der *lokalen konformen Abbildung* involviert. Man denke etwa an räumliche Flächen, wo der Konformitätsbegriff im allgemeinen an den euklidischen Winkelbegriff zu knüpfen ist (*).

Als Hauptformen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten werden die *gewöhnlichen Riemannschen Flächen*, die *analytischen Gebilde*, die durch *Fundamentalgruppen* definierten *Fundamentalmannigfaltigkeiten* nunmehr besonders gewürdigt. Die *Fundamentaltheoreme* der Theorie drücken die fundamentalen allgemeinen *Äquivalenztatsachen* aus: Dass *jede Riemannsche Mannigfaltigkeit einer Fundamentalmannigfaltigkeit, einer gewöhnlichen Riemannschen Fläche, einem analytischen Gebilde äquivalent* ist. Die erste Äquivalenzbehauptung kommt auf die Uniformisierungsfrage für die Mannigfaltigkeit hinaus, die übrigen ergeben sich leicht im Anschluss an die Erledigung des Uniformisierungsproblems für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Der in Vorstehendem bezeichnete Hauptideengehalt des vierten Teiles ist von mir auch in einer kleinen Vorveröffentlichung mit dem Titel »*das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie*» in den Annali di mat. Ser. 3, Bd. 21 pag. 57—64 (LAGRANGE-Band, 1913) u. a. mitgeteilt worden.

Was nun die Hauptfrage der *Uniformisierung einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit* bzw. der Äquivalenz einer solchen Mannigfaltigkeit mit einer Fundamentalmannigfaltigkeit anbetrifft, so zeigt sich, dass zuvörderst der Fall der idealen Riemannschen Fläche mit *linearen Bezugssubstitutionen* fast unmittelbar auf die Betrachtung gewöhnlicher Riemannscher Flächen zurückgeführt werden kann. Für den allgemeinen Fall jedoch, wo die Mannigfaltigkeit durch eine ideale Riemannsche Fläche mit *analytischen Bezugssubstitutionen* repräsentiert gedacht werden darf, die wir in der Form eines »*analytischen Triangelsystems*» geben, wird die Tatsache benutzt, dass eine analytische Substitution durch rationale Substitutionen approximiert werden kann. Dadurch gelingt es wieder, die Untersuchung auf den Fall gewöhnlicher Riemannscher Flächen zurückzuführen. Der Vorteil, der durch das erwähnte Approximationsverfahren gewonnen wird, besteht nämlich darin, dass die rationalen Substitutionen in der ganzen Ebene erklärt sind, und dass somit eine einzelne Randbeziehung dieser Art sofort durch tatsächliche Ausübung der Substitution in die Identität verwandelt und so gewissermassen beseitigt werden kann, ein Umstand, der bei allgemeinen analytischen Substitutionen offenbar nicht vorliegt, da solche im allgemeinen nur in der Nachbarschaft der betreffenden Linien erklärt sind.

In beiden Fällen, nämlich dem Falle der idealen Riemannschen Flächen mit linearen Bezugssubstitutionen, wie im Falle der allgemeinen idealen Riemannschen Flächen mit analytischen Bezugssubstitutionen, gelangt man nach unserer Methode wieder zunächst zu einer *Uniformisierenden* ζ_1 *der Mannigfaltigkeit* bzw. der sie repräsentierenden idealen Riemannschen Fläche, nämlich einer Uniformisierenden mit Relativverzweigung unendlich hoher Ordnung in den Triangeleckpunkten. Der Übergang zur *Hauptuniformisierenden* gelingt wieder nach Anwendung der Methode der *unendlichen Produkte.*

Instruktive *Beispiele* für die beiden unterschiedenen Fälle bieten einerseits die kugelflächig begrenzten zweiseitigen Polyederflächen, andrerseits die von beliebigen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten zweiseitigen *Polyederflächen*, wobei auch das Vorkommnis von räumlichen *Ecken* und *Spitzen* bei solchen Flächen allgemein mitberücksichtigt wird. Diese Flächen können demnach stets unter Einbeziehung ihrer Eckpunkte eineindeutig konform auf gewöhnliche Riemannsche Flächen abgebildet werden.

Die Möglichkeit der Uniformisierung einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit führt zu einer allgemein, auch bei unendlich hohem Zusammenhang anzuwendenden *Typenunterscheidung* dieser Mannigfaltigkeiten. Lassen wir die Sonderfälle der elliptischen Mannigfaltigkeit (geschlossene Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 0) und der parabolischen Mannigfaltigkeiten ausser Betracht, so haben wir es immer mit *hyperbolischen Mannigfaltigkeiten* zu tun, d. h. solchen, deren zugehörende Hauptuniformisierende im Einheitskreise als *Grundbereich* variiert.

Diese Typenunterscheidung entspricht parallel laufenden Einteilungsgründen von POINCARÉ in Acta math. I, (§ 5 seiner Abhandlung »*Théorie des groupes fuchsiens*») und FRICKE in seinen »*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*», Bd. I, pag. 114—120.

Zunächst haben wir einen *ersten Typus*, bei dem der Fundamentalbereich für die Fundamentalgruppe sich nicht bis an den Einheitskreis erstreckt (*geschlossene Mannigfaltigkeiten* $p \geqq 2$); sodann einen *zweiten Typus*, bei dem der Fundamentalbereich sich bis an die Peripherie des Einheitskreises erstreckt, ohne dass jedoch die Gruppe auf dem Einheitskreise selbst noch eigentlich diskontinuierlich ist (*uneigentlich offene Riemannsche Mannigfaltigkeiten*); schliesslich den *dritten Typus*, bei dem der Fundamentalbereich sich bis an den Einheitskreis heran erstreckt und ausserdem die Fundamentalgruppe auch auf dem Einheitskreise selbst noch eigentlich diskontinuierlich ist (*eigentlich offene Riemannsche Mannigfaltigkeiten*). Die Mannigfaltigkeiten des dritten Typus sind auch dadurch charakterisierbar, dass sie eineindeutig konform auf gewöhnliche Riemannsche Flächen mit *freier* analytischer Berandung abgebildet werden können. Unter diesen Riemannschen Flächen sind die von uns als »*vollkommen*» bezeichneten orthosymmetrischen Riemannschen Flächen ausgezeichnet. Jede Mannigfaltigkeit des dritten Typus ist der einen Hälfte einer vollkommenen orthosymmetrischen Riemannschen Fläche äquivalent, desgleichen der einen Hälfte eines vollkommenen orthosymmetrischen reellen analytischen Gebildes.

Den Schluss des vierten Teiles bildet die Behandlung der Frage nach den in einer hyperbolischen Fundamentalgruppe vorkommenden *parabolischen Substitutionen*. Es zeigt sich, dass jede derselben von einer »*parabolischen* Öffnung» der Mannigfaltigkeit herrührt und dass umgekehrt jede solche Öffnung eine parabolische Umlaufssubstitution für die Fundamentalgruppe liefert.

Bei der Ausgestaltung der Arbeit wurde der Wunsch massgebend, eine möglichst in sich ruhende Arbeit zu liefern. Dementsprechend lassen wir jetzt eine Reihe zur Verwendung kommender Hilfssätze mit einer Begründung folgen. Diese Sätze finden sich bereits in früheren Abhandlungen des Verfassers.

Die häufige Heranziehung des Hilfssatzes VII (»Häufungsprinzip der analytischen Funktionen»), dessen fruchtbare, bequeme Verwendbarkeit bei den Existenzbeweisen der Abbildungs- und Uniformisierungstheorie ich seit 1908 vielfältig aufgezeigt habe, verleiht auch der vorliegenden Abhandlung einen besonderen Charakter prinzipieller Art.

Hilfssätze.

[I, II, III.]

Hilfssatz I (*Schwarzsches Lemma*): Es sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär erklärt, $|f(z)| < 1, f(0) = 0$.

Dann gilt:

$$\text{für } |z| \leqq \varrho < 1 \quad \text{ist} \quad |f(z)| \leqq \varrho,$$

$$\text{d. h. für } |z| < 1 \quad \text{ist} \quad |f(z)| \leqq |z|.$$

Beweis: $\frac{f(z)}{z}$ ist für $|z| < 1$ regulär. Für $|z| = 1 - \varepsilon$ ist $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}$, also ist auch für $|z| \leqq 1 - \varepsilon$ richtig $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Indem man ε unendlich klein werden lässt, findet sich daher: $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq 1$, d. i. $|f(z)| \leqq |z|$.

Zusatz: Das Gleichheitszeichen $|f(z)| = |z|$ kann für einen Wert $z \neq 0$ nur eintreten, wenn $f(z)$ die Form $e^{i\lambda} \cdot z$ hat, wobei λ eine reelle Konstante ist.

Beweis: Wenn $|f(z)| = |z|$ für einen speziellen Wert z ist, so hat $\frac{f(z)}{z}$ an dieser Stelle ein Maximum des absoluten Betrages, ist also eine Konstante.

Hilfssatz II: Es sei $f(z) = w$ für $|z| < 1$ regulär erklärt, $f(0) = 0$, $\Re\{f(z)\} > -a$, unter a eine positiv reelle Konstante verstanden; dann ist

$$\text{für } |z| \leqq \varrho < 1 \qquad -\frac{2a\varrho}{1+\varrho} \leqq \Re\{f(z)\} \leqq \frac{2a\varrho}{1-\varrho}, \text{ (Harnack)}$$

$$\text{d. h. für } |z| < 1 \qquad -\frac{2a|z|}{1+|z|} \leqq \Re\{f(z)\} \leqq \frac{2a|z|}{1-|z|}.$$

Beweis: Man führt durch die lineare Transformation $w = \frac{2aW}{1-W}$ die Halbebene $\Re(w) > -a$ in die W-Einheitskreisfläche in der Weise über, dass den Punkten $w = (-a, 0, \infty)$ die Punkte $W = (-1, 0, +1)$ entsprechen. Auf $W(z)$ wird dann das Schwarzsche Lemma anwendbar. Es ist für $|z| \leqq \varrho$ auch $|W| \leqq \varrho$. Der Kreisfläche $|W| \leqq \varrho$ entspricht in der w-Ebene wieder eine Kreisfläche, die zur Achse des Reellen symmetrisch ist und die Punkte $-\frac{2a\varrho}{1+\varrho}$ und $\frac{2a\varrho}{1-\varrho}$ als reelle Durchmesserendpunkte hat.

Hilfssatz III: Es sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär erklärt, $f(0) = 1$, $|f(z)| > \alpha$, unter α eine positiv reelle Konstante $0 < \alpha < 1$ verstanden.

Dann gilt:

$$\text{für } |z| < \varrho < 1 \qquad |f(z)| < e^{-\frac{2 \log \alpha \, \varrho}{1-\varrho}},$$

$$\text{d. i. allgemein} \qquad |f(z)| < e^{-\frac{2 \log \alpha \, |z|}{1-|z|}}$$

Beweis: Die Funktion $\log f(z)$ genügt den Voraussetzungen des Hilfssatzes II bei $\log \alpha = -a$.

[IV, V, VI.]

Hilfssatz IV: Eine eineindeutige konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ auf sich selbst kann nur durch eine lineare Funktion von z vermittelt werden. (Riemann, Schwarz, Poincaré.)

Beweis: Zunächst kann man durch lineare Hilfstransformation auf den Fall kommen, wo der Nullpunkt sich selbst entspricht. In diesem Falle hat man aber für die Funktion $f(z)$ nach dem Schwarzschen Lemma $|f(z)| \leqq |z|$ und bei Anwendung des Lemmas auf die inverse Funktion $|z| \leqq |f(z)|$. Dann muss $|f(z)| = |z|$ sein, also nach dem Zusatz zu I $f(z) = e^{\lambda i} . z$.

Hilfssatz V: Es sei $f(z)$ von der Form $\frac{1}{z} + \varphi(z)$, $\varphi(z)$ regulär erklärt für $|z| < 1$, $\varphi(0) = 0$. Es sei ferner die Grösse $M_\varrho = \underset{|z|=\varrho}{\operatorname{Max}} |f(z)|$ im Intervall $0 < \varrho < 1$ bei abnehmendem ϱ zunehmend. Dann gilt

$$M_\varrho < \frac{5}{\varrho}.$$

Beweis: Wir bezeichnen mit m_ϱ die Grösse $\underset{|z|=\varrho}{\operatorname{Max}} |\varphi(z)| = \underset{|z| \leqq \varrho}{\operatorname{Max}} |\varphi(z)|$. Es ist

$$M_{\varrho/2} \leqq \frac{1}{\varrho/2} + m_{\varrho/2}.$$

Nach dem Schwarzschen Lemma ist $m_{\varrho/2} \leqq \frac{1}{2} m_\varrho$. Wegen $\varphi(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ ist weiter $m_\varrho \leqq \frac{1}{\varrho} + M_\varrho$. Also findet sich

$$M_{\varrho/2} \leqq \frac{2}{\varrho} + \frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{2} M_\varrho.$$

Nun ist nach Voraussetzung $M_{\varrho/2} > M_\varrho$; daher wird $M_\varrho < \frac{5}{\varrho}$.

Hilfssatz VI: Es sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär erklärt, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, im übrigen $f(z)$ schlicht abbildend (d. h. keinen Wert öfter als einmal annehmend); $f(z)$ braucht dabei im Bereich $|z| < 1$ nicht beschränkt zu sein. Dann gilt

$$\text{für } |z| < \varrho < 1 \quad \frac{1}{10}\varrho < |f(z)| < \varrho \cdot 10^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}},$$

$$\text{d. h. für } |z| < 1 \quad \frac{1}{10}|z| < |f(z)| < |z| \, 10^{\frac{2|z|}{1-|z|}}.$$

Beweis: Die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ hat die Form $\frac{1}{z} + c + \varphi(z)$, wobei $\varphi(z)$ für $|z| < 1$ regulär, $\varphi(0) = 0$, c eine von der Wahl der Funktion abhängende Konstante ist. Wir bezeichnen $\frac{1}{f(z)} - c$ mit $\psi(z)$ und bemerken, dass $\psi(z)$ offenbar auch eine schlichte Abbildung der z-Einheitskreisfläche leistet. Auf $\psi(z)$ treffen daher die Voraussetzungen des Hilfssatzes V zu, sodass wird $\underset{|z|=\varrho}{\text{Max}} |\psi(z)| < \frac{5}{\varrho}$. Daraus folgt für die Maximalschwankung der Funktion $\psi(z)$ auf dem Kreise $|z| = \varrho$, dass diese $< \frac{10}{\varrho}$ ist. Dasselbe ist dann auch für die Funktion $\psi(z) + c = \frac{1}{f(z)}$ richtig. Die Punkte $\frac{1}{f(z)}$, die dem Kreise $|z| = \varrho$ entsprechen, liegen aber infolge der über $f(z)$ gemachten Abbildungsvoraussetzung auf einer den Nullpunkt umschliessenden doppelpunktfreien Linie. Daher gilt auch $\left|\frac{1}{f(z)}\right|_{|z|=\varrho} < \frac{10}{\varrho}$; mithin $|f(z)|_{|z|=\varrho} > \frac{1}{10}\varrho$, allgemein $|f(z)| > \frac{1}{10}|z|$.

Auf die Funktion $\frac{f(z)}{z}$ treffen jetzt die Voraussetzungen des Satzes III bei $\alpha = \frac{1}{10}$ zu, daher $|f(z)| < |z| \cdot 10^{\frac{2|z|}{1-|z|}}$.

[VII. VIII.]

Hilfssatz VII. (*Häufungsprinzip für analytische Funktionen*): Es seien im Gebiete $|z| < R$ unendlich viele reguläre Funktionen

$$F_1(z),\ F_2(z),\ F_3(z), \ldots$$

gegeben, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben. Dann lässt sich aus der Reihe der Indexwerte 1, 2, 3, ... eine unendliche Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ herausgreifen, so dass die Funktionenfolge

$$F_{n_1}(z),\ F_{n_2}(z),\ F_{n_3}(z), \ldots$$

innerhalb der Kreisfläche $|z| < R$, präziser gesagt, in jedem Kreise $|z| < \varrho < R$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $F(z)$ konvergiert (MONTEL).[1]

Ein der von uns hier vertretenen potenzreihentheoretischen Auffassung angepasster Beweis ist der folgende.

Wir nehmen der Einfachheit der Schreibweise halber an, dass $R = 1$ und $M = 1$ sei. Wir erreichen dies jedenfalls stets durch lineare Transformation der beiden Variablen. Für die Funktionen $F_\alpha(z)$ haben wir nun reguläre Potenzreihen:

$$F_\alpha(z) = \mathfrak{P}_\alpha(z) = a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)} z + a_2^{(\alpha)} z^2 + \cdots,$$

in denen die Koeffizienten der Beziehung genügen

$$|a_\nu^{(\alpha)}| \leqq 1\,.$$

Wir bestimmen aus der Folge aller α, d. i. aus der natürlichen Zahlenreihe, eine Teilfolge

$$(0) \qquad 1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \cdots,$$

daraus eine neue Teilfolge

$$(1) \qquad 1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3' < \alpha_4' < \cdots,$$

daraus wieder eine neue Teilfolge

$$(2) \qquad 1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3'' < \alpha_4'' < \cdots$$

und so fort, indem wir dafür sorgen, dass

für die Indexfolge (0) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_0^{(\alpha)} = a_0^*$ existiert,

für die Indexfolge (1) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_1^{(\alpha)} = a_1^*$ existiert,

für die Indexfolge (2) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_2^{(\alpha)} = a_2^*$ existiert u.s.w.

[1] Ich selbst habe mich vielfach dieses Satzes bedient, zuerst in der Note »Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, dritte Mitteilung» in Gött. Nachr., 1908. Früher findet sich der Satz bei MONTEL in der Abhandlung »Sur les suites infinies de fonctions», Ann. Ec. Norm. (3) 24 (1907).

Die resultierende Folge

(*) $$1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3'' < \alpha_4''' < \cdots$$

ist eine Teilfolge jeder der Folgen (0), (1), (2), ... Für diese resultierende Folge existieren daher sämtliche oben genannten Limites. Wir behaupten nun, dass

$$a_0^* + a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \cdots = \mathfrak{P}_*(z)$$

für $|z| < 1$ eine reguläre Potenzreihe ist, die sich im Sinne gleichmässiger Konvergenz als Limes darstellt:

$$\lim_{\alpha=\infty} \mathfrak{P}_\alpha(z) = \mathfrak{P}_*(z) \qquad \text{für die Indexfolge (*).}$$

Da die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}_*(z)$ sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als oder gleich 1 sind, so ist die Reihe $\mathfrak{P}_*(z)$ für $|z| < 1$ sicher gleichmässig konvergent. Aus der Definition der Koeffizienten geht weiter sofort hervor, dass der $\varkappa$-te Abschnitt dieser Potenzreihe im Sinne gleichmässiger Konvergenz der Limes von den $\varkappa$-ten Abschnitten der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\alpha(z)$ für die Indexfolge (*) ist, d. i.

$$\lim_{\alpha=\infty} \mathfrak{P}_{\alpha,\varkappa}(z) = \mathfrak{P}_{*,\varkappa}(z) \qquad \text{für die Indexfolge (*).}$$

Was nun die Restsummen $R_{\alpha,\varkappa}$ und $R_{*,\varkappa}$ der zugehörenden Potenzreihen anbetrifft, so gilt für diese im Kreise $|z| < \varrho < 1$

$$\left.\begin{matrix} |R_{\alpha,\varkappa}| \\ |R_{*,\varkappa}| \end{matrix}\right\} < \varrho^\varkappa + \varrho^{\varkappa+1} + \varrho^{\varkappa+2} + \cdots = \frac{\varrho^\varkappa}{1-\varrho}.$$

Diese werden also bei genügend grosser Wahl von $\varkappa$ beliebig klein, woraus die aufgestellte Behauptung folgt.

Aus dem hiermit vollständig bewiesenen Konvergenzprinzip folgern wir jetzt einen zweiten Konvergenzsatz.

Hilfssatz VIII: Es seien $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, ... unendlich viele für $|z| < R$ regulär erklärte analytische Funktionen, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben, welche ferner die Eigenschaft besitzen, für einen bestimmten der Bedingung $\varrho < R$ genügenden Wert ϱ eine gleichmässig konvergente Folge im Gebiete $|z| \leqq \varrho$ darzustellen, so dass

$$\lim_{n=\infty} F_n(z) = F(z) \qquad \text{für } |z| \leqq \varrho \text{ existiert.}$$

Dann gilt vorstehende Gleichung im Sinne gleichmässiger Konvergenz auch für das ganze Innere der Kreisfläche $|z| < R$; d. h. die unendliche Folge ist für jeden

Teilbereich $|z| \leqq \varrho' < R$ gleichmässig konvergent, und es existiert damit zugleich die Grenzfunktion $F(z)$ als reguläre analytische Funktion im ganzen Bereiche $|z| < R$. (STIELTJES.)

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir wieder an, dass $M = 1$ und $R = 1$ sei. Nach dem vorangegangenen Beweise genügt es darzutun, dass unter den bestehenden Voraussetzungen die den darstellenden Potenzreihen der Funktionen $F_n(z)$ entnommenen Koeffizienten von $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots$ einzeln konvergieren. Dies aber ergibt sich aus der vorausgesetzten Konvergenz der Funktionen $F_n(z)$ im Kreise $|z| < \varrho$ folgendermassen:

Zunächst müssen die ersten Koeffizienten $a_0^{(n)}$ der Entwicklungen $\mathfrak{P}_n(z)$ eine konvergente Folge bilden, weil sie die Werte der Funktionen $F_n(z)$ im Nullpunkte darstellen. Nunmehr ist klar, dass auch die Funktionen

$$\frac{\mathfrak{P}_n(z) - a_0^{(n)}}{z} = \overline{F}_n(z) = \overline{\mathfrak{P}}_n(z)$$

auf dem Kreise $|z| = \varrho$, daher auch innerhalb dieses Kreises gleichmässig konvergieren. Ihre ersten Koeffizienten sind identisch mit den zweiten Koeffizienten $a_1^{(n)}$ der Reihen $\mathfrak{P}_n(z)$, die demnach auch eine konvergente Folge bilden. Hieraus ergibt sich weiter die gleichmässige Konvergenz der Funktionen

$$\frac{\mathfrak{P}_n(z) - (a_0^{(n)} - a_1^{(n)} z)}{z^2} = \overline{\overline{F}}_n(z) = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_n(z),$$

deren Anfangskoeffizienten mit den Koeffizienten $a_2^{(n)}$ identisch sind usw.[1]

ERSTER TEIL.

Uniformisierung algebraischer Funktionen und Fundamentalabbildung geschlossener Riemannscher Flächen in besonderen Fällen.

1. *Begriff der Hauptuniformisierenden ζ einer algebraischen Funktion $w(z)$.* Es sei $w(z)$ eine algebraische Funktion der komplexen Variablen z, F die zu dieser Funktion gehörende Riemannsche Fläche. Die Umgebung einer einzelnen Stelle (z_0, w_0) lässt sich dann bekanntlich unter Einführung einer Hilfsveränderlichen τ von der Form $z - z_0$ oder $\sqrt[k]{z - z_0}$ oder $\frac{1}{z}$, $\sqrt[k]{\frac{1}{z}}$ mit Hilfe einer Potenzreihe

[1] Die Beweisführung der Sätze VII und VIII ist der Abhandlung V der eingangs erwähnten Serie »Abhandlungen« wörtlich entnommen. Zu VII s. auch MONTEL l. c.

$w = \mathfrak{P}_2(\tau)$ zur Darstellung bringen, wobei $\mathfrak{P}_2(\tau)$ im allgemeinen nur Glieder mit ganzzahligen positiven Potenzexponenten enthält, im besonderen auch endlich viele Glieder mit negativen ganzzahligen Exponenten enthalten kann. Der Exponent k bezeichnet die der betreffenden Stelle zukommende *Verzweigungszahl* der Funktion $w(z)$. Da auch z selbst durch τ analog ausgedrückt werden kann, ergibt sich eine *lokale Uniformisierung* für die Umgebung der Stelle (z_0, w_0) in der Gestalt

$$z = \mathfrak{P}_1(\tau), \quad w = \mathfrak{P}_2(\tau). \tag{1}$$

Das Wesen dieser lokalen Uniformisierung kommt in der Eigenschaft der Grösse $\tau \equiv \tau(z, w)$ zum Ausdruck, eine gewisse Umgebung der Stelle (z_0, w_0) des Gebildes (z, w) eineindeutig auf die Umgebung der Stelle $\tau = 0$ zu übertragen. Die allgemeinste derartige der Stelle (z_0, w_0) zukommende lokale Uniformisierende τ' ist mit τ durch den Ansatz einer beliebigen konvergenten gewöhnlichen Potenzreihe

$$\tau' = \alpha\tau + \beta\tau^2 + \cdots \tag{2}$$

verknüpft, wobei nur α der Bedingung $\alpha \neq 0$ gemäss gewählt sein muss.

Die so definierten lokalen Uniformisierenden besitzen an der Stelle (z_0, w_0) relativ zum Gebilde (z, w) *keine Relativverzweigung*. Im Folgenden werden auch uniformisierende Variablen *mit Relativverzweigung* mittelbar eine Rolle spielen. Eine lokale Uniformisierende mit Relativverzweigung leistet eine eineindeutige konforme Abbildung eines relativ zur Riemannschen Fläche F konstruierten Windungsflächenstückes auf ein schlichtes Gebiet. Bezeichnen wir sie mit τ'' und lassen dem Punkt (z_0, w_0) als Windungspunkt wiederum den Nullpunkt entsprechen, so gelten ebenfalls Darstellungsweisen der Form (1). Ist λ die *Relativverzweigungszahl*, so wird die allgemeinste derartige Grösse aus der Grösse τ ohne Relativverzweigung offenbar in der Form

$$\tau'' = \alpha\sqrt[\lambda]{\tau} + \beta(\sqrt[\lambda]{\tau})^2 + \cdots \tag{3}$$

gewonnen, wobei wieder $\alpha \neq 0$ sein muss. Besonders hervorgehoben sei noch der Fall $\lambda = \infty$, in welchem Falle der Ansatz (3) ungültig ist. Dann verlangen wir die eineindeutige Abbildung eines gewissen relativen Windungsflächenstückes unendlich hoher Ordnung, definiert durch eine Beziehung der Form $|z - z_0| < \varrho$ bzw. $|z| > \frac{1}{\varrho}$, auf ein schlichtes Gebiet. Von der Bedingung, dass der Stelle

(z_0, w_0) der Punkt $\tau'' = 0$ entsprechen solle, sehen wir dann zweckmässig ab, weil das Bild des Punktes (z_0, w_0) selbst jetzt kein innerer Punkt des τ''-Gebietes wird. Auch bei den früher definierten lokalen uniformisierenden Variablen ist die Bedingung des Verschwindens der Variablen im Punkte (z_0, w_0) nicht als wesentlich zu betrachten. Vielmehr werden wir auch jede lineare Funktion solcher Grössen als lokale Uniformisierende bezeichnen. Das Bild des Punktes (z_0, w_0) ist bei endlichem λ als innerer Punkt des Bildgebietes zu betrachten.

Die letzterwähnte erweiterte Auffassung wird wesentlich, wenn wir nunmehr in ganz naturgemässer Vertiefung der Fragestellung vom Begriff der lokalen uniformisierenden Variablen zum Begriff der uniformisierenden Variablen des Gebildes (z, w) schlechthin (*Hauptuniformisierende des Gebildes* (z, w)) übergehen. Darunter werden wir eine Grösse $\zeta(z, w)$ verstehen, die über das ganze Gebilde hin ohne Beschränkung und ohne Relativverzweigung analytisch fortgesetzt werden kann, die ferner für jede Stelle des Gebildes in allen ihren Relativzweigen den Charakter einer lokalen uniformisierenden Variablen wahrt, darüber hinaus die weitere wesentliche Eigenschaft besitzt, dass sie überhaupt keinen Wert mehr als einmal annimmt (die letztere Bedingung bedeutet offenbar nichts anderes als dies, dass die Grössen z und w in dem ganzen von der Variablen ζ vermöge der analytischen Fortsetzung der Grösse $\zeta(z, w)$ gewonnenen Wertegebiet eindeutige analytische Funktionen sein sollen), schliesslich noch so normiert ist, dass das gedachte ζ-Wertegebiet entweder von der *Vollebene*, d. i. der ganzen Ebene incl. des unendlich fernen Punktes (*elliptischer Fall*) oder von der *punktierten Ebene*, d. i. der ganzen Ebene excl. des unendlich fernen Punktes (*parabolischer Fall*) oder von dem Innern der *Einheitskreisfläche* gebildet wird (*hyperbolischer Fall*). Entsprechend ist der Begriff der *relativ verzweigten Uniformisierenden des Gebildes* (z, w) zu fassen, wobei dann die Punkte der Relativverzweigung und die relativen Verzweigungszahlen vorzugeben sind.

Für das Gebilde $w = z$ sind z und w selbst Hauptuniformisierende, während $\sqrt[\lambda]{z}$ und $\log z$ Uniformisierende mit Relativverzweigung sind. Für das Gebilde $z^2 + w^2 = 1$ ist $\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ eine Hauptuniformisierende, hingegen $\arcsin z$ eine solche mit Relativverzweigung, deren relative Verzweigungspunkte die beiden unendlich fernen Punkte der zur Funktion $w(z) = \sqrt{1 - z^2}$ gehörenden Riemannschen Fläche sind, nämlich relative Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung.

Treten wir in die allgemeine Erörterung ein, so bemerken wir zunächst, dass der oben als *elliptisch* bezeichnete Fall nur dann eintreten kann, wenn der

Rang ϱ des Gebildes (z, w) gleich o ist. Die Funktion $\zeta(z, w)$ könnte nämlich in einem solchen Falle offenbar nur endlich-vieldeutig sein. Je zwei Zweige der Funktion nun würden durch eine analytische Transformation zusammenhängen, die sich in der ζ-Ebene als eine relativ unverzweigte und infolgedessen eineindeutige Beziehung der Vollebene auf sich selbst darstellen würde. Sie wäre also eine lineare Transformation. Eine solche hat aber immer einen Fixpunkt. Darnach würde man finden, dass die Funktion $\zeta(z, w)$ in zweien ihrer Zweige an einer gewissen Stelle des Gebildes einen und denselben Wert annimmt, im Widerspruch mit ihrer Definition als Hauptuniformisierende. Somit muss die Grösse $\zeta(z, w)$ eine über dem Gebilde (z, w) eindeutige Funktion sein. Als solche muss sie eine rationale Funktion der Grössen z und w sein, die nur eine Unendlichkeitsstelle und zwar erster Ordnung hat. Das Gebilde (z, w) hat sonach den Rang $\varrho = o$. Für die Gebilde (z, w) vom Range $\varrho = o$ hat man tatsächlich die Hauptuniformisierenden unmittelbar in denjenigen Funktionen des Körpers der rationalen Funktionen von (z, w), die nur an einer Stelle und zwar von genau erster Ordnung unendlich werden. Alle diese Grössen gehen durch lineare Transformationen aus einer beliebigen unter ihnen hervor.

Ähnlich erledigt sich der *parabolische* Fall von vornherein. In diesem Falle muss die Grösse $\zeta(z, w)$ notwendig unendlich-vieldeutig sein, weil bei Endlichvieldeutigkeit das Wertegebiet offenbar von der Vollebene gebildet werden müsste. Der Zusammenhang zweier Zweige ζ und ζ' der Grösse $\zeta(z, w)$ wird sich nun als eine eineindeutige Abbildung der punktierten Ebene auf sich darstellen, wobei kein endlicher Fixpunkt vorkommen darf. Die Eineindeutigkeit der Abbildung dieser Ebene auf sich selbst hat zur Folge, dass dem Unendlichen notwendig das Unendliche stetig entsprechen muss. Die Grösse $\frac{1}{\zeta'}$ als Funktion der Grösse ζ hat nun die Eigenschaft, im Endlichen einen Pol erster Ordnung zu besitzen und im Unendlichen in den Wert o überzugehen. Danach ist sie und also auch ζ' selbst eine lineare Funktion von ζ. Letztere lineare Funktion muss eine ganze lineare Funktion sein, die ausserdem keinen endlichen Fixpunkt haben darf. Sie muss somit, geometrisch gesprochen, eine *Parallelverschiebung* der Ebene darstellen. Bezeichnen wir mit $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ die Gesamtheit der unendlich vielen Zweige, so gehen also diese aus ζ alle durch Parallelverschiebungen hervor. Die betreffenden Parallelverschiebungsgrössen in ihrer Gesamtheit haben die Eigenschaft, in Summe und Differenz je zweier wieder eine Verschiebungsgrösse der Gesamtheit zu liefern. Es können ferner nicht beliebig kleine solche

Verschiebungsgrössen vorkommen. Sie bilden daher ein Gitter, das nun entweder aus nur einer oder aus zwei Grundverschiebungsgrössen nach dem Prinzip der Vervielfältigung und Zusammensetzung hervorgeht. Der erste Fall ist aber nicht möglich. Denn, wenn etwa 2ω primitive Verschiebungsgrösse wäre, so würde die Grösse $e^{\frac{\zeta \pi i}{\omega}}$ relativ zum Gebilde (z, w) eindeutig sein und eine schlichte Abbildung der geschlossenen Fläche auf die in 0 und ∞ punktierte und insofern offene Ebene leisten; was offenbar undenkbar ist. Wir wählen nun ein primitives Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ aus und bilden die beiden Grössen

$$\wp(\zeta \,|\, \omega, \omega') = Z, \quad \wp'(\zeta \,|\, \omega, \omega') = W,$$

zwischen denen die Gleichung

$$W^2 = 4 Z^3 - g_2 Z - g_3$$

besteht. Dann bemerken wir, dass die beiden Gebilde (z, w) und (Z, W) eineindeutig, also birational aufeinander bezogen sind. Das Gebilde (z, w) ist daher vom selben Range wie (Z, W), d. h. vom Range 1. Tatsächlich liefert das elliptische Integral erster Art die verlangte Hauptuniformisierende des Gebildes (z, w), wenn dies Gebilde vom Range 1 ist; (vgl. Nummer 3 u. 8 der Abhandlung).

Nach dem Vorstehenden ist nunmehr sicher, dass der *hyperbolische Fall im allgemeinen eintreten muss, nämlich für alle algebraischen Gebilde vom Range* $\varrho \geqq 2$.

Auch im hyperbolischen Falle erkennen wir von vornherein, dass die Grösse ζ durch ihre Eigenschaften bis auf eine lineare Transformation, die jetzt das Einheitskreisinnere in sich überführt, völlig bestimmt ist. Nehmen wir in der Tat zwei Grössen ζ und ζ' von den verlangten Eigenschaften an, so stellt sich die Beziehung zwischen ζ und ζ' als eine unverzweigte und folglich eineindeutige Beziehung des Kreisinneren auf sich selbst dar, wobei der Rand ausser Betracht bleibt. Eine solche Beziehung ist aber linear (Hilfssatz IV).

Zum Schluss dieser Nummer merken wir als Ergebnis der vorhergehenden Betrachtungen den Satz an *(Unitätssatz)*, dass die problematische Hauptuniformisierende $\zeta(z)$ im Falle $\varrho = 0$ bis auf eine beliebige lineare Transformation, im Falle $\varrho = 1$ bis auf eine beliebige ganze lineare, im Falle $\varrho \geqq 2$ bis auf eine beliebige den Einheitskreis in sich überführende lineare Transformation bestimmt ist. Darin ist zugleich der weitere Satz enthalten, dass die relativen Zweige der Uniformisierenden $\zeta(z, w)$ durch lineare Transformationen miteinander verknüpft sind. Diese Transformationen können innerhalb des Wertegebietes der Variablen ζ niemals einen Fixpunkt haben.

2. *Begriff der Hauptuniformisierenden ζ einer geschlossenen Riemannschen Fläche F. Äquivalenz mit dem Begriff der Hauptuniformisierenden einer algebraischen Funktion.* Die zur Funktion $w(z)$ gehörende Riemannsche Fläche F besitzt ein *Geschlecht* p, welches in bekannter Weise als die Maximalzahl der auf der Fläche nach einander ausführbaren, die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitte definiert wird. Diese Zahl p wird, wenn m die Blätterzahl, w die Anzahl der Windungspunkte bezeichnet, wobei ein ν-blättriger Windungspunkt als $\nu-1$ einfache Windungspunkte zu zählen ist, durch die Riemannsche Formel

$$w-2m=2p-2$$

bestimmt. Diese Zahl p stimmt bekanntlich mit der Zahl ϱ des Ausgangsgebildes (z, w) überein. Es ist nämlich ϱ definierbar durch die Gesamtordnung eines beliebigen Differentials $dW=R(z,w)\,dz$ des durch (z,w) definierten Körpers gemäss der Formel

$$\Sigma[dW]=2\varrho-2,$$

das soll heissen: Die Summe aller Ordnungszahlen des Verschwindens vermindert um die Summe aller Ordnungszahlen des Unendlichwerdens des Differentials ist gleich $2\varrho-2$. Wendet man diese Formel auf die Grösse dz an, dieses Differential als Differential des Körpers betrachtet, so findet man

$$w-2m=2\varrho-2,$$

also durch Vergleichung mit der Riemannschen Formel die Übereinstimmung: $\varrho=p$.

Wir denken jetzt die Fläche F *ursprünglich* gegeben, lassen also die Existenz einer zugehörenden algebraischen Funktion $w(z)$ zunächst offen. Dann tritt an Stelle des Uniformisierungsproblems der Nummer 1 ein Abbildungsproblem, nämlich das Problem der *Fundamentalabbildung (Uniformisierung)* der Fläche F, worunter wir die Bestimmung einer relativ zu F zu erklärenden, überallhin mit dem Charakter algebraischer Funktionen und zwar ohne Relativverzweigung fortsetzbaren Funktion $\zeta(z)$ verstehen, die keinen Wert mehr als einmal annimmt, und eine Abbildung entweder auf die Vollebene (*elliptischer Fall*), oder auf die im Unendlichen punktierte Ebene (*parabolischer Fall*), oder schliesslich auf die Einheitskreisfläche (*hyperbolischer Fall*) leistet.

Betrachtungen, die den entsprechenden früheren ganz analog sind, zeigen sofort, dass im elliptischen Falle die Funktion $\zeta(z)$ relativ zur Fläche F eindeutig sein muss, dass sie also eine eineindeutige konforme Abbildung dieser Fläche auf die Vollebene vermittelt. Daraus aber folgt, dass die Fläche F, wie die Vollebene, das Geschlecht 0 haben muss. Weiter schliessen wir, dass im parabolischen Falle in der ζ-Ebene ein primitives Periodenparallelogramm gebildet werden kann, dessen Fläche als ein eineindeutiges Abbild der aufgeschnitten zu denkenden Fläche F erscheint. Die Fläche F wird also durch einen Rückkehrschnitt und einen die beiden Ufer desselben verbindenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt. Sie hat daher das Geschlecht 1. Damit kommen wir zu folgender präzisierenden Bestimmung des Problems der Fundamentalabbildung: *Eine geschlossene Riemannsche Fläche F, die beliebig vorgegeben ist, soll im Falle $p=0$ (elliptischer Fall) auf die Vollebene, im Falle $p=1$ (parabolischer Fall) auf die punktierte Ebene, im Falle $p \geqq 2$ (hyperbolischer Fall) auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden durch eine keinen Wert mehr als einmal annehmende Funktion $\zeta(z)$ ohne Relativverzweigung.* Der Begriff der relativ verzweigten Uniformisierenden der Fläche F ist nach Analogie des Begriffes der relativ verzweigten Uniformisierenden einer algebraischen Funktion $w(z)$ zu fassen.

Es ist eine Frage, die sich unmittelbar an dieser Stelle aufdrängt, ob das Problem der Fundamentalabbildung einer beliebigen Fläche F allgemeiner ist als das Problem der Bestimmung der Hauptuniformisierenden eines algebraischen Gebildes (z, w). Dass dies nicht der Fall ist, ergibt sich folgendermassen: Es sei F eine beliebige geschlossene Riemannsche Fläche. Dann folgern wir aus der Existenz ihrer Fundamentalabbildenden $\zeta(z)$ sofort die Existenz von algebraischen Funktionen, deren zugehörende Riemannsche Fläche die gegebene F ist. Ist nämlich das Geschlecht p der gegebenen F gleich 0, so ist unmittelbar durch $\zeta(z)$ selbst eine algebraische Funktion $w(z)$ gegeben, die zu F gehört. Ist $p=1$, so gewinnen wir unter der Annahme der Existenz ihrer Hauptuniformisierenden $\zeta(z)$ ebenfalls unmittelbar zu F gehörende algebraische Funktionen, nämlich die zu dem sich ergebenden fundamentalen Periodenparallelogram der ζ-Ebene gehörende Pefunktion, überhaupt die zugehörenden elliptischen Funktionen, die wir uns auf F übertragen zu denken haben. Ist schliesslich $p \geqq 2$, so haben wir es mit einer Fundamentalabbildenden $\zeta(z)$ zu tun, deren Wertegebiet das ganze Innere des Einheitskreises ausfüllt. Dann verfahren wir folgendermassen. Wir denken zunächst zweckmässig die Fläche F in bekannter Weise von einem Punkte O aus mittels p Rückkehrschnittpaaren zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0 aufgeschnitten. Die Funktion $\zeta(z)$ leistet dann durch einen Zweig eine eineindeutige Abbildung der Fläche F_0 auf einen schlichten Bereich φ_0 innerhalb des ζ-Einheitskreises mit linear bezogenen Rändern. Die unendlich vielen verschiedenen Relativzweige der Funktion $\zeta(z)$ liefern unendlich viele φ_0-Bilder, deren einzelnes nicht an die Peripherie des ζ-Einheitskreises anstösst, während sie in ihrer Gesamtheit die ganze Fläche des ζ-Einheitskreises ausfüllen. Die den Bereich φ_0 in seine Bilder überführenden linearen Transformationen bilden eine Gruppe Γ, die zu F gehörende *Fundamentalgruppe*, d. i. zugleich die Gruppe aller zwischen den Relativzweigen der Funktion $\zeta(z)$ bestehenden linearen Substitutionen. Nunmehr brauchen wir nur den Quotienten zweier Poincaréschen Thetareihen (-4)-ter Dimension mit Bezug auf die Gruppe Γ anzusetzen, um Funktionen zu erhalten, die gegenüber Γ ungeändert bleiben. Da wir die Thetareihe des Zählers beliebig mit Polen behaften können, können wir bezüglich der Pole der gewonnenen automorphen Funktionen solche Dispositionen treffen, dass die auf F übertragene Funktion wirklich eine eigentlich zu F gehörende algebraische Funktion wird, d. i. eine Funktion, die in den m verschiedenen Blättern der Fläche F auch wirklich verschiedene Funktionszweige aufweist.

3. *Fundamentalabbildung der elliptischen Riemannschen Fläche (Iterationsverfahren).* Die vorstehenden Betrachtungen zeigten grundsätzlich die Äquivalenz des Problems der Bestimmung der Hauptuniformisierenden einer gegebenen algebraischen Funktion $w(z)$ und des Problems der Fundamentalabbildung einer beliebig gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche F, indem nämlich aus der Fundamentalabbildung der Fläche F die Existenz eines zu F gehörenden Funktionenkörpers gefolgert wurde. Ist die Blätterzahl m der Fläche F kleiner oder gleich 2, so kann man bekanntlich diesen Funktionenkörper direkt angeben, nämlich für $m=1$ in Gestalt der rationalen Funktionen von z, für $m=2$ in Gestalt der rationalen Funktionen von z und einer Wurzelgrösse $\sqrt{\prod\limits_{\nu}(z-a_\nu)}$. Ebenso sind im Falle $m=1$ die Hauptuniformisierenden sofort angebbar in Gestalt der linearen Funktionen der Grösse z, im Falle $m=2$ bei nur zwei Windungspunkten a_1 und a_2 in Gestalt der linearen Funktionen der Grösse $\sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$.

Ist $m=2$ und die Anzahl der Windungspunkte gleich 4, d. h. $p=1$, so haben wir es mit einer elliptischen Riemannschen Fläche zu tun. Für diesen Fall beweisen wir jetzt die Existenz der Hauptuniformisierenden $\zeta(z)$ durch ein besonderes *Iterationsverfahren.*[1]

[1] Vgl. die Iterationsmethoden in Abhandlung VI der Serie »Abhandlungen» (Math. Zeitschrift Bd. 6, 1920, insbesondere §§ 12—15, 22—24). Ebenfalls sei auf eine bemerkenswerte Arbeit von P. I. MYRBERG »Über die numerische Ausführung der Uniformisierung», insbesondere Teil I u. V, verwiesen (Acta soc. Fenn. t. 48, No. 7, Helsingfors 1920), wo auch die Beziehung zur LANDENschen Transformation erläutert wird.

Wir verbinden die Punkte a_1 und a_2, a_3 und a_4 je durch eine doppelpunktfreie Linie in der z-Ebene, die wir so wählen, dass sie sich nicht schneiden. Wir können annehmen, dass die vier Punkte a im Endlichen liegen, und dass auch die gezogenen Linien (1, 2) und (3, 4) ganz im Endlichen verlaufen. Die in der angegebenen Weise begrenzte schlichte Ebene bezeichnen wir mit B_0. Der Bereich B_0 ist zweifach zusammenhängend. Wir konstruieren nun über der z-Ebene die zweiblättrige Riemannsche Fläche f_1, die die Punkte a_1 und a_2 zu Windungspunkten hat. Diese erscheint vermöge der Linie (1, 2) als Verzweigungslinie aus zwei durch Identität aufeinander bezogenen Exemplaren B_0 gebildet, nämlich dem Grundexemplar und einem zweiten angehefteten Exemplar, in welch letzterem wir die Punkte a_3, a_4 und ihre Verbindungslinie (3, 4) ebenfalls markieren. Nunmehr bilden wir die Fläche f_1 elementar auf eine schlichte z_1-Vollebene ab, indem wir die Abbildung durch die Vorschrift normieren: Es solle sich z_1 (z) im Unendlichen des Grundblattes B_0 wie $z + ((0))$ verhalten, d. h. wie z plus im Unendlichen verschwindende Funktion. Durch diese Abbildungsoperation, die wir als erste *Fundamentaltransformation* unseres Verfahrens erklären, wird die Linie (1, 2) gewissermassen geöffnet, sodass sie in der z_1-Ebene als geschlossene Linie [1, 2] wieder erscheint. Die beiden Exemplare B_0, die koinzidierend übereinander lagern, erscheinen im Bilde nebeneinander gelagert, nämlich getrennt durch die Linie [1, 2]. Jedes dieser B_0-Bilder enthält ein Bild der Linie (3, 4). Eine dieser Linien benützen wir jetzt als neue Transformationslinie für eine zweite Fundamentaltransformation z_2 (z_1) mit analoger Normierung im Unendlichen. Als Ergebnis dieser zweiten Fundamentaltransformation finden wir in der z_2-Ebene im ganzen vier B_0-Bilder, die in einer offenen Kette nebeneinander gelagert sind, an deren jedem Ende sich eine ungeschlossene (unaufgelöste) Begrenzungslinie [3, 4] befindet. Man übersieht sofort den Fortgang des Verfahrens in inf. Man hat bei sonstiger Willkür des Verfahrens nur darauf zu achten, dass jede der auftretenden unaufgelösten Linien im weiteren Verlaufe des Verfahrens einmal als Transformationslinie gewählt wird und dadurch aufgelöst wird. Diese Auflösung bedeutet jedesmal die tatsächliche Einführung des an den Endpunkten der betreffenden aufzulösenden Linie in dem gerade bestehenden Stadium des Verfahrens noch zu fordernden Verzweigungscharakters.

Bei unbegrenzter Fortsetzung des Verfahrens geht das Grundblatt B_0 durch die Hauptzweigabbildungen der Transformationskette nacheinander in Bereiche $B_0^{(1)}$, $B_0^{(2)}, \ldots$ über, die alle den unendlich fernen Punkt in ihrem Inneren enthalten. In der z_n-Ebene finden sich dem Bereiche $B_0^{(n)}$ im ganzen 2^n-1 weitere Bilder desselben nebengelagert, und zwar jenseits jeder Begrenzungslinie von $B_0^{(n)}$ eine Anzahl, die mit wachsendem Index n alle Grenzen überschreitet.

Wir behaupten, dass das geschilderte Iterationsverfahren gleichmässig konvergiert. Zunächst bemerken wir, dass die Funktionen $z_n(z)$ innerhalb B_0 sämtlich eindeutig erklärt sind und im Unendlichen das Verhalten

$$z_n(z) = z + ((0))$$

haben. Ziehen wir innerhalb B_0 eine Kreislinie K_R, die die Begrenzungslinien (1, 2) und (3, 4) des Bereichs B_0 umschliesst, so können wir von den Funktionen $z_n(z)$ weiter aussagen, dass sie ausserhalb dieses Kreises jede die Eigenschaft besitzen, dass das Maximum des absoluten Betrages ihrer auf einem Kreise $K_{R'}$ ($R' \geqq R$) angenommenen Werte zugleich mit R' wächst, nämlich wegen der schlichten Abbildung. Daraus ergibt sich nach Hilfssatz V, dass die Funktionen $z_n(z)$ auf der Linie K_R ein Maximum des absoluten Betrages ihrer Werte besitzen, das unterhalb einer von der Wahl des Index unabhängigen endlichen Schranke G liegt. Für die Differenzen $z_n - z$, die im Unendlichen regulär sind, folgt daraus, dass diese nicht nur auf K_R, sondern auch ausserhalb K_R, absolut genommen, unterhalb $2G$ bleiben. Es sei nun $R_1 > R$ beliebig fest gewählt; so schliessen wir jetzt nach Hilfssatz VII, dass man eine für alle z des Bereiches $|z| \geqq R_1$ *gleichmässig konvergente Folge* aus der Funktionenfolge $z_n(z) - z$, mithin auch aus der Funktionenfolge $z_n(z)$ selbst *auswählen* kann. Ist diese Folge gewählt, so erweist sie sich nunmehr auch innerhalb K_{R_1}, nämlich in jedem ganz inneren Teilbereich von B_0, der nicht an die Begrenzung von B_0 anstösst, als gleichmässig konvergent, weil die Beschränktheit der Funktionen in diesem Wertegebiete nun ja auch unmittelbar klar ist, und daher der Hilfssatz VIII kettenförmig zur Anwendung gebracht werden kann.

Jetzt wird die gewonnene konvergente Teilfolge der $z_n(z)$ in Abhängigkeit von z_1 betrachtet. In der z_1-Ebene besteht dann für die Variable z_1 ein gewissermassen weiterer Spielraum, nämlich bis zu den beiden unaufgelösten Begrenzungslinien dieser Ebene hin. Die gefundene Folge ist dann aber in diesem weiteren Gebiete ebenfalls gleichmässig konvergent wegen Hilfssatz VIII. Weiter kann man allgemein die Folge in Abhängigkeit von der Grösse z_k betrachten und ihre gleichmässige Konvergenz feststellen, wobei nur Indexwerte $n > k$ in Betracht kommen.

Damit ist klar, dass eine Grenzfunktion $z_\infty(z)$ durch die gewonnene Auswahl zustande kommt, die nun offenbar eine Abbildung des Bereichs B_0 auf einen Grenzbereich $B_0^{(\infty)}$ liefert, dem, wie die Betrachtung der Grösse z_∞ in Abhängigkeit von z_k (k beliebig gross) zeigt, beiderseits unendlich viele B_0-Bilder nebengelagert sind. Durchläuft man die Kette aller dieser B_0-Bilder, so durchschreitet man abwechselnd geschlossene Linien, die als Bilder der Grundlinien (1, 2) und (3, 4) aufzufassen sind. Indem wir die Kette in der einen oder andern Richtung durchlaufen, gelangen wir zu Linien, die sich, wie wir jetzt zeigen wollen, allmählich notwendig auf einen Punkt zusammenschnüren müssen.

Wir nehmen etwa an, dass dies nicht der Fall sei. Alsdann können wir folgenden Widerspruch herleiten. Wir greifen eine Begrenzungslinie L von $B_0^{(\infty)}$ heraus und betten sie in einen schmalen Streifen λ ein. Diesem Streifen werden dann unendlich viele Bildstreifen in der z_∞-Ebene entsprechen, die die Bilder der Linie L einbetten. Die Funktionen, die den Streifen λ auf jene Bildstreifen abbilden, sind in λ offenbar beschränkt; man kann also eine gleichmässig konvergente Folge aus ihnen auswählen. Die Grenzfunktion dieser Folge kann sich dann nicht auf eine Konstante reduzieren, weil die Maximaldurchmesser der L-Bilder nicht unendlich klein werden. Ist nun aber diese Grenzfunktion keine Konstante, so leistet sie eine bestimmte zweidimensionale Grenzabbildung des Streifens λ, und die Näherungsfunktionen der gewählten Folge liefern dann notwendigerweise Näherungsbilder des Streifens, die nicht mehr völlig getrennt liegen könnten. Tatsächlich aber liegen alle λ-Bilder getrennt.

Die Kette der B_0-Bilder in der z_∞-Ebene erfüllt demnach die ganze Ebene exklusive zweier endlicher Punkte α und β. Die Grösse $\log \dfrac{z_\infty - \alpha}{z_\infty - \beta}$ hat folglich als Wertegebiet die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes. Sie ist die gesuchte Variable ζ, abgesehen von einer noch freibleibenden ganzen linearen Transformation.

Das angewandte Verfahren konvergiert nun aber nicht nur auswahlmässig, sondern auch *direkt gleichmässig*. Andernfalls müsste eine unendliche Folge der $z_n(z)$ vorhanden sein, die sich der gewonnenen Grenzfunktion nicht gleichmässig nähert. Aus dieser Folge würde sich dann aber auch wieder eine gleichmässig konvergente Teilfolge auswählen lassen, die nunmehr gegen eine andere als die gewonnene Grenzfunktion konvergieren würde. Beide Grenzgrössen würden nun aber in der Beziehung zueinander stehen, dass sie eine eineindeutige Abbildung der einmal in α und β, dass andre Mal etwa in α' und β' punktierten Vollebene aufeinander vermitteln, die zugleich die im Unendlichen eingeführte Normierungsbedingung erfüllt. Diese Abbildung würde sich in den Ausnahmepunkten, weil dort jedenfalls stetig, auch noch regulär verhalten müssen, also eine ausnahmslos reguläre Abbildung der Vollebene auf sich selbst vermitteln unter Einhaltung der Normierung im Unendlichen. Diese Abbildungsfunktion muss dann linear sein und wegen der Normierung im Unendlichen sich notwendig auf die Identität reduzieren. Beide Grenzgrössen würden demnach doch identisch sein.

4. *Fundamentalabbildung der dreiblättrigen Riemannschen Flächen vom Geschlecht* 0 *und der m-blättrigen Riemannschen Flächen mit lauter einfachen Windungspunkten über vier Grundpunkten.* Die in vorhergehender Nummer konstruierte Grösse ζ, die wesentlich nichts andres ist, als das elliptische Integral erster Art mit den vier Verzweigungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4, kann dazu dienen, für die allgemeine dreiblättrige Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 die Fundamentalabbildung zu leisten, d. i. sie eineindeutig konform auf die schlichte Vollebene abzubilden.

Die dreiblättrige Riemannsche Fläche F vom Geschlechte 0 hat entweder zwei Windungspunkte zweiter Ordnung, oder zwei Windungspunkte erster Ordnung und einen Windungspunkt zweiter Ordnung, oder im allgemeinsten Falle vier Windungspunkte erster Ordnung. Im ersten Falle wird die Fundamentalabbildende unmittelbar durch eine $\sqrt[3]{}$-Operation geleistet. Im zweiten Falle kann man folgendermaassen vorgehen: über den beiden Windungspunkten erster Ordnung a_1 und a_2 liegt je ein gewöhnlicher Punkt der Riemannschen Fläche. Diese beiden gewöhnlichen Punkte a wollen wir durch eine Linie (1, 2) auf der Riemannschen Fläche verbinden und längs dieser Linie die Fläche aufschneiden. Jetzt mögen zwei koinzidierende Exemplare der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche längs der Linie (1, 2) über Kreuz verheftet werden, wodurch aus F eine sechsblättrige Riemannsche Fläche F_1 vom Geschlechte 0 entsteht, die bei a_1 und a_2 je drei Windungspunkte erster Ordnung, im Unendlichen zwei Windungspunkte zweiter Ordnung besitzt. Die Funktion $\sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_2}} = z_1$ ist auf F_1 unverzweigt, also, weil F_1 einfach zusammenhängend ist, auf F_1 eindeutig. Sie leistet eine eineindeutige Abbildung der Fläche F_1 auf eine Fläche F_2, die dreiblättrig ausfällt und nur noch zwei Windungspunkte zweiter Ordnung aufweist. Diese Fläche kann dann ihrerseits durch eine $\sqrt[3]{}$-Operation auf die schlichte Vollebene übertragen werden. Nunmehr entsprechen jedem Punkte von F zwei Punkte der

Vollebene, die durch Quadratbildung in einen und denselben Punkt übergehen. Damit ist die eineindeutige Abbildung von F auf eine Vollebene gewonnen.

Liegt der allgemeine Fall einer Fläche F vor, d. h. hat F vier getrennte Windungspunkte erster Ordnung a_1, a_2, a_3, a_4, so besitzt dieselbe Fläche ausserdem vier gewöhnliche Punkte a_1, a_2, a_3, a_4. Die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 der gewöhnlichen schlichten z-Ebene wollen wir als die *Grundpunkte* der Fläche F bezeichnen. Wir bilden nun gemäss dem Verfahren der vorhergehenden Nummer die Grösse $\zeta(z)$, die die schlichte Ebene mit Relativverzweigungen erster Ordnung in a_1, a_2, a_3, a_4 auf die ganze endliche Ebene abbildet. Wir bezeichnen diese Grösse jetzt mit ζ_1. Die Grösse ζ_1 betrachten wir nunmehr als Funktion auf F. Als solche ist sie in den gewöhnlichen Punkten a der Fläche F und nur in diesen verzweigt. Sie hat als so betrachtete Relativfunktion ein ganz bestimmtes durch die analytische Fortsetzung sich von selbst ergebendes Vieldeutigkeitsverhalten. Es ist klar, dass diese relative Grösse »$\zeta_1(z)$ über F« überall den Charakter einer lokalen uniformisierenden Variablen für F besitzt. Daraus geht hervor, dass die zu ihr gehörende Riemannsche Relativfläche $F^{(\varkappa)}$ eine eineindeutige Abbildung auf eine Fläche erfährt, die keine inneren Windungspunkte aufweisen kann, die ausserdem in Anbetracht der freien Variabilität der Grösse ζ_1 im Endlichen keine Grenzstellen darbieten kann. Diese Bildfläche kann dann nur mit der ganzen endlichen schlichten Ebene identisch sein. Damit ist dargetan, dass die Funktion »$\zeta_1(z)$ über F« die Fundamentalabbildung der Fläche F mit Relativverzweigung in den gewöhnlichen Punkten a dieser Fläche leistet. Nunmehr denken wir uns die gewöhnlichen Punkte a der Fläche F auf F durch Linien $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ miteinander verbunden und längs dieser Verbindungslinien aufgeschnitten. Die Fläche F geht dadurch in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0' über, innerhalb der keine Relativverzweigung der Funktion »$\zeta_1(z)$ über F« mehr besteht. In F_0' ist jeder Zweig dieser Funktion eindeutig. Ein solcher Zweig leistet dann eine eineindeutige schlichte Abbildung der Fläche F_0' auf ein Fundamentaldreick, dessen Seiten durch $180°$-Drehungen um die Seitenmittelpunkte aufeinander bezogen sind. Seien $0, 2\omega, 2\omega'$ die Eckpunkte dieses Dreiecks, dann leistet die Funktion $\wp(\zeta_1 \mid \omega, \omega')$ die Abbildung des Fundamentaldreiecks auf eine schlichte Vollebene, wobei korrespondierende Randpunkte in identische Punkte übergegangen sind. Diese Grösse ist demnach die gesuchte Grösse ζ.[1]

[1] Man bemerke den Zusammenhang mit der Transformation dritter Ordnung der elliptischen Funktionen, gleichfalls den Zusammenhang des unmittelbar Folgenden mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen.

Allgemeiner kann man nach dem dargelegten Verfahren für jede solche m-blättrige Riemannsche Fläche F die Fundamentalabbildung leisten, die vom Geschlechte 0 ist und nur einfache Windungspunkte hat, die über vier Grundpunkten verteilt sind. Eine solche Riemannsche Fläche besitzt nämlich, wie man aus der Formel $w - 2m = 2p - 2$ schliesst, immer genau vier gewöhnliche Punkte über den Grundpunkten, die sich dabei sowohl auf alle 4 Grundpunkte, als auch auf zwei oder nur einen verteilen können.

Ferner bemerken wir noch im Zusammenhang, dass die m-blättrigen Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 mit lauter einfachen Windungspunkten und genau vier Grundpunkten unmittelbar durch die Grösse $\zeta_1(z)$ ohne Relativverzweigung uniformisiert werden und von da aus mit Hilfe einer Pefunktion leicht auch einer eineindeutigen konformen Abbildung auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Windungspunkten unterworfen werden können.

Andere Riemannsche Flächen mit vier Grundpunkten und lauter einfachen Windungspunkten als die betrachteten gibt es überhaupt nicht. Die einzige Riemannsche Fläche mit lauter einfachen Windungspunkten und nur drei Grundpunkten ist vierblättrig und vom Geschlechte 0. Ihre Fundamentalabbildung wird durch 2 nacheinander ausgeführte $\sqrt{\ }$-Transformationen geleistet, die zusammen eine Transformation liefern, die man zweckmässig als *Vierertransformation* bezeichnet, weil die vier Zweige der Abbildungsfunktion durch eine Vierergruppe verknüpft sind.

5. *Fundamentalabbildung der hyperelliptischen Riemannschen Flächen, erste Vorbereitung: Spitzenpolygonaufgabe (Iterationsverfahren.)* Wir gehen nunmehr zur Behandlung der hyperelliptischen zweiblättrigen Riemannschen Flächen ($p \geqq 2$) über. Die zu bestimmende Uniformisierende kann dann wieder aufgefasst werden als eine relativ zur schlichten Ebene in den Windungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+2}$ in allen ihren Zweigen mit der Verzweigungszahl 2 verzweigte Funktion, die die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises bewirkt. Zur Durchführung der jetzt vorliegenden Aufgabe lösen wir zuvor zwei Hilfsaufgaben, die hernach die Erledigung der gestellten Hauptaufgabe gestatten werden. Die erste Aufgabe wollen wir als Spitzenpolygonaufgabe bezeichnen.

Spitzenpolygonaufgabe. Auf der Peripherie des z-Einheitskreises seien $l \geqq 3$ Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_l$ beliebig markiert. Es soll eine relativ verzweigte Fundamentalabbildung der z-Vollebene auf das Innere des ζ-Einheitskreises ausgeführt werden vermöge einer zu bestimmenden Funktion $\zeta(z)$, die nur in den Punkten a relativ verzweigt ist und zwar mit der Verzweigungszahl ∞ in allen diesen Punkten und allen Funktionszweigen. Ein irgendwie gewählter Zweig der Funktion $\zeta(z)$ wird ein ebenfalls beliebig ausgewähltes Intervall des Einheitskreises zwischen zwei benachbarten Punkten a in eine sich selbst nicht schneidende Linie λ überführen, deren beide Enden sich asymptotisch der Peripherie des ζ-Einheitskreises nähern. Der Symmetrie der z-Ebene in Bezug auf das gewählte Peripherieintervall entspricht eine analytische Symmetrie der ζ-Einheitskreisfläche in Bezug auf die Linie λ, nämlich eine gewisse eineindeutige indirekt konforme Abbildung der ζ-Einheitskreisfläche auf sich selbst, bei welcher die Punkte der Linie λ einzeln festbleiben, danach muss die Linie λ ein Orthogonalkreisbogen sein. Das Bild der z-Einheitskreisfläche, das ein Zweig der Funktion $\zeta(z)$ entwirft, wird infolgedessen ein von l Orthogonalkreisbögen begrenztes Polygon. Bei diesem müssen sich die genannten l Kreisbögen ausserdem im Zyklus berühren. Andernfalls könnten wir sofort von der Grösse ζ durch eine elementare Abbildung (Potenz mit rein imaginärem Exponenten) zu einer Grösse ζ' übergehen, die die Umgebung eines der Punkte a auf eine schlichte Umgebung einer nicht ausgearteten Kreislinie überträgt, was jedoch unmöglich ist, weil eine solche Funktion, weil beschränkt, auch in dem betreffenden Punkte a selbst regulär sein und also sich bestimmt verhalten müsste.

Nach dem Vorstehenden kann die gestellte Aufgabe in der Tat auch als Spitzenpolygonaufgabe bezeichnet werden. Im Falle $l=3$ haben wir es wesentlich mit der Inversen der elliptischen Modulfunktion zu tun.

Die Funktion $\zeta(z)$ wollen wir nun durch ein direktes *Iterationsverfahren* tatsächlich bestimmen.[1] Das Verfahren besteht in einer unendlichen Folge von Wurzeltransformationen ähnlich denen der Nummer 3, die wir wieder als Fundamentaltransformationen bezeichnen. Wir wählen irgend einen der l Peripherieteilbögen, in welche der z-Einheitskreis durch die Punkte a zerlegt wird, als erste Transformationslinie aus, bilden mit dieser als Verzweigungslinie durch Zusammenheftung zweier Ebenen die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den

---

[1] In Abhandlung II der Serie »Abhandlungen» (Acta math. Bd. 40) wird der Fall $l=3$, d. i. der Fall der elliptischen Modulfunktion, von der entgegengesetzten Seite her behandelt, indem das Spitzendreieck durch das »Schmiegungsverfahren» in die Fläche des Einheitskreises verwandelt wird. In der gegenwärtigen Abhandlung ist überhaupt durchgängig die Forderung des direkten Operierens zur Erfüllung gebracht.

Die Existenz der Grösse $\zeta(z)$ der gegenwärtigen Nummer wird bei POINCARÉ (Acta math. Bd. 4) indirekt durch den Kontinuitätsbeweis erschlossen. *Unter dieser Voraussetzung* zeigt POINCARÉ dann in § 17 (»Troisième problème. Types symétriques»), dass die Grösse auch durch eine unendliche Kette von Wurzeltransformationen, d. i. wesentlich unser Iterationsverfahren, dargestellt werden kann.

Endpunkten der Transformationslinie als Windungspunkten, und führen nun eine Abbildung dieser zweiblättrigen Fläche auf die schlichte Ebene aus, bei der im Grundblatt der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt festbleiben unter gleichzeitiger Festhaltung der von diesen Punkten ausgehenden Richtungen, und ferner die Symmetrie in Bezug auf den Einheitskreis gewahrt bleibt. Dies bedeutet eine solche Abbildung des Grundblattes, bei der die Transformationslinie selbst zu einer den Einheitskreis orthogonal schneidenden Kreislinie geöffnet wird, deren beide symmetrische Hälften durch eine elliptische Substitution der Periode 2 aufeinander bezogen sind, eine Substitution, die ihrerseits das Äussere dieses Orthogonalkreises, Bild des Grundblattes, in das Innere desselben Orthogonalkreises, Bild des Nebenblattes der transformierten Riemannschen Fläche, verwandelt. Wir bezeichnen die Transformation mit $z_1(z)$. Die Zerlegung der Peripherie des z-Einheitskreises in l Teile berechtigt uns, die Fläche des z-Einheitskreises in dieser Ausstattung als ein l-Eck zu bezeichnen. Das gilt sowohl vom Inneren als auch vom Äusseren des z-Einheitskreises. Als Ergebnis der ersten Operation erhalten wir eine Zerlegung der z_1-Einheitskreisfläche in zwei spiegelbildlich aufeinander bezogene l-Ecke, desgleichen eine solche Zerlegung der Aussenfläche des z_1-Einheitskreises. Die Eckpunkte befinden sich dabei alle auf der Peripherie des Einheitskreises. Ihre Gesamtanzahl ist $2l-2$. Wir verfahren nun mit der so aufgefassten z_1-Einheitskreisfläche in der gleichen Weise wie vorher mit der z-Einheitskreisfläche; d. h. wir wählen jetzt irgend eines der $2l-2$ vorhandenen Peripherieintervalle als Transformationslinie einer zweiten Fundamentaltransformation $z_2(z_1)$. Diese bewirkt, dass wir im z_2-Einheitskreise eine Parzellierung in vier l-Ecke bekommen, deren sämtliche Eckpunkte auf der Peripherie liegen. Die Anzahl der Teilpunkte auf der Peripherie ist jetzt gleich $4l-6$. Je zwei benachbarte der genannten vier l-Ecke innerhalb des Einheitskreises gehen durch analytische Spiegelung auseinander hervor. Das Verfahren wird nun i. inf. fortgesetzt, mit der Massgabe jedoch, dass jeder im Laufe des Verfahrens auftretende Teilbogen der Peripherie des Einheitskreises im weiteren Verlauf des Verfahrens auch einmal als Transformationslinie verwandt werden soll. Ein Teilbogen nämlich, der etwa auf dem z_k-Einheitskreise liegt, wird, wenn er nicht direkt als Transformationslinie der Operation $z_{k+1}(z_k)$ benützt wird, bei dieser Operation zwei Teilbögen des z_{k+1} Einheitskreises liefern. Der eine dieser Teilbögen rührt vom Hauptzweig dieser Transformation her und darf insofern als nicht neu bezeichnet werden.

Es handelt sich nun darum, die Konvergenz dieses Verfahrens nachzuweisen.

Zunächst bemerken wir, dass das Innere des z_n-Einheitskreises mit wachsendem Index n in immer mehr l-Ecke zerlegt erscheint, die von einem zentralen, den Nullpunkt enthaltenden l-Eck aus durch analytische Spiegelungen entstehen. Das Anordnungsschema dieser l-Ecke folgt dem leicht überblickbaren Anordnungsschema, das man erhält, wenn man ein Orthogonalkreisspitzenpolygon mit l Seiten an einer seiner Seiten spiegelt, darauf die gewonnene Gesamtfigur wieder an einer ihrer Seiten spiegelt, nunmehr die gewonnene Gesamtfigur wieder an einer der begrenzenden Seiten spiegelt u. s. f. nach einem Prinzip, das schliesslich die allseitige Durchführung des Spiegelungsprozesses gewährleistet.

Aus dem Schwarzschen Lemma (Hilfssatz I), angewandt auf die Funktion $z_{n+1}(z_n)$, die für $|z_n| < 1$ regulär ist, folgt

$$|z_{n+1}| < |z_n|$$

und

$$\left(\frac{dz_{n+1}}{dz_n}\right)_{z_n=0} = c_n < 1.$$

Nunmehr betrachten wir statt der Grössen z_n die Grössen

$$\frac{z_1}{c_1} = Z_1, \quad \frac{z_2}{c_1 c_2} = Z_2, \quad \frac{z_3}{c_1 c_2 c_3} = Z_3, \ldots .$$

Alsdann hat man

$$\left(\frac{d\,Z_n}{d\,z}\right)_{z=0} = 1.$$

Andrerseits ist an Stelle der z_n-Einheitskreisfläche die Fläche eines Kreises mit dem Radius

$$\frac{1}{c_1 c_2 \cdots c_n} = R_n, \quad (1 < R_1 < R_2 < R_3 < \cdots),$$

als entsprechender Variabilitätsbereich der Grösse Z_n getreten. Die Funktion $Z_n(z)$ leistet eine schlichte Abbildung der z-Einheitskreisfläche auf ein Teilgebiet des Kreises K_n der z_n-Ebene, dessen Radius gleich R_n ist, und zwar mit dem Vergrösserungsverhältnis 1 an der Nullstelle. Für das Gebiet $|z| < q < 1$ lässt sich daher zufolge dem Hilfssatz VI behaupten, dass alle Funktionen $Z_n(z)$ beschränkt sind, dass mithin eine gleichmässig konvergente *Teilfolge* ausgewählt werden kann, deren Grenzfunktion wegen der Ableitung 1 im Nullpunkte sich nicht auf eine Konstante reduzieren kann. Die ausgewählte Teilfolge ist aber wegen des Hilfssatzes VIII auch in jedem grösseren Kreise $|z| \leqq q' < 1$ gleichmässig konvergent, weil sich nach dem Hilfssatze VI auch für jedes derartige Gebiet die Beschränktheit der Funktionen $Z_n(z)$ ergibt. Betrachtet man nunmehr die Funktionen $Z_n(Z_1)$ für die ausgewählte Indexfolge, so hat man ohne weiteres die gleichmässige Konvergenz derselben für eine gewisse Umgebung der Nullstelle. Daraus ergibt sich aber wieder unter Anwendung der angeführten Hilfssätze die gleichmässige Konvergenz der ausgewählten Folge in jedem inneren Teilbereich der Kreisfläche K_1, ebenso ergibt sich die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $Z_n(Z_2)$ für das Innere des Kreises K_2 u. s. w.

Daraus folgt nun jedenfalls, dass die Grenzfunktion die z-Einheitskreisfläche, aufgefasst als l-Eck, auf ein gewisses l-Eck abbildet, das im Sinne des oben erwähnten Spiegelungsgesetzes unbeschränkt allseitige Spiegelungsfähigkeit besitzt. Das von diesen unendlich vielen l-Ecken gebildete Netz erfüllt ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet G. Um die Form des Gebietes G zu bestimmen, unterscheiden wir die zwei zunächst denkbaren Fälle

$$\lim_{n=\infty} R_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} R_n = R = \text{endl. Grösse.}$$

Im ersten Falle würde sich durch Anwendung des Hilfssatzes VI auf die Kreisfläche $|Z_k| \leqq \frac{R_k}{2}$ der Z_k-Ebene, für welches Gebiet die Funktionen $Z_n(Z_k)$ regulär erklärt sind, ergeben, dass das Gebiet G seinerseits beliebig grosse Kreisflächen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt als innere Teilgebiete enthält. Das Gebiet G würde demnach von der ganzen endlichen Ebene gebildet werden müssen, und das Grenz-l-Eck müsste dann aus Gründen der analytischen Symmetrie von l getrennten vollständigen Geraden begrenzt sein, was offenbar nicht möglich ist. Somit kann nur die Möglichkeit $\lim_{n=\infty} R_n = R =$ endl. Grösse tatsächlich zutreffen. Dann muss das Gebiet G die Fläche des Kreises K mit dem Radius R vollständig ausfüllen. Man denke sich etwa, dass G nur einen *Teil* dieser Kreisfläche bedecke. Es sei G_n das Bild des Bereiches K_n der Z_n-Ebene in der G-Ebene, nämlich der Ebene der Grenzvariablen Z_∞. Wir betrachten jetzt die Grössen Z_n als Funktionen der Variablen Z_∞. Die Funktion $Z_n(Z_\infty)$ leistet die Abbildung des Gebietes G_n auf die Kreisfläche K_n. Für die oben betrachtete ausgewählte Indexfolge ist auch die Folge $Z_n(Z_\infty)$ gleichmässig konvergent. Die Grenzfunktion $Z_\infty(Z_\infty)$ bildet die Fläche $G \equiv \lim G_n$ identisch auf sich selbst ab. Die Funktion $Z_\infty(Z_\infty)$ ist aber zugleich Grenzfunktion für die Umkehrungsfunktionen der soeben betrachteten Funktionenfolge. Diese Umkehrungsfunktion vom Index n ist in der Kreisfläche K_n erklärt und bildet diese auf G_n ab. Die Grenzfunktion Z_∞ ($\mathfrak{Z}_\infty$) bildet darnach die Kreisfläche $\lim K_n = K$ auf einen Teil von G ab. Das ist aber ein Widerspruch, da die identische Transformation die ganze Fläche K nicht auf einen wirklichen Teil von sich selbst abbilden kann.

Was von den Z_n bewiesen ist, überträgt sich nun ohne weiteres auf die z_n. Das ursprüngliche Verfahren liefert demnach die Abbildung der z-Einheitskreisfläche auf ein Spitzenpolygon, wie verlangt wurde. Die *Konvergenz* des Verfahrens besteht ferner wegen des unitären Charakters der Grenzvariablen *unmittelbar*, d. h. unabhängig von jeder Auswahl einer Indexfolge.

6. *Fundamentalabbildung der hyperelliptischen Flächen, zweite Vorbereitung: Verzweigte Fundamentalabbildung der Fläche des Einheitskreises (Iterationsverfahren).* Als zweite Vorbereitung zur Durchführung der Fundamentalabbildung der hyperelliptischen Riemannschen Flächen behandeln wir die Fundamentalabbildung der Fläche des z-Einheitskreises auf sich selbst bei vorgegebener Relativverzweigung im Innern. Wir denken uns innerhalb des z-Einheitskreises endlich oder unendlich viele Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ markiert, die sich nur gegen Punkte der Peripherie häufen. Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist folgende: Es soll eine Funktion $\zeta(z)$ bestimmt werden, die innerhalb des z-Einheitskreises, abgesehen von den markierten Punkten, regulär ist, in den markierten Punkten jedoch in allen ihren Zweigen Verzweigungspunkte erster Ordnung besitzt. Die Funktion $\zeta(z)$ soll sich in den Verzweigungspunkten wie eine verzweigte lokale Uniformisierende verhalten. Schliesslich sollen die von der Funktion $\zeta(z)$ für $|z| < 1$ in allen ihren Zweigen unter Einbeziehung der Verzweigungspunkte angenommenen Werte das ganze Innere des ζ-Einheitskreises einfach erfüllen in dem Sinne, dass die Funktion jeden solchen Wert einmal und nur einmal annimmt. Die so erklärte Funktion erweist sich von vornherein durch ihre Eigenschaften als bis auf eine lineare Transformation, die den Einheitskreis in sich überführt, völlig bestimmt. Wir fixieren sie eindeutig, indem wir verlangen, dass sie im Grundzweig an der Nullstelle verschwinden und die Richtungselemente dieses Punktes festlassen soll. Letzteres kann auch so ausgesprochen werden: es soll die Ableitung an der Nullstelle reell positiv sein.

Zur Bestimmung der Funktion $\zeta(z)$ bedienen wir uns wieder eines Iterationsverfahrens in Form einer unendlichen Kette von Fundamentaltransformationen. Zuvörderst ist es zweckmässig, das Grundblatt dadurch näher zu fixieren, dass wir von den Punkten a lauter von einander getrennt verlaufende Linien l nach der Peripherie des Einheitskreises ziehen, was offenbar keine Schwierigkeiten darbietet, auch bei unendlich grosser Anzahl der Punkte a_k. Übrigens werden wir im Falle unsrer Anwendung solche Linien mit einer unten näher bezeichneten Modifikation von Hause aus mitgeliefert bekommen. Wir wollen sogleich noch bemerken, dass wir gerade den Fall unendlich vieler Verzweigungsstellen a_k später gebrauchen werden.

Wir wählen jetzt irgend einen der Punkte a_k und die zugehörige Hilfslinie l aus, setzen diese Figur spiegelbildlich über die Peripherie des Einheitskreises fort und erhalten dadurch eine in Bezug auf den Einheitskreis zu sich selbst symmetrische Linie mit zwei Endpunkten. Diese Linie benutzen wir jetzt als Transformationslinie einer Fundamentaltransformation, die die durch die Endpunkte der Transformationslinie als Windungspunkte bestimmte zweiblättrige Riemannsche Fläche auf die schlichte Ebene in der Weise abbildet, dass dabei die doppelt durchlaufen zu denkende Peripherie des Einheitskreises in die einfach durchlaufen zu denkende Peripherie des Einheitskreises abgebildet wird und dass ferner der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt des Grundblattes unter Festhaltung der zugehörenden Richtungselemente festgelassen werden. Die Transformationslinie wird durch diese erste Operation $z_1(z)$ gewissermassen geöffnet. Die gewonnene Linie erscheint in zwei durch eine elliptische Substitution der Periode 2 aufeinander bezogene Teile zerlegt. Die bei der ersten Operation nicht benützten Punkte a_k mit den zugehörenden Linien l erscheinen in der z_1-Ebene unaufgelöst wieder. Ausserdem aber sind wesentlich neue Punkte a_k und zugehörende Linien l entstanden, die aus den alten durch die erwähnte elliptische Substitution hervorgehen. Unter den nunmehr vorhandenen unaufgelösten Linien l der z_1-Ebene wählen wir wieder irgend eine aus und verfahren in derselben Weise wie vorher. So erhalten wir, in inf. fortfahrend, eine Folge von Fundamentaltransformationen

$$z_1(z),\ z_2(z_1),\ z_3(z_2),\ldots,$$

bei deren sukzessiver Bildung unserm Zwecke entsprechend nur der einen Bedingung Genüge geleistet werden muss, dass jede anfänglich vorhandene und jede später entstehende Linie l im Laufe des Verfahrens auch einmal als Transformationslinie zur Verwendung und dadurch zur Auflösung kommen soll.

Das Ergebnis der Zusammensetzung der n ersten Fundamentaltransformationen bezeichen wir mit $z_n(z)$. Es ist klar, dass $z_n(z)$ eine 2^n-deutige Funktion von z ist, ferner, dass $z_n(0)$ im Hauptzweig verschwindet. Weiter ist nach dem Schwarzschen Lemma, angewandt auf die Funktion $z_n(z_{n+1})$, die für $|z_{n+1}| \leqq 1$ regulär ist,

$$|z_{n+1}| > |z_n| \quad \text{und} \quad \left(\frac{d z_{n+1}}{d z_n}\right)_{z_n=0} > 1.$$

Das geschilderte Verfahren konvergiert, wie wir jetzt zeigen wollen, gleichmässig und leistet die verlangte Fundamentalabbildung.

Wir denken uns in der z-Ebene im Grundblatt eine Kreislinie mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben, die alle Punkte a_k und alle Linien l ausschliesst. Die Funktionen $z_n(z)$ sind nun offenbar für das Innere dieser Kreisfläche im Hauptzweig alle regulär erklärt, ferner beschränkt, nämlich dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb 1. Daraus ergibt sich, dass man eine innerhalb jener Kreisfläche gleichmässig konvergente Folge auswählen kann. Nun besteht aber die erwähnte Beschränktheit nicht nur für diese Kreisfläche, sondern längs jedes innerhalb der z-Einheitskreisfläche verlaufenden etwa im Nullpunkte beginnenden Flächenstreifens, der auch die Linien l beliebig oft überschreiten kann. Daraus ergibt sich, dass die gleichmässige Konvergenz sich auf jeden solchen Flächenstreifen erstreckt. Die Grenzfunktion der Folge kann sich nicht auf eine Konstante reduzieren, weil die Ableitungswerte $\left(\frac{d z_n}{d z}\right)_{z=0}$ mit wachsendem Index n wachsen.

Wir können jetzt den Schluss ziehen, dass die Grenzfunktion für $|z| < 1$ eine keinen Wert mehr als einmal annehmende und nur Werte innerhalb des Einheitskreises annehmende Funktion ist, die weiter die verlangten Verzweigungsbedingungen in allen ihren Zweigen erfüllt. Was noch zu zeigen bleibt, ist, dass die Grenzfunktion im Gebiete $|z| < 1$ jeden Wert, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist, tatsächlich annimmt. Das ergibt sich durch Betrachtung der Umkehrungsfunktionen. Wir brauchen nur zu bedenken, dass die Umkehrungsfunktionen der ausgewählten Folge im Einheitskreise sämtlich regulär und dem absoluten Betrag der Werte nach unterhalb 1 bleiben. Die ausgewählte Folge der umgekehrten Funktionen ist daher nicht nur in einer gewissen Umgebung der Nullstelle, sondern nach Hilfssatz VIII überhaupt innerhalb des Einheitskreises gleichmässig konvergent. Sie konvergiert gegen die Inverse der Grenzfunktion der $z_n(z)$-Folge. Wir sehen also, dass die Inverse der Grenzfunktion jedem Punkte innerhalb des Einheitskreises eindeutig einen Punkt innerhalb des z-Einheitskreises zuordnet.

Wir haben also in der Tat die Funktion $\zeta(z)$ unseres Problems gewonnen. Das Iterationsverfahren aber erkennen wir nachträglich als unmittelbar, d. h. ohne Bezugnahme auf eine ausgewählte Indexfolge gleichmässig konvergent, weil die Funktion $\zeta(z)$ durch ihre in ihrer Definition zusammengestellten Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Anmerkung I. Statt die gegebenen Verzweigungspunkte a_k einzeln durch Linien l mit der Peripherie des Einheitskreises zu verbinden, kann man auch mit jeder Linie l mehrere, sogar unendlich viele a_{k_1}, a_{k_2}, $a_{k_3}, \ldots$ in einem bei a_{k_1} beginnenden Zuge l erfassen, der sich der Peripherie des Einheitskreises entweder bestimmt endigend oder auch in asymptotischer Weise nähert. Beispielsweise kann man so alle gegebenen Punkte a, wenn ihre Anzahl unendlich gross ist, in einen einzigen Zug l aufnehmen. Führt man nunmehr eine Fundamentaltransformation des Index 2 unter Benützung des Ausgangspunktes a_{k_1} der Linie l und ihres zum Einheitskreise spiegelbildlichen Punktes als Verzweigungspunkte aus, so geht l in eine Linie über, die aus zwei durch eine elliptische Substitution bezogenen Teilen besteht, die beide in dem Bildpunkte a'_{k_1} des Punktes a_{k_1} beginnen. Diese beiden Teilbögen laufen durch Punkte a'_{k_2}, $a'_{k_3}, \ldots$ bezw. a''_{k_2}, $a''_{k_3}, \ldots$ Die erwähnten Punkte sind nun alle mit Ausnahme allein des Punktes a'_{k_1} mit der Verzweigungszahl 2 zu behaften. Die Verbindungslinien $a'_{k_1}\, a'_{k_2}$ und $a'_{k_1}\, a''_{k_2}$ kann man jetzt löschen und erhält so zwei getrennte Linien l, die eine bei a'_{k_2}, die andre bei a''_{k_2} beginnend. Es liefern also jetzt nicht nur die der Transformation fremden Linien l, sondern auch die bei der Transformation benützte Linie l als Ergebnis der Fundamentaltransformation zwei Linien l. Im übrigen gelten wieder die alten Beweisprinzipien und die Bestimmung, dass beim Iterationsverfahren jede auftretende Linie l im Verlaufe des Verfahrens auch einmal als Transformationslinie verwendet werden muss.

Anmerkung II. Das geschilderte Iterationsverfahren ist unmittelbar auf den allgemeineren Fall übertragbar, wo die den Punkten a_k zugeordneten *Verzweigungszahlen als beliebige ganze Zahlen*, auch ∞ gegeben werden, und eine Fundamentalabbildung solcher allgemeineren Verzweigung verlangt wird. An Stelle der zweiblättrigen Riemannschen Windungsfläche mit bezügl. des Einheitskreises spiegelbildlichen Windungspunkten treten nunmehr mehrblättrige, evt. unendlichvielblättrige solche Flächen, deren Abbildung durch $\sqrt[k]{}$-Transformationen oder Logarithmustransformationen geleistet wird.

7. *Durchführung der Fundamentalabbildung der hyperelliptischen Riemannschen Flächen.* Wir gehen nun nach den Vorbereitungen der Nummern 5 und 6 zur Durchführung der Fundamentalabbildung einer beliebigen zweiblättrigen Riemannschen Fläche F vom Geschlechte $p \geqq 2$ über. Die zu bestimmende Grösse $\zeta(z)$ kann auch als Uniformisierende der schlichten z-Ebene mit Relativverzweigung erster Ordnung in den $2p+2$ Windungsstellen $a_1, \ldots, a_{2p+2}$ der Fläche F aufge-

fasst werden. Zur Bestimmung dieser Grösse greifen wir zunächst vier der $2p+2$ Verzweigungsstellen heraus, etwa a_1, a_2, a_3, a_4. Diese verbinden wir durch zwei getrennte Linien in der gewöhnlichen z-Ebene in der Weise (1, 2) und (3, 4), unter Vermeidung der übrigen Punkte a. Jetzt wenden wir das Iterationsverfahren der Nummer 3 an und gelangen zu einer Grösse ζ_1, deren Wertegebiet von der ganzen Ebene exkl. zweier endlichen Punkte α und β gebildet wird. Die Linien (1, 2) und (3, 4) vervollständigen wir jetzt zu einer einzigen doppelpunktfreien Linie durch Hinzufügung einer etwa punktiert vorgestellten Verbindung a_2, a_5, $a_6, \ldots, a_{2p+2}$, a_3. Die punktiert gezeichnete Linie wird nun in die ζ_1-Ebene übertragen, wo sie entsprechend der Unendlichvieldeutigkeit der Funktion $\zeta_1(z)$ unendlich viele Bilder liefert, die sich zu einem einzigen α und β verbindenden punktierten Zuge λ zusammenschliessen, auf dem die Bilder der Punkte $a_5, a_6, \ldots, a_{2p+2}$ ebenfalls in unendlich häufiger Wiederholung mit der Verzweigungsnotierung 2 wiederkehren. Einen dieser Punkte wählen wir und bezeichnen ihn mit γ. Wir wenden nunmehr auf die ζ_1-Ebene die Vierertransformation mit den Verzweigungspunkten α, β, γ an. Durch diese Transformation wird das wegen der zwei Grenzpunkte α und β zweifach zusammenhängende ζ_1-Gebiet in ein vierfach zusammenhängendes schlichtes ζ_2-Gebiet verwandelt, das von vier auf einem Kreise liegenden harmonischen Punkten α', α'', β', β'' begrenzt wird und eine ganz bestimmte durch die Abbildung bestimmte Liniierung und Verzweigungssignierung trägt. Nunmehr wird gemäss Nummer 5 (Spitzenpolygonaufgabe) die schlichte ζ_2-Ebene einer Fundamentalabbildung $\zeta_3(\zeta_2)$ mit Relativverzweigung unendlich hoher Ordnung in den Punkten des erwähnten Quadrupels unterworfen. Als Variabilitätsbereich der Grösse ζ_3 erscheint das Innere des ζ_3-Einheitskreises, das zugleich eine bestimmte Signierung und Liniierung aufweist. Damit sind wir aber zur Aufgabe der Nummer 6 gelangt, deren Anwendung die gesuchte Grösse ζ liefert, die die Fundamentalabbildung der hyperelliptischen Riemannschen Fläche ohne Relativverzweigung zur Darstellung bringt. Das Verfahren der Nummer 6 wird dabei an Hand der vorhandenen Liniierung zweckmässig in der in der Anmerkung I gekennzeichneten Modifikation zur Anwendung gebracht, nachdem die an die γ-Bildpunkte unmittelbar anstossenden Linienteile gelöscht sind.

Anmerkung. Das im Vorstehenden dargelegte Verfahren ist auf den allgemeinen Fall der hyperelliptischen Riemannschen Fläche zugeschnitten. Hat man eine *symmetrische* Riemannsche Fläche, deren Windungspunkte alle auf einer Geraden oder einem Kreise liegen, so kann dieser Kreis zunächst in den Einheitskreis transformiert werden. Nunmehr kann man die Uniformisierende unmittelbar durch ein einziges Iterationsverfahren gewinnen, das dem bei der Spitzenpolygonaufgabe angewandten Verfahren nachzubilden ist. Die Abweichung besteht lediglich darin, dass die Verzweigungspunkte der einzelnen Fundamentaltransformationen nach Ausübung der Transformationen nicht weiter mit Verzweigungsnotierungen zu behaften sind, also nicht mehr als Peripherieteilpunkte mitzählen. Die Grenzfunktion leistet die Abbildung des Einheitskreises auf ein inneres Orthogonalkreispolygon mit lauter rechten Winkeln.

8. *Speziell verzweigte Fundamentalabbildungen beliebiger geschlossener Riemannscher Flächen F. Bildung zu F gehörender algebraischer Funktionen. Fundamentalabbildung im engern Sinne (d. i. ohne Relativverzweigung) beliebiger F vom Geschlecht* $p=0, 1, 2$. Es sei nunmehr F eine beliebige geschlossene Riemannsche Fläche, deren Blätterzahl $m \geqq 3$ ist. Die im Vorhergehenden angewandten Methoden vermitteln uns leicht solche Uniformisierenden der Fläche F, die gewisse Relativverzweigungen besitzen. Für den Zweck der Bestimmung algebraischer Funktionen, die zur Fläche F gehören, genügt es, eine solche zu bestimmen.

Wir notieren in der schlichten z-Ebene die Stellen (*Grundpunkte*), über denen sich Windungspunkte der Fläche F befinden. Es sei n ihre Anzahl. Abgesehen von einem trivialen Falle ist $n \geqq 3$. Wir behaften jetzt die Grundpunkte $a_1, \ldots, a_n$ alle mit einer und derselben geraden Verzweigungszahl $2N$, die durch jede bei F vorkommende Windungszahl teilbar und ausserdem $\geqq 6$ ist. Wir verlangen dann die Bestimmung der zur schlichten z-Ebene gehörenden Uniformisierenden mit der eben definierten Relativverzweigung.

Zunächst üben wir, wenn n ungrade oder $\leqq 5$ ist, eine vorbereitende $\sqrt[2N]{}$-Transformation mit zweien der Punkte a als Verzweigungspunkten aus. In der Bildebene ergeben sich dann eine gerade Anzahl $2N(n-2) \geqq 6$ Verzweigungsstellen, die alle mit der Verzweigungzahl $2N$ zu behaften sind. Wir sind so auf den Fall geführt: Gegeben eine gerade Anzahl $2n' \geqq 6$ von Verzweigungsstellen $a_1', \ldots, a'_{2n'}$ mit derselben zugeordneten Verzweigungszahl $2N \geqq 6$. Um die so verzweigte Uniformisierende ζ zu finden, bestimmen wir zuerst die Uniformisierende ζ_1 mit denselben Verzweigungsstellen, jedoch mit der einheitlichen Verzweigungszahl 2. Das ist nichts anderes als die Hauptuniformisierende der zugeordneten hyperelliptischen Riemannsche Fläche. In der ζ_1-Ebene haben wir nun sämtliche unendlich vielen Bilder der a' zu notieren und mit der noch zu berücksichtigenden einheitlichen Verzweigungszahl N zu behaften. Daraus ersehen wir, dass die Bestimmung der gesuchten Variablen ζ die Anwendung eines zweiten *Iterationsver-*

fahrens gemäss Nummer 6 (Anmerkung II) notwendig macht. Die dabei benötigten Linien l bieten sich uns auf verschiedene Weisen dar. Die Punkte $a_1', \ldots, a'_{2n'}$ mögen paarweise durch n' getrennte Linien λ in der Ebene verbunden werden. Diesen Linien entsprechen auf der erwähnten hyperelliptischen Riemannschen Fläche n' geschlossene Linien λ' (Rückkehrschnitte). Diesen geschlossenen Linien λ' entsprechen nun im ζ_1-Einheitskreis ungeschlossene Querschnitte der Einheitskreisfläche, die in gewissen Fixpunkten auf dem Einheitskreise endigen und sich ebenfalls gegenseitig nicht treffen. Ihre Anzahl ist unendlich gross. Auf denselben sind alle notierten Verzweigungspunkte der ζ_1-Einheitskreisfläche enthalten. Aus jeder solchen Linie nehme man das Verbindungsstück zwischen zwei benachbarten Verzweigungspunkten heraus. Dann hat man unmittelbar die Linien l.

Die gefundene Grösse $\zeta(z)$ werde nun als Funktion über F betrachtet. Als solche hat sie in jedem $\varkappa$-blättrigen Windungspunkte einen Relativverzweigungspunkt der ganzzahligen Ordnung $\frac{2N}{\varkappa}$. Die zu dieser Funktion gehörende, ihre Vieldeutigkeit vollständig darstellende Relativfläche $'F^{(\infty)}$ wird durch die Funktion $\zeta(z)$ überall im kleinen schlicht auf eine Fläche übertragen, die ganz innerhalb des Einheitskreises liegt, dazu wegen der freien Variabilität der Grösse ζ innerhalb des Einheitskreises keine Grenzpunkte darbieten kann. Diese Fläche ist demnach mit der schlichten Fläche des ζ-Einheitskreises identisch, und die Fläche $'F^{(\infty)}$ selbst ist nichts anderes als die zu F gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche mit den Relativverzweigungszahlen $\frac{2N}{\varkappa}$.

Wir denken uns jetzt die Fläche F von einem beliebigen Punkte O aus durch p Rückkehrschnittpaare, die die Windungspunkte der Fläche nicht treffen mögen, kanonisch aufgeschnitten zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0. Ferner denken wir uns von den einzelnen Windungspunkten aus Einschnitte innerhalb F_0 nach dem Punkte O hin ausgeführt, wodurch F_0 in eine Fläche F_0' übergeht. Die Fläche F_0' wird dann durch einen in F_0' erklärten Zweig der Funktion $\zeta(z)$ auf einen Fundamentalbereich abgebildet, der in unendlich vielen den übrigen Relativzweigen der Funktion entsprechenden Wiederholungen das ganze Innere des ζ-Einheitskreises erfüllt. Er selbst reicht mit seiner Begrenzung nicht an die Peripherie des Einheitskreises heran. Man braucht jetzt nur Poincarésche Theta-Quotienten anzusetzen, um automorphe Funktionen innerhalb des ζ-Einheitskreises zu erhalten, die, auf F übertragen, eigentliche zu dieser Fläche gehörende algebraische Funktionen sind.

Ist speziell $p=0$, so können wir, da der zu F gehörende algebraische Funktionenkörper nach Vorstehendem bestimmt werden kann, jetzt eine Funktion des Körpers bestimmen, die nur einen Pol erster Ordnung hat, also die Fundamentalabbildung der Fläche F ohne Relativverzweigung auf die schlichte Vollebene bewirkt. Ist $p = 1$ oder 2, so können wir durch Körperfunktionen sofort zu zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit vier bzw. sechs Windungspunkten übergehen und von da aus weiter nach dem früher dargelegten Verfahren die Fundamentalabbildung ohne Relativverzweiguug leisten.

Anmerkung. In gewisser Weise eine Vereinfachung der Entwicklungen dieser Nummer kann man erzielen, wenn man den Satz heranzieht, dass jede geschlossene Riemannsche Fläche F durch eine ganze rationale Funktion eineindeutig auf eine ebensolche Fläche abgebildet werden kann, deren Windungspunkte alle auf dem Einheitskreise liegen. S. die Schlussbemerkung in der Arbeit des Verfassers »Fundamentalabbildung und Potentialbestimmung gegebener Riemannscher Flächen», Math. Zeitschrift Bd. 12 (1922). Vgl. auch eine ähnliche Betrachtung bei POINCARÉ, Acta math. Bd. 4, S. 246—250.

ZWEITER TEIL.

Uniformisierung beliebig gegebener algebraischer Funktionen und Fundamentalabbildung beliebig gegebener geschlossener Riemannscher Flächen.

9. *Die Funktion »$\zeta_1(z)$ über E» mit n Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung.* Es sei jetzt F eine beliebige geschlossene Riemannsche Fläche, deren Blätterzahl $m \geqq 3$ und deren Geschlecht $p \geqq 2$ angenommen werde, zur Fixierung der Vorstellungen. Grundsätzlich werden jedoch unsere folgenden Entwicklungen auch die niederen Fälle mitumfassen. Wir verweisen insbesondere auf die bezüglich $p=1$ und $p=0$ am Ende dieses Teiles gemachten Ausführungen.

Dass zur Fläche F ein algebraischer Funktionenkörper gehört, ist bereits im Vorhergehenden dargetan worden, wird jedoch im Folgenden keine Rolle spielen. Wir wollen die Existenz der (relativ unverzweigten) Hauptuniformisierenden $\zeta(z)$ der Fläche F dartun. Wir wissen bereits, dass es gewisse Uniformisierende mit Relativverzweigung gibt. Von einer solchen wollen wir jetzt ausgehen. Die bisher aufgestellten Uniformisierenden mit Relativverzweigung hatten endliche Relativverzweigungszahlen. Diejenige jedoch, die wir nunmehr als Basis für die Konstruktion der Grösse $\zeta(z)$ nehmen wollen, ist eine solche mit durchweg unendlich hoher Relativverzweigungszahl. So wie jene schon bekannten relativ verzweigten Uniformisierenden der Fläche F als relativ verzweigte Uniformisierende der schlichten z-Ebene aufgefasst und geradezu als solche gewonnen wurden, wird es auch jetzt sein. Wir denken uns in der schlichten z-Ebene diejenigen Stellen $a_1, \ldots, a_n$ *(Grundpunkte)* markiert, über denen mindestens ein Windungspunkt der Fläche F liegt. Die Zahl n ist dann $\geqq 3$, wenn man von dem trivialen Falle der m-blättrigen Riemannschen Fläche mit zwei m-blättrigen Windungspunkten absieht. Den Stellen a_k der schlichten z-Ebene ordnen wir durchweg die Verzweigungszahl ∞ zu und verlangen die Bestimmung der so verzweigten Uniformisierenden $\zeta_1(z)$ der schlichten z-Ebene.

Die Grösse $\zeta_1(z)$ kann mit Hilfe der in Nummer 5 und 6 dargelegten *Iterationsmethoden* sofort gewonnen werden. Wir denken uns die Punkte a_1, a_2, a_3 durch eine fortlaufende doppelpunktlose Linie λ in der schlichten z-Ebene miteinander verbunden und weiter von dem Punkte a_3 nach den übrigen Punkten $a_4, \ldots, a_n$ punktierte Linien λ' gezogen, die sich untereinander und die Linie λ nur im Punkte a_3 treffen. Nunmehr führen wir nach unserem Iterationsverfahren der Spitzenpolygonaufgabe (Nummer 5) die Fundamentalabbildung der schlichten z-Ebene mit a_1, a_2, a_3 als Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung durch. Dabei geht die von der Linie λ allein begrenzt gedachte z-Ebene in ein Spitzenviereck über, das in unendlich vielen Reproduktionen das ganze Innere des Einheitskreises ausfüllt. Den Linien λ' entsprechen im Einheitskreise vermöge der definierten Abbildung unendlich viele Bildlinien, deren jede einzelne einen inneren Punkt des Einheitskreises mit einem Peripheriepunkt verbindet. Die inneren Anfangspunkte dieser Linien haben wir jetzt sämtlich mit der Verzweigungszahl ∞ zu behaften. Nun wird auf die gewonnene Figur das Iterationsverfahren der Nummer 6 angewandt, wobei die soeben definierten Linien als Ausgangslinien l des Verfahrens figurieren. Das Verfahren selbst besteht in einer unendlichen Kette logarithmischer Fundamentaltransformationen. Das Ergebnis ist die Gewinnung der Grösse $\zeta_1(z)$, deren Bestimmung oben verlangt wurde.

Die Grösse $\zeta_1(z)$ leistet eine eineindeutige konforme Abbildung einer gewissen einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche $E'^{(\infty)}$ der schlichten z-Ebene E, die in den Punkten a_k lauter Windungspunkte unendlich hoher Ordnung hat. Die Bezeichnung $E'^{(\infty)}$ soll andeuten, dass diese Fläche die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ohne Relativwindungspunkte der Ebene E' ist, d. i. der in den Grundpunkten $a_1, \ldots, a_n$ punktierten Ebene E. Die Fläche $E'^{(\infty)}$ kann von vornherein konstruiert werden, indem man nämlich die längs den Linien λ und λ' aufgeschnittene Ebene E', genannt E_0', in unendlich vielen koinzidierenden Exemplaren relationenfrei zusammenfügt, wobei im Resultat zwei verschiedene Exemplare entweder keinen Punkt oder nur eine Seite λ oder λ' gemeinschaftlich haben.

Um das Verhalten der Funktion $\zeta_1(z)$ in den Punkten a_k näher zu bestimmen, betrachten wir eine kleine Umgebung $|z-a| \leqq \varrho$ eines solchen Punktes. Auf der Fläche $E'^{(\infty)}$ hat eine solche Umgebung die Gestalt eines Windungsflächenstückes W unendlich hoher Ordnung. Das Windungsflächenstück W wird durch $\zeta_1(z)$ eineindeutig konform auf ein Gebiet W' abgebildet, wobei dem Umlauf um den Punkt a eine parabolische, ev. hyperbolische Substitution entspricht. Jedenfalls können wir von der Fläche W' durch elementare Abbildung (Exponentialabbildung, ev. Potenzabbildung) zu einer schlichten zweifach zusammenhängenden Fläche W'' übergehen, die nun als eineindeutiges Bild des schlichten Bereiches $|z-a| \leqq \varrho$ erscheint. Die das Gebiet $|z-a| \leqq \varrho$ auf W'' abbildende Funktion muss sich dann auch im Punkte a selbst, weil beschränkt, bestimmt verhalten. Von hier aus sieht man leicht ein, dass die erwähnte Umlaufssubstitution nur eine parabolische Substitution sein kann und dass der Linie $|z-a| = \varrho$ im Einheitskreise eine Linie entsprechen muss, die mit beiden Enden im Fixpunkte der parabolischen Substitution endigt, deren Inneres ausserdem das eineindeutige Abbild W' der Fläche W ist. Weiter folgert man hieraus, dass es eine lineare Funktion $L(\zeta_1)$ der Grösse $\zeta_1(z)$ gibt, die sich in der Form

$$\log\,(z-a) + \mathfrak{P}(z-a)$$

darstellen lässt. Weiter bemerkt man jetzt, dass eine mit bestimmter Tangente im Punkte a endigende Linie der z-Ebene im ζ_1-Einheitskreise eine Bildlinie hat, die im parabolischen Fixpunkte, einen rechten Winkel mit dem Einheitskreise bildend, einläuft. Mit Bezug auf das Gebiet W' bemerken wir noch: Wird anstatt der Linie $|z-a| = \varrho$ eine passende, im allgemeinen nicht kreisförmige Linie zur Abgrenzung einer Umgebung des Punktes a gewählt, so wird das Gebiet W' selbst von einem Bahnkreis der parabolischen Umlaufsubstitution begrenzt, der den Einheitskreis im Fixpunkte der genannten parabolischen Substitution berührt.

Die Fläche E_0' weist in den Punkten a im ganzen $2(n-1)$ Eckzipfel auf. Aus dem Gesetz des relationenfreien Aufbaues der Fläche $E'^{(\infty)}$ aus Exemplaren E_0' ergibt sich sofort, dass zu diesen $2(n-1)$ Eckzipfeln ebenso viele voneinander ganz verschiedene Windungsflächenstücke der Fläche $E'^{(\infty)}$ gehören, in welche die erwähnten Eckzipfel eingehen. Diesen Windungsflächenstücken entsprechen nun auch ebensoviele verschiedene Kreisflächen W' im ζ_1-Einheitskreise, die folglich in $2(n-1)$ verschiedenen Punkten die Peripherie des Einheitskreises berühren. Das Bild der Fläche E_0', das ein Zweig der Funktion $\zeta_1(z)$ entwirft, ist nach dem Vorhergehenden ein $2(n-1)$-Eck Ψ_0, das mit $2(n-1)$ getrennten Spitzen orthogonal an die Peripherie des Einheitskreises anstösst. Die Seiten von Ψ_0 sind paarweise aufeinander bezogen durch $n-1$ lineare Substitutionen, die eine Gruppe Γ_0 erzeugen. Durch die Substitutionen dieser Gruppe entstehen unendlich viele Ψ_0-Bilder, die zusammen das ganze Innere des Einheitskreises ausfüllen.

Die unendlich vielen Ψ_0-Bilder haben je einen *Maximaldurchmesser*. Es kann jedoch nur endlich viele derselben geben, deren Maximaldurchmesser eine beliebig klein vorgegebene Grösse ε überschreitet. Das erkennt man folgendermassen: Wir denken uns den Bereich Ψ_0 in einen Kern und $2(n-1)$ Zipfel zerlegt, entsprechend den $2(n-1)$ Ecken des Bereiches Ψ_0. Die Zipfel denken wir uns durch parabolische Bahnkreise gegen den Kern abgegrenzt. Der Kern ist nun offenbar in einem mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreise $|\zeta_1| \leqq \varrho$ enthalten. Die Bilder dieser Kreisfläche vermöge Γ_0 müssen dann allmählich unendlich klein werdende Durchmesser bekommen, weil die Bilder des Nullpunktes sich offenbar allmählich der Peripherie des Einheitskreises unbegrenzt nähern. Damit ist gezeigt, dass die Kernbilder allmählich unendlich kleine Maximaldurchmesser bekommen. Betrachten wir nunmehr einen der parabolischen Zipfel, dann liegen zunächst unendlich viele Bilder dieses Zipfels in demselben Bahnkreis. Das sind diejenigen Bilder, die durch die Wiederholungen der zugehörenden parabolischen Substitution aus dem Zipfel entstehen. Diese Bildzipfel werden offenbar allmählich unendlich kleine Maximaldurchmesser erhalten. Ausserdem gibt es aber unendlich viele Bilder des Zipfels, die in anderen Bahnkreisen enthalten sind. Alle vermöge Γ_0 aus dem erst betrachteten Bahnkreis entstandenen weiteren Bahnkreise müssen aber voneinander durchaus getrennt liegen. Daraus folgt, dass nur endlich viele derselben einen Durchmesser oberhalb einer beliebig klein vorgebbaren Grösse haben können. Damit ist dann unser behaupteter Satz vollständig bewiesen. Denken wir uns also, dass wir den Bereich Ψ_0 allmählich gemäss Γ_0 erweitern, indem wir etwa bei jedem Schritte an jede Seite des erweiterten Bereichs ein neues Ψ_0-Bild anschliessen, so bekommen wir Gebiete, deren Begrenzungsseiten allmählich *gleichmässig unendlich klein werdende Maximaldurchmesser* bekommen.

10. *Die Funktion* »$\zeta_1(z)$ *über* F«. Die bisher als Funktion über der schlichten z-Ebene betrachtete Grösse $\zeta_1(z)$ werde nunmehr als Funktion auf der gege-

benen Riemannschen Fläche F betrachtet. Als solche ist sie in allen und nur den Punkten logarithmisch verzweigt, die über den Grundpunkten gelegen sind. Wir denken uns die Fläche in allen diesen Punkten punktiert. Die so aus F gewonnene Fläche werde mit F' bezeichnet. Ist q die Anzahl der Punktierungsstellen, so ist die Fläche F' $(2p+q)$-fach zusammenhängend. Man kann sie daher durch $2p+q-1$ getrennte Querschnitte von Punktierung zu Punktierung einfach zusammenhängend machen. Diese Querschnitte mögen folgendermassen näher bestimmt werden. Zunächst werden $2p$ Querschnitte Q von einer festen Punktierungsstelle nach derselben Punktierungsstelle zurückgeführt, die, für sich genommen, die unpunktierte Fläche F in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0 verwandeln. Danach werden $q-1$ weitere Querschnitte Q' gezogen, die die übrigen Punktierungsstellen in einer fortlaufenden Kette verbinden und deren letzter im gemeinschaftlichen Endigungspunkte der Q endigt. Die Fläche F' ist so in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0' verwandelt.

Denkt man sich die Fläche F_0' in unendlich vielen koinzidierenden Exemplaren bereit gestellt, so kann man jetzt durch relationenfreie Zusammenfügung dieser Exemplare eine von keiner Linie mehr begrenzte einfach zusammenhängende Fläche $F'^{(\infty)}$ herstellen, d. i. die zu F gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche mit den Punktierungsstellen als relativen Windungspunkten unendlich hoher Ordnung, zugleich die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche F' ohne relative Windungspunkte. Diese Fläche ist, wenn man sie als Fläche über der gewöhnlichen Ebene E betrachtet, eine in den Grundpunkten mit lauter Windungspunkten unendlich hoher Ordnung behaftete einfach zusammenhängende Fläche. Da es nur eine solche Fläche geben kann, so ergibt sich die Identität der Flächen $E'^{(\infty)}$ und $F'^{(\infty)}$. Die Funktion $\zeta_1(z)$ leistet darnach auch eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche $F'^{(\infty)}$ auf das Innere des Einheitskreises. Dabei geht das Grundexemplar F_0' in ein randbezogenes Spitzenpolygon Ψ_1 mit $2(2p+q-1)$ Seiten über. Die Randsubstitutionen des Bereichs Ψ_1 erzeugen ein Gruppe Γ_1, eine gewisse Untergruppe der Gruppe Γ_0. Bei Ausübung der Gruppe Γ_1 auf den Bereich Ψ_1 kommt es zu einer lückenlosen Erfüllung des Inneren des Einheitskreises. Die Maximaldurchmesser der Ψ_1-Bilder werden allmählich gleichmässig unendlich klein. Die Peripherie des Einheitskreises wird daher allmählich mit immer mehr Spitzen belegt, wobei kein noch so klein gewähltes Peripherieintervall unbelegt bleibt.

11. *Die Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ und die Funktion »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$». Der Verzweigungsgraph γ'' und die Fläche $F_0^{(\infty)\prime}$.* Unser Ziel ist die Bestimmung der Grösse $\zeta(z)$, die eine relativ unverzweigte Abbildung der Fläche F auf das Innere des Einheitskreises vermittelt, so zwar, dass jeder Wert nur einmal angenommen wird. Die Funktion $\zeta(z)$ ist eine über F erklärt zu denkende Funktion. In dieser Auffassung gehört zur Funktion $\zeta(z)$ eine der Fläche F übergelagert vorzustellende Riemannsche Fläche $F^{(\infty)}$, die keine relativen Windungspunkte hat und wegen des einfachen Zusammenhanges der Kreisfläche auch ihrerseits einfach zusammenhängend ist. Diese Fläche $F^{(\infty)}$ wird eben durch die zu bestimmende Funktion $\zeta(z)$ eineindeutig auf das Innere des ζ-Einheitskreises abgebildet.

Es ist nun wichtig, dass die Fläche $F^{(\infty)}$ durch ihre genannten Eigenschaften vollständig bestimmt ist und dass sie direkt konstruiert werden kann. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich sofort. Man braucht nur anzunehmen, man habe zwei solcher Flächen, so würde man sogleich eine Koinzidenzbeziehung zwischen beiden herstellen können, die ohne relative Verzweigung wäre und folglich wegen des einfachen Zusammenhanges eineindeutig sein müsste. Das bedeutet aber Identität der beiden Flächen; und für die Fläche $F^{(\infty)}$ selbst bedeutet es die Existenz unendlich vieler eineindeutiger Decktransformationen durch identische Zuordnung der relativen Blätter untereinander. Zur direkten Konstruktion der Fläche $F^{(\infty)}$ andrerseits braucht man nur unendlich viele koinzidierend übereinanderliegende Exemplare der Fläche F_0 so zusammenzufügen, dass tatsächlich ein einfach zusammenhängendes Ganze ohne relative Windungspunkte entsteht. Das Gesetz dieser Zusammenfügung kann man sich an Hand eines *Graphen* veranschaulichen. Dieser Graph entsteht folgendermassen: man zeichne in einer Ebene (schematische Ebene) ein krummliniges $4p$-Eck, entsprechend einem Grundblatt F_0. Nun füge man an dieses $4p$-Eck einen Kranz weiterer solcher $4p$-Ecke an; nämlich zunächst an jede Seite des ersten $4p$-Ecks ein neues $4p$-Eck, ausserdem weitere $4p$-Ecke so, dass in jeder Ecke des ersten im ganzen $4p$ $4p$-Ecke im Zyklus zusammenstossen. Dadurch entsteht eine neue Umrisskontur, die den angefügten Kranz aussen begrenzt, wobei man übersieht, dass diese Kontur ihrerseits neben einzipfligen auch zweizipflige Eckpunkte darbietet (wie schon im Falle $p = 1$ beim parallelogrammatischen Gitter). Nunmehr füge man an jede Seite der erhaltenen Umrisskontur wieder ein $4p$-Eck an und fülle weiter die Umgebung der Eckpunkte der Kontur wie vorher aus, sodass in jedem Eckpunkte $4p$ $4p$-Ecke im Zyklus zusammenstossen. Man hat so um den ersten Kranz einen zweiten Kranz von $4p$-Ecken gelegt. Die Gesamtfigur weist an ihrem Umriss wieder einzipflige und zweizipflige Eckpunkte auf. Das Verfahren ist unbeschränkt fortsetzbar. Es definiert uns den unendlichen *Graphen* γ. Das Netz des Graphen γ zeigt unmittelbar die Entstehung eines einfach zusammenhängenden kranzförmig aufgebauten Gesamtgebietes $[\gamma]$ aus $4p$-Ecken. Wir brauchen nur das gezeichnete Zusammenfügungsschema des Graphen γ zu befolgen, um aus unendlich vielen Exemplaren F_0, die dabei als $4p$-Ecke figurieren, die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ über F ohne relative Windungspunkte aufzubauen.

Auf der Fläche $F^{(\infty)}$ besitzt die Funktion $\zeta_1(z)$, auch mit »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$« bezeichnet, offenbar unendlich viele Relativverzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung, nämlich an allen über den n Grundpunkten der z-Ebene liegenden Punkten der Fläche $F^{(\infty)}$. Im Graphen γ wird ein Teil der relativen Verzweigungsstellen der Funktion $\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$ durch die Kreuzungspunkte des Graphen repräsentiert, in deren jedem $4p$ Polygone zusammenstossen.

Um zu einer präzisen Einsicht in die durch einen Zweig der Funktion »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$« geleisteten Abbildung zu gelangen, was für die Folge besonders wichtig ist, konstruieren wir eine Aufschneidung der Fläche $F^{(\infty)\prime}$, d. i. der in den unendlich vielen relativen Verzweigungspunkten punktierten Fläche $F^{(\infty)}$, zu einer einfach zusammenhängenden Fläche $F_0^{(\infty)\prime}$. Dazu gehen wir von dem Graphen γ aus.

Der Graph γ, der zunächst nur die Linien Q unmittelbar schematisch repräsentiert, nämlich durch seine sämtlichen Polygonseiten (Q), wird zunächst dadurch erweitert, dass in ihm auch die schematischen Bilder der Linien Q' in allen Parzellen eingetragen werden. Das einzelne solche Bild erscheint dann im Graphen als eine aus dem Inneren der Parzelle kommende, in einem Eckpunkte der betreffenden Parzelle endigende Folge von $q-1$ Linien (Q'). Der so erweiterte Graph γ werde mit γ' bezeichnet. Die sämtlichen Verzweigungspunkte der Funktion »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$« sind nunmehr im Graphen γ' ersichtlich. Dieselben werden nämlich dargestellt durch die Kreuzungspunkte des Graphen γ und die Endpunkte der Linien (Q'). Auf der Fläche $F^{(\infty)}$ denken wir uns ebenso in allen ihren relativen Blättern die Linien Q' eingetragen, sodass eine von den Linien Q und Q' auf $F^{(\infty)}$ gebildete Gesamtliniierung dieser Fläche vorliegt, deren Struktur durch den Graphen γ' veranschaulicht wird.

Die Aufgabe der einfach zusammenhängenden Aufschneidung der Fläche $F^{(\infty)\prime}$ lässt sich nun unmittelbar an Hand des Graphen γ' in übersichtlicher Weise leisten. Wir schneiden zunächst aus dem Graphen γ eine *Stammlinie* σ aus in folgender Weise. Ausgehend von einem Eckpunkte der Grundparzelle durchlaufen wir zunächst die Begrenzung derselben, jedoch nicht vollständig, sondern nur $4p-1$ Seiten. Dadurch sind alle $4p$ Eckpunkte der Grundparzelle tatsächlich einbezogen. Nun gehen wir von dem letzten angetroffenen Eckpunkte aus auf einer Seite des Graphen γ durch den ersten Parzellenkranz hindurch zur äusseren Kontur des ersten Kranzes über. Von dem Auftreffpunkte aus durchlaufen wir in irgend einem Sinne die Kontur des zweiten Kranzes unter Ausschluss der letzten Seite dieser Kontur. Vielmehr gehen wir von dem so erhaltenen letzten Endpunkte aus auf einer Seite des Graphen γ durch den zweiten Parzellenkranz hindurch zur Aussenkontur des zweiten Kranzes über, der nun wiederum durchlaufen wird bis auf die letzte dieser Kontur angehörende Seite u.s.w. Die so gewonnene Linie verbindet offenbar alle Polygonecken des Graphen γ untereinander. Sie heisse die *Stammlinie des zu konstruierenden Verzweigungsgraphen* γ''. Nunmehr nehmen wir zur Stammlinie die den Graphen γ zum Graphen γ' vervollständigenden Linien (Q') hinzu, die auf diese Weise an die Stammlinie gleichsam als *Äste* angeschlossen erscheinen. Das ganze so erhaltene, von der Stammlinie und den Ästen gebildete Liniensystem nennen wir den *Verzweigungsgraphen* γ''. Man bemerkt, dass an den einzelnen Eckpunkten der Stammlinie entweder kein Ast oder genau ein Ast angeschlossen ist. Das Bild des Verzweigungsgraphen γ'' auf $F^{(\infty)}$ ist ein Liniensystem, bestehend aus lauter Linien Q und Q', die in ihrem Verlauf mit den ursprünglich auf F gezeichneten koinzidieren. Dieses Liniensystem leistet die verlangte Aufschneidung der Fläche $F^{(\infty)'}$ zur einfach zusammenhängenden Fläche $F_0^{(\infty)'}$, was in der Graphenebene unmittelbar zu sehen ist.

Heften wir nun unendlich viele koinzidierende Exemplare $F_0^{(\infty)'}$ relationenfrei zusammen, wobei die einzelne Heftung immer längs einer Linie Q oder Q' zu erfolgen hat, so entsteht die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche $F^{(\infty)'}$, die wir konsequenterweise mit $F^{(\infty)'(\infty)}$ bezeichnen werden. Diese Fläche, als Ganzes genommen, ist nichts anderes als die Fläche $F'^{(\infty)}$, d. i. die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche F'. Ebenso ist sie nichts anderes als die Fläche $E'^{(\infty)}$, d. i. die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der schlichten Ebene E'.

Wir merken dies in der Form an:

$$E'^{(\infty)} = F'^{(\infty)} = F^{(\infty)'(\infty)}.$$

Die Funktion $\zeta_1(z)$ leistet die eineindeutige konforme Abbildung dieser drei wesentlich identischen Flächen auf das Innere des ζ_1-Einheitskreises.

12. *Der unendlich-vielseitige Fundamentalbereich $\tilde{\Psi}$ und die Gruppe $\tilde{\Gamma}$.* Nach dem Vorstehenden leistet die Funktion $\zeta_1(z)$ eine eineindeutige Abbildung der Fläche $F_0^{(\infty)'}$ auf einen unendlich-vielseitigen *Bereich* $\tilde{\Psi}$, dessen Seiten paarweise aufeinander bezogen sind. Der Aufbau dieses Bereiches aus Bildern des Bereiches Ψ_1 (s. pag. 72) ist an Hand des Verzweigungsgraphen γ'' vollständig zu übersehen. Es handelt sich nämlich um nichts anderes, als um diejenige Parzellenzusammenfügung des Graphengebietes $[\gamma]$, die man erhält, wenn man dieses Gebiet längs des Verzweigungsgraphen γ'' aufgeschnitten und die an γ'' nicht beteiligten Linien (Q) als Einteilungslinien dieses aufgeschnittenen Gebiets denkt. Man übersieht nun leicht, dass der Bereich $\tilde{\Psi}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet darstellt, das von unendlich vielen auf der Peripherie des Einheitskreises senkrecht aufstossenden Bögen begrenzt wird, die einen einzigen unendlich viele Spitzen aufweisenden Zug Λ bilden und paarweise durch lineare Substitutionen aufeinander bezogen sind, so jedoch, dass niemals zwei Paare über Kreuz bezogen erscheinen. Ferner kann man an dem Graphen γ'' unmittelbar ablesen, dass die Ecken des Bereichs $\tilde{\Psi}$ eingliedrige, zweigliedrige und dreigliedrige Eckenzykeln bilden, welch letztere den Ansatzpunkten der Äste im Graphen entsprechen. Alle diese Zykeln sind parabolische Zykeln. Da die einzelnen Seiten des Begrenzungszuges Λ ζ_1-Bilder von Linien Q und Q' sind, ergibt sich, dass die Maximaldurchmesser dieser Linien, wenn man den Begrenzungszug in der einen oder andern Richtung durchläuft, allmählich bestimmt unendlich klein werden. Die beiden asymptotischen Endpunkte des Linienzuges Λ fallen in ein und denselben *Begrenzungspunkt* Ω zusammen, sodass also der Begrenzungszug unsres unendlich-vielseitigen Fundamentalbereichs $\tilde{\Psi}$ die ganze Peripherie des Einheitskreises mit Ausnahme des einen Punktes Ω überspannt. Dies ergibt sich aus der Betrachtung des Verzweigungsgraphen γ'' ebenfalls unmittelbar, wenn man beachtet, dass man beliebig weit ausserhalb d. h. hinter jedem noch so weit gewähltem Kranze immer noch Seiten des Grundgraphen γ angeben kann, die die beiden verschiedenen Ufer des Graphen γ'' miteinander verbinden. Solche Seiten sind die bei Bildung der Stammlinie auf den Konturen der Kränze ausdrücklich übergangenen Seiten des Graphen γ.

Die unendlich vielen Bezugssubstitutionen des Bereichs $\tilde{\Psi}$ erzeugen eine *Gruppe* $\tilde{\Gamma}$, die eine Untergruppe des Index ∞ der Gruppe Γ_1 ist, mithin auch der Gruppe Γ_0. Wenden wir die Substitutionen dieser Gruppe auf den Bereich $\tilde{\Psi}$ an, so lagern sich unendlich viele Bilder desselben lückenlos nebeneinander und erfüllen das ganze Innere des ζ_1-Einheitskreises. Bedenkt man, dass die Randseiten des Bereichs $\tilde{\Psi}$ nur Q-Bilder oder Q'-Bilder sind, so kann man hinzufügen, dass die Maximaldurchmesser dieser $\tilde{\Psi}$-Bilder schliesslich gleichmässig unendlich klein werden. Darin liegt zugleich, dass die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ auf der Peripherie des Einheitskreises nicht mehr eigentlich diskontinuierlich ist, da sich nun offenbar unendlich viele parabolische Fixpunkte und unendlich viele Bilder des Punktes Ω ergeben, die sich überall auf der Peripherie des Einheitskreises häufen.

13. *Formaler Ansatz eines unendlichen Produktes (Hauptprodukt) zur Bestimmung der problematischen Funktion* $\zeta(\zeta_1)$. Die zu bestimmende Grösse $\zeta(z)$ leistet eine eineindeutige Abbildung der Fläche $F_0^{(\infty)'}$ auf das Innere des Einheitskreises, daher eine eineindeutige Abbildung der Fläche $F_0^{(\infty)}$ auf das längs eines gewissen Graphen (γ'', ζ) aufgeschnittene Innere des Einheitskreises. Der Graph (γ'', ζ) hat dieselbe Struktur, wie der Graph γ''. Die Seiten dieses Graphen sind alle ganz innerhalb des Einheitskreises enthalten und häufen sich nur gegen die Peripherie.

Die problematische Funktion $\zeta(\zeta_1) = \tilde{\varphi}(\zeta_1)$ leistet nun offenbar eine Abbildung des Fundamentalbereichs $\tilde{\Psi}$ auf die längs des Graphen (γ'', ζ) aufgeschnittene Fläche des ζ-Einheitskreises. Die Funktion kann durch diese Eigenschaft definiert werden. Sie ist geradezu eindeutig durch diese Bestimmung festgelegt, wenn wir noch vorschreiben, dass der Nullpunkt in sich selbst übergehen soll und dass die Ableitung im Nullpunkt positiv reell sein soll. Die Funktion $\zeta(\zeta_1)$ ist eine automorphe Funktion mit Bezug auf die Gruppe $\tilde{\Gamma}$.

Die angeführten Eigenschaften der Funktion $\zeta(\zeta_1)$ legen es nahe, das unendliche Produkt

$$\zeta_1 \prod_{\tilde{\Gamma}}{}' \frac{\zeta_1^{(n)}}{\omega_n}$$

anzusetzen, worin $\zeta_1^{(n)}$ die mit ζ_1 vermöge $\tilde{\Gamma}$ äquivalenten Werte exkl. ζ_1 selbst durchläuft, während ω_n die vermöge $\tilde{\Gamma}$ mit 0 äquivalenten Werte durchläuft. Die Auslassung der Grössen ζ_1 und 0 im unendlichen Produkt wird durch den dem Produktzeichen beigegebenen Akzent angedeutet.[1]

Unsere Untersuchung wird schliesslich ergeben, dass das angesetzte unend-

---

[1] POINCARÉ setzt in Acta math. Bd. 31, S. 42 ein analoges, doch irriges Produkt an, wo die konvergenzerzeugenden Faktoren fehlen. Demgegenüber ist der in Acta 4, S. 307 betrachtete Ansatz

$$\text{»}\log \bmod \frac{1}{t} = \sum \log \bmod \frac{\gamma_i z + \beta_i}{\alpha_i z + \delta_i}\text{«}$$

richtig. Die Untersuchung selbst hat bei POINCARÉ, wie schon pag. 33 unserer Abhandlung erwähnt wurde, einen hypothetischen Charakter. Bemerkungen zu direkten Versuchen macht POINCARÉ im Schlussparagraphen (§ 19) seiner Abhandlung in Acta Bd. 4 und in § 11 seiner Abhandlung in Acta Bd. 31.

liche Produkt für $p \geqq 2$ absolut und gleichmässig konvergent ist und die verlangte Abbildung des unendlich-vielseitigen Polygons $\tilde{\Psi}$ auf die schlichte Fläche eines Kreises leistet. Im Falle $p = 1$ werden wir sehen, dass das obige Produkt nicht absolut, sondern nur bedingt konvergiert und in dieser Auffassung eine Abbildung des Polygons $\tilde{\Psi}$ auf die ganze endliche Ebene leistet. Die im Falle $p \geqq 2$ geltende absolute Konvergenz wird sich jedoch erst nachträglich ergeben, nachdem wir auf dem Wege über den Nachweis bedingter Konvergenz die behauptete Abbildung gefunden haben.

Der unmittelbare Nachweis der absoluten Konvergenz unseres unendlichen Produktes würde möglich sein, wenn man die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tilde{\Gamma}}' \left|\zeta_1^{(n)} - \omega_n\right|$$

unmittelbar zeigen könnte. Hier stellt sich nun aber sofort die Kardinalschwierigkeit ein. Die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ ist auf der Peripherie des Einheitskreises uneigentlich diskontinuierlich; d. h.: es gibt kein Intervall auf der Peripherie, das bei Anwendung der Gruppe $\tilde{\Gamma}$ in lauter von einander getrennte Intervalle übergeführt würde. Vielmehr steht es so, dass bei Anwendung der Gruppe $\tilde{\Gamma}$ auf irgend einen Peripheriepunkt sich stets eine Punktfolge auf der Peripherie ergibt, die sich überall auf der Peripherie häuft. Andrerseits bemerken wir unmittelbar, dass bei Auswahl nur endlich vieler Seitenpaare des Polygons $\tilde{\Psi}$ die dadurch definierten endlich vielen Erzeugenden tatsächlich eine Gruppe liefern, die offenbar auf der Peripherie des Einheitskreises selbst eigentlich diskontinuierlich ist. Hiermit ist ein Ausgangspunkt der Überlegung dargeboten.

14. *Die Fundamentalbereiche $\tilde{\Psi}_\nu$ und die Untergruppen $\tilde{\Gamma}_\nu$ der Gruppe $\tilde{\Gamma}$.* Wir bestimmen zunächst eine unendliche Folge von Polygonen $\tilde{\Psi}_\nu$, die bei unbegrenzt wachsendem ν in das Polygon $\tilde{\Psi}$ übergehen. Eine solche Folge erhalten wir, wenn wir den Graphen γ'', der uns zur Definition des unendlich-vielseitigen Polygons $\tilde{\Psi}$ diente, seinerseits als Grenze eines endlichen Graphen γ'' auffassen. Diese Auffassung ist unmittelbar mit der Konstruktion des Graphen selbst, insbesondere seiner Stammlinie gegeben. Die Stammlinie besteht aus einem Zuge, der die sämtlichen Ecken des Graphen γ miteinander verbindet. Indem wir die Stammlinie von Ecke zu Ecke durchlaufen, gewinnen wir ohne weiteres eine natürliche Auffassung der Stammlinie σ als Grenze von Linien σ_ν. Weiter verknüpft sich unmittelbar damit auch die Auffassung des Graphen γ'' als Grenze eines endlichen Graphen γ_ν'', da γ'' aus der Stammlinie durch Hinzufügung der

Äste entsteht. Demgemäss werden wir γ_ν'' als denjenigen endlichen Teilgraphen von γ'' erklären, der durch den Endpunkt von σ_ν von dem Graphen abgetrennt wird, wobei wir noch nach Belieben, falls in dem erwähnten Eckpunkte ein Ast mündet, diesen hinzunehmen können oder nicht.

Dem Graphen γ'' entspricht der unendlich vielseitige Begrenzungszug $\varDelta$ des Polygons $\tilde{\Psi}$. Somit entspricht dem Graphen γ_ν'' ein aus endlich vielen Bögen gebildeter Teil $\varDelta_\nu$ von $\varDelta$, welcher Teil sich ebenso wie $\varDelta$ als ein einziger Zug darstellt. Die Seiten dieses Zuges sind paarweise aufeinander bezogen. Es wird uns also durch $\varDelta_\nu$ ein Fundamentalbereich $\tilde{\Psi}_\nu$ erklärt, dessen Begrenzung von dem Zuge $\varDelta_\nu$ und dem von $\varDelta_\nu$ nicht überspannten Teile $\varDelta_\nu'$ der Peripherie des Einheitskreises gebildet wird. Die Seitenpaarung des Polygons $\tilde{\Psi}_\nu$ ist solcher Art, dass niemals zwei Paare über Kreuz gepaart sind. Ferner können wir von den Spitzen des Polygons sagen, dass sie in eingliedrigen, zweigliedrigen oder höchstens dreigliedrigen parabolischen geschlossenen Zykeln zusammengehören, während die beiden rechtwinkligen Ecken von $\tilde{\Psi}_\nu$ in den Endpunkten von $\varDelta_\nu$ einen offenen hyperbolischen Zykel bilden, in den evt. eine einzelne Spitze eingeht, nämlich dann, wenn im Endpunkte des Graphen γ_ν'' ein Ast mündet, der zu γ_ν'' hinzugenommen worden ist.

Die durch $\tilde{\Psi}_\nu$ definierte Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ ist offenbar auch für das Äussere des Einheitskreises symmetrisch erklärt. Der so erweiterte Diskontinuitätsbereich der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ hat zum Fundamentalbereich den Bereich $\tilde{\tilde{\Psi}}_\nu$, der aus $\tilde{\Psi}_\nu$ durch Hinzufügung seines Spiegelbildes in Bezug auf den Einheitskreis entsteht. Der Bereich $\tilde{\tilde{\Psi}}_\nu$ durchsetzt den Einheitskreis längs des endlichen Intervalls $\varDelta_\nu'$. Bei Ausübung der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ auf den Bereich $\tilde{\tilde{\Psi}}_\nu$ kommt es zu einer Bedeckung der ganzen ζ_1-Ebene, wobei die Maximaldurchmesser der $\tilde{\tilde{\Psi}}_\nu$-Bilder allmählich unter jede Grenze herabsinken. Es ergibt sich jedoch eine unendliche diskrete Menge eigentlicher Grenzpunkte auf dem Einheitskreis, nach deren Herausnahme aus der Ebene eine punktierte Ebene entsteht, die das Gebiet $\varDelta_\nu$ eigentlicher Diskontinuität der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ vollständig darstellt. Aus der eigentlichen Diskontinuität der $\tilde{\Gamma}_\nu$ auf dem Einheitskreise folgt (1), dass die Summe der Längen aller Bilder jedes abgeschlossenen, keinen »Grenzpunkt» von $\varDelta_\nu$ enthaltenden Peripherieintervalls konvergiert; (2), dass die Summe der Umfänge aller Bilder jeder keinen Grenzpunkt von $\varDelta_\nu$ auf sich enthaltenden Kreislinie konvergiert; (3), dass die Summe der Abstände aller Bilder eines keinen Grenzpunkt von $\varDelta_\nu$ enthaltenden Punktepaares konvergiert, und zwar gleichmässig bei Beschränkung der Variabilität des Paares auf ein abgeschlossenes, keinen Grenzpunkt von $\varDelta_\nu$

enthaltendes Teilgebiet von Δ_ν; (4), dass die Summe der Peripherieabstände aller Bilder eines beliebigen Δ_ν entnommenen Punktes ζ_1 endlich ist. Vgl. § 6 der Abhandlung IV der Serie »Abhandlungen» in Acta math. Bd. 41.

15. *Das zu $\tilde{\Psi}_\nu$ und $\tilde{\Gamma}_\nu$ gehörende Teilprodukt $\varphi_\nu(\zeta_1)$. Abbildung des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ auf die Kreisfläche K_ν vom Radius R_ν.* Wir bilden nunmehr das unendliche Produkt

$$\zeta_1 \prod_{\tilde{\Gamma}_\nu}{}' \frac{\zeta_1^{(n_\nu)}}{\omega_{n_\nu}},$$

indem wir nämlich $\zeta_1^{(n_\nu)}$ und ω_{n_ν} alle diejenigen Werte der unendlichen, oben mit Bezug auf $\tilde{\Gamma}$ definierten Folge $\zeta_1^{(n)}$ und ω_n durchlaufen lassen, die durch die Untergruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ der Gruppe $\tilde{\Gamma}$ aus ζ_1 und o hervorgehen. Die Folge n_ν ist also bei dieser Auffassung eine bestimmte Teilfolge der natürlichen Zahlenfolge n. Die Summe

$$\sum_{\tilde{\Gamma}_\nu} | \zeta_1^{(n_\nu)} - \omega_{n_\nu} |$$

ist nach der dritten obigen Konvergenzbemerkung gleichmässig konvergent für variables ζ_1 bei Beschränkung dieser Grösse auf ein beliebiges abgeschlossenes Teilgebiet von Δ_ν. Weiter ist wegen der vierten Konvergenzbemerkung das unendliche Produkt

$$\prod_{\tilde{\Gamma}_\nu}{}' | \omega_{n_\nu} | = \frac{1}{R_\nu}$$

absolut konvergent und liefert einen von o verschiedenen Wert. Daraus folgt, dass das obige unendliche Produkt gleichmässig und absolut für jedes keinen Grenzpunkt enthaltende abgeschlossene Teilgebiet von Δ_ν konvergiert und in diesem Gebiet eine im allgemeinen reguläre analytische Funktion definiert, die nur im Nullpunkte und in den Punkten ω_{n_ν} und zwar von erster Ordnung verschwindet, ferner im Unendlichen und den mit ∞ äquivalenten Stellen, d. i. den Spiegelbildern der ω_{n_ν} in Bezug auf den Einheitskreis, unendlich erster Ordnung wird. Diese Funktion hat im Nullpunkte die Ableitung 1, da offenbar das Produkt Π' für $\zeta_1 = 0$ den Wert 1 bekommt. Die Funktion werde mit

$$\varphi_\nu(\zeta_1)$$

bezeichnet. Wir bemerken dann weiter, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ bei Ersetzung der Grösse ζ_1 durch eine mit ζ_1 vermöge einer Substitution von $\tilde{\Gamma}_\nu$ äquivalente Grösse sich nur um einen konstanten Faktor ändern kann. Bei einer solchen

Änderung wird nämlich der Komplex aller $\zeta_1^{(n_\nu)}$ nicht geändert; die Glieder des alten Produktes kehren daher im neuen Produkt wieder, nur durch konstante Faktoren modifiziert.

Setzt man in dem unendlichen Produkt für ζ_1 speziell einen Wert vom absoluten Betrage 1 ein, so haben auch die mit ihm äquivalenten Werte den absoluten Betrag 1. Daraus sieht man, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ auf dem Einheitskreis nur Werte von dem konstanten absoluten Betrag R_ν annimmt. Eine Folge hiervon ist, dass die genannten konstanten Faktoren jedenfalls vom absoluten Betrage 1 sein müssen. In Wahrheit werden wir nun aber sehen, dass diese konstanten Faktoren überhaupt gleich 1 sind. Der Nachweis dafür erfordert jedoch eine besondere Überlegung. —

Zunächst lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die den eingliedrigen parabolischen Zykeln entsprechenden Bezugssubstitutionen, die den freien Endpunkten des Graphen γ_ν'' entsprechen. Wir haben hier zwei in einem Punkte des Einheitskreises sich berührende Seiten von Ψ_ν zu betrachten, die durch eine parabolische Substitution gepaart sind, eine Erzeugende der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$. Denken wir uns einen Bahnkreis dieser parabolischen Substitution gezeichnet. Derselbe wird die betreffende parabolische Ecke in einem Bogen b durchsetzen, dessen Endpunkte durch die Substitution aufeinander bezogen sind. Üben wir auf b die parabolische Substitution aus, so erfüllen die Bilder den ganzen Bahnkreis. Üben wir jedoch die ganze Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ auf b aus, so ergibt sich die Erfüllung einer Gesamtheit von unendlich vielen Bahnkreisen, die sämtlich getrennt liegen und sich gegenseitig ausschliessen. Die Summe der Umfänge aller dieser Bahnkreise ist endlich; denn der Bogen b hat kleinere Länge als ein durch seine Endpunkte gelegter, den Bahnkreis senkrecht schneidender Kreis. Die Gesamtheit der Umfänge aller durch Γ_ν entstehenden Bilder dieses Kreises ist aber konvergent. Wählen wir einen kleineren, von erstgewähltem Bahnkreis umschlossenen Bahnkreis K', der die parabolische Ecke in einem Bogen b' durchsetzt, so ist wiederum die Summe der Umfänge aller K'-Bilder konvergent. Sie ist kleiner als die erste Summe, und man sieht sofort, dass diese Summe kleiner als eine beliebig kleine Grösse ε wird, wenn der Bahnkreis K' hinreichend klein gewählt wird. Nunmehr mögen auf b' irgend zwei Punkte ζ_1' und ζ_1'' gewählt werden. Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{\varphi_\nu(\zeta_1')}{\varphi_\nu(\zeta_1'')} = \frac{\zeta_1'}{\zeta_1''} \prod_{\tilde{\Gamma}_\nu}{}' \frac{\zeta_1'^{(n_\nu)}}{\zeta_1''^{(n_\nu)}}.$$

Da

$$\sum_{\tilde{\Gamma}_\nu} |\zeta_1'^{(n_\nu)} - \zeta_1''^{(n_\nu)}| < \varepsilon$$

wird, unter ε die vorher erwähnte Grösse verstanden, so ist der angeschriebene Quotient eine Grösse, die bei unendlich klein werdendem ε ihrerseits dem Werte 1 sich unbegrenzt nähert. Hieraus folgt insbesondere, wenn ζ_1' und ζ_1'' die Endpunkte des Bogens b' sind, also durch die betrachtete parabolische Substitution aufeinander bezogen sind, der Satz, dass der problematische konstante Faktor bei der betreffenden parabolischen Ecke nur gleich 1 sein kann. Die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ ist also gegenüber dieser parabolischen Substitution automorph.

Dazu kommt weiter, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ in der ganzen parabolischen Ecke, überhaupt für alle ζ_1, die $|\zeta_1| < 1$ genügen, beschränkt ist, nämlich

$$|\varphi_\nu(\zeta_1)| < \frac{1}{\Pi' |\omega_{n_\nu}|} = R_\nu.$$

Als Ergebnis der Betrachtung finden wir, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ in eine eindeutige beschränkte, also reguläre Funktion übergeht, wenn man die betrachtete parabolische Ecke in bekannter Weise mit Hilfe einer Exponentialgrösse auf die schlichte Umgebung eines Punktes abbildet.

Wir betrachten nunmehr die vom Bereiche $\tilde{\Gamma}_\nu$ dargebotenen zweigliedrigen parabolischen Eckenzykeln. Man kann dann die im Zykel vereinigten Ecken durch Anwendung von Substitutionen der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ zur Nebeneinanderlagerung bringen. Dabei müssen sie nach dem Begriff und entsprechend der Provenienz dieser Zykeln zusammen eine parabolische Ecke bilden, nämlich eine Ecke, deren beide im Eckpunkte zusammenstossenden Seiten durch eine parabolische Substitution aufeinander bezogen sind, die ihren Fixpunkt im Eckpunkt hat. Von dieser parabolischen Ecke ist ohne weiteres klar, dass sie bei Beschränkung auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft des Eckpunktes keine vermöge $\tilde{\Gamma}_\nu$ äquivalenten Punkte haben kann, abgesehen von den durch die erwähnte parabolische Substitution selbst zugeordneten Punkten der Begrenzungsseiten. Nunmehr können wir nach der für eingliedrige parabolische Zykeln angewandten Methode ohne weiteres schliessen, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ bei Ausübung der betrachteten parabolischen Substitution ungeändert bleibt und im Eckpunkte selbst beschränkt und im übertragenen Sinne regulär ist.

Die vorstehenden Resultate genügen nun aber vollständig, um den Schluss zu ziehen, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ gegenüber allen Randsubstitutionen des Bereichs $\tilde{\Gamma}_\nu$, mithin überhaupt gegenüber allen Substitutionen der Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ ungeändert bleibt. Um dies einzusehen, denke man sich die für die einzelnen Randsubstitutionen bestehenden Multiplikatoren der Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ den entsprechenden »Linien» des Graphen γ_ν'' zugewiesen. Dann besagt das bezüglich der Multiplikatoren gewonnene Resultat, dass alle frei endigenden »Linien» des Graphen den Multiplikator 1 tragen, während für die übrigen, noch unbekannten Multiplikatoren der Satz besteht, dass die Produkte um jede Ecke herum den Wert 1 ergeben. Hieraus ergibt sich aber leicht sukzessive, dass alle Multiplikatoren gleich 1 sind.

Nunmehr finden wir die durch die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ geleistete konforme Abbildung des Fundamentalbereichs $\tilde{\Psi}_\nu$.

Wir erinnern daran, dass diese Funktion auf dem Randintervall Δ_ν' des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ regulär ist und dass das Bild dieser Linie eine geschlossene Kreislinie K_ν wird, deren Radius R_ν durch den Ausdruck

$$R_\nu = \frac{1}{\Pi' |\omega_{n_\nu}|}$$

dargestellt wird. Die Kreislinie wird, einer einfachen Durchlaufung des Intervalls Δ_ν' entsprechend, genau einmal und zwar in gleichem Sinne durchlaufen. Durchläuft nämlich ζ_1 den Bogen Δ_ν', so durchlaufen die $\zeta_1^{(n_\nu)}$ des unendlichen Produktes die unendlich vielen Bilder dieses Bogens und zwar offenbar gleichsinnig. Die Produktgrösse selbst führt also ebenfalls eine gleichsinnige Bewegung auf dem Kreise K_ν aus. Da nun die Amplitudenänderungen der Grössen ζ_1 und $\zeta_1^{(n_\nu)}$ auf ihren Bögen eine endliche Gesamtsumme ergeben, die wegen Fehlens jeder teilweise gegenseitigen Überdeckung der Bögen untereinander offenbar $\leqq 2\pi$ bleibt, so ergibt sich für die Amplitudenänderung der Grösse $\varphi_\nu(\zeta_1)$ auf Δ_ν' ebenfalls, dass sie $\leqq 2\pi$ ist, woraus, da sie jedenfalls ein Vielfaches von 2π sein muss, folgt, dass sie $= 2\pi$ ist.

Weiter betrachten wir für einen Augenblick nochmals die oben bereits untersuchten parabolischen Ecken und parabolischen Eckenzykeln. Wir hatten gesehen, dass die Ecken und Eckenzykeln in übertragenem Sinne (vermöge lokaler Hilfsabbildung) reguläre Eckenelemente der Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ liefern. Die Werte, welche die Funktion in diesen Eckenelementen annimmt, sind ferner für einen Bogen b (Ausschnitt aus einem Bahnkreise wie oben) dem absoluten Betrage nach kleiner als R_ν, weil dies allgemein für $\zeta_1 < 1$ gilt. Der Linie b entspricht aber in der Ebene der erwähnten lokalen Hilfsvariablen eine geschlossene Linie, in deren Innerem die übertragene Funktion, wie gesagt, regulär ist. Daraus ergibt sich, dass der Wert, den die Funktion im Eckpunkte selber besitzt, ebenfalls, absolut genommen, kleiner als R_ν ist.

Die konforme Abbildung des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ unter Einbeziehung der parabolischen Eckpunkte und des Randstückes Λ_ν' kann nun mit Hilfe endlich vieler regulärer Funktionselemente vollständig dargestellt werden. Das Bild des so aufgefassten ränderbezognen Bereichs wird demnach ein gewisses ganz normales Riemannsches Flächenstück, vollständig im Kreise K_ν gelegen und nur von dem einfach durchlaufen zu denkenden Kreise K_ν begrenzt, da wir es entsprechend der Ränderzuordnung des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ in sich verheftet denken. Dieses Flächenstück muss dann mit der schlichten Fläche der Kreises K_ν selbst identisch sein; denn es muss wegen des Fehlens von Grenzpunkten innerhalb des Kreises K_ν überall gleichvielblättrig sein.

Jetzt bemerken wir, dass die Werte der Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ in den parabolischen Eckpunkten von o verschieden sein müssen, da schon der Punkt $\zeta_1 = 0$ als Bild den Nullpunkt hat. Die tatsächliche Abbildung durch die Funktion

$$\varphi_\nu(\zeta_1) = \zeta_\nu$$

erfolgt also auf die längs eines dem Graphen γ_ν'' strukturgleichen Graphen $(\gamma_\nu'', \zeta_\nu)$ aufgeschnittene schlichte Kreisfläche K_ν. Der Graph $(\gamma_\nu'', \zeta_\nu)$ trifft dabei den Nullpunkt nicht und endigt in einem einzigen Punkte der Peripherie des Kreises K_ν.

16. *Grenzübergang zur Funktion $\varphi_\infty(\zeta_1)$. Gewinnung der Grösse ζ.* Die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ war durch ein, wie wir sahen, absolut konvergentes Teilprodukt $\zeta_1 \underset{\tilde{\Gamma}_\nu}{\Pi'}$ des hinsichtlich seiner Konvergenz noch problematischen Hauptproduktes $\zeta_1 \underset{\tilde{\Gamma}}{\Pi'}$ erklärt. Indem wir nunmehr ν alle Werte durchlaufen lassen, gehen wir zu immer umfassenderen Teilprodukten des Hauptproduktes über, wobei jedes Produkt mit kleinerem Index als Teil in jedem folgenden enthalten ist. Wir wenden unsre Aufmerksamkeit auf die Folge der Funktionen $\varphi_\nu(\zeta_1)$. Diese Funktionen sind uns, unabhängig von ihrer Produktdefinition, durch ihre Abbildungseigenschaft wesentlich definiert: Abbildung des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ auf die Kreisfläche K_ν mit dem Radius R_ν, wobei $\varphi_\nu'(0) = 1$ ist. Aus der Produktdefinition des Radius R_ν folgt unmittelbar

$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots,$$

eben weil die Gruppe $\tilde{\Gamma}_\nu$ nur ein Teil der Gruppe $\tilde{\Gamma}_{\nu+1}$ ist. Wir beschreiben um den Nullpunkt der ζ_1-Ebene als Mittelpunkt eine Kreislinie K'', ausserdem eine etwas kleinere solche Kreislinie K' und eine noch kleinere K, die alle drei die Begrenzung des Bereichs $\tilde{\Psi}$ nicht treffen. Die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ vermittelt eine schlichte Abbildung der Kreisfläche K'' auf ein endliches Gebiet, wobei das Vergrösserungsverhältnis an der Nullstelle gleich 1 ist. Daraus schliessen wir nach Hilfssatz VI, dass die Funktionen $\varphi_\nu(\zeta_1)$ in K' beschränkt sind, und daraus weiter, dass es eine wachsende Indexfolge

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$$

gibt, für welche die Funktionenfolge

$$\varphi_{\nu_\lambda}(\zeta_1) \qquad [\lambda = 1, 2, 3, \ldots]$$

im Kreise K gleichmässig gegen eine Grenzfunktion

$$\varphi_\infty(\zeta_1) = \zeta_\infty$$

konvergiert. Diese Grenzfunktion leistet ebenfalls eine schlichte Abbildung der Kreisfläche K mit der Ableitung 1 im Nullpunkte.

Ist diese Grenzfunktion für das ganze Innere des Bereichs $\tilde{\Psi}$ mit Einschluss seiner zugeordneten Ränder und seiner Ecken erklärbar, und was für eine Abbildung leistet sie von dem Bereich $\tilde{\Psi}$?

Um hierüber Aufschluss zu erhalten, machen wir zuvörderst noch eine Bemerkung betreffend die durch die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ vermittelte Abbildung.

Wir wissen, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ den Bereich $\tilde{\Psi}_\nu$ auf eine ζ_ν-Kreisfläche K_ν vom Radius R_ν abbildet. Die Ränderbeziehung des Bereichs $\tilde{\Psi}_\nu$ erscheint in der ζ_ν-Ebene als identische Zuordnung gegenüberliegender Uferpunkte des Graphen $(\gamma_\nu'', \zeta_\nu)$ wieder. Andrerseits entspricht der betrachteten Ränderzuordnung auch in der z-Ebene eine identische Zuordnung. Es entspricht ja dem Bereiche $\tilde{\Psi}$ in der z-Ebene der Bereich $F_0^{(\infty)\prime}$, d. i. die längs eines auf $F^{(\infty)}$ gezeichneten Graphen $(\gamma'', F^{(\infty)})$ von der Struktur γ'' aufgeschnittene Fläche $F^{(\infty)\prime}$. Denken wir uns diese Aufschneidung längs des Teilgraphen $(\gamma_\nu'', F^{(\infty)})$ rückgängig gemacht, d. h. wieder Uferverheftung vorgenommen, so entsteht eine einfach zusammenhängende Fläche $F_{0,\nu}^{(\infty)\prime}$, die, wie wir jetzt sofort erkennen, durch die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1(z))$ auf ein schlichtes Teilgebiet der Kreisfläche K_ν abgebildet wird. Diese Fläche geht nun aber mit wachsendem Index ν tatsächlich in die Fläche $F^{(\infty)}$, nämlich die einfach zusammenhängende unverzweigte Überlagerungsfläche der Fläche F über; was man sofort durch einen Blick auf die schematische Ebene erkennt. Denken wir uns das längs γ'' aufgeschnittene Netzgebiet $[\gamma]$ längs γ_ν'' wieder verheftet, so bedeutet das für wachsendes ν, dass allmählich ein beliebig viele Kränze umfassendes, somit beliebig grosses Teilgebiet des Netzbereiches unaufgeschnitten gedacht werden soll. Die Fläche $F^{(\infty)}$, als Resultat des Aufbaus nach dem Prinzip der kranzförmigen Erweiterung betrachtet, möge mit

$$\lim_{\mu=\infty} F^{(\mu)} = F^{(\infty)}$$

bezeichnet werden, wobei dann eben $F^{(\mu)}$ die nach Hinzufügung von μ Kränzen aus der Grundparzelle F_0 entstandene einfach zusammenhängende Teilfläche von $F^{(\infty)}$ bezeichnet. Die oben mit $F^{(\infty)\prime}_{0,\nu}$ bezeichnete Fläche enthält die Flächen $F^{(\mu)}$ bis zu einem gewissen Index $\mu = \mu_\nu$, der in der schematischen Ebene sofort erkennbar ist. Die Anbringung eines neuen Kranzes erfolgt bei wachsendem Index ν offenbar dann, wenn die Stammlinie eine Kranzkontur verlässt, um zur nächsten Kranzkontur hinüber zu führen.

Der Fläche $F^{(\mu_\nu)}$ entspricht im Bereiche $\tilde{\Psi}_\nu$ ein Teilbereich $\tilde{\Psi}^{(\mu_\nu)}_\nu$, der nur mit endlich vielen Spitzen an die Peripherie des Einheitskreises heranreicht. Das Bild dieses Bereichs im ζ_ν-Kreise K_ν ist ein Teil dieser Kreisfläche, welcher Teil somit eineindeutiges schlichtes Bild des einfach zusammenhängenden Bereiches $F^{(\mu_\nu)}$ ist. Die Definition der $\tilde{\Psi}^{(\mu_\nu)}_\nu$ lässt erkennen, dass diese Bereiche bei unbegrenzt wachsendem ν, womit dann zugleich μ_ν unbegrenzt wächst, ihrerseits wachsen und schliesslich in den Bereich $\tilde{\Psi}$ selbst übergehen.

Nach den vorstehenden Bemerkungen wollen wir zu unsrer im Kreise K der ζ_1-Ebene konvergenten Folge $\varphi_{\nu_\lambda}(\zeta_1)$ zurückkehren. Wir betrachten diese Funktionen jetzt alle in Abhängigkeit von der Grösse $\zeta_k = \varphi_k(\zeta_1)$, d. h. wir betrachten die Funktionen

$$\zeta_{\nu_\lambda}(\zeta_k) \quad [\nu_\lambda > k].$$

Der Bereich $F^{(\mu_k)}$ wird durch $\varphi_k(\zeta_1)$ schlicht abgebildet auf einen Bereich B_k der ζ_k-Ebene. In diesem Bereich B_k sind die genannten Funktionen alle regulär erklärt; und zwar leistet jede eine schlichte eineindeutige Abbildung von B_k mit der Ableitung 1 an der Nullstelle. Daraus folgt, weil die Funktionen in einer kleinen Umgebung der Nullstelle $\zeta_k = 0$ konvergent sind, dass diese gleichmässige Konvergenz für das ganze Gebiet B_k (präzise ausgedrückt, für jedes Teilgebiet von B_k) gilt und dass also die Funktion $\zeta_\infty(\zeta_k)$ auch noch eine schlichte Abbildung von B_k vermittelt. Bedenkt man jetzt, dass k beliebig gross gewählt werden kann, was einer vollen Ausschöpfung der Fläche $F^{(\infty)}$ entspricht, so findet man das

Resultat, dass die Funktion $\varphi_{(\infty)}(\zeta_1)$, betrachtet als Funktion von z, tatsächlich eine eineindeutige schlichte Abbildung der Fläche $F^{(\infty)}$ auf ein schlichtes Gebiet G der ζ_∞-Ebene leistet. Das Gebiet G kann sich dabei möglicherweise bis ins Unendliche erstrecken. Das Gebiet G erscheint zugleich als Bild des Bereiches $\tilde{\Psi}$. Die Funktion $\zeta_\infty(\zeta_1)$ ist im ganzen Bereiche $\tilde{\Psi}$ einschliesslich seiner Begrenzung Δ, auch einschliesslich aller Ecken von Δ (in übertragenem Sinne) regulär, ausschliesslich jedoch des Punktes Ω, d. des beiderseitigen Endpunktes des Linienzuges Δ. Gemäss der Ränderbeziehung des Bereiches $\tilde{\Psi}$ erscheint der Bereich G mit einem Graphen (γ'', G) behaftet, der die Ränderzuordnung des Bereiches $\tilde{\Psi}$ widerspiegelt.

Es soll nun gezeigt werden, dass das Gebiet G eine Kreisfläche mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist, deren Radius durch den Ausdruck

$$R = \lim_{\nu=\infty} R_\nu = \frac{1}{\prod\limits_{\tilde{\Gamma}}' |\omega_n|}$$

dargestellt wird, ein Ausdruck, der auch die Grösse ∞ darzustellen vermag, nämlich dann, wenn der Grenzwert des Produktes im Nenner Null wird. Tatsächlich wird dieser Fall, wie wir sehen werden, eintreten, wenn das Geschlecht p der Fläche F gleich 1 wird, aber auch nur dann.

Wir machen zu dem Zwecke der Durchführung des Beweises die Unterscheidungen

(1) $$0 < \prod_{\tilde{\Gamma}}' |\omega_n| < 1, \qquad d.\,i.\ R = \text{endliche Grösse}$$

(2) $$\prod_{\tilde{\Gamma}}' |\omega_n| = 0, \qquad d.\,i.\ R = \infty.$$

Im ersten Falle bleiben die R_ν, die ja eine wachsende Folge von Grössen bilden, sämtlich unterhalb R. Die Kreisflächen K_ν gehen mit wachsendem ν in die endliche Kreisfläche K_∞ mit dem Radius R über. Wir können dann ohne weiteres schliessen, dass das Gebiet G einen Teil der Fläche K_∞ bilden muss. Wir behaupten aber die Identität beider Bereiche. Dazu betrachten wir die Grössen $\zeta_{\nu\lambda}$ nunmehr als Funktionen der Grenzvariablen ζ_∞, d. h. als in G erklärte Funktionen. Diese Erklärung ist, da G ein eindeutiges Abbild von F_∞ ist, durch Übertragung sofort gegeben. Den Graphen γ und γ'' entsprechen im Bereiche G bestimmte Graphen (γ, G) und (γ'', G). Den Bereichen $F^{(\mu)}$ entsprechen Bereiche $G^{(\mu)}$, die mit wachsendem Index das Gebiet G vollständig ausschöpfen. Die Funktion $\zeta_{\nu_\lambda}(z)$ leistet eine eineindeutige Abbildung des Bereichs $F^{(\mu_{\nu_\lambda})}$ auf einen gewissen schlichten Teilbereich der Kreisfläche K_{ν_λ}. Die Grösse ζ_{ν_λ}, als Funktion in G betrachtet, ist mit $\zeta_{\nu_\lambda}(\zeta_\infty)$ zu bezeichnen. Als solche leistet sie eine eineindeutige Abbildung der Fläche $G^{(\mu_{\nu_\lambda})}$ auf den erwähnten Teilbereich von K_{ν_λ}, wobei für alle diese Funktionen die Ableitung im Nullpunkte einen vom Index unabhängigen festen, von o verschiedenen Wert hat. Die Grenzfunktion der Funktionenfolge $\zeta_{\nu_\lambda}(\zeta_\infty)$ ist die identische Funktion $\zeta_\infty(\zeta_\infty)$. Diese leistet die Abbildung der ganzen Fläche G auf sich selbst. Betrachten wir nun aber die Umkehrungsfunktionen derselben Folge, so bemerken wir, dass die einzelne für das Gebiet K_{ν_λ} regulär ist, und nur Werte innerhalb G annimmt, also beschränkt ist. Daraus ergibt sich, dass die Grenzfunktion der Folge der Umkehrungsfunktionen in dieser Eigenschaft als Grenzfunktion für das ganze Innere der Fläche K existiert und das Innere der Kreisfläche K auf ein Gebiet abbildet, das in G enthalten sein muss. Die Grenzfunktion ist aber wieder die identische Funktion, d. h. es würde die Fläche K durch Identität auf einen Teil von sich selbst bezogen werden, was unmöglich ist.

Wir untersuchen jetzt die Möglichkeit 2): $\underset{\bar{r}}{\Pi'}|\omega_n| = 0$. Dann würden also die Kreisflächen K_ν allmählich die ganze Ebene ausschöpfen. Es ist zu zeigen, dass in diesem Falle das Gebiet G mit der ganzen Ebene identisch ist. Nehmen wir zunächst an, G sei ein beschränktes Gebiet, so würde das Schlussverfahren, das wir soeben anwandten, als Grenzfunktion der Umkehrungsfunktionen eine für die ganze Ebene erklärte Funktion liefern, deren Wertevorrat gleichwohl beschränkt ist. Die Grenzfunktion, d. i. die identische Funktion, wäre danach eine Konstante, was widersinnig ist. Also ist die erste Annahme über die Gestalt von G nicht zutreffend. Nehmen wir nun an, das Gebiet G, das jedenfalls einfach zusammenhängend ist, erstrecke sich zwar bis ins Unendliche, seine Begrenzung werde jedoch nicht vom unendlich fernen Punkte allein gebildet. Alsdann kann man das Gebiet G einer elementaren Transformation unterwerfen, wodurch es in ein durchaus endliches Gebiet verwandelt wird; dabei kann man übrigens den Nullpunkt festlassen. Betrachtet man nun die Grössen ζ_{ν_λ} in Abhängigkeit von der so transformierten Grösse ζ_∞, so gelangt man zu einem analogen Widerspruch wie soeben.

Damit ist gezeigt, dass die Grösse

$$\zeta_\infty = \lim_{\lambda=\infty} \varphi_{\nu_\lambda}(\zeta_1) = \lim \zeta_{\nu_\lambda}$$

im Falle eines endlichen R die mit R multiplizierte gesuchte Grösse ζ, im Falle $R=\infty$ direkt die gesuchte Grösse ζ darstellt, die die Fundamentalabbildung der Fläche F ohne Relativverzweigung leistet. Jetzt können wir aber auf Grund früherer Bemerkungen den Schluss ziehen, dass

$$\text{im Falle } p \geqq 2 \quad \Pi'_{\tilde{\Gamma}} |\omega_n| > 0, \text{ also } R \text{ endlich}$$

$$\text{im Falle } p = 1 \quad \Pi'_{\tilde{\Gamma}} |\omega_n| = 0, \text{ also } R = \infty$$

sein muss. Weiter ergibt sich aus der eindeutigen Bestimmtheit der Grenzvariablen durch ihre Abbildungs- und Normierungseigenschaft, dass die gleichmässige Konvergenz gegen die Grösse ζ_∞ auch unabhängig von irgend einer Auswahl besteht, dass man also hat

$$\zeta_\infty = \lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(\zeta_1) = \lim_{\nu=\infty} \zeta_1 \prod_{\tilde{\Gamma}_\nu}{}' \frac{\zeta_1^{(n_\nu)}}{\omega_{n_\nu}},$$

$$\text{d. h. } \zeta_\infty = \zeta_1 \prod_{\tilde{\Gamma}}{}' \frac{\zeta_1^{(n)}}{\omega_n},$$

letzteres Produkt verstanden im Sinne eines durch die vorherige Gleichung erläuterten *bedingt konvergenten* Produktes.

17. *Unbedingte Konvergenz des Hauptproduktes der Nummer* 13 *für* $p \geqq 2$, *bedingte Konvergenz für* $p=1$. Von dem in Vorhergehendem als bedingt konvergent festgestellten unendlichen Produkt wollen wir zum Schluss zeigen, dass es *für* $p \geqq 2$ sogar *absolut konvergent* ist, während es *für* $p=1$ in der Tat *nur bedingt konvergent* ist.

Es werde um den Nullpunkt der ζ_1-Ebene als Mittelpunkt ein Kreis K_0 vom Radius ϱ_0 beschrieben. Diesem Kreise entsprechen vermöge $\tilde{\Gamma}$ unendlich viele Bildkreise K_n, die die entsprechenden Punkte ω_n umschliessen. Mit $2\varrho_n$ werde der Durchmesser, mit δ_n der Abstand des Kreises K_n von der Peripherie des Einheitskreises bezeichnet. Ferner werde mit $2\lambda = 4 \operatorname{arc\,tg} \varrho_0$ der Winkel bezeichnet, den ein den Kreis K_0 berührendes Kreisbogenzweieck mit den Eckpunkten ± 1 in diesen Eckpunkten bildet. Unterwirft man den Kreis K_0 linearen Transformationen, die den Einheitskreis und das Kreisbogenzweieck unter Festhalten der Punkte ± 1 in sich transformieren, wobei der Bildpunkt ω_n des Nullpunktes sich unbegrenzt dem Punkte $+1$ nähern möge, so ergibt sich bei $+1$ eine infinitesimale Grenzkonfiguration von unmittelbar erkennbarer Gestalt. Beachtet man dies, so findet man sofort folgende Grenzrelationen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{\delta_n + \varrho_n} = \sin\lambda$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{\delta_n} = \frac{\sin\lambda}{1-\sin\lambda}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{1-|\omega_n|} = \operatorname{tg}\lambda$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\delta_n}{1-|\omega_n|} = \frac{1-\sin\lambda}{\cos\lambda}.$$

Befinden wir uns nun im Falle $p \geqq 2$, so ergibt sich aus $\underset{\tilde{\Gamma}}{\Pi'}|\omega_n|>0$ die Endlichkeit der Summe $\Sigma(1-|\omega_n|)$, daraus wegen der zweiten Limesrelation die Endlichkeit der Summe $\Sigma\varrho_n$ und daraus für $|\zeta_1|<\varrho_0<1$ die Endlichkeit der Summe $\Sigma|\zeta_1^{(n)}-\omega_n|$. D. h. das unendliche Produkt ist in der Tat absolut und gleichmässig konvergent.

Befinden wir uns andrerseits im Falle $\Pi'|\omega_n|=0$, so folgt daraus sofort die Unendlichkeit der Summe $\Sigma(1-|\omega_n|)$, daraus die Unendlichkeit der Summen $\Sigma\varrho_n$ und $\Sigma\delta_n$. Es werde nun $|\zeta_1|=\varrho_0$ gewählt. Dann befindet sich der Punkt $\zeta_1^{(n)}$ auf der Kreislinie K_n und man hat

$$|\zeta_1^{(n)}-\omega_n|>1-|\omega_n|-\delta_n=(1-|\omega_n|)\left(1+\frac{\delta_n}{1-|\omega_n|}\right),$$

$$\text{mithin } \Sigma|\zeta_1^{(n)}-\omega_n|=\infty.$$

18. *Behandlung der Flächen vom Geschlecht* $p=0$. Zum Schlusse dieses Abschnittes kommen wir noch einmal auf die Flächen vom Geschlechte 0 zurück. Auch diese Flächen lassen sich nach der Methode der unendlichen Produktbildung behandeln. Wir denken uns die Fläche F in gewohnter Weise über den Grundpunkten in allen Blättern punktiert. Sei q die Anzahl der Punktierungsstellen. Die punktierte Fläche F werde wieder mit F' bezeichnet. Wir konstruieren auf F' $q-1$ die Punktierungsstellen verbindende Querschnitte, wodurch wir diese Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0' verwandeln. Die Funktion $\zeta_1(z)$ leistet eine eineindeutige Abbildung der Fläche F_0' auf einen Bereich Ψ_1 mit $2(q-1)$ paarweise und niemals über Kreuz bezogenen Seiten. Der Bereich Ψ_1 reicht mit $2(q-1)$ Spitzen an den Einheitskreis heran. Den Nullpunkt den-

ken wir uns im Innern des Bereichs Ψ_1 liegend als Bild eines Punktes O der Fläche F_0'. Die Rolle der Fläche $F^{(\infty)}$ wird jetzt von der Fläche F selbst übernommen. Die Bestimmung der Variablen ζ kommt darauf hinaus, den Bereich Ψ_1 selbst durch eine automorphe Funktion der durch die Randsubstitutionen von Γ_1 erzeugten Gruppe auf die schlichte Vollebene abzubilden. Der naheliegende Ansatz

$$\zeta_1 \prod_{\Gamma_1}{}' \frac{\zeta_1^{(n)}}{\omega_n}$$

ist unbrauchbar, weil im vorliegenden Falle die Summe der Abstände der Grössen ω_n vom Einheitskreis unendlich ist. Wäre diese Summe nämlich endlich, so würde daraus die absolute Konvergenz des Produktes folgen und die durch das Produkt dargestellte Funktion würde nach den früheren Beweisgründen im ganzen Bereiche Ψ_1 mit Einschluss der Ecken regulär und automorph sein. Diese Funktion würde, auf F übertragen, in der ganzen Fläche F eindeutig und regulär sein, folglich sich auf eine Konstante reduzieren müssen. Die Funktion könnte jedoch andererseits keine Konstante sein, da sie z. B. in der Umgebung der Stelle $\zeta_1 = 0$ nur in diesem Punkte selbst verschwindet.

Wir können uns jedoch folgendermassen helfen. Wir greifen irgend einen der $q-1$ gezogenen Querschnitte, Q_*', heraus. Die zu bestimmende Grösse $\zeta(z)$ denken wir uns in der Weise normiert, dass sie in dem einen Endpunkte des Querschnittes Q_*' verschwindet, im anderen unendlich wird, während sie im Punkte O den Wert 1 annimmt. Wir lassen dann anstelle der Grösse ζ die Grösse $\log \zeta$ treten, die ihrerseits eine Abbildung der Fläche F mit Relativverzweigung unendlich hoher Ordnung in den Endpunkten des Querschnittes Q_*' bewirkt. Diese Abbildung erfolgt auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes. Die Riemannsche Fläche $\overset{(\infty)}{F}$ der Grösse »$\log \zeta(z)$ über F« kann unmittelbar durch Zusammenfügung unendlich vieler Exemplare längs Q_*' allein aufgeschnitten gedachter Flächen F hergestellt werden. Die Grösse $\zeta_1(z)$ entwirft ein Bild der Fläche $\overset{(\infty)}{F}$, das aus Ψ_1 durch Ausübung der positiven und negativen Potenzen der dem Schnitt Q_*' entsprechenden Randsubstitution des Bereiches Ψ_1 entsteht. Der so aus Ψ_1 hervorgehende unendlich-vielseitige Gesamtbereich werde mit $\overset{(\infty)}{\Psi}$ bezeichnet. Seine Begrenzung weist unendlich viele parabolische Eckenzykeln und zwei oder auch nur einen Grenzpunkt Ω auf. Der Bereich $\overset{(\infty)}{\Psi}$ erzeugt eine Gruppe $\overset{(\infty)}{\Gamma}$, mit

Bezug auf welche jetzt das unendliche Produkt offenbar bedingt konvergent ist bei Zugrundelegung des Prinzips der allmählichen Gruppenausschöpfung, das wir früher anwandten. Die durch dieses Produkt dargestellte Funktion leistet dann eine Abbildung auf eine Kreisfläche, deren Radius im vorliegenden Falle nur unendlich sein kann. D. h., wir haben damit wesentlich die Grösse $\log \zeta$ gewonnen, folglich auch ζ selbst.

Die erwähnte jetzt gemeinte Gruppenausschöpfung mag noch etwas erläutert werden. Das zur Aufschneidung der Fläche F' benutzte Querschnittsystem bildet auf der Fläche F einen baumartigen Graphen, d. i. einen solchen Graphen, der keinen geschlossenen Zug in sich enthält. Denken wir uns in diesem Graphen den oben benützten Querschnitt Q_*' gelöscht, so erhalten wir in der Regel zwei baumartige Teilgraphen. Diese beiden Teilgraphen erscheinen auf der Fläche $\overset{(\infty)}{F}$ in jedem relativen Blatt wieder. Auf diese Weise liefert der einzelne Teilgraph in der ζ_1-Ebene einen unendlichen Spitzenpolygonzug mit zwei Enden, eben den Punkten Ω_1 und Ω_2. Dieser Spitzenzug zerfällt in unendlich viele, endlich-vielseitige Teilstücke, die auf sich selbst bezogen sind und immer ein volles Bild des betreffenden Teilgraphen mit seinen beiden Ufern liefern. Den ausschöpfenden Bereich $\overset{(\infty)}{\Psi}_\nu$ und damit die ausschöpfende Gruppe $\overset{(\infty)}{\Gamma}_\nu$ werden wir daher im vorliegenden Falle zweckmässig als einen Bereich erklären, der von ν aufeinander folgenden solchen Teilstücken, entsprechend dem einen Teilgraphen, und ebensoviel aufeinander folgenden Teilstücken, entsprechend dem anderen Teilgraphen, begrenzt wird, wozu natürlich noch zwei Peripherieintervalle als Begrenzungsteile hinzutreten, deren eines den Punkt Ω_1 und deren anderes den Punkt Ω_2 enthält.

Statt einen allgemeinen baumartigen Graphen zu benützen, kann man selbstverständlich die zur Aufschneidung der Fläche F' benützten $q-1$ Querschnitte so wählen, dass diese Querschnitte sich zu einem einzigen Zuge zusammenschliessen, in welchem Falle dann der Graph ein solcher ohne Verästelung ist. Das Auftreten zweier Punkte Ω oder nur eines Punktes Ω hängt offenbar nur davon ab, ob man in diesem Zuge einen mittleren Querschnitt als Querschnitt Q_*' wählt oder einen der beiden Endquerschnitte.

DRITTER TEIL.

Uniformisierung beliebiger analytischer Funktionen und Fundamentalabbildung beliebiger offener Riemannscher Flächen.

19. *Allgemeine Problemstellung der Uniformisierung und der Fundamentalabbildung.* Es sei nunmehr $w(z)$ eine beliebige analytische Funktion, die wir ausdrücklich als eine nicht algebraische Funktion voraussetzen wollen. Wir merken sogleich an, dass die in Folgendem entwickelte Methode der Uniformisierung beliebiger analytischer Funktionen ohne weiteres auch im algebraischen Falle anwendbar ist. Der besondere Vorzug unserer früheren, auf die algebraischen Funktionen besonders zugeschnittenen Methode war ihr organisches Hervorwachsen aus der Struktur der algebraischen Funktionen, bzw. der geschlossenen Riemannschen Flächen.

Die allgemeine analytische Funktion $w(z)$ fassen wir in ihrer vollständigen Ausdehnung auf, soweit sie mit dem Charakter algebraischer Funktionen fortgesetzt werden kann, unter Einbeziehung ihrer unendlich fernen Elemente. Zur Funktion $w(z)$ in dieser Ausdehnung gehört eine völlig bestimmte offene Riemannsche Fläche F, die die Verzweigung und Vieldeutigkeit der Funktion $w(z)$ darstellt. Diese Fläche besteht dann definitionsgemäss nur aus inneren Punkten, die entweder gewöhnliche Punkte sind, oder Windungspunkte endlicher Ordnung. Windungspunkte unendlich hoher Ordnung sind als Grenzstellen der Fläche F aufzufassen. Wir können nun zunächst die *lokalen uniformisierenden Variablen mit und ohne Relativverzweigung* für die einzelnen Stellen des Gebildes (z, w) wie früher (No. 1) im algebraischen Falle definieren und angeben. Ebenso werden wir in völliger Analogie mit dem algebraischen Falle den Begriff der *relativ unverzweigten Hauptuniformisierenden* $\zeta = \zeta(z) = \zeta(z, w)$ des ganzen Gebildes definieren als einer Grösse, deren Variabilitätsbereich entweder von der Vollebene *(elliptischer Fall)* oder von der ganzen Ebene excl. des unendlich fernen Punktes *(parabolischer Fall)* oder von dem Inneren des Einheitskreises *(hyperbolischer Fall)* gebildet wird. Parallel ist der Begriff der zu einer in der z-Ebene beliebig vorgelegten offenen nur von inneren Punkten gebildeten Riemannschen Fläche F gehörenden relativ unverzweigten Hauptuniformisierenden $\zeta = \zeta(z)$ zu fassen, wobei jetzt der einzelne Punkt z als ein Punkt auf der Riemannschen Fläche, die Grösse $\zeta(z)$ also als eine Funktion relativ zur Fläche F zu denken ist. Auch relativ verzweigte Uniformisierende des gegebenen Gebildes (z, w) werden im Folgenden, wie auch früher, eine mittelbare Rolle spielen.

Überlegungen, die früher angestellten (No. 1) ganz analog sind, lassen erkennen, dass der elliptische Fall für eine offene Riemannsche Fläche niemals eintreten kann. Ferner ergibt sich, dass bei Eintreten des parabolischen Falles die Gruppe der relativen Zweigsubstitutionen eine Gruppe von Translationen in der ζ-Ebene darstellt, die aus einer einzigen $\zeta' = \zeta + 2\omega$ erzeugt wird. Bei Übergang zur Grösse $e^{\frac{\zeta \pi i}{\omega}} = u$ erhalten wir dann in der u-Ebene ein Gebiet, das von der ganzen u-Ebene mit Ausnahme nur der Punkte 0 und ∞ gebildet wird. Dieses Gebiet erscheint als eineindeutiges Abbild der Fläche F, die somit zweifach zusammenhängend sein muss. Sie zerfällt durch jeden auf ihr gezogenen geschlossenen Rückkehrschnitt in zwei getrennte Schnitte, und man kann sie durch einen einzigen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Demnach erhält die Uniformisierungsaufgabe bzw. die Aufgabe der Fundamentalabbildung folgende präzisere Fassung: *Es soll die Fläche F, sofern sie einfach zusammenhängend ist, eineindeutig konform auf ein schlichtes Gebiet abgebildet werden, das entweder von der ganzen Ebene excl. des unendlich fernen Punktes (1. parabolischer Fall) oder von dem Inneren des Einheitskreises gebildet wird (1. hyperbolischer Fall); es soll, wenn die Fläche F zweifach zusammenhängend ist, eine Fundamentalabbildung derselben bewirkt werden entweder auf die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes (2. parabolischer Fall) oder auf das Innere des Einheitskreises (2. hyperbolischer Fall); es soll schliesslich von der Fläche F, wenn ihre Zusammenhangsordnung grösser als 2 ist, eine Fundamentalabbildung auf das Innere des Einheitskreises bewirkt werden (3. hyperbolischer Fall).*

Da die Aufgabe der Uniformisierung der Funktion $w(z)$ im Sinne der oben gegebenen genaueren Definition sich unmittelbar als gleichbedeutend erweist mit der Aufgabe der Fundamentalabbildung der zu $w(z)$ gehörenden Riemannschen Fläche F, so erhebt sich wiederum die Frage, ob die Aufgabe der Fundamentalabbildung einer beliebig gegebenen Riemannschen Fläche F umfassender ist als die der Uniformisierung einer analytischen Funktion. Diese Frage ist zu verneinen. Wir werden vielmehr zeigen (No. 21), dass aus der geleisteten Fundamentalabbildung einer beliebig vorgelegten Fläche F ohne Schwierigkeit immer die Existenz einer analytischen Funktion $w(z)$ hergeleitet werden kann, zu welcher die vorgelegte Riemannsche Fläche als Riemannsche Fläche im Sinne der oben gegebenen Definition gehört.

20. *Zur Topologie allgemeinster offener Riemannscher Flächen: Hauptdarstellungen, kanonische Aufschneidung, Überlagerungsfläche.* Wir schicken zunächst

einige Bemerkungen betreffend die Analysis situs allgemeiner offener Riemannscher Flächen voraus.

Wir denken uns eine derartige Riemannsche Fläche in der Form

$$F = \lim_{n=\infty} F_n$$

gegeben, indem wir unter F_n eine endlich-vielblättrige Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten verstehen, die von endlich vielen geschlossenen Linien begrenzt wird (»gewöhnliches Riemannsches Flächenstück»). Diese Linien können wir uns etwa als ganz im Endlichen liegende Polygonzüge denken. Die Fläche F_n selbst kann dabei auch Unendlichpunkte enthalten, natürlich auch nur in endlicher Anzahl. Von den Flächen F_n soll jede einzelne Teil der nächstfolgenden und also auch aller weiteren sein; ferner können wir ohne weiteres annehmen, dass die Begrenzung von F_n ganz innerhalb der Fläche F_{n+1} liegt, in dem präziseren Sinne, dass alle Begrenzungspunkte von F_n innere Punkte, nicht Grenzpunkte von F_{n+1} sind.

Von der ursprünglichen, zur Definition der Fläche F benützten Folge der F_n können wir zu einer modifizierten Flächenfolge derselben Art übergehen, die der weiteren Bedingung genügt, dass die Begrenzungslinien der F_n *Hauptschnitte* der Fläche F sind, worunter wir Rückkehrschnitte verstehen, die F in zwei getrennte Stücke zerfällen. Um dies zu erreichen, haben wir die einzelne F_n so zu modifizieren, dass keine zwei ihrer Begrenzungslinien durch eines der Restflächenstücke $(F\text{-}F_n)$ hindurch miteinander verbunden werden können. Sei etwa F_k die erste F_n, für die ein solcher Zusammenhang besteht; alsdann können wir zwei Begrenzungslinien von F_k durch ein ganz in $(F\text{-}F_k)$ verlaufendes Flächenband miteinander verbinden. Nehmen wir dies Flächenband zu F_k hinzu, so entsteht ein erweiterter Bereich, der nun offenbar eine Begrenzungslinie weniger hat als F_k. Genügt die so modifizierte F_k der gestellten Bedingung noch nicht, so können wir durch Hinzufügung eines weiteren Bandes zur modifizierten F_k die Zahl der Begrenzungslinien wieder um eine Einheit vermindern. So gelangen wir nach endlich vielen Schritten notwendig zum gewünschten Ziele, spätestens nachdem wir die Begrenzungslinienzahl auf 1 reduziert haben. Jetzt gehen wir in der Folge der F_n so weit, bis wir die modifizierte F_k völlig einbezogen haben, und operieren mit der dann erhaltenen F_n, wenn sie nicht der oben gestellten Bedingung genügt, in derselben Weise, wie mit F_k. So ergibt sich die neue F_{k+1} u.s.w.

Wir können noch einer weiteren Bedingung genügen: Es soll keine Begrenzungslinie einer F_n für sich einen an F_n aussen anschliessenden Teil von F vollständig begrenzen, der seinerseits ein »gewöhnliches Flächenstück» ist. Ist das nämlich bei den vorher gefundenen F_n noch nicht der Fall, so kann man folgendermassen zu nochmals modifizierten Flächen F_n übergehen. Sei etwa F_λ die erste der erstmalig modifizierten Flächen F_n, die der neuen Bedingung nicht genügt, so setze man die unstatthaften Zusatzflächenstücke an F_λ an und nehme nunmehr diese Fläche als neue F_λ. Sodann gehe man in der Reihe der erstmalig modifizierten F_n soweit, bis die neue F_λ ganz einbezogen ist. Die so bestimmte Fläche F_n lässt dann entweder keine verbotenen Zusatzflächenstücke zu; dann erklären wir sie ohne weiteres als neue Fläche $F_{\lambda+1}$. Lässt sie aber verbotene Zusatzflächenstücke zu, so nehmen wir diese sogleich hinzu und erklären die nunmehr erhaltene Fläche als neue Fläche $F_{\lambda+1}$. Jetzt gehen wir wieder in der Reihe der erstmalig modifizierten F_n soweit, bis die neue $F_{\lambda+1}$ ganz einbezogen ist, und verfahren in derselben Weise wie vorher weiter, um bei Fortsetzung des Verfahrens i. inf. einen Aufbau der Fläche F_n mittels neuer Flächen F_n zu erhalten, die auch der neuen Nebenbedingung genügen. Damit ist ein für das Folgende sehr zweckmässiger Aufbau der Fläche F gewonnen.

Die Darstellung der Fläche F durch unsere neuen Näherungsbereiche F_n möge als eine solche durch *Hauptnäherungsbereiche* bezeichnet werden oder als eine *Hauptdarstellung der Fläche F.* Der Übergang von F_n zu F_{n+1} geschieht nun in der Weise, dass an jede Begrenzungslinie von F_n je ein selbständiges Flächenstück angesetzt wird, das seinerseits, abgesehen von der Ansatzlinie, stets weitere Begrenzungslinien aufweist. Die Anzahl der Begrenzungslinien von F_n ist jetzt eine mit wachsendem n niemals abnehmende Grösse. Bleibt diese Anzahl von einer gewissen Stelle des Index n ab bei einer endlichen Zahl q stehen, so bezeichnen wir diese endliche Zahl q als die (ideale) *Ränderzahl der Fläche F;* wächst jedoch die erwähnte Anzahl über alle Grenzen, so bezeichnen wir ∞ als die (ideale) Ränderzahl der Fläche F. Die Ausgangsfläche F_1 und die einzelnen Zusatzflächenstücke, die am Aufbau der Fläche F gemäss der Hauptdarstellung derselben auftreten, können für sich innere geschlossene, sie nicht zerfällende Rückkehrschnitte gestatten, und zwar jedes solche Flächenstück eine gewisse Maximalzahl. Die Summe aller dieser Anzahlen bezeichnen wir als die *Rückkehrschnittzahl der Fläche F,* welche Zahl nun offenbar ebenso wie q endlich oder unendlich gross sein kann. Die Zahl $q + 2p$, eine endliche oder unendlich grosse Zahl, bezeichnen wir als die *Zusammenhangszahl der Fläche F.*

Die Fläche F kann offenbar auf mannigfaltige Weise durch Hauptnäherungsbereiche im besprochenen Sinne dargestellt werden. Man bemerkt indes sofort, dass die Zahlen q und p von der Darstellungsform unabhängig sind. Denn man braucht nur daran zu denken, dass jede Fläche F_n der einen Darstellungsweise als Teil in einer gewissen F_n der anderen Darstellungsweise enthalten ist, und dass die Grössen q und p als Grenzen monotoner Zahlenfolgen erklärt sind.

Nimmt man aus der Fläche F mit der Hauptdarstellung $F = \lim\limits_{n=\infty} F_n$ die Fläche F_n heraus, so bleiben soviel getrennte *Restflächenstücke* übrig, als Begrenzungslinien von F_n vorhanden sind. Ist ein solches Restflächenstück zweifach zusammenhängend, so wollen wir es ein *Öffnungsstück* der Fläche F nennen. Ein solches Öffnungsstück erscheint durch die in ihm verlaufenden Begrenzungslinien der Bereiche $F_{n+1}, F_{n+2}, \cdots$ in unendlich viele zweifach zusammenhängende in einer Folge an einander gereihte Stücke zerlegt.

Legen wir irgendeine Hauptdarstellung $F = \lim\limits_{n=\infty} F_n$ zugrunde. Wir können dann, von dieser ausgehend, sofort zu einer Aufschneidung der Fläche F zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0 gelangen (*kanonische Aufschneidung*), die durch lauter, nämlich im ganzen $q - 1 + 2p$ voneinander völlig getrennte Querschnitte bewirkt wird. Als *Querschnitt* bezeichnen wir dabei einen in F verlaufenden Schnitt, der im Innern von F nicht endigt, dessen beide Enden vielmehr allmählich ausserhalb jeder noch so weit gewählten F_n verlaufen, wofür wir auch sagen, dass der Querschnitt beiderseits »in die Berandung von F mündet». Wir schneiden nämlich zunächst F_1 durch $q_1 - 1 + 2p_1$ Querschnitte von Rand zu Rand zu einer einfach zusammenhängenden Fläche $\underset{0}{F_1}$ auf, wobei q_1 die Ränderzahl, p_1 die Rückkehrschnittzahl der Fläche F_1 bezeichnet. Darauf schneiden wir jedes einzelne F_1 zu F_2 ergänzende Zusatzflächenstück durch getrennte Querschnitte, die alle nur in Begrenzungslinien von F_2 beginnen und endigen, zu einem zweifach zusammenhängenden Flächenstück auf, und führen sodann die an das betreffende Zusatzflächenstück anstossenden Endigungen der Aufschneidung von F_1 durch das aufgeschnittene Zusatzflächenstück hindurch irgendwie fort, bis sie ebenfalls auf der Begrenzung von F_2 endigen. Nachdem wir dieses für alle in Betracht kommenden Zusatzflächenstücke gemacht haben, erscheint die Fläche F_2 durch $q_2 - 1 + 2p_2$ getrennte Querschnitte zu einer einfach zusammenhängenden Fläche $\underset{0}{F_2}$ aufgeschnitten, wobei wesentlich ist, dass die Fläche $\underset{0}{F_1}$ bei der ganzen Konstruktion durchaus unverändert geblieben ist. Das Verfahren lässt sich offenbar i. inf. fortsetzen und liefert die verlangte kanonische Aufschneidung der Fläche F zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0.

Durch relationenfreie sukzessive Zusammenfügung unendlich vieler koinzidierender Exemplare F_0, wobei das einzelne Neuexemplar an den jeweils gewonnenen Bestand stets längs einer und nur einer vollständigen Begrenzungsseite anzufügen ist, entsteht die *einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche* $F^{(\infty)}$ in sehr übersichtlicher Weise.

21. *Äquivalenz des Uniformisierungsproblems und des Problems der Fundamentalabbildung. Funktionen zu beliebig gegebener Riemannscher Fläche.* In der Fläche F_0 ist die zu F gehörende Hauptuniformisierende $\zeta(z)$ offenbar eindeutig. Wir können sagen, dass wir jetzt die unendlich vielen Relativzweige der Funktion $\zeta(z)$ isoliert haben. Das Bild der Fläche F_0, das ein einzelner Zweig, etwa der in einem Punkte O der Fläche den Wert Null annehmende Grundzweig, in der ζ-Ebene entwirft, ist ein ränderbezogenes Gebiet Φ_0, das von $q-1+2p$, im allgemeinen also von unendlich vielen durch lineare Substitutionen bezogenen Seitenpaaren begrenzt wird, abgesehen von hinzukommenden Teilen der Peripherie des Einheitskreises. Die einzelne solche Seite stellt sich als ein die Fläche des ζ-Einheitskreises in zwei Stücke zerlegender Querschnitt dar, dessen beide Enden sich asymptotisch der Peripherie des Einheitskreises nähern. Denkt man sich nämlich eine konzentrische Kreisfläche innerhalb des ζ-Einheitskreises fixiert, so wird deren Bild auf F offenbar ganz in einem Hauptnäherungsbereich von endlichem Index enthalten sein müssen. Das Bild irgend eines der auf F gezogenen Querschnitte kann demnach, welchen Zweig der Funktion $\zeta(z)$ man auch zur Abbildung wählt, nur eine solche Linie sein, deren Enden von einer gewissen Stelle ab ganz ausserhalb jener konzentrischen Kreisfläche verlaufen. Die Funktion $\zeta(z)$ als Ganzes liefert nun offenbar unendlich viele sich nebeneinander lagernde Bilder von F_0, die aus Φ_0 vermöge der durch die Randsubstitutionen von Φ_0 als Erzeugende definierten Gruppe Γ hervorgehen. Diese unendlich vielen Φ_0-Bilder erfüllen das ganze Innere des ζ-Einheitskreises lückenlos, wobei es innerhalb des ζ-Einheitskreises zu keiner Häufung der Parzellierungslinien des von allen Φ_0-Bildern gebildeten Netzes kommen kann. Die erwähnten Erzeugenden der Gruppe Γ sind ferner offenbar durch keine Relationen miteinander verbunden. Das ganze Innere des Einheitskreises ist das eineindeutige Bild der einfach zusammenhängenden, der Fläche F ohne Relativwindungspunkte *übergelagert zu denkenden Fläche* $F^{(\infty)}$, die durch relationenfreie Zusammenheftung unendlich vieler koinzidierender Exemplare F_0 entsteht und also direkt hergestellt werden kann. Die Fläche $F^{(\infty)}$ ist allein durch die Fläche F bestimmt, d. h. sie hängt nicht von der besonderen

angewandten Aufschneidung ab. Hat man nämlich zwei verschiedene einfach zusammenhängende Überlagerungsflächen von F ohne relative Windungspunkte, so sind diese beiden Flächen durch Koinzidenz ohne weiteres aufeinander ohne Relativverzweigung und also wegen des einfachen Zusammenhanges eineindeutig beziehbar.

Kehren wir nunmehr zur Hauptfrage zurück, nämlich dem Nachweise, dass die Aufgabe der Fundamentalabbildung einer beliebig gegebenen offenen F nicht allgemeiner ist als die der Uniformisierung einer beliebigen analytischen Funktion $w(z)$. Dieser Nachweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass man zu jeder Fläche F eine analytische Funktion $w(z)$ konstruieren kann, deren genauer Existenzbereich die Fläche F ist.

Betrachten wir zunächst den Fall einer einblättrigen, offenen, endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden F. In diesem Falle können wir die Existenz einer zugehörenden Funktion $w(z)$ nach ganz bekannten Prinzipien unmittelbar dartun. Wir wählen zu dem Zwecke innerhalb F unendlich viele Punkte z_ν, die sich nur gegen die Begrenzung von F häufen und zwar gegen jeden Begrenzungspunkt von F. Die Punkte z_ν können wir alle im Endlichen liegend denken. Wir bilden dann eine unendliche Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{z - z_\nu}.$$

Bei dieser Summe haben wir es offenbar durch genügend kleine Wahl der γ_ν in der Hand, die gleichmässige Konvergenz der Summe in jedem Teilbereich F_n von F zu bewirken. Die in solcher Weise gefundene Funktion $w(z)$ ist dann in der Tat im ganzen Gebiet F mit dem Charakter rationaler Funktionen erklärt und kann wegen der Häufung der Pole z_ν nicht über die Grenze von F fortgesetzt werden.

Sei nunmehr F eine mehrblättrige, allgemein zu reden, unendlich-vielblättrige Fläche. Der einfachste Fall ist dann der einfachen Zusammenhanges der Fläche F. Die Annahme der Möglichkeit der Fundamentalabbildung der Fläche F besagt unmittelbar die Möglichkeit der eineindeutigen konformen Abbildung der F entweder auf die ganze ζ-Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes oder auf die Fläche des ζ-Einheitskreises. Wir verteilen nunmehr auf F unendlich viele Punkte z_ν, die sich nur nach dem im allgemeinen idealen Rande von F häufen und insbesondere sich gegen jedes wirklich erreichbare Randstück von F überall häufen.

Den Punkten z_ν entsprechen Punkte ζ_ν. Mit dem Ansatz $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\zeta - \zeta_\nu}$ können wir sofort eine Funktion von ζ bilden, die im ganzen in Betracht kommenden ζ-Wertegebiet eindeutig mit dem Charakter rationaler Funktionen erklärt ist und nur in den Punkten ζ_ν Pole hat. Diese Funktion, auf F überpflanzt, liefert uns eine Funktion $w(z)$, deren genauer Existenzbereich die Fläche F ist. Offenbar haben wir es nämlich auch in der Hand, zu verhindern, dass in zwei verschiedenen Blättern der F identisch gleiche Funktionswerte der Funktion $w(z)$ entstehen. Wir brauchen dazu nur dafür zu sorgen, dass alle gewählten Stellen z_ν als Stellen der gewöhnlichen z-Ebene von einander verschieden sind.

Ist die Fläche F zweifach zusammenhängend, so hat das Polygon Φ_0 nur ein bezognes Seitenpaar, und man kann ohne weiteres von der angenommenen Uniformisierenden $\zeta(z)$ durch elementare Funktionen zu einer neuen Grösse übergehen, bei der die lineare Ränderzuordnung in die Identität verwandelt ist. Die Fläche F ist alsdann eineindeutig konform auf die Fläche eines von zwei konzentrischen Kreisen gebildeten Ringes übertragen, dessen begrenzende Kreise sich in besonderen Fällen auch auf Punkte reduzieren können. Nunmehr kann ohne weiteres ein dem Falle einfachen Zusammenhanges analoges Verfahren angewandt werden.

Ist die Zusammenhangszahl von F grösser oder gleich 3, im allgemeinen also unendlich, so ist das ζ-Gebiet stets das Innere des Einheitskreises. Wir können ohne weiteres den *Quotienten zweier konvergenten Poincaréschen Thetareihen gleicher Dimension* in Ansatz bringen und erhalten so Funktionen, die auf F eindeutig sind. Um eine solche Funktion zu gewinnen, deren genauer Existenzbereich die Fläche F ist, bedarf es bei der Durchführung dieses Ansatzes einiger besonderer Zurüstungen.

Zunächst können wir die Theta-Funktion des Nenners mit Hilfe einer beliebigen rationalen Grundfunktion $R(\zeta)$, die nur in Φ_0 Pole hat, in Ansatz bringen, etwa eine der (-4)-ten Dimension. Diese Thetafunktion $\Theta_2(\zeta)$ verschwindet nicht identisch; sie hat jedoch eventuell unendlich viele Nullstellen, die wir uns in der Übertragung auf F notieren, ebenso wie die endlich vielen Unendlichkeitsstellen. Nunmehr kommt es darauf an, für den Zähler eine Thetafunktion (-4)-ter Dimension $\Theta_1(\zeta)$ aufzustellen, die, auf F übertragen, unendlich viele freigewählte Pole hat, die sich nur im Innern von F nicht häufen. Eine solche Thetafunktion lässt sich in der Tat sofort aufstellen. Wir übertragen dazu die auf F gewählten Polstellen nach Φ_0, die gewonnenen Stellen häufen sich dann nur gegen Punkte der Peripherie des Einheitskreises. Wir können nach dem oben angegebenen

Summationsprinzip sofort eine Funktion $\Phi(\zeta)$ bilden, die innerhalb des ζ-Einheitskreises überall mit dem Charakter rationaler Funktionen existiert, nur in den definierten Punkten des Gebietes Φ_0 unendlich wird und darüber hinaus offenbar noch der weiteren Bedingung unterworfen werden kann, im ganzen ζ-Einheitskreise, nach Abtrennung der Fläche Φ_0, beschränkt zu sein. Man erreicht dies alles in der Tat durch genügend kleine Wahl der oben mit γ_ν bezeichneten konstanten Koeffizienten. Die mit einer solchen Funktion $\Phi(\zeta)$ als Grundfunktion gebildete Theta-Reihe $\Theta_1(\zeta)$ definiert dann eine solche Funktion, die, auf F übertragen, die vorgegebenen unendlich vielen Pole hat.[1]

22. *Gedankengang des folgenden Uniformisierungsbeweises. Einführung der Spezialbereiche S_n.* Die Probleme der Uniformisierung einer beliebigen analytischen Funktion $w(z)$ bzw. der Fundamentalabbildung einer beliebigen offenen Riemannschen Fläche F sind durch die vorhergehenden Betrachtungen als äquivalent erkannt worden. Wir fügen noch hinzu, dass die zu bestimmende Grösse $\zeta(z)$ in jedem Falle bis auf lineare Transformationen bestimmt ist, was man in der Weise wie früher einsieht. Die effektive Bestimmung der Grösse ζ kommt, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen klar geworden ist, darauf hinaus, die einfach zusammenhängende über F hergestellte *Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ auf das ζ-Wertegebiet abzubilden, d. h. entweder auf die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes oder auf das Innere des Einheitskreises.* Man kann sagen, dass damit die ganze Frage auf das Problem der Fundamentalabbildung für den besonderen Fall der einfach zusammenhängenden Flächen zurückgeführt ist. Von der allgemeinsten solchen offenen Fläche ist zu zeigen, dass sie auf eine schlichte Kreisfläche mit endlichem oder unendlich grossem Radius eineindeutig konform abgebildet werden kann, eine Aufgabe, die nun ebenfalls bis auf lineare Transformationen des Resultates bestimmt ist.

Der Gedankengang, den wir einschlagen werden, ist folgender.

Die Fläche F denken wir uns zuförderst in allen ihren inneren Windungspunkten endlicher Ordnung punktiert, d. h. wir schliessen jetzt die Windungspunkte der Fläche F selbst von dieser Fläche aus. Ebenso verfahren wir mit den Unendlichpunkten der Riemannschen Fläche F, und zwar sowohl mit den

---

[1] Vgl. eine unter meinem Einfluss entstandene Dissertation von E. FREUNDLICH: »Analytische Funktionen mit beliebig vorgegebenem unendlich-vielblättrigem Existenzbereiche»; Göttingen 1910. Einen Beweis des in Rede stehenden Existenzsatzes habe ich selbst zuerst in Compt. Rend. Bd. 148 (1909), S. 1446 ff. mitgeteilt.

gewöhnlichen Unendlichpunkten, als auch den unendlich fernen Windungspunkten endlicher Ordnung. Die so *punktierte Fläche F werde mit F' bezeichnet.* Diese Fläche hat nur gewöhnliche endliche Punkte. Aus der oben gefundenen normalen Hauptdarstellung der Fläche F als Grenze von lauter Näherungsbereichen F_n ergibt sich sofort auch eine *Hauptdarstellung für die Fläche F'.* Wir können nämlich annehmen, dass die Begrenzungslinien der Näherungsbereiche F_n durch keine inneren Windungspunkte und auch durch keine Unendlichpunkte der Fläche F hindurchgehen. Wir konstruieren nun, um die betrachteten endlichen Punktierungsstellen herum kleine Kreise mit immer kleiner werdenden Radien, desgleichen, entsprechend den Unendlichpunkten, Kreise mit immer grösser werdenden Radien, welche Kreise auf der Fläche F' verlaufen und sinngemäss, allgemein zu reden, als mehrfach durchlaufen zu denkende Kreise vorzustellen sind, sofern sie auf Windungsflächenstücken verlaufen. Jetzt ist nun für unsre Behandlungsweise wesentlich, dass wir die erwähnten Begrenzungslinien der durch die geschilderten Zurüstungen gewonnenen Hauptnäherungsbereiche F_n' der Fläche F' durch Polygonalzüge ersetzen, deren einzelne Seiten stets entweder parallel der Achse des Reellen oder parallel der Achse des Imaginären verlaufen, während gleichzeitig ihre Endpunkte in rationalen Punkten der z-Ebene, d. i. in Punkten mit rationalen Koordinaten endigen. Die erwähnten Kreislinien werden wir etwa durch quadratische Züge ersetzen. Die so modifizierten F_n' wollen wir als *Spezialnäherungsbereiche S_n* bezeichnen. Ein solcher Spezialnäherungsbereich hat offenbar die charakteristische Eigenschaft, dass er aus einer endlichen Anzahl von kongruenten Quadraten zusammengesetzt gedacht werden kann, wobei übrigens innere Windungspunkte fehlen. Die letztere Nebenbedingung wollen wir indes in die Begriffsbestimmung des Spezialbereiches schlechthin nicht mit aufnehmen, also definieren: *ein Spezialbereich* ist ein gewöhnliches Riemannsches Flächenstück, das aus endlich vielen kongruenten Quadratflächen eines quadratischen Gitters zusammengesetzt ist oder zusammengesetzt gedacht werden kann.

Wir beweisen nun im Folgenden zuvörderst durch ein besonderes Verfahren, das eine spezifische Beschränkung auf Spezialbereiche hat, die Möglichkeit der Fundamentalabbildung solcher Bereiche ohne Relativverzweigung. Um dies zu erreichen, wird erst vorher die Existenz der in den inneren Quadrateckpunkten von unendlich hoher Ordnung verzweigten Uniformisierenden des Spezialbereichs nachgewiesen, sodann von dieser verzweigten Uniformisierenden zur unverzweigten Uniformisierenden übergegangen mittels absolut konvergenter unendlicher Produkte. Die so gewonnene Fundamentalabbildung für die S_n bietet sodann die Grundlage, um durch einen Grenzübergang zur Fundamentalabbildung der Fläche F' überzugehen. Diese Abbildung ist noch nicht die Fundamentalabbildung der Fläche F, die wir suchen, sondern vielmehr eine in allen Punktierungen der Fläche F mit der Verzweigungszahl ∞ behaftete verzweigte Fundamentalabbildung der Fläche F. Um die relativ unverzweigte Fundamentalabbildung der Fläche F zu gewinnen, bedarf es der nochmaligen Bildung eines unendlichen Produktes.

23. *Zugrundelegung eines Spezialbereiches S. Bestimmung der Funktion »$\zeta_2(z)$ über S». Abbildung der Fläche $S'^{(\infty)}$ auf den unendlich-vielseitigen Kreisbogenbereich A.* Wir legen jetzt der Betrachtung einen Spezialbereich S der z-Ebene zugrunde, den wir uns aus endlich vielen Quadratflächen aufgebaut denken.[1] Durch eine Ähnlichkeitstransformation können wir erreichen, dass die Seiten der Quadrate die Länge 1 erhalten, dass ferner die Quadratseiten teils mit der Achse des Reellen, teils mit der Achse des Imaginären parallel laufen und dass schliesslich die Eckpunkte der Quadrate ganzzahlige Koordinaten erhalten. Der Bereich S kann innere Windungspunkte besitzen; innere Punktierungen schliessen wir jedoch aus, d. h. wir rechnen die inneren Quadrateckpunkte alle mit zum Bereiche S hinzu. Die Zusammenhangszahl des Bereiches S ist selbstverständlich endlich, insbesondere auch die Anzahl der verschiedenen Begrenzungslinien.

Mit Hilfe der Weierstrassischen Pefunktion mit den primitiven Perioden 2 und $2i$ sind wir in der Lage, das einzelne Quadrat, das am Aufbau der Fläche S teilnimmt, auf eine Halbebene abzubilden, die je nach der Lage des Quadrates die obere oder untere Halbebene sein wird. Die Fläche S wird auf diese Weise auf eine Fläche H abgebildet, die von ebensoviel Halbebenen gebildet wird, als Quadratflächen am Aufbau der Fläche S beteiligt sind. Die Windungspunkte der Fläche H liegen in den Punkten $0, \pm e_1, \infty$. Die Abbildung, die wir vor allem benötigen, ist indess nicht die des Quadrates auf die Halbebene, sondern vielmehr die des Quadrates auf das Spitzenviereck mit den vier Eckpunkten $-i, \pm 1, +i$, welches von vier Orthogonalkreisbögen innerhalb des Einheitskreises begrenzt wird, wobei die vier Eckpunkte den vier Ecken des Quadrates entsprechen sollen. Diese Abbildungsfunktion ist uns ebenfalls bekannt, da wir unmittelbar von der durch die Pefunktion geleisteten Abbildung des Grundqua-

[1] Die Idee der Verwendung der Spezialbereiche entnehme ich meiner eingangs (pag. 32) zitierten »Voranzeige» aus dem Jahre 1914. Dort skizziere ich jedoch eine wesentlich andere Gedankenrichtung, zu einem allgemeinen rein funktionentheoretischen Uniformisierungsbeweise auf der Basis der Spezialbereiche zu gelangen.

drates auf die Halbebene vermöge der früher behandelten Spitzenpolygonaufgabe (Iterationsverfahren der No. 5) den Übergang zum Spitzenviereck zu machen in der Lage sind. Diese Funktion heisse

$$\psi(z) = \zeta_2 .$$

Die Funktion $\psi(z)$ kann durch analytische Fortsetzung gemäss dem Symmetrieprinzip in ihrem weiteren Verlaufe bestimmt werden. Alsdann bemerken wir, dass die Funktion $\psi(z)$ nichts anderes ist als diejenige analytische Funktion, welche die Fundamentalabbildung der ganzen z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises leistet, falls die z-Ebene in allen Punkten $\mu + \nu i$ mit ganzzahligen Koordinaten μ, ν punktiert gedacht wird. Sie kann auch charakterisiert werden als diejenige Funktion, die die relativ verzweigte Fundamentalabbildung der ganzen endlichen Ebene leistet, wenn die Punkte $\mu + \nu i$ mit ganzzahligen Koordinaten μ, ν als Verzweigungspunkte gegeben werden und jedem dieser Punkte die Verzweigungszahl ∞ zugeordnet wird. Die in den erwähnten Punkten punktierte z-Ebene werde mit E' bezeichnet. Ihre einfach zusammenhängende, von relativen Windungspunkten freie Überlagerungsfläche $E'^{(\infty)}$, deren eineindeutiges Abbild vermöge $\psi(z)$ das ganze Innere des ζ_2-Einheitskreises ist, ist sofort konstruierbar. Sie ist nämlich offenbar nichts andres als die Fläche, welche durch fortgesetzte allseitige relationenfreie Aneinanderfügung von kongruenten Quadratflächen entsteht, wenn man von dem Einheitsquadrat mit den Ecken $0, 1, +i, -i$ ausgeht. Bei dieser relationenfreien Zusammenfügung entstehen offenbar in all den Punkten $\mu + \nu i$ Windungspunkte unendlich hoher Ordnung. In der ζ_2-Ebene andrerseits haben wir entsprechend einen Spiegelungsprozess auszuführen, der uns von dem oben bestimmten Spitzenviereck allmählich zur vollständigen Bedeckung des ganzen Inneren der Einheitskreisfläche führt.

Was leistet die Funktion $\psi(z)$ in Bezug auf den gegebenen Spezialbereich S? Wir denken uns dazu die Fläche S in allen denjenigen Quadrateckpunkten, die innerhalb S liegen, punktiert. Als solche werde die Fläche S mit S' bezeichnet. Zu dieser Fläche S' gehört eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ohne relative Windungspunkte, die identisch ist mit derjenigen einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche von S, die in den erwähnten Punktierungsstellen lauter Windungspunkte unendlich hoher Ordnung hat. Die in Rede stehende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $S'^{(\infty)}$ kann man an Hand des quadratischen Aufbaues der Fläche S unmittelbar herstellen, indem man nämlich, ausgehend von einer Quadratfläche der Fläche S nunmehr wieder relationenfrei Quadrate aneinanderfügt, jetzt nur die Nebenbedingung beachtend, dass niemals die Begrenzung von S überschritten werden darf. Die Beobachtung dieser Vorschrift ist so gemeint, dass wir den Erweiterungsprozess relativ zu S selbst als einer im allgemeinen mehrblättrigen Fläche vornehmen.

Es ist zweckmässig, die Fläche $S'^{(\infty)}$ noch in andrer Weise zu erzeugen. Dazu verwandeln wir zunächst die Fläche S durch getrennte Querschnitte Q von Rand zu Rand in eine einfach zusammenhängende Fläche S_0. Diese Querschnitte mögen die inneren Quadrateckpunkte der Fläche S nicht treffen. Weiter ziehen wir von jedem der inneren Quadrateckpunkte aus einen Einschnitt Q' nach dem Rande von S_0. Diese Querschnitte mögen sich weder untereinander noch die vorher definierten Querschnitte Q treffen. Die einfach zusammenhängende Fläche S_0 ist jetzt in eine einfach zusammenhängende Fläche S_0' verwandelt. Die Fläche $S'^{(\infty)}$ entsteht nun aus unendlich vielen Exemplaren S_0' durch relationenfreie Aneinanderfügung als Grenze einfach zusammenhängender Näherungsbereiche $S'^{(n)}$, deren jeder aus dem vorhergehenden durch Anfügung weiterer Exemplare S_0', nämlich je eines an jede begrenzende Querschnittseite und Einschnittseite von $S'^{(n)}$, gewonnen wird. Man übersieht leicht, dass auf diese Weise eine Grenzfläche entstehen muss, die über jeder einzelnen Begrenzungslinie von S unendlich viele verschiedene Liniengewinde als Randlinien aufweist. Das einzelne solche Gewinde entsteht aus der betreffenden Randlinie bei unendlich häufiger Durchlaufung derselben im einen und anderen Sinne. Ebenso gibt jede Punktierungsstelle von S zu unendlich vielen Windungspunkten unendlich hoher Ordnung der Fläche $S'^{(\infty)}$ Anlass. Niedere Fälle, wenn S' einfach oder zweifach zusammenhängend ist, können dadurch von vorn herein dem Falle höheren Zusammenhanges untergeordnet werden, dass man jede der am Aufbau von S beteiligten Quadratflächen in vier weitere Quadratflächen zerlegt.

Nach diesen Betrachtungen können wir über die Natur des Gebietes A, das die Funktion $\psi(z)$ von der Fläche $S'^{(\infty)}$ vermöge eineindeutiger Abbildung entwirft, folgendes aussagen: Das Gebiet A ist ein aus unendlich vielen Spitzenvierecken zusammengesetzter Teilbereich der Fläche des ζ_2-Einheitskreises, der von unendlich vielen Orthogonalkreisbögen begrenzt wird, die ihrerseits in unendlich vielen Zügen geordnet sind. Der einzelne Zug ist ein eineindeutiges Bild eines begrenzenden Liniengewindes der Fläche $S'^{(\infty)}$. Er wird von unendlich vielen Kreisbögen gebildet, die in eine Reihe geordnet erscheinen, wobei je zwei benachbarte Bögen sich nur in einem Punkte der Peripherie, dort eine Spitze bildend, treffen. Eine Frage, die sich unmittelbar jetzt aufdrängt, ist die, ob diese Züge die vollständige Peripherie des Einheitskreises überspannen, abgesehen von diskreten Punkten, oder ob sie ganze Peripherieteile unüberspannt lassen. Dass das letztere nicht eintritt, sieht man folgendermassen ein: Wenn ein Peripherieteil unüberspannt bleiben würde, so würde das Gebiet A an diesen Peripherieteil herantreten. Dabei werden sich aber die Spitzenvierecke, aus denen ja A zusammengesetzt ist, notwendig unendlich verkleinern. Die Folge davon ist, dass man unter den Spitzenvierecken des Gebietes A eines angeben könnte, von dem aus man den Spiegelungsprozess nach allen Seiten eine beliebig vorgegebene Anzahl von Malen ausführen könnte, ohne das Gebiet A zu verlassen. Das würde aber bedeuten, dass man auf $S'^{(\infty)}$ eine Quadratfläche finden könnte, von der ausgehend man eine beliebig grosse Anzahl von Spiegelungen nach allen Seiten ausführen könnte, ohne S zu verlassen. Das ist jedoch wegen der Beschränktheit des Gebietes S nicht zutreffend.

Das Gebiet A gestattet, wie man weiter leicht sieht, eine Gruppe linearer Transformationen in sich, nämlich die Gruppe, durch die die einzelnen Zweige der Funktion $\psi(z)$, aufgefasst als Funktion relativ zu S, miteinander verknüpft sind. Das ist die Gruppe derjenigen linearen Transformationen, durch die die unendlich vielen S_0'-Bilder, die $\psi(z)$ in A liefert, ineinander übergehen. Die Linien Q und Q' liefern ein vollständiges System voneinander unabhängiger Erzeugenden der Gruppe, und man kann, was für das Folgende nicht benötigt wird, an Hand dieses Aufbaues der Gruppe aus Erzeugenden, bzw. der Entstehung des Gebietes A aus einem Fundamentalbereich mit den genannten Erzeugenden, zeigen, dass die oben erwähnte, nicht überspannte Punktmenge diskreter Punkte in endlich viele Peripherieintervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden kann.

24. *Fundamentalabbildung des endlich-vielseitigen Näherungsbereiches A_ν des Bereichs A vermittelst eines absolut konvergenten unendlichen Produktes: Funktion $\varphi_\nu(\zeta_2)$.* Es kommt nun weiter darauf an, den Übergang von der Grösse $\zeta_2(z)$ zur Grösse $\zeta_1(z)$ zu machen, die eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche $S'^{(\infty)}$ auf das ganze Innere des Einheitskreises vermittelt. Dies erfordert die Bildung einer solchen Funktion der Variablen ζ_2, die das Gebiet A eineindeutig konform auf die Fläche des Einheitskreises abbildet. Diese Funktion werden wir in Gestalt eines bedingt konvergenten unendlichen Produktes aufstellen. Wir bemerken dazu, dass der Bereich A als Grenze

$$A = \lim_{\nu = \infty} A_\nu$$

von Bereichen A_ν aufgefasst werden kann, deren einzelner A_ν sich als ein Teil der Fläche des ζ_2-Einheitskreises darstellt, den man erhält, wenn man ν der an der Begrenzung von A teilnehmenden Orthogonalkreisbögen wählt und das durch diese allein abgetrennte Teilgebiet des Einheitskreises fixiert. Wir werden so vor die Aufgabe gestellt, die Fläche A_ν auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, wobei etwa der Nullpunkt sich selbst entsprechen soll und die Ableitung im Nullpunkte reell positiv sein soll. Die letztere Aufgabe kann nun direkt durch Bildung eines absolut konvergenten unendlichen Produktes gelöst werden. Der Bereich A_ν werde an der Peripherie des Einheitskreises gespiegelt. Dadurch entsteht der Spiegelbereich A'_ν, der mit A_ν zusammen einen Bereich $\tilde{A}_\nu$ bildet. Dieser Bereich wäre nun sinngemäss auf die ganze Ebene abzubilden, wobei den begrenzenden Kreisen Schlitze auf der Peripherie des Einheitskreises entsprechen. Dem unendlich fernen Punkte würde bei der Abbildung wieder der unendlich ferne Punkt entsprechen. Da bei der gedachten Abbildung Spiegelpunkte bezüglich des Einheitskreises wieder in Spiegelpunkte übergehen müssen, bemerkt man, dass insbesondere je zwei bezüglich des Einheitskreises symmetrischen Punkten eines der begrenzenden Orthogonalkreise ein und derselbe Punkt der Peripherie des Einheitskreises entsprechen muss. Das bedeutet, dass die Abbildungsfunktion eine automorphe Funktion ist, die gegenüber ν elliptischen Substitutionen der Periode 2 ungeändert bleibt, nämlich denjenigen elliptischen Substitutionen, deren Fixpunktpaare von den Durchstosspunkten jener ν Kreise auf der Peripherie des Einheitskreises gebildet werden. Diese Substitutionen erzeugen eine Gruppe G_ν, bei deren Ausübung auf den Bereich $\tilde{A}_\nu$ es zu einer vollständigen Bedeckung der ganzen Ebene excl. unendlich vieler diskreter Punkte der Peripherie des Einheitskreises kommt. Die so entstehende Parzellierung der Ebene ist dieselbe, die man erhält, wenn man zunächst den Bereich A_ν dem durch seine begrenzenden Orthogonalkreisbögen definierten unendlichen Spiegelungsprozess unterwirft, wobei offenbar die ganze innere Fläche des Einheitskreises bedeckt wird, und wenn man weiter noch die Spiegelung am Einheitskreise hinzunimmt. Die Gruppe G_ν ist ihrerseits eine Untergruppe der Gruppe G, die von den unendlich vielen elliptischen Substitutionen der Periode 2 erzeugt wird, die den begrenzenden Orthogonalkreisbögen des Bereiches A bzw. $\tilde{A}$ zugeordnet sind. Man kann in leicht verständlicher Weise schreiben

$$G = \lim_{\nu = \infty} G_\nu$$

Es liegt jetzt nahe, das unendliche Produkt anzusetzen

$$\varphi_\nu(\zeta_2) = \zeta_2 \prod_{G_\nu}' \frac{\zeta_2^{(n_\nu)}}{\omega_{n_\nu}},$$

wobei der Index n_ν andeuten soll, dass die Erstreckung des Produktes über alle vermöge G_ν mit ζ_2 bzw. o äquivalenten Punkte stattfinden soll, ausgeschlossen ζ_2 und o.

Da die Gruppe G_ν im Inneren und auf der Peripherie des Einheitskreises eigentlich diskontinuierlich ist, bemerken wir sofort, dass das angesetzte unendliche Produkt absolut und gleichmässig konvergent ist, und zwar in der ganzen Ebene mit Ausnahme der oben erwähnten unendlich vielen diskreten Grenzpunkte auf dem Einheitskreise. Ferner bemerken wir, dass die dargestellte Funktion innerhalb $\tilde{A}_\nu$ nur für $\zeta_2 = 0$ verschwindet und dort die Ableitung 1 hat, dass sie ferner innerhalb $\tilde{A}_\nu$ nur für $\zeta_2 = \infty$ und zwar erster Ordnung unendlich wird, nämlich, wenn ω_{n_ν}' die mit ∞ äquivalenten Werte durchläuft, wie

$$\zeta_2 \cdot \prod_{G_\nu}' \frac{\omega_{n_\nu}'}{\omega_{n_\nu}} = \zeta_2 \cdot \prod_{G_\nu}' \frac{1}{|\omega_{n_\nu}|^2}.$$

Auf den Intervallen des Einheitskreises, in denen der Bereich $\tilde{A}_\nu$ den Einheitskreis durchstösst, nimmt die Funktiòn nur Werte von konstantem absolutem Betrage an, nämlich dem Betrage

$$\varrho_\nu = \frac{1}{\prod_{G_\nu}' |\omega_{n_\nu}|}.$$

Hieraus ergibt sich weiter unter Anwendung des analytischen Spiegelungsprinzips, dass die dargestellte Funktion in symmetrischen Punkten des Bereichs $\tilde{A}_\nu$ immer Werte annimmt, die bezüglich des Kreises vom Radius ϱ_ν symmetrisch sind. Bemerken wir weiter, dass die Funktion, wie das unendliche Produkt lehrt, bei Ausübung einer elliptischen Erzeugenden sich offenbar höchstens um einen konstanten Faktor ändern kann, so findet man unter Benützung der erwähnten Symmetrieeigenschaft, dass die Funktion in symmetrischen Punkten der $\tilde{A}_\nu$ begrenzenden Orthogonalkreise identische Werte annehmen muss, nämlich solche, deren absoluter Betrag gleich ϱ_ν ist. Dies bedeutet nun aber, dass die Funktion gegenüber den elliptischen Erzeugenden und folglich gegenüber der ganzen Gruppe G_ν automorph ist.

Betrachten wir nunmehr zunächst den einfachen Fall, dass die ν begrenzenden Kreise des Bereichs $\tilde{A}_\nu$ völlig getrennt liegen, d. h. dass keine zwei derselben sich berühren, so ergibt sich aus den erkannten Eigenschaften der Funktion, dass diese Funktion eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs $\tilde{A}_\nu$ auf ein gewöhnliches Riemannsches Flächenstück leistet, das nur endlichvielblättrig sein kann, ferner den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt nur einfach bedeckt, schliesslich seine ganze Begrenzung über der Peripherie des Kreises mit dem Radius ϱ_ν liegen hat. Hieraus folgt, dass dieses Riemannsche Flächenstück überhaupt einblättrig sein muss und dass seine Begrenzung nur von ν getrennten Schlitzen gebildet sein kann, die über der Peripherie des erwähnten Kreises verlaufen. Die Funktion leistet demnach die konforme Abbildung eines symmetrischen ν-fach zusammenhängenden Kreisbereichs auf einen ebenfalls symmetrischen Schlitzbereich.

Eine besondere Prüfung erfordert jedoch das bei unserm Problem wesentliche Vorkommnis, dass manche der begrenzenden Kreise von $\tilde{A}_\nu$ sich berühren. Das Allgemeine ist hierbei, dass die Kreise teils einzeln vorkommen, teils in Ketten zusammengehörender geordnet sind, die sich der Reihe nach berühren. Betrachten wir einen von zwei sich berührenden Kreisbögen gebildeten parabolischen Zipfel. Zur Untersuchung des Verhaltens der Funktion $\varphi_\nu(\zeta_2)$ im Zipfeleckpunkt konstruieren wir einen die Peripherie des ζ_2-Einheitskreises daselbst von innen berührenden kleinen Kreis k. Ein Bogen b dieses Kreises verbindet dann zwei Punkte der den Zipfel bildenden Kreise. Die Schwankung der Funktionswerte auf b ist nun eine Grösse, die zugleich mit dem Radius von k unendlich klein wird, wie man auf ganz dieselbe Weise erkennt, wie früher (No. 15) das Verhalten der Funktion $\varphi_\nu(\zeta_1)$ in den parabolischen Zipfeln. Dann können wir aber im vorliegenden Falle folgendermassen weiter schliessen. Der Zipfel wird zunächst durch elementare Abbildung auf die Fläche eines gestreckten Winkels übertragen. Die Funktionswerte $\varphi_\nu(\zeta_2)$ werden sodann in Abhängigkeit von der definierten lokalen Hilfsveränderlichen betrachtet. Die entstandene neue Funktion nimmt auf den beiden Schenkeln des gestreckten Winkels Werte des festen absoluten Betrages ϱ_ν an. Das vorher gewonnene Resultat über die Schwankung der Funktionswerte auf dem Bogen b zeigt nun weiter, dass die übertragene Funktion sich im Scheitel des gestreckten Winkels nur bestimmt verhalten kann; und zwar kann sie dort nur einen Wert vom absoluten Betrage ϱ_ν annehmen. Durch Anwendung des Spiegelungsprinzips folgt schliesslich, dass die übertragene Funktion um den Scheitelpunkt des gestreckten Winkels herum eindeutig ist, von da aus weiter, dass sie sich im Scheitelpunkte regulär verhält. Die damit gewonnene Einsicht gestattet nunmehr den Schluss, dass die Funktion $\varphi_\nu(\zeta_2)$ den Bereich $\tilde{A}_\nu$ einschliesslich seiner Grenze auf ein gewöhnliches Riemannsches Flächenstück überträgt, das den Nullpunkt und den Unendlichpunkt nur einmal enthält. Denkt man sich der Symmetrie der Begrenzung entsprechend eine Verheftung des erwähnten Riemannschen Flächenstückes vorgenommen, so entsteht eine geschlossene Riemannsche Fläche, die nur einblättrig sein kann. Es vermittelt also $\varphi_\nu(\zeta_2)$ eine Abbildung des Bereiches $\tilde{A}_\nu$ auf einen schlichten Bereich, dessen Begrenzung von endlich vielen getrennten Schlitzen auf der Peripherie des Kreises vom Radius ϱ_ν gebildet wird. Diese Schlitze sind entweder gewöhnliche Schlitze oder solche mit Teilpunkten, die den Zipfeleckpunkten des Bereichs $\tilde{A}_\nu$ entsprechen.

25. *Fundamentalabbildung des Bereiches A durch die Grenzfunktion* $\lim\limits_{\nu=\infty}\varphi_\nu(\zeta_2)$. *Gewinnung der Grösse »*$\zeta_1(z)$ *über S».* Wir betrachten nunmehr die Funktion

$$\lim_{\nu=\infty}\varphi_\nu(\zeta_2) = \varphi(\zeta_2) = \lim_{\nu=\infty}\left[\zeta_2 \prod_{G_\nu}{}' \frac{\zeta_2^{(n_\nu)}}{\omega_{n_\nu}}\right],$$

$$\varphi(\zeta_2) = \zeta_2 \prod_{G}{}' \frac{\zeta_2^{(n)}}{\omega_n},$$

wobei im letzteren Ausdruck das unendliche Produkt im Sinne des durch den vorhergehenden präzisierenden Ausdruck bestimmten Grenzübergangs von G_ν zu G als ein bedingt konvergentes Produkt aufzufassen ist, während der Index n im letzten Ausdruck die Erstreckung über alle vermöge G mit ζ_2 bzw. Null äquivalenten Werte excl. ζ_2 und Null selbst andeutet.

Dass die aufgestellte Funktion überhaupt sinnvoll definiert ist, ist selbst zu begründen. Es kommt darauf an, sie für das Gebiet $A = \lim\limits_{\nu=\infty} A_\nu$ als existierend nachzuweisen und zu zeigen, dass sie dieses Gebiet auf das volle Innere eines Kreises abbildet.

Das Gebiet $A_{\nu+1}$ ist Teilbereich des Gebietes A_ν, was wir auch so schreiben

$$A_1 > A_2 > A_3 > \cdots > A > K,$$

indem wir zugleich andeuten, dass alle Bereiche A_ν und auch der Bereich A selbst eine Kreisfläche K mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und einem Radius der

Länge $\varrho < 1$ als Teilbereich enthalten, was evident ist. Da alle A_ν ausserdem Teilbereiche der ζ_2-Einheitskreisfläche sind, ergeben sich nunmehr aus den durch die Funktionen $\varphi_\nu(\zeta_2)$ von den Gebieten A_ν geleisteten Abbildungen die Ungleichheitsbeziehungen

$$1 > \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots > \varrho.$$

Wir fügen noch eine weitere Bemerkung hinzu. Es ist $\frac{\varphi_\nu(\zeta_2)}{\zeta_2}$ in A_ν regulär. Diese Funktion nimmt auf der Begrenzung von A_ν nur Werte an, deren absoluter Betrag $> \frac{\varrho}{1} = \varrho$ ist. Diese Beziehung erstreckt sich wegen der erwähnten Regularität auch auf das Innere von A_ν und liefert für die Kreislinie vom Radius ϱ den Satz, dass die Punkte dieser Kreislinie bei der Abbildung für alle ν ausserhalb eines Kreises vom Radius ϱ^2 bleiben. (*)

Wir setzen

$$\lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu = \varrho_* < 1; \text{ d. i. } \varrho_* = \lim_{\nu=\infty} \prod_{G_\nu}{}' \frac{1}{|\omega_{n_\nu}|} = \prod_{G}{}' \frac{1}{|\omega_n|}$$

im Sinne eines bedingt konvergenten Produktes. Wir behaupten nunmehr, dass die Grenzfunktion $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(\zeta_2)$ existiert und das Innere der Fläche A eineindeutig auf das ganze Innere der Kreisfläche K_* mit dem Radius ϱ_* abbildet, wobei noch $\varrho_* > \varrho$ anzumerken ist. Sämtliche Funktionen $\varphi_\nu(\zeta_2)$ sind innerhalb A eindeutig und regulär definiert, dazu beschränkt, da ihre Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb 1 bleiben. Man kann also eine im Innern von A gleichmässig konvergente Folge herausgreifen. Deren Grenzfunktion kann keine Konstante sein, weil die Ableitungen der einzelnen Funktionen an der Nullstelle den Wert 1 haben. Verfolgen wir die Funktionswerte $\varphi_\nu(\zeta_2)$ für die ausgewählte Indexfolge, so bemerken wir, dass wegen $A_{\nu+1} < A_\nu$ die absoluten Beträge der betrachteten Werte mit wachsendem Index abnehmen, ferner, dass wegen $|\varphi_\nu(\zeta_2)| < \varrho_\nu$ für den Grenzwert ein absoluter Betrag unterhalb ϱ_* sich herausstellen muss. Dies bedeutet, dass die Grenzfunktion eine eineindeutige konforme Abbildung des Inneren von A auf ein Teilgebiet T des Kreises K_* leistet. Dass dieses Teilgebiet mit dem ganzen Inneren der Fläche K_* identisch sein muss, ergibt sich nun weiter durch Betrachtung der Umkehrungsfunktionen der ausgewählten Folge. Diese Umkehrungsfunktionen existieren nämlich alle innerhalb K_* und leisten für alle Indexwerte $> \nu_0$ eineindeutige Abbildungen der Fläche K_* auf Teilgebiete von A_{ν_0}. Die Grenzfunktion der Umkehrungsfolge wird demnach den inneren Punkten der Fläche K_* nur innere Punkte von A_{ν_0}, daher wegen der freien Wählbarkeit von ν_0 nur innere Punkte von A eineindeutig entsprechen lassen. Das ist aber mit dem vorher gewonnenen Ergebnis nur dann vereinbar, wenn man die Identität des Teilbereiches T mit der Fläche K_* annimmt.

Somit leistet die betrachtete Grenzfunktion eine Abbildung des Gebietes A auf die Kreisfläche K_* unter der Nebenbedingung, dass der Nullpunkt sich selbst entspricht und die Ableitung im Nullpunkt den Wert 1 hat. Dadurch ist die Grenzfunktion eindeutig bestimmt, und wir können nachträglich schliessen, dass nicht nur die ausgewählte Funktionenfolge, sondern die Funktionenfolge der $\varphi_\nu(\zeta_2)$ unmittelbar gleichmässig gegen die betrachtete Grenzfunktion konvergiert.

Wie steht es mit der Konvergenz auf dem Rande von A, und wie mit dem analytischen Charakter der Grenzfunktion auf dem Rande? Zur Untersuchung dieser Fragen fassen wir die Orthogonalkreisbogenzüge ins Auge, die den Bereich A_k begrenzen. Durch die Funktion $\varphi_k(\zeta_2)$ werden diese Züge regulär auf die Peripherie eines Kreises mit dem Radius ϱ_k übertragen, wobei die Regularität in den parabolischen Zipfeln im oben definierten übertragenen Sinne zu verstehen ist. Nunmehr betrachten wir die Funktionen $\varphi_\nu(\zeta_2)$ $[\nu > k]$ als Funktionen der Grösse $\varphi_k(\zeta_2)$, definiert in einem Bereiche B_k, der das Bild von A vermöge $\varphi_k(\zeta_2)$ ist. Dann bemerken wir die Möglichkeit, die so aufgefassten Funktionen über die oben eingeführten Peripherieintervalle analytisch fortzusetzen und zugleich die Möglichkeit, auf Grund des Spiegelungsprinzips für diese Funktionen eine obere Schranke aufzustellen, die nicht nur in B_k, sondern auch für Teile ausserhalb des Kreises K_k gilt, die an die erwähnten Peripherieintervalle anstossen (siehe (*) der vorigen Seite). Die Konvergenz kann daher auch für diese weiteren Gebiete geschlossen werden und liefert so die behauptete Regularität der Grenzfunktion auf den genannten Peripherieintervallen und damit auch auf den A_k begrenzenden Orthogonalkreisbogenzügen. Dabei ist k beliebig wählbar.

Die gewonnene Grösse $\varphi(\zeta_2)$ ist wesentlich die Grösse, welche die Fundamentalabbildung der Fläche S' leistet, nur mit der Modifikation, dass die Abbildung nicht auf den Einheitskreis, sondern auf die Kreisfläche vom Radius ϱ_* erfolgt. Wir wollen deswegen

$$\frac{\varphi(\zeta_2)}{\varrho_*} = \zeta_1$$

setzen.

26. *Übergang von der Grösse »$\zeta_1(z)$ über S» zur Grösse »$\zeta(z)$ über S» vermittelst eines absolut konvergenten unendlichen Produktes.* Wir hatten oben die Aufschneidung der Fläche S bzw. S' zu einer einfach zusammenhängenden Fläche S_0' vorgenommen. Die gefundene Funktion $\zeta_1(z)$ bewirkt offenbar eine eineindeutige Übertragung der Fläche S_0' auf einen Fundamentalbereich Φ_0' im ζ_1-Einheitskreise, dessen Randsubstitutionen teils von Querschnitten Q herrühren und dann hyperbolische Substitutionen sind, teils von den Einschnitten Q' herrühren und dann parabolische Substitutionen sind. Diese Substitutionen zusammen bilden das Erzeugendensystem einer Gruppe G', durch deren Vermittlung der Bereich Φ_0' in unendlich viele Bildbereiche übergeführt wird, die zusammen eine vollständige Erfüllung des ζ_1-Einheitskreises liefern. Die Bilder der Linien Q und Q' sind Querschnitte des ζ_1-Einheitskreises, die in bestimmten Punkten der Peripherie des Einheitskreises endigen.

Um von der Grösse ζ_1 zur Grösse ζ des Bereichs S zu gelangen, die die Fundamentalabbildung des Bereichs S ohne Relativverzweigung leistet, haben wir nun ähnlich zu verfahren, wie früher in No. 13 ff. Wir denken uns die zu S gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $S^{(\infty)}$ ohne Relativverzweigung gebildet. Die Fläche $S^{(\infty)}$ entsteht aus S durch relationenfreie Zusammenfügung unendlich vieler Exemplare der einfach zusammenhängenden Fläche S_0, die ihrerseits aus S durch alleiniges Ziehen der Querschnitte Q entsteht. Auf der Fläche $S^{(\infty)}$ ist die Funktion $\zeta_1(z)$ verzweigt, nämlich in den unendlich vielen Punkten, die den endlich vielen Ausgangspunkten der Querschnitte Q' entsprechen. Um einen eindeutigen Zweig der Grösse $\zeta_1(z)$ auf $S^{(\infty)}$ zu isolieren, haben wir die Einschnitte Q' in allen relativen Blättern der Fläche $S^{(\infty)}$ gezogen zu denken. Die so entstehende Fläche wird durch den Grundzweig der Funktion »$\zeta_1(z)$ über $S^{(\infty)}$» auf ein gewisses einfach zusammenhängendes Gebiet innerhalb des ζ_1-Einheitskreises abgebildet, das aus Φ_0' durch Ausübung aller Substitutionen einer Gruppe entsteht, die die erwähnten hyperbolischen Randsubstitutionen des Bereichs Φ_0' zu Erzeugenden hat. Der so gewonnene Bereich ist ein Teilbereich des ζ_1-Einheitskreises, der unendlich viele parabolische Bezugssubstitutionen aufweist. Jede dieser Bezugssubstitutionen ordnet zwei in einem Peripheriepunkte des ζ_1-Einheitskreises einander berührende, orthogonal auf den Einheitskreis selbst auftreffende Linien einander zu. Diese unendlich vielen Linienpaare sind voneinander völlig getrennt. Die unendlich vielen parabolischen Bezugssubstitutionen erzeugen eine Gruppe $\tilde{\Gamma}$, die auf der Peripherie des Einheitskreises eigentlich diskontinuierlich ist. Man kann mit Bezug auf diese Gruppe ohne weiteres das absolut konvergente Produkt

$$\tilde{\zeta}_1 \prod_{\tilde{\Gamma}}{}' \frac{\zeta_1^{(n)}}{\omega_n}$$

in Ansatz bringen und von diesem Produkt beweisen, dass es eine Funktion darstellt, die den betrachteten Bereich in der Weise eineindeutig auf das Innere eines endlichen Kreises abbildet, dass dabei bezogene Punkte des Bereichs in identische Punkte übergehen. Damit ist aber, abgesehen von einem konstanten positiven Faktor, die Grösse ζ des Bereichs S gewonnen. Die Einzelheiten der Beweisführung der erwähnten Abbildung verlaufen analog dem Beweise in No. 14 ff. Die Gruppe wird als Grenze von Näherungsgruppen betrachtet, die eine wachsende Anzahl der unendlich vielen parabolischen Randsubstitutionen des Bereichs als Erzeugende haben.

27. *Bestimmung der Funktion »$\zeta_1(z)$ über F« als Grenzfunktion* $\lim\limits_{n=\infty} \zeta^{(n)}(z)$ *der Hauptuniformisierenden »$\zeta^{(n)}(z)$ über S_n«.* Die Fläche F', d. i. unsere in den Unendlichpunkten und den Windungspunkten punktierte allgemeine offene Fläche F, wurde oben als Grenze von Spezialnäherungsbereichen S_n dargestellt. Wir sind nach dem Vorstehenden in der Lage, für den Bereich S_n die Fundamentalabbildung zu leisten. Ist O ein fest gewählter Punkt in S_1, so wollen wir die zu S_n gehörende Hauptuniformisierende $\zeta^{(n)}(z)$ so normiert denken, dass die Ableitung dieser Funktion im Punkte O den Wert 1 erhält, während sie selbst im Punkte O im Grundzweige verschwindet.

Die zu S_n gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ohne Relativverzweigung werde mit $S_n^{(\infty)}$ bezeichnet. Es ist dann sofort zu sehen, dass die Fläche $S_n^{(\infty)}$ ein Teil der Fläche $S_{n+1}^{(\infty)}$ ist und dass bei unbegrenzt wachsendem n aus der Fläche $S_n^{(\infty)}$ die Fläche $F'^{(\infty)}$ entsteht, nämlich die zur Fläche F' gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ohne Relativverzweigung, d. i. zugleich die zu F gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche mit lauter Windungspunkten unendlich hoher Ordnung in den Punktierungsstellen der Fläche F.

Die in der oben angegebenen Weise normierten Funktionen $\zeta^{(n)}(z)$ bilden eine konvergente Funktionenfolge. Sie leisten nämlich die konforme Abbildung von wachsenden einfach zusammenhängenden Teilbereichen der Fläche $F'^{(\infty)}$, nämlich der Bereiche $S_n^{(\infty)}$ auf Kreisflächen mit wachsendem Radius. Es kommt daher der Konvergenzbeweis der No. 5 in Betracht. Die Grenzfunktion ist eine Funktion $\zeta_1(z)$, nämlich die Hauptuniformisierende der Fläche F' oder, was dasselbe ist, diejenige relativ verzweigte Uniformisierende der Fläche F, die in den Punktierungspunkten der Fläche F und nur in diesen relative Verzweigungspunkte und zwar sämtlich von unendlich hoher Ordnung hat. Somit bleibt nur noch der Übergang von der Grösse ζ_1 zur Grösse ζ ohne Relativverzweigung zu machen.

28. *Übergang von der Grösse »$\zeta_1(z)$ über F« zur gesuchten Hauptuniformisierenden »$\zeta(z)$ über F« mittels unendlicher Produkte.* Betrachten wir zunächst den *allgemeinen Fall.* Die Fläche F wurde oben als Grenze von Hauptnäherungsbereichen F_n dargestellt. Diese Hauptnäherungsbereiche enthalten die Punktierungen, durch die die Fläche F in die Fläche F' verwandelt wird. Wir werden, um den Übergang von ζ_1 zu ζ zu machen, nach Analogie des Verfahrens bei den geschlossenen Riemannschen Flächen vorgehen. Das bedeutet, dass wir zunächst eine zweckmässige Zweigisolierung der Funktion »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$« vornehmen. Die Fläche $F^{(\infty)}$ kann als Grenze einfach zusammenhängender Näherungsbereiche dargestellt werden. Solche Näherungsbereiche erhalten wir aus den Flächen $F_n^{(\infty)}$, d. i. den einfach zusammenhängenden Überlagerungsflächen der F_n ohne Relativwindungspunkte. Die einzelne $F_n^{(\infty)}$ entsteht nämlich aus der pag. 97 hergestellten $\underset{0}{F_n}$ durch relationenfreie Zusammenfügung unendlich vieler Exemplare derselben. Wir wollen diesen Überlagerungsprozess bei der Fläche F_n jedoch nicht i. inf. ausgeführt denken, vielmehr bei der n-ten Stufe abbrechen. Die einzelnen Stufen dieses Prozesses denken wir uns gewonnen, indem wir zunächst an jede Querschnittseite von $\underset{0}{F_n}$ je ein Neuexemplar $\underset{0}{F_n}$ anbringen (1. Stufe), darauf an jede Querschnittseite der gewonnenen Fläche $\overset{0}{F}{}_n^{(1)}$ wieder je ein Neuexemplar $\underset{0}{F_n}$ (2. Stufe), darauf an jede Querschnittseite der neugewonnenen Fläche $F_n^{(2)}$ wieder je ein Neuexemplar $\underset{0}{F_n}$ (3. Stufe) u.s.w. Die in n-ter Stufe gewonnene Fläche werde entsprechend mit $F_n^{(n)}$ bezeichnet. Da die Fläche 0-ter Stufe, d. i. $\underset{0}{F_n}$ selbst, in einer fortlaufenden Aufschneidung der Fläche F zur Fläche F_0 gewonnen wurde, ist klar, dass jede der Flächen $F_n^{(n)}$ in der folgenden als Teil enthalten ist. Auf der Fläche $F_n^{(n)}$ wiederholen sich die Punktierungen der Fläche F in jedem relativen Blatt. Es ist klar, dass jede Fläche $F_n^{(n)}$ nur endlich viele Punktierungen enthält. Man kann nun offenbar auf der Basis der sich allmählich erweiternden Flächen $F_n^{(n)}$ $[n = 1, 2, 3, \ldots]$ eine etwa in einer Punktierung von $F_1^{(1)}$ beginnende Linie konstruieren, die allmählich alle Punktierungsstellen der $F^{(\infty)}$ aufnimmt. Diese Linie l ist als eine sich selbst nicht wiedertreffende Linie auf $F^{(\infty)}$ zu verstehen, die aus jedem noch so weit gewählten inneren Teilbereich von $F^{(\infty)}$ heraustritt, oder, wie wir auch sagen, dem (idealen) Rande von $F^{(\infty)}$ zustrebt. Die längs

l aufgeschnittene $F^{(\infty)}$ werde schliesslich mit $F_0^{(\infty)\prime}$ bezeichnet. Die Fläche $F^{\prime(\infty)}$ entsteht aus ihr durch relationenfreie Zusammenfügung unendlich vieler Exemplare längs den unendlich vielen Teilstücken, in welche die Linie l durch die Punktierungsstellen zerlegt wird. Denn die solcherweise gebildete einfach zusammenhängende Fläche ist offenbar auch einfach zusammenhängend und hat in allen Punktierungsstellen nur Windungspunkte unendlich hoher Ordnung, fällt also mit der Fläche $F^{\prime(\infty)}$ tatsächlich zusammen; was wir in der Formel ausdrücken können:

$$F^{(\infty)\prime(\infty)} = F^{\prime(\infty)}.$$

Die Funktion »$\zeta_1(z)$ über $F^{(\infty)}$« entwirft von der Fläche $F_0^{(\infty)\prime}$ ein schlichtes Abbild $\tilde{\Psi}$ im ζ_1-Einheitskreise, das die Gestalt eines von einem unendlichen Polygonzuge, evt. unter Hinzunahme eines Peripherieintervalles, gebildeten Fundamentalbereiches hat, dessen dem Polygonzuge angehörende Seiten paarweise aufeinander bezogen sind und der, abgesehen von einem einfachen parabolischen Zipfel, unendlich viele zweigliedrige parabolische Zykeln aufweist. Die Randsubstitutionen des Bereichs $\tilde{\Psi}$ erzeugen eine Gruppe $\tilde{\Gamma}$, die nur dann auf der Peripherie des ζ_1-Einheitskreises eigentlich diskontinuierlich ist, wenn das erwähnte $\tilde{\Psi}$ mitbegrenzende Peripherieintervall sich nicht auf einen Grenzpunkt Ω reduziert. Wir können jetzt offenbar, wie im Falle der algebraischen Funktionen, durch Bildung eines unendlichen Produktes die Abbildung des Gebietes $\tilde{\Psi}$ auf die Fläche des Einheitskreises, evt. auf die ganze unendliche Ebene bewirken, womit die Variable ζ der Fläche F gewonnen ist. Die Konvergenz des genannten unendlichen Produktes ist immer dann eine absolute und unbedingte, wenn die Abbildung von F auf eine endliche Kreisfläche erfolgt, also jedenfalls stets, wenn die Zusammenhangszahl von F grösser oder gleich 3, insbesondere gleich ∞ ist. —

Einige *niedere Fälle* müssen noch besonders besprochen werden. Das sind nämlich die Fälle, in denen die Anzahl der Punktierungsstellen der $F^{(\infty)}$ nicht unendlich gross, sondern endlich ausfällt.

Zunächst kann es sein, dass die Fläche F überhaupt keine inneren Windungspunkte oder inneren Unendlichpunkte hat. In diesem Falle ist die Variable ζ_1 bereits die Variable ζ selbst. Wenn dieser einfachste Fall nicht vorliegt, so entsteht F' aus F durch tatsächliche Einführung von Punktierungsstellen. Wird nun die Zusammenhangszahl der Fläche $F \geqq 2$ angenommen, so ist $F^{(\infty)}$ relativ zu F unendlich-vielblättrig, sodass $F^{(\infty)}$ jedenfalls unendlich viele Punktierungsstellen erhält. Es bleibt also nur übrig, den Fall zu untersuchen, dass F einfach zusammenhängend ist und dass die Anzahl der inneren Windungspunkte und Unendlichpunkte endlich ist. Der einfachste Fall ist dann der, wo nur eine Punktierungsstelle da ist. In diesem Falle gelangen wir offenbar durch Anwendung einer Exponentialfunktion von der Grösse ζ_1 zur Grösse ζ.

Liegen mehrere Punktierungsstellen innerhalb der einfach zusammenhängenden F vor, so wollen wir zunächst eine geschlossene Linie L innerhalb F konstruieren, die alle Punktierungsstellen umschliesst. Sodann verbinden wir die Punktierungsstellen mit der Linie L durch einen fortlaufenden, in einer der Punktierungsstellen beginnenden und alle weiteren in irgend einer Reihenfolge aufnehmenden Einschnitt c. Diese Linie c denken wir uns weiter durch das Äussere von L fortgesetzt als eine Linie c', die der (idealen) Grenze von F zustrebt. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die der Grösse ζ_1 zukommende zu L gehörende Umlaufssubstitution eine hyperbolische Substitution, im zweiten Falle eine parabolische Substitution.

Im ersten Falle können wir das ganze von L nach innen zu abgegrenzte Teilgebiet von F mittels einer Potenzfunktion der Grösse ζ_1 auf ein zweifach zusammenhängendes schlichtes Gebiet abbilden, das nach aussen vom Einheitskreis, nach innen von einer geschlossenen Linie $\varDelta$ als Bild der Linie L begrenzt wird. Dem Auftreffpunkt der Linie c auf L entspricht ein Punkt der Linie $\varDelta$, den wir jetzt durch eine Linie γ'' mit der Peripherie des Einheitskreises als Aussengrenze des erwähnten zweifach zusammenhängenden Gebietes verbinden. Der Linie γ'' entspricht auf F eine Linie c'', die wir anstelle der Linie c' treten lassen. Das Bild der längs den Linien $c+c''$ aufgeschnittenen F in der ζ_1-Ebene wird nun ein Bereich $\tilde{\Psi}$, dessen Begrenzungsseiten alle in ganz bestimmten getrennten Punkten der Peripherie des Einheitskreises endigen. Von dieser Figur können wir ohne weiteres durch ein unendliches absolut konvergentes Produkt den Übergang zur schlichten endlichen Kreisfläche machen, wobei den bezogenen Randpunkten des Bereichs identische Punkte entsprechen. Es hat sich also gezeigt, dass im ersten Falle die Variable ζ direkt durch ein absolut konvergentes Produkt aus ζ_1 gewonnen wird.

Im zweiten Falle ergibt sich als Bild der längs $c+c'$ aufgeschnittenen Fläche F ein Bereich $\tilde{\Psi}$ mit einem geschlossenen Polygonzuge als Begrenzung. Man bemerkt nämlich, dass als ζ_1-Bild der Linie L in $\tilde{\Psi}$ eine offene Linie λ entsteht, die bei Ausübung der zu L gehörenden parabolischen Substitution und deren positiven und negativen Potenzen eine Linie λ' innerhalb des Einheitskreises liefert, die mit ihren beiden Enden in einem und demselben Punkte des Einheitskreises mündet, nämlich in dem Fixpunkte der parabolischen Substitution. In dem von dieser Linie abgegrenzten einfach znsammenhängenden Teile der Einheitskreisfläche verlaufen offenbar die beiden aufeinander bezogenen c' entsprechenden Seiten von $\tilde{\Psi}$, die somit auch in dem erwähnten Fixpunkte endigen. Man sieht, dass jetzt die Methode der unendlichen Produktbildung nicht unmittelbar anwendbar ist. Dagegen kann man nach Analogie eines in No. 18 angewandten Verfahrens zum Ziele gelangen: Bestimmung der Grösse $\log \zeta$ bei passender Normierung von ζ vermöge eines bedingt konvergenten unendlichen Produktes. Als Querschnitt Q_*' wird man jetzt zweckmässig etwa den Teil der Linie $c+c'$ benützen, der die letzte Punktierungsstelle von F mit dem (idealen) Rande von F verbindet. Es dürfte überflüssig sein, noch weitere Erläuterungen zu geben. Die schliesslich gefundene Grösse $e^{\log \zeta} = \zeta$ leistet im betrachteten Falle eine Abbildung der Fläche F auf die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes.

29. *Eine mögliche Modifikation des entwickelten Uniformisierungsbeweises.* Unsere in diesem Teile der Abhandlung befolgte Beweismethode gestattet eine nahe liegende erwähnenswerte Modifikation. Man kann nämlich statt, wie oben, die Fläche F' durch Spezialbereiche S_n zu approximieren, auch die einfach zusammenhängende Fläche $F'^{(\infty)}$ durch nun ebenfalls einfach zusammenhängende Spezialbereiche S_n approximieren. Die zu diesen S_n gehörenden Hauptuniformisierenden $\zeta^{(n)}(z)$ vermitteln dann eineindeutige Abbildungen der S_n auf Kreisflächen. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ gewinnt man wieder die verzweigte Uniformisierende »$\zeta_1(z)$ über F'«. Der Übergang von dieser Grösse zur gesuchten Hauptuniformisierenden »$\zeta(z)$ über F« ist darnach in der alten Weise zu bewerkstelligen.

Man kann daran denken, die Fläche $F^{(\infty)}$ direkt durch einfach zusammenhängende Spezialbereiche zu approximieren. Dann muss man jedenfalls Spezialbereiche mit beweglichen inneren Windungspunkten benützen, welch letztere sich den im allgemeinen mit irrationalen Koordinaten behafteten Windungspunkten von $F^{(\infty)}$ allmählich nähern. Aber dann bleiben doch die Unendlichpunkte der Fläche $F^{(\infty)}$ ausserhalb und geben daher nach wie vor zu Punktierungen Anlass.

VIERTER TEIL.

Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

30. *Begriff der triangulierten idealen Riemannschen Fläche und der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit.* Das analytische Gebilde und die Riemannsche Fläche fallen unter einen allgemeinen Begriff, den der Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Um den Begriff der allgemeinen *Riemannschen Mannigfaltigkeit* rein funktionentheoretisch zu definieren, erklären wir zunächst, was wir unter einer *triangulierten idealen Riemannschen Fläche* verstehen wollen. Wir denken uns endlich oder unendlich viele schlichte Dreiecksflächen in der z-Vollebene gegeben, deren jede einzelne von drei in den Eckpunkten selbst eventuell unter Aufhören des analytischen Charakters bestimmt endigenden regulären analytischen Linien[1] begrenzt wird, die ferner untereinander durch reguläre analytische *Bezugstransformationen* zwischen den Seiten zu einer idealen Einheit verschmolzen sind gemäss folgenden genaueren Bestimmungen: Jede Seite eines der Dreiecke ist mit einer gewissen Seite eines anderen Dreiecks und mit dieser durch eine reguläre, in den Endpunkten jedenfalls noch stetige Transformation verknüpft, die die eine Seite in die andere überführt. Dabei muss, wenn man die erste Seite so durchlaufen denkt, dass die zugehörige Dreieckfläche zur linken liegt, die andere Seite entsprechend der gedachten Verknüpfung so durchlaufen werden, dass ihre Dreiecksfläche zur Rechten liegt (Orientierungsbedingung). Weiter soll die Zuordnung so beschaffen sein, dass immer nur endlich viele Dreieckseckpunkte vermöge dieser Zuordnung in mittelbare Beziehung zueinander gesetzt sind, so zwar, dass es möglich sein soll, die anstossenden genügend klein zu denkenden Dreieckszipfel durch reguläre, in den Endpunkten selbst jedenfalls stetige Transformationen *(Hilfstransformationen)* so zu verlagern, dass dieselben im Bilde die volle schlichte Umgebung eines Punktes ausfüllen, wobei im Original zugeordnete Punkte im Bilde als identische Punkte erscheinen sollen *(Eckenbedingung)*.

Die Punkte der zugrunde gelegten Dreiecksflächen bilden, sofern wir je zwei zugeordnete Seitenpunkte und ebenso je einen *Zyklus* zusammen gehörender Eck-

---

[1] Eine analytische Linie heisse »im Unendlichen regulär«, wenn sie beim Übergang zur reziproken Variablen eine im Nullpunkt reguläre Bildlinie ergibt. Die schlichte zweidimensionale Umgebung eines regulären Punktes einer regulären analytischen Linie wird durch diese Linie in zwei zu einander spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegt. Vgl. hiermit die Fussnote pag. 152.

punkte in der Idee als einen einzigen Punkt betrachten, eine Punktmannigfaltigkeit, die wir als eine *triangulierte ideale Riemannsche Fläche* bezeichnen wollen. Dieselbe besteht definitionsgemäss nur aus inneren Punkten. Dies ist unmittelbar für die eigentlich inneren Dreieckspunkte zu sehen. Für die Randpunkte und Eckpunkte der Dreiecke erkennt man es sofort aus dem vorausgesetzten Bestehen der Bezugs- bzw. Hilfstransformationen, bei deren Anwendung die Umgebungen dieser Punkte zur Evidenz gebracht werden. Das wichtigste hinzukommende Merkmal der triangulierten idealen Riemannschen Fläche ist jedoch das Bestehen einer *Winkelbestimmung* in allen Teilen dieser Punktmannigfaltigkeit, oder, wie wir auch sagen können, das Bestehen eines völlig bestimmten Konformitätsbegriffes innerhalb dieser Mannigfaltigkeit, vermöge dessen wir in der Lage sind, von *analytischen Funktionen, analytischen Linien u.s.w. in einer solchen Mannigfaltigkeit* zu reden. Insbesondere in den Eckpunkten der Dreiecke werden die wahren gemeinten Winkel erst nach Anwendung der Hilfstransformationen evident. Ferner bietet sich ohne weiteres der Begriff der *Äquivalenz* zweier verschiedener gegebener triangulierter idealer Riemannscher Flächen dar. Wir werden nämlich zwei solche Flächen als äquivalent erklären, wenn sie eineindeutig konform aufeinander bezogen werden können. Es ist leicht von einer triangulierten idealen Riemannschen Fläche zu einer andern mit ihr äquivalenten durch Neuparzellierung unter Benutzung der Bezugs- und Hilfstransformationen überzugehen. Dieser Vorgang macht völlig deutlich, dass den Randpunkten und Eckpunkten der Dreiecke einer solchen Fläche gegenüber den eigentlich inneren Punkten der Dreiecke keine Sonderstellung zukommt.

Eine Mannigfaltigkeit von Dingen (»Punkte» genannt), die eineindeutig zu den Punkten einer triangulierten idealen Riemannschen Fläche in Beziehung gesetzt sind[1], bezeichnen wir als eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, die betreffende triangulierte ideale Riemannsche Fläche als eine *Bezugsfläche* dieser Mannigfaltigkeit. Nach dieser Definition ist jede triangulierte ideale Riemannsche Fläche ihrerseits eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit besteht nur aus inneren Punkten; sie ist geschlossen oder offen, jenachdem ihre ideale Bezugsfläche geschlossen oder offen ist, d. h. aus endlich oder unendlich vielen Dreiecksflächen besteht. Es ist ferner unmittelbar mit der gegebenen Definition ein *Winkelbegriff*, ein Begriff analytischer Funktionen, analytischer Linien in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gegeben, desgleichen der Begriff der *Äquivalenz* zweier verschiedener solcher Mannigfaltigkeiten, worunter

[1] Siehe die Bemerkung (*) der Einleitung pag. 35.

wir eineindeutige konforme Beziehbarkeit zweier solcher Mannigfaltigkeiten aufeinander zu verstehen haben.[1]

31. *Beispiele Riemannscher Mannigfaltigkeiten: Gewöhnliche Riemannsche Flächen, analytische Gebilde, ideale Riemannsche Flächen, ebenflächige und kugelflächige Polyeder, lineare Triangelsysteme, analytisch begrenzte Polyeder, analytische Triangelsysteme, Fundamentalmannigfaltigkeiten.* Unsere Definition der Riemannschen Mannigfaltigkeit lässt sofort erkennen, dass die in den vorhergehenden Teilen der Abhandlung betrachteten *gewöhnlichen Riemannschen Flächen*, sofern sie als Punktmannigfaltigkeiten betrachtet werden, Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind. In der Tat kann man sofort eine beliebige Riemannsche Fläche einer *Triangulation* (Zerlegung in Dreiecke) unterwerfen, wobei die inneren Windungspunkte endlicher Ordnung der Riemannschen Fläche u. a. als Eckpunkte der Triangulation figurieren. Nach Ausführung einer solchen Triangulation sind dann die erhaltenen Dreiecke mit Bezugssubstitutionen und Hilfstransformationen ausgestattet, deren erstere sich sämtlich als die identische Transformation darstellen, während letztere bekanntlich Wurzeltransformationen sind.

Zweitens bemerken wir unmittelbar, dass jedes *analytische Gebilde* (z, w), aufgefasst als die Gesamtheit seiner Stellen algebraischen Charakters, eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Denn man hat sofort mit der Funktion $w(z)$ die Beziehungen dieser Mannigfaltigkeit zu einer in der z-Ebene liegenden Riemannschen Fläche, auf deren Punkte die Stellen des Gebildes eineindeutig bezogen sind.

Wir betrachten drittens Riemannsche Flächen mit freien[2] regulären Begrenzungsteilen, die paarweise durch reguläre Transformationen aufeinander bezogen sind, wobei der Durchlaufung eines solchen Begrenzungsteiles bei links liegendem Bereiche die Durchlaufung des zugeordneten Begrenzungsteiles bei rechts liegendem Bereiche entspricht (»Orientierungsbedingung»). Werden den inneren Punkten der betrachteten Riemannschen Fläche die in solcher Weise zugeordneten Begrenzungspunkte zugefügt gedacht, wobei jedes Paar zugeordneter

---

[1] Der *allgemeine* Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist von mir zuerst in *Gött. Nachr.* 1908, S. 338—339 (Fussnote), explizit formuliert. Weiter erwähne ich meinen eingangs zitierten Artikel in *Ann. di mat.* (1913), ferner No. III der Serie »*Abhandlungen*» (1917), schliesslich WEYL: »*Die Idee der Riemannschen Fläche*» (Leipzig, Teubner, 1913, pag. IX u. § 6). *Geschlossene* Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind von KLEIN (Math. Ann. Bd. 21, 1883) betrachtet worden, Betrachtungen, die ihrerseits wieder durch RIEMANN, SCHWARZ, SCHOTTKY wesentlich vorbereitet waren.

[2] Die Bezeichnung »frei» soll ausdrücken, dass der einen Seite der Linie ein von weiteren Begrenzungspunkten freier Teil der betreffenden Riemannschen Fläche angeschlossen ist.

Randpunkte der Riemannschen Fläche einen Punkt der neuen Mannigfaltigkeit bildet, so entsteht offenbar wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, wie durch Triangulation der Fläche ohne weiteres zu ersehen ist. Dieser Mannigfaltigkeit, die geschlossen oder offen sein kann, können unter Umständen noch einzelne weitere Punkte hinzugefügt werden. Hat nämlich die gedachte bisher definierte Mannigfaltigkeit einen Teil, von dem gezeigt werden kann, dass er auf die volle schlichte Umgebung eines Punktes O excl. diesen Punkt selbst konform abgebildet werden kann, was insbesondere bei endlichen Eckenzykeln vorkommen kann, so kann dieser Punkt O aus demselben Grunde der Riemannschen Mannigfaltigkeit hinzugefügt werden, aus dem z. B. Windungspunkte zu einer Riemannschen Fläche hinzu gedacht werden. Solcherweise definierte Mannigfaltigkeiten, sowie noch eine umfassendere Gattung, die man erhält, wenn man nicht ein einziges Riemannsches Flächenstück, sondern mehrere ev. unendlich viele zugrunde legt, die durch Bezugssubstitutionen freier regulärer Randteile miteinander verknüpft sind, wollen wir als *ideale Riemannsche Flächen* bezeichnen. Es ist klar, dass die oben eingeführten triangulierten idealen Riemannschen Flächen in dem hier erklärten Sinne ideale Riemannsche Flächen sind. Beispiele dieser Art hat man z. B. in den von $2p$ geschlossenen Linien begrenzten schlichten $2p$-fach zusammenhängenden Bereichen, wenn man die $2p$ Linien paarweise durch je eine lineare oder reguläre analytische Substitution mit richtigem Durchlaufungssinn aufeinander bezogen denkt. Wird der Bereich so gelagert, dass er den Unendlichpunkt der z-Ebene im Innern enthält, so werden bei den genannten Substitutionen die Durchlaufungssinne der zugeordneten Kurven vertauscht. Die bekannte mehrblättrige Riemannsche Parallelogrammfigur, die in p mit je zwei Translationen behaftete parallelogrammatische Rahmen eingespannt ist, ist ebenfalls ohne weiteres als ideale Riemannsche Fläche anzusprechen.

Wir betrachten viertens räumliche Flächen. Hat man ein *ebenflächiges zweiseitiges räumliches Polyeder* endlichen oder unendlich hohen Zusammenhanges, so können wir dasselbe offenbar so triangulieren, dass lauter ebene geradlinig begrenzte Dreieckflächen entstehen. Diese können wir dann in die z-Ebene legen, wodurch ein System von Dreieckflächen entsteht, die durch Kongruenztransformationen als Bezugssubstitutionen verbunden sind. Gewöhnliche Eckpunkte einer solchen Polyederfläche, die von endlich vielen Seitenflächen gebildet werden, liefern in der z-Ebene endliche Eckenzykeln, die zu einer einzigen Ecke mit einer Drehsubstitution zusammengefügt werden können, folglich vermöge einer Potenz mit positiv reellem Exponenten auch auf die schlichte Umgebung eines

Punktes O übertragbar sind. Die Polyederflächen mit Einschluss ihrer gewöhnlichen Eckpunkte und Kantenpunkte fallen so aufgefasst unter die Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dasselbe gilt von allen *zweiseitigen kugelflächigen Polyedern*, auch wenn dieselben sich durchs Unendliche erstrecken. In der Tat können wir die einzelnen Seitenflächen zunächst einer kreislinigen Triangulation unterwerfen und dann die einzelnen Dreiecksflächen unter Anwendung räumlicher Inversionstransformationen auf Kreisbogendreiecke der z-Ebene beziehen, die nun durch lineare Substitutionen miteinander verbunden erscheinen. Ein solches System von Kreisbogendreiecken, das aus endlich oder unendlich vielen Kreisbogendreiecken besteht, deren sämtliche Seiten durch lineare Substitutionen gepaart sind, unter Einhaltung der »Orientierungsbedingung», wollen wir als ein *lineares Triangelsystem* bezeichnen. Das von einem kugelflächigen Polyeder herrührende Triangelsystem besitzt dann noch die Eigenschaft, dass jeder endliche Eckenzyklus, wie wir sogleich sehen werden, durch analytische und zwar elementare Transformationen auf die Umgebung eines Punktes gebracht werden kann. Die von Polyedern herrührenden linearen Triangelsysteme sind demnach triangulierte ideale Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Wird ein beliebiges lineares Triangelsystem gegeben, so liefert uns dasselbe unmittelbar eine ideale Riemannsche Fläche und damit eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sofern zunächst die Eckpunkte der Dreiecke ausgeschlossen werden. Es ist eine besondere Frage, wie jetzt die oben pag. 119 allgemein als »*Eckenbedingung*» bezeichnete Bedingung lautet. Die Frage lässt sich leicht beantworten. Wir können die vorhandenen endlichen Eckenzykeln durch lineare Transformationen zu einer Ecke vereinigen, deren zwei begrenzende Kreisbögen durch eine lineare Substitution verbunden sind. Der Winkel der letzteren Ecke (d. i. die Summe der am Zyklus beteiligten Dreieckswinkel) kann dann jede Grösse $\geqq 0$ haben. Man überlegt sich nun leicht, dass diese Ecke immer dann durch elementare Funktionen auf die volle schlichte Umgebung eines Punktes O abgebildet werden kann, wenn die erwähnte Winkelsumme >0 ist. Oder, falls die Winkelsumme Null ist, wenn dann die Substitution parabolisch ist, d. i. im Punkte O die Ableitung 1 hat, was dann darauf hinaus kommt, dass das Produkt der Vergrösserungsverhältnisse der Bezugssubstitutionen in den Eckpunkten der beteiligten Dreiecke im Zyklus den Wert 1 ergibt.

Die Durchführung der elementaren Abbildungen gelingt durch Anwendung einer Funktion $e^{\lambda \log z}$ im allgemeinen, wenn nämlich der Winkel nicht 0 oder ein Vielfaches von 2π ist, d. h. wenn die resultierende Zykelsubstitution elliptisch oder loxodromisch ist. Sie gelingt ferner in dem Ausnahmefalle (Winkelsumme o) durch Anwendung der Exponentialfunktion. Im Ausnahmefalle eines Winkels $2k\pi$ (k ganzzahlig) hat man zu unterscheiden, ob die Bezugssubstitution hyperbolisch oder parabolisch ist. Im ersteren Falle kommt man wieder mit einer Funktion $e^{\lambda \log z}$ durch, im zweiten Falle kommt die Substitution $Z^k \pm \log Z = z$ in Betracht. Liegt der Fall des Nullwinkels vor und ist die Substitution hyperbolisch, so wird durch Anwendung einer Funktion $e^{\lambda \log z}$ eine Abbildung des Eckenzykels auf die Umgebung einer geschlossenen Kreislinie erreicht. Bei der Durchführung der Operationen hat man zweckmässig den Eckpunkt ins Unendliche zu transformieren und in den Fällen, wo die Zykelsubstitution nicht parabolisch ist, den zweiten Fixpunkt derselben nach dem Nullpunkt zu verlegen.

Wir bemerken, dass die oben definierten allgemeinen idealen Riemannschen Flächen, sofern die Bezugssubstitutionen alle linear sind, offenbar solche Triangulationen gestatten, durch die sie dem Begriffe der linearen Triangelsysteme untergeordnet werden.

Statt ebenflächiger oder kugelflächiger Polyeder können wir auch solche *Polyeder* betrachten, die von lauter bis in die Kanten und Eckpunkte hinein regulären und *analytischen Flächenstücken* gebildet werden. Auf Grund des bekannten Satzes, wonach eine genügend klein zu denkende Umgebung eines beliebigen Punktes einer regulären Fläche unter Zugrundelegung des euklidischen Winkelbegriffes für die Winkel auf der Fläche konform auf die Umgebung eines Punktes O der z-Ebene abgebildet werden kann, ist klar, dass solche Flächen unter Einbeziehung ihrer Kanten als Riemannsche Mannigfaltigkeiten angesehen werden können.[1] Ein solches Polyeder kann offenbar durch ein analytisch begrenztes Triangelsystem ersetzt werden, dessen Dreiecksflächen von regulären analytischen Linien begrenzt sind, die in ihren Endpunkten noch den Charakter algebraischer Kurven besitzen und deren Bezugssubstitutionen ebenfalls in den Eckpunkten noch den Charakter algebraischer Funktionen besitzen. Bezeichnen wir allgemein ein derartiges Triangelsystem als ein *analytisches Triangelsystem algebraischen Charakters*, so ist wieder die Frage der Eckenbedingung für ein solches Triangelsystem aufzuwerfen. In dieser Beziehung werden wir unten (No. 36) den folgenden Satz beweisen, der insbesondere den Fall der von regulären analytischen Flächen gebildeten Polyeder umfasst: Ist die Winkelsumme des Eckenzykels > 0

[1] Wir werden später sehen (No. 36), dass man immer auch die Eckpunkte einbeziehen kann, sogar, wenn das Polyeder dort eine *räumliche Spitze* darbietet.

und ist die Zykelsubstitution, die natürlich nun auch im Eckpunkte O den Charakter einer algebraischen Funktion aufweist, eine solche der Form

$$z' = \alpha z + \text{Glieder höherer Ordnung}, \qquad (\alpha \neq 0)$$

so ist die allgemeine *Eckenbedingung* erfüllt, der Zyklus also auf die Umgebung eines Punktes abbildbar.[1] Ist aber die Winkelsumme gleich Null, so ist die Eckenbedingung erfüllt, wenn die Zykelsubstitution eine Entwicklung der Form hat

$$z' = z + \beta z^k (1 + ((0))),$$

unter k einen rationalen Exponenten > 1 verstanden, unter $((0))$ eine Entwicklung algebraischen Charakters, die für $z = 0$ verschwindet, unter β schliesslich eine Konstante, die der Bedingung genügt

$$\arg \beta \not\equiv (1 - k)\,\varphi_0 \qquad (\operatorname{mod} \pi)$$ [2]

wobei φ_0 das Argument der Tangentenrichtung ist, das man gerade hat, nachdem man die Ecken des Zykels unter Verwendung der Bezugssubstitutionen zu einer Ecke zusammengefügt hat.

Eine besonders wichtige Gattung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten bilden die durch *Fundamentalgruppen* definierten *Fundamentalmannigfaltigkeiten*, die wir in der folgenden Nummer betrachten. Ihre besondere Wichtigkeit ergibt sich aus dem später zu begründenden Satz, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit einer und wesentlich nur einer Fundamentalmannigfaltigkeit äquivalent ist. Die Fundamentalmannigfaltigkeiten sind darnach als die *Normalformen* der Riemannschen Mannigfaltigkeiten unter Zugrundelegung unseres Äquivalenzbegriffs zu betrachten.

32. *Fundamentalgruppen und Fundamentalmannigfaltigkeiten.* Als *Fundamentalgruppen* bezeichnen wir alle diejenigen Gruppen linearer Substitutionen ohne infinitesimale Substitutionen, deren Substitutionen in ihrer Gesamtheit entweder die ganze ζ-Ebene inkl. des Unendlichpunktes *(elliptische Fundamentalgruppe)* oder die ganze ζ-Ebene exkl. des Unendlichpunktes *(parabolische Fundamentalgruppen)* oder die Fläche des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ *(hyperbolische Fundamentalgruppen)* in sich transformieren und in den genannten *Grundbereichen* keine Fixpunkte haben.

[1] Vgl. No. III der Serie »Abhandlungen«; s. § 10 ebenda, wo übrigens die Potenzreihe regulär, nicht nur algebraischen Charakters angesetzt ist.

[2] S. die geometrische Deutung pag. 137.

Fassen wir eine einzelne Fundamentalgruppe ins Auge, so wird dieselbe einem Punkte des zugehörenden »Grundbereichs», ausser im Falle der allein von der identischen Substitution gebildeten *Einheitsgruppe* jedem Punkte des Grundbereichs unendlich viele mit ihm äquivalente Punkte zuordnen, die entsprechend den verschiedenen Substitutionen der Gruppe ebenfalls alle voneinander verschieden sind. Ein so definiertes System äquivalenter Punkte definieren wir jetzt als einen »*Punkt*» der durch die Fundamentalgruppe erklärten Riemannschen Mannigfaltigkeit, die wir ihrerseits jetzt als *Fundamentalmannigfaltigkeit* bezeichnen. Diese wird somit von der Gesamtheit aller verschiedenen in obiger Weise erklärten »Punkte» gebildet. Dabei bleibt näher zu begründen, dass Fundamentalmannigfaltigkeiten in der Tat Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind. Dazu zeigen wir, dass sie auf lineare Triangelsysteme mit durchweg erfüllter Eckpunktbedingung eineindeutig bezogen werden können, wobei übrigens die in der ζ-Ebene gültige Winkelbestimmung massgebend bleiben soll.

Was zunächst die »*Einheitsgruppe*» anbelangt, so haben wir diese in dreifacher Weise als Fundamentalgruppe zu betrachten, nämlich als *elliptische, parabolische* und *hyperbolische* Fundamentalgruppe. In jedem der genannten drei Fälle sind die zugehörenden Grundbereiche selbst, nämlich die Vollebene, die im Unendlichen punktierte Ebene, die Einheitskreisfläche, als die betreffenden, durch die Einheitsgruppe definierten Fundamentalmannigfaltigkeiten zu betrachten.

Die von der Einheitsgruppe verschiedenen *parabolischen Fundamentalgruppen* werden bekanntlich von einer oder zwei unabhängigen Translationen erzeugt. Die zugehörenden Fundamentalmannigfaltigkeiten werden in unmittelbar verständlicher Weise durch den beiderseits unendlichen ränderbezogenen *Parallelstreifen* oder die ränderbezogene *Parallelogrammfläche* der elliptischen Funktionen als ideale Riemannsche Flächen vertreten. Der Parallelstreifen repräsentiert uns eine zweifach zusammenhängende, mit zwei parabolischen (s. No. 37) Öffnungen versehene Riemannsche Mannigfaltigkeit, das Parallelogramm eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 1.

Wir gehen nunmehr zu den von der Einheitsgruppe verschiedenen *hyperbolischen Fundamentalgruppen* über.[1]

Wir betrachten eine hyperbolische Fundamentalgruppe Γ, die endlich oder unendlich viele Erzeugende haben kann. Wählen wir innerhalb des Einheitskreises z. B. den Nullpunkt O_0 und suchen alle vermöge der Substitutionen der

[1] FRICKE bedient sich in seinen »Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen» zur Analyse der Fundamentalgruppen (»hyperbolische Rotationsgruppen») seiner »Normalpolygone».

Gruppe Γ mit ihm äquivalenten Bildpunkte auf, so erhalten wir ein Punktsystem $\Sigma(O_0)$ von unendlich vielen Punkten, die wir mit O_0, O_1, $O_2, \ldots$ bezeichnen. Keine zwei dieser Punkte können zusammenfallen, da sonst eine Substitution mit Fixpunkten innerhalb des Einheitskreises in der Gruppe vorkommen würde, was wir ausgeschlossen haben. Wir behaupten ferner, dass in jedem um den Punkt O_0 als Mittelpunkt gezogenen Kreise mit Radius $q < 1$ nur endlich viele Punkte des Systems liegen können. Gäbe es nämlich unendlich viele solche Punkte, so würde es innerhalb dieses Kreises zwei Punkte des Systems, O_μ und O_ν, geben von der Eigenschaft, dass erstens der Abstand dieser Punkte kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Grösse ist und dass zweitens korrespondierende in O_μ und O_ν gewählte Linienelemente beliebig kleine Winkel miteinander bilden. Die O_μ in O_ν überführende Substitution der Gruppe Γ würde demgemäss eine von der identischen Substitution beliebig wenig abweichende Substitution liefern, entgegen der Definition der Fundamentalgruppen.

Durch die Operationen der Gruppe Γ wird das Punktsystem $\Sigma(O_0)$ lediglich in sich transformiert. Die einzelne Substitution ist durch Angabe irgend zweier Punkte des Systems $\Sigma(O_0)$, die durch die betreffende Substitution in einander übergeführt werden, vollständig bestimmt.

Die Betrachtung können wir, statt von dem Nullpunkte O_0 auszugehen, auch anstellen, ausgehend von einem beliebigen inneren Punkte des Einheitskreises. Wir finden so allgemein zu einem Punkte P_0 ein Punktsystem $\Sigma(P_0)$.

Nunmehr sei K_0 eine ganz innerhalb des Einheitskreises enthaltene Kreislinie, welche die Peripherie des Einheitskreises auch nicht berühren möge. Vermöge der Substitutionen der Gruppe Γ gehört zu K_0 ein System $\Sigma(K_0)$ von unendlich vielen Kreisen innerhalb des Einheitskreises. Zu K_0 gehört ein »idealer Mittelpunkt» M_0 von invarianter Bedeutung, nämlich der innerhalb K_0 gelegene Vereinigungspunkt des zu K_0 und dem Einheitskreise gehörenden Orthogonalkreisbüschels. Zum System $\Sigma(K_0)$ gehört das System $\Sigma(M_0)$. Beachtet man dies und beachtet man weiter, dass alle Kreise des Systems $\Sigma(K_0)$ eine und dieselbe Winkelinvariante 2λ (vgl. Nr. 17) haben, so erkennt man leicht folgendes. Keine zwei der Kreise des Systems $\Sigma(K_0)$ sind identisch; auch umschliesst niemals einer derselben einen andern oder berührt ihn von innen; vielmehr schneiden sich je zwei der Kreise entweder oder schliessen sich gegenseitig aus, wobei auch Berührung zugelassen ist. Zu jedem mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreise k innerhalb des Einheitskreises existieren nur endlich viele Kreise des Systems $\Sigma(K_0)$, deren Flächen mit der Fläche k einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Anders ausgedrückt: Die Kreise des Systems $\Sigma(K_0)$ häufen sich nur gegen die Peripherie des Einheitskreises hin; und zwar werden dabei ihre Durchmesser unendlich klein.

Die von allen Kreisflächen des Systems $\Sigma(K_0)$ bedeckte Gesamtfläche S innerhalb des Einheitskreises wird durch die Kreislinien des Systems $\Sigma(K_0)$ in bestimmter Weise parzelliert und zwar jede Kreisfläche des Systems in endlich viele Parzellen, die alle einfach zusammenhängend sind. Durch die Substitutionen der Gruppe Γ wird das Parzellensystem von S jedesmal in sich selbst transformiert, wobei niemals eine Parzelle in sich selbst übergehen kann, ausser bei der Anwendung der identischen Substitution. Es gibt innerhalb K_0 endlich viele unter einander nicht äquivalente Parzellen (*Grundparzellen*) von der Beschaffenheit, dass jede Parzelle von S einer und nur einer Grundparzelle äquivalent ist.

Die Grundparzellen können wir, da sie im allgemeinen zunächst Kreisbogenpolygone sein werden, offenbar durch Ziehen weiterer Kreisbögen triangulieren und diese Triangulation auf das ganze System vermöge der Substitutionen der Gruppe Γ übertragen.

Um zu einem *vollständigen repräsentierenden System von Grundparzellen* zu gelangen, das für die ganze Fläche des Einheitskreises dasselbe leistet, was das soeben gefundene Grundparzellensystem für S leistet, wählen wir statt K_0 der Reihe nach mit dem Einheitskreise konzentrische Kreise $K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots$, deren Radien $R_1, R_2, R_3, \ldots$ wachsen und der Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 1$ genügen. Das System der Kreisflächen $\Sigma(K^{(0)})$ bedeckt ein Gebiet $S^{(0)}$ innerhalb des Einheitskreises, welches wir in triangulierter Gestalt erhalten. Entsprechend gewinnen wir das Gebiet $S^{(1)}$ aus $K^{(1)}$; dasselbe enthält das Gebiet $S^{(0)}$ vollständig. Wir lassen nun $S^{(0)}$ in Bezug auf die dort bereits gewonnene Triangulation ungestört und fügen diesem Gebiete jetzt das Gebiet $(S^{(1)} - S^{(0)})$ in triangulierter Gestalt hinzu, darnach das Gebiet $S^{(2)} - S^{(1)}$ in triangulierter Gestalt usw.

Das Ergebnis ist eine vollständige Triangulierung der Fläche des Einheitskreises, wie wir sie verlangen. Die Fläche des Einheitskreises ist mit einem zur Fundamentalgruppe Γ gehörenden *Diskontinuitätsnetz* überzogen. Wir bekommen im ganzen endlich oder unendlich viele untereinander nicht äquivalente Grundparzellen, deren Seiten durch Substitutionen der Gruppe Γ gepaart sind und also ein *lineares Triangelsystem* bilden. Hierbei ist die Eckenbedingung immer erfüllt, da die Winkelsumme jedes Eckenzykels unmittelbar gleich 2π ist, die den einzelnen Eckenzykel zur Vereinigung auf die Umgebung eines Punktes bringenden »Hilfstransformationen« kann man unmittelbar der Gruppe Γ selbst entnehmen.

Die erwähnten Grundparzellen, die offenbar auf mannigfaltige Weise bestimmt werden können, repräsentieren durch ihre Gesamtheit die durch die Fundamentalgruppe Γ definierte *Fundamentalmannigfaltigkeit.* Diese ist geschlossen oder ungeschlossen, je nachdem die Anzahl der Grundparzellen endlich oder unendlich gross ist.

Das System der Grundparzellen, das wir gefunden haben, braucht sich nicht als ein zusammenhängendes Ganzes der unmittelbaren Anschauung darzubieten. Man kann aber ein solches zusammenhängendes Ganze leicht schaffen, indem man sich nämlich die Fundamentalmannigfaltigkeit kanonisch aufgeschnitten denkt, d. h. entweder durch $2p$ von einem Punkte O der Mannigfaltigkeit ausgehende Rückkehrschnitte, wenn nämlich die Mannigfaltigkeit geschlossen ist, oder, wenn sie offen ist, durch lauter getrennte Querschnitte, deren Anzahl endlich oder unendlich ist, je nachdem die Mannigfaltigkeit endliche oder unendliche Zusammenhangsordnung hat. Offenbar übertragen sich die Betrachtungen der No. 20 bezüglich gewöhnlicher Riemannscher Flächen ohne weiteres auch auf unsere allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Die aufgeschnittene Mannigfaltigkeit, M_0, ist in beiden Fällen einfach zusammenhängend, und man kann daher ein Grundparzellensystem so auswählen, dass die Gesamtheit der Grundparzellen ein einfach zusammenhängendes *Fundamentalpolygon* mit bezogenen Rändern bildet, wobei die Randsubstitutionen Erzeugende der Fundamentalgruppe Γ sind, die im Falle einer offenen Mannigfaltigkeit unabhängige Erzeugende sind, im Falle einer geschlossenen Mannigfaltigkeit jedoch einer in bekannter Weise zu bildenden Relation unterworfen sind, die ausdrückt, dass der Umlaufung des Punktes O in der Mannigfaltigkeit die identische Substitution als dem Punkte O zugeordnete Zykelsubstitution entspricht.

33. *Aufstellung des Fundamentaltheorems der Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (erster Äquivalenzsatz) und zweier weiterer allgemeiner Äquivalenztheoreme.* Nachdem wir in den vorhergehenden Nummern den Begriff und mannigfaltige Formen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten kennen gelernt haben, gehen wir nunmehr zur Aufstellung der Hauptsätze der allgemeinen Theorie über. Wir stellen das Haupttheorem voran.

Fundamentaltheorem (erster Äquivalenzsatz): Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist einer und wesentlich nur einer Fundamentalmannigfaltigkeit äquivalent. Zwei Fundamentalmannigfaltigkeiten werden dabei als nicht wesentlich verschieden dann und nur dann bezeichnet, wenn sie durch lineare Transformation der sie definierenden Fundamentalgruppen ineinander übergeführt werden können.

Den allgemeinen Beweis des Fundamentaltheorems werden wir später erbringen. Hingegen können wir sofort die Unitätsbehauptung desselben beweisen. Denken wir in der Tat zwei Fundamentalmannigfaltigkeiten gegeben, die in eineindeutige konforme Beziehung gesetzt seien, so stellt sich diese konforme Beziehung offenbar als eine von beiden Seiten reguläre konforme Abbildung der einfach zusammenhängenden Überlagerungsmannigfaltigkeit, mithin der Diskontinuitätsgebiete, d. i. der Grundbereiche (Vollebene, punktierte Ebene, Kreisfläche) dar. Diese Beziehung der Grundbereiche ist somit eine eineindeutige. Als solche muss sie aber durch eine lineare Transformation vermittelt werden.

Für jede gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit kommt hiernach nur eine von den drei Möglichkeiten (elliptischer, parabolischer, hyperbolischer Fall) in Betracht. Jenachdem welcher der genannten Fälle eintritt, nennen wir die *Riemannsche Mannigfaltigkeit elliptisch, parabolisch, hyperbolisch.* Nach den Entwicklungen der No. 19 können wir, wie für Riemannsche Flächen, so auch nunmehr für Riemannsche Mannigfaltigkeiten das Fundamentaltheorem näher präzisieren. Denn zunächst bemerken wir leicht, dass die Herstellung einer Äquivalenzbeziehung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und einer Fundamentalmannigfaltigkeit in der Tat nichts andres bedeutet als die Aufstellung einer relativ unverzweigten Funktion »ζ über M«, welche die zu M gehörende einfach zusammenhängende von relativen Windungspunkten freie *Überlagerungsmannigfaltigkeit* $M^{(\infty)}$ auf eines der drei Gebiete (Vollebene, punktierte Ebene, Kreisfläche) abbildet. Wir kommen also zu folgender Formulierung.

Präzisere Formulierung des Fundamentaltheorems: Eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, je nachdem ihr Geschlecht p gleich 0, 1 oder $\geqq 2$ ist, der elliptischen, einer parabolischen oder hyperbolischen Fundamentalmannigfaltigkeit äquivalent. Ist sie offen und einfach zusammenhängend, so ist sie entweder dem parabolischen oder dem hyperbolischen Grundbereich direkt äquivalent. Ist ihre Zusammenhangsordnung gleich 2, so ist sie entweder der parabolischen offenen Fundamentalmannigfaltigkeit (»bezogener Parallelstreifen«) oder einer hyperbolischen Fundamentalmannigfaltigkeit (»bezogener Halbstreifen« oder »bezogener Halbring«) äquivalent. Ist schliesslich die Zusammenhangsordnung $\geqq 3$, so ist sie stets einer hyperbolischen Fundamentalmannigfaltigkeit äquivalent. (Anmerkung: Als »bezogenen Halbstreifen« bezeichnen wir hierbei den zu einer von einer einzigen parabolischen Erzeugenden erzeugten hyperbolischen Fundamentalgruppe gehörenden Fundamentalbereich, als »bezogenen Halbring« den zu einer von einer einzigen hyperbolischen Erzeugenden erzeugten hyperbolischen Fundamentalgruppe gehörenden Fundamentalbereich. Lässt man an Stelle des Einheitskreises die obere Halbebene treten, so können die erwähnten beiden speziellen Fundamentalbereiche offenbar in der Form als Halbstreifen bzw. als Halbring angenommen werden.)

Neben das Fundamentaltheorem als ersten und in gewisser Weise wichtigsten Äquivalenzsatz stellen wir zwei weitere Äquivalenzsätze von allgemeiner Bedeutung:

Zweiter Äquivalenzsatz: Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist einer gewöhnlichen Riemannschen Fläche F äquivalent, d. h. einer Riemannschen Fläche, die nicht nur eine ideale Riemannsche Fläche ist.

Dritter Äquivalenzsatz: Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist einem analytischen Gebilde äquivalent.

Wir bemerken sofort, dass der vollständige Beweis aller drei Äquivalenztheoreme von uns geführt ist, wenn es gelungen ist, das Fundamentaltheorem (erster Äquivalenzsatz) zu beweisen, da wir von da aus durch Bildung von Quotienten Poincaréscher Reihen ohne weiteres zu einer zur gewonnenen Fundamentalgruppe gehörenden automorphen Funktion übergehen können. Diese automorphe Funktion vermittelt den Übergang von der Fundamentalmannigfaltigkeit zu einer äquivalenten gewöhnlichen Riemannschen Fläche. Zu dieser Fläche aber haben wir gelernt, eine eigentlich zugehörende analytische Funktion, mithin ein mit ihr äquivalentes analytisches Gebilde zu konstruieren.

34. *Beweis des Fundamentaltheorems für ideale Riemannsche Flächen mit linearen Bezugssubstitutionen. Anwendung auf die ebenflächig oder kugelflächig begrenzten Polyeder.* Für unsre folgende Beweisführung macht es einen wesentlichen Unterschied aus, ob die gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit, die wir uns unter dem Bilde der allgemeinen idealen Riemannschen Fläche vorstellen dürfen, als ideale Riemannsche Fläche mit lauter linearen Bezugssubstitutionen oder als ideale Riemannsche Fläche mit allgemeinen analytischen Bezugssubstitutionen gegeben ist. Im ersten Falle können wir sie durch ein lineares Triangelsystem ersetzt denken, im zweiten Falle durch ein analytisches Triangelsystem, in beiden Fällen können wir dabei die Eckenbedingung als erfüllt ansehen.

Wir betrachten zunächst den Fall des *linearen Triangelsystems*, das wir uns beliebig gegeben denken. Denken wir uns sämtliche Triangeleckpunkte von der Mannigfaltigkeit M ausgenommen, d. h., können wir auch sagen, denken wir uns die Mannigfaltigkeit M in den Triangeleckpunkten der endlichen Eckenzykeln punktiert, so entsteht ein Mannigfaltigkeit M', deren einfach zusammenhängende Überlagerungsmannigfaltigkeit $M'^{(\infty)}$ durch relationenfreie ideale Zusammenfügung der Dreiecksflächen, deren jedes dabei in unendlich vielen Exemplaren verfügbar zu denken ist, konstruiert werden kann. Diese Mannigfaltigkeit $M'^{(\infty)}$ ist, da alle Bezugssubstitutionen linear, mithin ausführbar sind, unmittelbar als gewöhnliche Riemannsche Fläche darstellbar. Diese Riemannsche Fläche ist einfach zusammenhängend und hat übrigens keine inneren Windungspunkte. Wir sind daher in der Lage, diese Fläche nach den Entwicklungen des vorigen Teils eineindeutig konform auf die Fläche eines Grundbereichs, im allgemeinen des Einheitskreises abzubilden. Die Abbildungsfunktion ist eine Grösse, die wir gemäss früher gebrauchten Bezeichnungen zweckmässig als die Funktion ζ_1 bezeichnen. Der Übergang von der Grösse ζ_1 zur eigentlich zu bestimmenden Grösse ζ vollzieht sich wieder nach der Methode der unendlichen Produkte nach Analogie früherer Entwicklungen.

Als Anwendung der vorhergehenden Entwicklung finden wir den Satz, dass jedes *geschlossene zweiseitige ebenflächige oder kugelflächige Polyeder* eineindeutig konform auf eine geschlossene Riemannsche Fläche abgebildet werden kann. Insbesondere ergibt sich für ein einfach zusammenhängendes geschlossenes Polyeder der Satz, dass ein solches eineindeutig konform auf die volle Oberfläche einer Kugel abgebildet werden kann.

35. *Beweis des Fundamentaltheorems für beliebig gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeiten.* Nunmehr legen wir eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit M in Gestalt eines analytischen Triangelsystems mit nur endlichen Eckenzykeln und durchweg erfüllter Eckenbedingung (allgemeine triangulierte ideale Riemannsche Fläche) zugrunde. Wir können das analytische Triangelsystem auf mannigfaltige Weise durch ein anderes solches System ersetzen. Insbesondere können wir durch Neuparzellierung und genügend weit getriebene Unterteilung erreichen, dass die einzelnen Dreiecke, die wir selbstverständlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung alle im Endlichen liegend annehmen dürfen, von gewöhnlichen regulären analytischen Linienstücken begrenzt sind, die noch in ihren Endpunkten regulär sind, die ferner die Eigenschaft haben, dass der Übergang von einem solchen Linienstück λ zu einer Strecke λ_1 der Achse des Reellen durch eine einzige für das ganze Linienstück λ gültige Potenzreihe bewirkt werden kann. Die Strecke λ_1 können wir ausserdem so wählen, dass sie einschliesslich ihrer Endpunkte auf der positiven Hälfte der Achse des Reellen liegt. Bezeichnen wir die λ in λ_1 überführende Transformation mit $z_1(z)$, so können wir nunmehr

offenbar eine Potenz $z_1^k = z_2$ mit ganzzahligem Exponenten bilden, durch die bewirkt wird, dass einer gewissen schmalen Umgebung U des Linienstückes λ, der in z_1 eine Umgebung U_1 des Linienstückes λ_1 entspricht, in z_2 eine Umgebung U_2 von λ_2 entspricht, welche die Kreisfläche mit λ_1 als Durchmesser enthält. Den Umgebungen U, U_1, U_2 entspricht vermöge der zu λ gehörenden Bezugssubstitution $z'(z)$ eine Umgebung U' des zugeordneten regulären Linienstückes λ'. Wir bemerken, da jetzt die Übergänge von z zu z_1, von z_1 zu z_2, von z_2 zu z' alle durch je eine gewöhnliche Potenzreihe bewirkt werden, dass jetzt die Funktion $z'(z)$ in einer genügend schmal definierten Umgebung U von λ mit beliebiger Genauigkeit gleichmässig durch ganze rationale Näherungsfunktionen, die sich aus der Zusammensetzung ergeben, approximiert werden kann.

Nunmehr nehmen wir aus M die Eckpunkte der Dreiecke aus, wodurch aus M eine Mannigfaltigkeit M' entsteht, die wir ohne weiteres als eine ideale Riemannsche Fläche ansprechen dürfen. Die zu M' gehörende Uniformisierende ohne Relativverzweigung werde mit ζ_1 bezeichnet. Auf Grund wiederholt angewandter Beweisprinzipien genügt es, diese Grösse ζ_1 zu konstruieren, da der Übergang von ζ_1 zur unverzweigten Variabeln ζ der Mannigfaltigkeit M vermittelst unendlicher Produkte wie früher geleistet werden kann. Die Grösse ζ_1 bildet die einfach zusammenhängende Überlagerungsmannigfaltigkeit $M'^{(\infty)}$, die uns an Hand des gegebenen Triangelsystems unmittelbar als ideale Riemannsche Fläche mitgegeben ist, auf die schlichte einfach zusammenhängende Einheitskreisfläche ab. Es ist jetzt offenbar nicht möglich, die Mannigfaltigkeit $M'^{(\infty)}$, wie im linearen Falle, direkt durch eine gewöhnliche Riemannsche Fläche zu repräsentieren, weil die analytischen Bezugssubstitutionen nicht in dem Umfange ausführbar sind, wie das zur sukzessiven effektiven Nebeneinanderlagerung der Dreiecksflächen erforderlich ist.

Die eineindeutige Abbildung der $M'^{(\infty)}$ auf eine schlichte Kreisfläche ist jedoch auf Grund uns geläufig gewordener Konvergenzbeweisprinzipien dann als möglich erwiesen, wenn es gelingt, einen beliebig umfassenden einfach-zusammenhängenden Teilbereich der $M'^{(\infty)}$ auf ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet abzubilden. Einen solchen Teilbereich definieren wir nun folgendermassen: Wir schneiden aus den Dreiecken des M definierenden Triangelsystems die Eckenzipfel in der Weise aus, dass die abtrennenden Linien sich auf der Mannigfaltigkeit M entsprechend den Eckenzykeln zu geschlossenen Linienzykeln vereinigen. Die Dreiecksflächen werden dadurch zu Sechseckflächen, die immer von sechs regulären analytischen Linienstücken begrenzt sind. Denken wir uns jetzt eine endliche Anzahl auf der $M'^{(\infty)}$ miteinander zusammenhängender solcher Sechseckflächen gewählt, so haben wir offenbar einen Näherungsbereich, wie wir ihn brauchen. Dieser Näherungsbereich bildet auf der $M'^{(\infty)}$ ein von endlich vielen regulären Linienteilen begrenztes Polygon, das in ebenfalls von regulären Linien begrenzte Sechseckflächen zerlegt erscheint. Nimmt man an, dass für ein solches Polygon eine mit Einschluss des Randes reguläre eineindeutige Abbildung auf ein schlichtes Polygon gelungen sei, wie das für das einzelne Sechseck unmittelbar der Fall ist, so wird man vor die Frage gestellt, ob es möglich ist, den durch Anschluss eines weiteren Sechsecks erweiterten idealen Polygonbereich ebenfalls auf ein schlichtes Gebiet abzubilden. Das bedeutet, dass man folgende Aufgabe zu lösen hat.

Aufgabe: Gegeben ist ein schlichter von regulären Linienstücken begrenzter Polygonbereich P', ferner ein ebensolcher zweiter Polygonbereich P (z. B. ein Sechseck). Durch eine reguläre Potenzreihe ist eine Seite λ von P auf eine λ' von P' bezogen unter Beachtung der Orientierungsbedingung. Es soll in P und in P' je eine mit Einschluss des Randes reguläre Funktion konstruiert werden, so dass die beiden Funktionen in korrespondierenden Randpunkten dieselben Werte annehmen und dass die beiden Polygone durch die beiden Funktionen auf zwei ebene schlichte Polygonflächen abgebildet werden, die zusammen einen einzigen schlichten Polygonbereich bilden.

Wir fassen zwecks Lösung dieser Aufgabe die Bereiche P und P' als innere Teile von einfach zusammenhängenden Gebieten B und B' auf, deren Begrenzungslinien L und L' genannt sein. Die Linien L und L' mögen die bezogenen Linien λ und λ' unter Winkeln treffen, die von einem rechten verschieden sind. Ferner mögen die Linien L und L' auf der den Bereichen P und P' abgewandten Seite der Linien λ bzw. λ' in hinreichender Nähe der Linien λ bzw. λ' verlaufen, indem sie auf dieser Seite nur spitze Winkel mit λ bzw. λ' bilden. Ersetzen wir nunmehr die Bezugssubstitution durch eine aus der definierenden Potenzreihe zu entnehmende ganze rationale Näherungssubstitution, so können wir mit Hilfe dieser den Bereich B als Ganzes übertragen. In der Übertragung ergibt sich als Bild von B ein Bereich B'', der mit B' eine Zweieckfläche gemeinschaftlich hat, in der wir uns die Flächen B' und B'' zusammenhängend denken können. Die Vereinigung der Flächen B' und B'' liefert uns eine Fläche B''', die ein gewöhnliches einfach zusammenhängendes Riemannsches Flächenstück ist, das jedoch im allgemeinen nicht schlicht zu sein braucht. Dieses Flächenstück können wir aber, weil es ein gewöhnliches Riemannsches Flächenstück ist, einer schlichten

Abbildung unterwerfen. Insbesondere können wir eine solche Abbildungsfunktion definieren, die in einem festen Punkte $O'(z'=z_0')$ des Bereichs B' unendlich wird wie $\frac{1}{z'-z_0'}+((0))$. Die Funktion, soweit sie in B' erklärt ist, werde mit $\varphi(z')$, soweit sie in B'' erklärt ist, mit $\psi(z')$ bezeichnet. Letztere liefert in der Übertragung auf B eine Funktion $\chi(z)$.

Die Funktionen φ, ψ, χ hängen von der Wahl der ganzen rationalen Näherungssubstitution ab. Alle diese Funktionen sind, nachdem man den Punkt O' mit einer kleinen etwa kreisförmigen Umgebung ausgenommen hat, beschränkt. (Hilfssatz VI.) Demnach kann man eine immer genauere Näherungssubstitutionen benützende gleichmässig konvergente Folge zunächst der φ auswählen. Die entsprechende Folge der χ ist dann offenbar in einem zweidimensionalen Stück des Bereichs B, daher innerhalb B überhaupt gleichmässig konvergent.

Die Grenzfunktionen der φ und der χ haben nun offenbar die verlangten Eigenschaften mit der unwesentlichen Abweichung, dass eine der Funktionen eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung hat. Der Umstand, dass das erwähnte gemeinschaftliche Zweieck der Bereiche B' und B'' mit der Wahl der Näherungssubstitutionen sich ändert, ist offenbar für unsre Beweisführung nicht hinderlich.

Man kann somit auch die ganze $M'^{(\infty)}$ auf einen schlichten einfach-zusammenhängenden Bereich, also auch auf einen Grundbereich abbilden. Dieser Grundbereich kann nur die Fläche des Einheitskreises sein, weil M' offenbar unendlich hohe Zusammenhangsordnung hat.

Der Nachweis des Fundamentalsatzes der Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten nahm seinen Durchgang durch den Beweis eines Satzes, den wir als den allgemeinen *Fundamentalsatz der konformen Abbildung* bezeichnen, nämlich den Satz, dass man jede einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit eineindeutig konform entweder auf die Vollebene oder auf die punktierte Ebene oder auf eine gewöhnliche Kreisfläche abbilden kann, eine Abbildung, die in jedem Falle bis auf eine lineare Transformation völlig bestimmt ist.

Hat man eine *zweifach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit*, so ergibt sich zunächst eine Beziehung derselben auf eine Fundamentalmannigfaltigkeit, deren Gruppe nur von einer Erzeugenden gebildet wird. D. h., die Mannigfaltigkeit ist eineindeutig beziehbar entweder auf den Parallelstreifen mit parabolischer Ränderbeziehung oder auf den Halbstreifen mit parabolischer Ränderbeziehung oder auf einen Halbring mit hyperbolischer Ränderbeziehung. Von diesen Bereichen aus gelangt man durch Anwendung einer Exponentialfunktion, bzw. einer Potenz mit rein imaginärem Exponenten, je nachdem zur doppelt punktierten Ebene oder einfach punktierten Kreisfläche oder Kreisringfläche als den eineindeutigen Bildern der gegebenen zweifach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit.

36. *Analytisch begrenzte Polyeder und Eckenbedingung bei analytischen Triangelsystemen.* Wir haben in Nr. 31 bereits solche Polyeder erwähnt, die von lauter regulären analytischen Flächenstücken gebildet werden. Betrachten wir jetzt, um die Vorstellung zu fixieren, insbesondere ein geschlossenes zweiseitiges Polyeder, das von endlich vielen solchen Flächenstücken gebildet wird. Die Kanten eines solchen Polyeders werden, sofern sich die Flächen immer unter von 0 und π verschiedenen Winkeln treffen, reguläre analytische Linien auf den regulären Seitenflächen der Polyeder sein, wobei die Regularität auch noch in den Eckpunkten des Polyeders besteht. Wenn jedoch zwei der Seitenflächen eine Kante bildend sich berühren, so können auch solche Punkte vorkommen, wo die Kante eine Kurve wird, die in einzelnen Punkten, insbesondere in den Eckpunkten nur den allgemeineren Charakter einer algebraischen Kurve besitzt. Es kann ferner die besonders zu erwähnende Möglichkeit vorliegen, dass die in einem Eckpunkte des betr. Polyeders gebildete körperliche Ecke den Charakter einer Spitze darbietet.

Nimmt man nun alle kritischen Punkte von der Polyederfläche zunächst aus, was im Ganzen nur endlich viele Punkte sind, so ergibt sich eine Fläche mit euklidischen Punktierungen, die als solche eine unsern Methoden ohne weiteres zugängliche Riemannsche Mannigfaltigkeit darstellt, wenn der euklidische Winkelbegriff auf der Fläche für den Konformitätsbegriff der Mannigfaltigkeit zugrunde gelegt wird. Die Hauptfrage, die zu erledigen bleibt, ist nur die, ob die Umgebung jedes kritischen Punktes eineindeutig konform auf die schlichte Umgebung eines Punktes O der z-Ebene abgebildet werden kann. Dies ist in der Tat immer der Fall.

Wir können die Ecke, für welche wir die Untersuchung machen wollen, längs einer ihrer Kanten vom Eckpunkte her aufgeschnitten denken. Durch reguläre Übertragung der einzelnen Seitenflächen auf die z-Ebene sind wir offenbar in der Lage, die aufgeschnittene Ecke auf eine von zwei Kurvenstücken algebraischen Charakters im Punkte O gebildete ebene Ecke abzubilden, wobei sich eine Ränderzuordnung $z'(z)$ von algebraischem Charakter im Punkte O ergibt. Sind nun zunächst die Kantenwinkel in den einzelnen Flächen der körperlichen

Ecke nicht sämtlich o, so ergibt sich in der z-Ebene eine Ecke mit einem ebenfalls von o verschiedenen Winkel, der gleich der Winkelsumme jener Kantenwinkel ist. Ferner bemerkt man sofort, dass die in der Ebene sich einstellende Bezugssubstitution eine solche ist, deren Entwicklung nach Potenzen einer Wurzelgrösse fortschreitet und in der Gestalt

$$z' = \alpha z (1 + \varepsilon)$$

geschrieben werden kann, wobei $|\alpha| = 1$ ist, d. h. $\alpha = \cos\lambda + i \sin\lambda$, während ε eine bei Annäherung an den Eckpunkt selbst unendlich klein werdende Grösse bezeichnet. Haben andrerseits die an einer Ecke beteiligten oben erwähnten Kantenwinkel sämtlich die Öffnung o, so hat auch der Winkel der ebenen Ecke die Öffnung o. Man kann dann um den räumlichen Eckpunkt als Mittelpunkt eine Kugelfläche von beliebig kleinem Radius beschreiben, die auf der Oberfläche des Polyeders eine geschlossene Linie ausschneidet, welche die Kanten unter Winkeln der Gestalt $\pi/2 (1 + \varepsilon')$ schneide, wobei ε' eine Grösse bezeichnet, die unter jede Grenze herabsinkt, wenn man den erwähnten Kugelradius unendlich klein werden lässt. Hieraus ergibt sich nun, dass in der ebenen Ecke, die jetzt die Gestalt einer Spitze hat, die geradlinigen Verbindungsstrecken zugeordneter Punkte die Tangenten der ebenen Ecke unter Winkeln von der Grösse $\pi/2 (1 + \varepsilon'')$ treffen. Dies bedeutet, dass die Bezugssubstitution die Form hat

$$z' = z + \beta z^k (1 + ((0))),$$

wobei insbesondere

$$\arg \beta = (1 - k)\, \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

ist; vgl. No. 31.

In allen Fällen ordnen sich die von den Polyedern her in der geschilderten Weise gewonnenen ebenen Ecken den allgemeineren ränderbezognen Ecken unter, die wir in Nr. 31 definiert haben. Letztere sind insofern allgemeiner, als einerseits im Falle eines von o verschiedenen Eckenwinkels der Koeffizient α nur von o verschieden angenommen wird, also nicht notwendig den absoluten Betrag 1 zu haben braucht, andrerseits im Falle der Spitze (Eckenwinkel o) die Ränderzuordnung für den Koeffizienten β einen weiteren Spielraum lässt. Die geometrische Bedeutung der für β in Nr. 31 angegebenen Bedingung ist, dass die Verbindungsstrecke zugeordneter Randpunkte eine Richtung hat, die in der Grenze, wenn nämlich die zugeordneten Punkte an den Eckpunkt selbst heranrücken, von der

Tangentenrichtung der Spitze im Eckpunkte und ihrer Gegenrichtung verschieden ist.

Um nun für die betrachteten allgemeinen ebenen Ecken den Nachweis zu führen, dass die betreffenden Flächenzipfel auf die Umgebung eines Punktes eineindeutig konform übertragen werden können, treffen wir für den Fall, dass der Eckenwinkel $\geqq \pi/2$ ist, eine Vorbereitung mittels einer $\sqrt[n]{\ }$-Transformation der Ecke. Indem man nämlich den Exponenten n dieser Transformation genügend gross ganzzahlig wählt, erreicht man, dass die neue Ecke eine solche ist, deren Winkelsumme $< \pi/2$ ist.

Wir verbinden nun zugeordnete Randpunkte der Ecke durch eine gradlinige Strecke s, die offenbar durch den Zipfel der Ecke hindurchgeht. Ferner ziehen wir zwei weitere Strecken s_1 und s_2 zwischen Paaren zugeordneter Punkte zur einen und andern Seite der Strecke s. Wir treffen die Wahl der Strecken s_1 und s_2 genauer so, dass die Anfangspunkte der Strecken s_1 und s_2 von dem Anfangspunkte der Strecke s einen zur Länge der Strecke s in festem Verhältnis stehenden Abstand haben, wenn wir uns im folgenden vorstellen, dass die Strecke s unendlich viele verschiedene Lagen annimmt, bei denen sie sich dem Eckpunkte O unbegrenzt nähert.

Auf das zwischen s_1 und s_2 liegende Stück S des Eckenzipfels können wir die Bezugstransformation der Ecke zur Anwendung bringen und ihre Inverse. Dadurch werden dem Flächenstück S zwei weitere Flächenstücke S' und $S_,$ schlicht nebengelagert, jedenfalls sofern wir uns in genügender Nähe des Punktes O befinden. Nunmehr bemerke man, dass die von drei Vierecken $S, S,' S,$ gebildete Figur einschliesslich der für zwei gegenüberliegende Seiten von S bestehenden Bezugstransformation gestaltlich in eine ganz bestimmte Grenzfigur übergeht. Dies ist genauer so zu verstehen: Wir denken uns die erwähnte Figur für jede Lage von S so vergrössert, dass der Strecke s eine feste endliche Strecke s^* der Ebene entspricht. Dann findet sich als Grenzfigur im Falle eines von o verschiedenen Eckenwinkels eine von drei Paralleltrapezen $T, T,' T,$ gebildete Grenzfigur, wobei T' und $T_,$ aus T bei zweckmässiger Wahl der Strecke s^* durch die Ähnlichkeitstransformationen $z' = a z$ und $z' = \frac{z}{a}$ entstehen. Im Falle eines Eckenwinkels der Öffnung o andrerseits ergibt sich in der Grenze eine von drei Parallelogrammen $P, P,' P,$ gebildete Figur, wobei P' und $P_,$ aus P durch Parallelverschiebungen $z' = z \pm 2\omega$ entstehen.

Der zu untersuchende Eckenzipfel ist nach Ausnahme des Eckpunktes selbst ein zweifach zusammenhängender Bereich, der somit eineindeutig konform auf die Fläche eines allgemeinen Kreisringes bezogen werden kann. Zu beweisen ist, dass der dem Eckpunkte zugewandte Teil des Zipfels sich dabei auf die Umgebung eines Punktes abbilden muss, also nicht auf die Umgebung eines wirklichen Kreises K.

Nehmen wir an, dass wir die Umgebung eines Kreises K bekämen, so können wir in folgender Weise einen Widerspruch herleiten. Wir wählen eine Folge von Linien s, die gegen den Punkt O konvergiert. All diesen Linien entsprechen in der Kreisringebene geschlossene Linien, die die Kreislinie K einfach umschlingen. Betrachten wir nun die für die Fläche $S + S' + S$, erklärte Abbildungsfunktion in Abhängigkeit von der durch die oben geschilderte Vergrösserung gewonnenen Variablen, so tritt an Stelle der einen Abbildungsfunktion zwischen Ecke und Kreisring nunmehr eine unendliche Folge von Abbildungsfunktionen. Diese Folge ist jedoch beschränkt, und folglich kann man eine gleichmässig konvergente Folge auswählen.

Die Grenzfunktion dieser Folge müsste nun offenbar eine Abbildung der Grenzfigur auf ein Gebiet leisten, das die Kreislinie K umschlingt. Aus diesem Grunde kann die Grenzfunktion keine Konstante sein. Andrerseits können die Werte, welche die Grenzfunktion in der Grenzfigur annimmt, nur solche von einem festen absoluten Betrage sein, weil nämlich ihre repräsentierenden Bildpunkte notwendig in unendlicher Nähe, mithin auf dem Kreise K selbst liegen müssten. Das ist ein Widerspruch.

Damit ist der verlangte Nachweis der Eckenabbildung und zugleich der Nachweis der Abbildung beliebiger von endlich vielen regulären analytischen Flächen gebildeter geschlossener zweiseitiger Polyeder auf eine geschlossene Riemannsche Fläche erbracht.

37. *Besondere Betrachtungen betreffend die offenen hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten endlichen Zusammenhanges und die zugehörenden hyperbolischen Fundamentalgruppen.* Ist eine offene hyperbolische Riemannsche Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges[1] gegeben, so können die einzelnen »Öffnungsstücke« (s. pag. 97) dieser Mannigfaltigkeit entweder auf die schlichte Umgebung eines

[1] Es gibt nur zwei offene nichthyperbolische, nämlich parabolische Riemannsche Mannigfaltigkeiten, deren eine durch den »bezogenen Parallelstreifen« bzw. die zweifach punktierte Kugel repräsentiert wird, während die andere durch die einfach punktierte Kugel dargestellt wird.

Punktes O oder auf die schlichte äussere Umgebung des Einheitskreises K abgebildet werden. Im ersten Falle reden wir von einer *parabolischen Öffnung*, im zweiten Falle von einer *hyperbolischen Öffnung* der Mannigfaltigkeit. Eine und dieselbe Mannigfaltigkeit kann natürlich Öffnungen beiderlei Art darbieten. Bei einer parabolischen Öffnung können wir nunmehr offenbar die betreffende durch Abbildung gewonnene Umgebung des Punktes O durch den Punkt O selbst abschliessen. Wir denken uns dies für alle einzelnen parabolischen Öffnungen ausgeführt. Andrerseits können wir einer hyperbolischen Öffnung entsprechend jedesmal die Kreislinie K hinzunehmen. Dementsprechend können wir zunächst eine Neutriangulation der so erweiterten Mannigfaltigkeit ausführen, die den Punkt O jedesmal als inneren Punkt erscheinen lässt und die ferner unmittelbar mit endlich vielen Triangeln jedesmal die äussere Umgebung des Kreises K und diesen selbst unter Ausschluss seiner inneren Punkte erfasst.

Die Punkte des Kreises K sind dadurch allerdings noch nicht innere Punkte der neuen Mannigfaltigkeit geworden. Sie werden es aber, wenn man nunmehr das gewonnene die Mannigfaltigkeit definierende Triangelsystem mit seinen Substitutionen in Bezug auf die Kreislinie K symmetrisch reproduziert. Dadurch ist offenbar eine in symmetrischer Weise triangulierte symmetrische geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit entstanden, die durch die Symmetrielinien K in zwei voneinander in der Idee getrennte Mannigfaltigkeitshälften zerlegt erscheint *(orthosymmetrische Mannigfaltigkeit).*

Hat nun die ursprüngliche Mannigfaltigkeit nur parabolische Öffnungen, so kann sie nach dem Vorstehenden als Punktierungsresultat einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit angesehen werden. Darnach ist sie einer punktierten Riemannschen Fläche äquivalent oder, wenn wir wollen, einem punktierten algebraischen Gebilde.

Besitzt zweitens die Mannigfaltigkeit nur hyperbolische Öffnungen, so erscheint sie nach Vorstehendem als die eine Hälfte einer symmetrischen geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit. Diese symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit kann zunächst auf eine geschlossene Riemannsche Fläche eineindeutig abgebildet werden. Der zu dieser Fläche gehörende Funktionenkörper gestattet dann auf Grund der bestehenden Symmetrie eine Funktion u des Körpers auszuwählen, die auf den Symmetrielinien reell ist und daher eine Abbildung der Mannigfaltigkeit auf eine in Bezug auf die Achse des Reellen symmetrische (orthosymmetrische) Riemannsche Fläche F_s bewirkt, deren der betrachteten Symmetrie entsprechende Symmetrielinien geschlossene über der Achse des Reellen verlaufende Züge sind. Diese Züge zerlegen die F_s in zwei zueinander symmetrische getrennte Hälften, deren eine, f_s, bei Ausschluss ihrer Berandung das eineindeutige Abbild der betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit lauter hyperbolischen Öffnungen ist.

Man kann aber weiter zu der betrachteten reellen Funktion u eine zweite Funktion v aus dem Funktionenkörper leicht entnehmen, die auf den betrachteten Symmetrielinien ebenfalls reell ist, und die mit u zusammen eine reelle algebraische Kurve (u, v) liefert die, komplex verstanden, durch ihre reellen Züge in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird, deren eine das eineindeutige Bild der zugrunde gelegten Mannigfaltigkeit ist.

Haben wir drittens eine Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges, die sowohl hyperbolische wie parabolische Öffnungen besitzt, so ergibt sich ebenfalls sofort die Übertragung auf die eine Hälfte einer orthosymmetrischen Riemannschen Fläche F_s bzw. die eine Hälfte einer in ihrer komplexen Ausdehnung genommenen reellen algebraischen Kurve. Aber jetzt ist die F_s bzw. die komplexe Kurve mit symmetrisch angeordneten Punktierungen versehen zu denken, von denen die der einen Hälfte des Gebildes angehörenden den parabolischen Öffnungen der Mannigfaltigkeit direkt entsprechen.

Je nachdem eine hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges nur parabolische Öffnungen oder auch hyperbolische Öffnungen besitzt, nennen wir die Mannigfaltigkeit eine *hyperbolische Mannigfaltigkeit des zweiten oder dritten Typus*. (Als hyperbolische Mannigfaltigkeiten des *ersten Typus* bezeichnen wir die geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, d. s. die geschlossenen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht $p \geqq 2$; s. auch No. 38.)

Es ist wichtig, sich klar zu machen, wie der Typus sich in der zur Mannigfaltigkeit gehörenden Fundamentalgruppe ausprägt.

Eine beliebige hyperbolische Fundamentalgruppe kann auf dem Einheitskreis entweder eigentlich diskontinuierlich sein oder uneigentlich diskontinuierlich. Sie wird *auf dem Einheitskreis eigentlich diskontinuierlich* genannt, wenn es auf diesem Kreise ein Intervall gibt, dessen unendlich viele vermöge der Fundamentalgruppe mit ihm äquivalente Bildintervalle von einander getrennt liegen. Ist ein solches Intervall nicht vorhanden, so heisst die Gruppe *auf dem Einheitskreis uneigentlich diskontinuierlich*. Diese Bezeichnung schliesst sich der für alle hyperbolischen Fundamentalgruppen üblichen Bezeichnung als schlechthin eigentlich diskontinuierlicher Gruppen an, worunter nämlich nur verstanden wird, dass es innerhalb des Einheitskreises eine Kreisfläche gibt, deren sämtliche vermöge der Fundamentalgruppe mit ihr äquivalente Bildkreisflächen voneinander getrennt liegen. Man bemerkt in der Tat sofort auf Grund früherer Darlegungen, dass jede das Innere des Einheitskreises in sich transformierende Gruppe von Substitutionen, die keine infinitesimalen Substitutionen zulässt, die erwähnte Eigenschaft der Diskontinuität besitzt und umgekehrt. In der Folge gebrauchen wir noch eine andere Bezeichnung. Wir nennen nämlich eine auf dem Einheitskreise noch eigentlich diskontinuierliche hyperbolische *Fundamentalgruppe* eine solche *des dritten Typus*, hingegen eine auf dem Einheitskreise nicht mehr eigentlich diskontinuierliche hyperbolische Fundamentalgruppe eine solche *des ersten oder zweiten Typus*, jenachdem die durch sie definierte Fundamentalmannigfaltigkeit geschlossen oder offen ist.

Hiernach können wir den *Satz* aufstellen, dass eine hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges eine Fundamentalgruppe des ersten, zweiten oder dritten Typus liefert, je nachdem die Mannigfaltigkeit selbst vom ersten, zweiten oder dritten Typus ist.

Zur Begründung betrachten wir, unter Übergehung des unmittelbar klar liegenden ersten Falles, zunächst eine Mannigfaltigkeit des zweiten Typus, d. i. eine solche mit nur parabolischen Öffnungen. Wir stellen sie uns in der Form einer mit endlich vielen Punktierungen versehenen geschlossenen Riemannschen Fläche vor. Diese punktierte Riemannsche Fläche heisse F'. Sie werde durch die erforderliche Anzahl getrennter Querschnitte von Punktierung zu Punktierung in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0' verwandelt. Das Bild der Fläche F_0' in der ζ-Ebene ist ein Bereich Φ_0 mit unendlich vielen mit ihm vermöge der Fundamentalgruppe äquivalenten Bildern. Das einzelne solche Bild hat einen euklidischen Maximaldurchmesser. Dieser euklidische Maximaldurchmesser liegt aber nur für endlich viele der Bilder oberhalb einer von 0 verschiedenen Grösse ε, die man sich beliebig klein vorgeben kann. Dies wird durch die analoge Betrachtung pag. 71 u. 72 sofort deutlich. Da nun die Φ_0-Bilder das ganze Innere des ζ-Einheitskreises ausfüllen, so ist es nicht möglich, dass auf dem Einheitskreise ein Intervall liegt, dessen sämtliche mit ihm äquivalente Bilder von ihm getrennt liegen. Denn das Vorhandensein eines solchen Intervalls bedingt, dass auch die ganze Fläche eines das Intervall orthogonal schneidenden kleinen Kreises nur Bilder liefert, die ausserhalb dieses Kreises liegen. In dieser Kreisfläche müssten sich aber offenbar unendlich viele Φ_0-Bilder befinden wegen der schliesslich unendlich klein werdenden Ausdehnung dieser Φ_0-Bilder. Das würde bedeuten, dass in dieser Kreisfläche unendlich viele miteinander äquivalente Punkte liegen, im Widerspruch mit einer unmittelbar vorher gemachten Bemerkung.

Wir betrachten nunmehr eine hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges des *dritten Typus.* Wir denken sie uns in der Gestalt der einen Hälfte f_s einer orthosymmetrischen Riemannschen Fläche F_s, die ev. mit Punktierungen versehen ist, vorliegend.

Zuvörderst möge der Fall betrachtet werden, wo keine Punktierungen vorkommen. Alsdann denken wir uns die betrachtete Hälfte f_s der Fläche F_s durch getrennte Querschnitte von Rand zu Rand zu einer Fläche f_{s0} aufgeschnitten. Aus dieser entsteht, durch relationenfreie Zusammenfügung unendlich vieler Exemplare von ihr selbst längs der Querschnittseiten, die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $f_s^{(\infty)}$, die durch die Grösse ζ eineindeutig konform auf das Innere des ζ-Einheitskreises übertragen wird.

Wir haben nun zunächst die *Regularität der Grösse* ζ *auf den Randlinien* der f_s, d. i. auf den Symmetrielinien der F_s darzutun.

Dazu denken wir uns die Fläche F_s uniformisiert, was nach unserer Theorie des zweiten Teiles möglich ist. Die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche $F_s^{(\infty)}$ kann ihrerseits aus unendlich vielen Exemplaren $f_s^{(\infty)}$ und $\varphi_s^{(\infty)}$ zusammengesetzt werden, wobei mit φ_s die zweite Hälfte der F_s bezeichnet ist. Der Zusammenfügungsprozess ist dabei auch ein relationenfreier in dem Sinne, dass Verknüpfungen immer nur längs eines $f_s^{(\infty)}$ bzw. $\varphi_s^{(\infty)}$ begrenzenden Liniengewindes stattfinden und im Verlauf der gesamten Zusammenfügung keine Rückverknüpfungen vorkommen. Wir bemerken, dass die erwähnten Liniengewinde Symmetrielinien der Fläche $F_s^{(\infty)}$ sind, denen daher Orthogonalkreisbögen innerhalb des Einheitskreises eineindeutig entsprechen. So erkennen wir, dass die Hauptuniformisierende der F_s ein Bild der f_s entwirft, das sich als ein von unendlich vielen getrennten Orthogonalkreisbögen begrenztes einfach zusammenhängendes Polygon innerhalb des Einheitskreises darstellt.

Von diesem Polygon können wir nun nach der von uns in Nr. 24, 25 angewandten Methode der unendlichen Produktbildung einen Übergang zur Fläche des Einheitskreises selbst vornehmen. Dieser Übergang ist längs den begrenzenden Orthogonalkreisbögen des Polygons, wie wir gesehen haben, regulär. Das Ergebnis dieser Abbildung ist aber die Gewinnung der Hauptuniformisierenden der Fläche f_s, von der somit bewiesen ist, dass sie auf den Begrenzungslinien der f_s sich regulär verhält.

Die den Orthogonalkreisbögen des Polygons entsprechenden Peripherieintervalle erfüllen ihrerseits jetzt die ganze Peripherie des Einheitskreises mit Auslassung lediglich unendlich vieler diskreter Punkte. Wir begründen dies folgendermassen.

Das Bild von f_{s_0} wird ein von endlich vielen paarweise linear aufeinander bezogenen Querschnitten begrenzter Bereich Φ_0 innerhalb des ζ-Einheitskreises. Bei Ausübung der durch die Randsubstitutionen erzeugten Fundamentalgruppe ergibt sich eine Nebeneinanderlagerung von Φ_0-Bildern, für welche die *Summe der Maximaldurchmesser* konvergiert, um nicht von der Summe der Umfänge zu reden. Dies folgt so.

Der Bereich Φ_0 reicht mit endlich vielen breiten Zipfeln an die Peripherie des Einheitskreises heran, wobei wir annehmen dürfen, dass er in den Eckpunkten, die offenbar sämtlich auf der Peripherie liegen, lauter rechte Winkel bildet. Durch die beiden Eckpunkte jeder als Peripherieintervall sich darbietenden einzelnen Randseite des Bereichs legen wir eine Kreislinie, die mit dem Einheitskreis einen hinreichend kleinen spitzen Winkel bildet, welcher für alle äquivalenten Kreislinien derselbe ist. Wir können es so einrichten, dass diese endlich vielen Grundkreise in ihrer Gesamtheit den ganzen Bereich Φ_0 enthalten. Die Grundkreise haben aber mit ihren äquivalenten zusammen eine konvergente Summe ihrer Umfänge wegen der bewiesenen eigentlichen Diskontinuität der Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreis. Eine unmittelbare Folge ist, dass die Summe der Maximaldurchmesser aller Φ_0-Bilder konvergiert. Eine Folge davon wiederum ist, dass man soviel Φ_0-Bilder nebeneinander lagern kann, dass der so entstehende Gesamtbereich aus der Einheitskreisfläche durch endlich viele Querschnitte ausgeschnitten erscheint, für welche die Summe der Maximaldurchmesser so klein ist, wie man will. Dies bedeutet, dass die Menge der Grenzpunkte der Fundamentalgruppe, in denen nämlich die Gruppe aufhört, auf dem Einheitskreise eigentlich diskontinuierlich zu sein, nicht nur eine diskrete Punktmenge ist, sondern eine solche vom linearen Inhalt o, gemessen auf dem Einheitskreis. Von einem Peripheriepunkte sagen wir dabei, dass in ihm die eigentliche Diskontinuität aufhört, wenn man kein noch so kleines ihn enthaltendes Peripherieintervall angeben kann, dessen sämtliche mit ihm äquivalente Intervalle von ihm und daher auch untereinander verschieden sind.

Betrachten wir nunmehr eine hyperbolische Mannigfaltigkeit endlicher Zusammenhangsordnung vom *dritten Typus*, die auch parabolische Öffnungen hat. Eine solche denken wir uns durch eine punktierte f_s, als solche bezeichnet mit f_s', repräsentiert. Die Aufschneidung der f_s' zur f_{s_0}' erfolgt jetzt, abgesehen von den von Rand zu Rand laufenden Querschnitten, durch Hinzunahme von Einschnitten, deren einzelner stets eine Punktierung mit einem Randpunkte von f_s' verbindet. Der Nachweis der Regularität der zu f_s' gehörenden Hauptuniformisierenden gestaltet sich im wesentlichen wie oben. In den Punktierungspunkten tritt logarithmisches Verhalten der Funktion ein, was ganz nach dem Muster des entsprechenden Beweises der Nr. 9 gezeigt wird. Im ζ-Einheitskreis findet sich jetzt als Bild von f_s' ein Bereich Φ_0 und unendlich viele mit ihm äquivalente Bereiche. Der Bereich Φ_0 wird von lauter auf den Einheitskreis senkrecht auftreffenden paarweise linear bezogenen Querschnitten begrenzt. Von den Punktierungen insbesondere rühren jetzt parabolische Zipfel her, die durch Bahnkreise abgetrennt werden können. Nach so erfolgter Abtrennung der Zipfel bleibt ein Restbereich, für welchen wie vorhin gezeigt werden kann, dass die Summe der Maximaldurchmesser aller äquivalenten Bilder konvergiert. Andererseits ergibt die Argumentation, dass die Summe der Umfänge aller äquivalenten Bahnkreise (jeder nur einmal gerechnet) konvergiert. Diese Summe kann ausserdem beliebig klein gemacht werden, indem man nur die ursprünglichen Bahnkreise genügend klein wählt.

Da das einzelne Φ_0-Bild niemals zwei parabolische Zipfel in denselben Bahnkreis hinein entsendet, bemerken wir schon jetzt den Satz, dass die Maximaldurchmesser der Φ_0-Bilder allmählich unendlich klein werden, d. h. dass es nur endlich viele solcher Bilder gibt, deren Maximaldurchmesser oberhalb einer beliebig klein vorgegebenen Grösse liegen. Aber weiter können wir folgendes entnehmen.

Wenn man, ausgehend von Φ_0, eine genügend grosse Anzahl von Φ_0-Bildern zusammenhängend neben einander lagert, so gilt für den erweiterten Bereich, dass er niemals zwei parabolische Zipfel in denselben Bahnkreis hinein entsenden kann. Daraus schliessen wir, dass der erweiterte Bereich nur *endlich viele Peripherieintervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge* freilässt. Nicht jedoch kann behauptet werden, dass die Summe der Maximaldurchmesser wie vorher im Falle des Fehlens parabolischer Zipfel konvergiert.

38. *Allgemeine Durchführung der Typenunterscheidung bei den hyperbolischen Fundamentalgruppen.* Wir nennen eine hyperbolische Fundamentalgruppe in einem Punkte des ζ-Einheitskreises eigentlich diskontinuierlich, wenn man um diesen Punkt eine zum Einheitskreise zweckmässig symmetrisch zu denkende kreisförmige Umgebung angeben kann, welche die Eigenschaft hat, von allen vermöge der Fundamentalgruppe mit ihr äquivalenten Kreisflächen getrennt zu sein. Alle diese Kreisflächen sind dann auch unter einander getrennt.

Aus dieser Definition ergibt sich ohne weiteres, dass die Fundamentalgruppe in den auf dem Einheitskreise liegenden Fixpunkten der Substitutionen der Gruppe, gleichgültig, ob diese zu hyperbolischen oder parabolischen Substitutionen gehören, niemals eigentlich diskontinuierlich ist. Die Definition ordnet sich der entsprechenden Definition der eigentlichen Diskontinuität für innere Punkte des Einheitskreises sinngemäss unter. Unserer allgemeinen Definition entsprechend unterscheiden wir bei einer Fundamentalgruppe zwischen *Diskontinuitätspunkten* und *Indiskontinuitätspunkten,* welch letztere wir auch als *Grenzpunkte* bezeichnen. Übertragen wir die Definition schliesslich auch auf die äusseren Punkte des Einheitskreises, so ist nunmehr folgendes klar. Zu jedem Diskontinuitätspunkte gehört eine kreisförmig wählbare Umgebung von Punkten, die ebenfalls sämtlich Diskontinuitätspunkte sind.

Je nachdem nun auf dem Einheitskreise ein Diskontinuitätspunkt und folglich ein ganzes Diskontinuitätsintervall vorhanden ist oder nicht, sprechen wir von einer hyperbolischen Fundamentalgruppe des *dritten Typus* oder des *ersten bezw. zweiten Typus* (siehe weiter unten). Wir behaupten nun, dass die Gesamtheit aller Diskontinuitätspunkte einer Fundamentalgruppe des dritten Typus die ganze Ebene erfüllt mit Auslassung lediglich einer diskreten, d. h. nirgends ein ganzes Intervall bildenden Punktmenge auf dem Einheitskreise. Wäre es nämlich anders, so würde auf dem Einheitskreise ein ganzes Indiskontinuitätsintervall vorhanden sein, das wir uns nach beiden Seiten soweit wie möglich ausgedehnt denken. Nunmehr würde dieses vervollständigte Intervall durch die einzelnen Operationen der Gruppe entweder in sich selbst oder in ein von ihm selbst völlig getrennt liegendes ebenfalls vollständiges Indiskontinuitätsintervall transformiert werden. Die verschiedenen solcherweise entstehenden Indiskontinuitätsintervalle könnten sich untereinander offenbar niemals teilweise überdecken. Diejenigen Operationen der Gruppe aber, welche ein einzelnes Intervall dieser Intervallmenge in sich selbst transformieren, können nur hyperbolische Substitutionen mit den Endpunkten des betreffenden Intervalls als Fixpunkten sein.[1] Die Gesamtheit der eines dieser Intervalle erhaltenden Substitutionen der Gruppe müsste nun wegen der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe (Fehlen infinitesimaler Sub-

[1] Ausgenommen sind nur die Fälle, wo die Gruppe allein von der identischen Substitution gebildet wird oder von einer einzigen parabolischen Erzeugenden erzeugt wird. Eine gewisse Sonderstellung nimmt noch der Fall der Gruppe ein, die von nur einer hyperbolischen Erzeugenden erzeugt wird. Im ersten Falle ist der volle Einheitskreis einziges Diskontinuitätsintervall, im zweiten Falle der ganze Kreis excl. eines Punktes einziges Diskontinuitätsintervall. Im dritten Falle haben wir zwei getrennte Diskontinuitätsintervalle, die durch die beiden hyperbolischen Fixpunkte von einander geschieden sind.

stitutionen) durch die Potenzen einer einzigen hyperbolischen Erzeugenden mit positiven und negativen Exponenten darstellbar sein. Daraus würde sich eine Unterteilung des Intervalls und entsprechend aller äquivalenten ergeben. Die Teilintervalle würden nunmehr Diskontinuitätscharakter haben, und folglich würden die auf ihr liegenden Punkte Diskontinuitätspunkte sein; während doch das angenommene Indiskontinuitätsintervall vollständig aus Indiskontinuitätspunkten bestehend gedacht wurde. Es gibt somit kein Indiskontinuitätsintervall bei einer hyperbolischen Fundamentalgruppe des dritten Typus.

Man wird nun zu einer *Neutriangulation* des gesamten Diskontinuitätsgebietes einer Fundamentalgruppe des dritten Typus übergehen können, die in Bezug auf den Einheitskreis symmetrisch ausfällt und an der der Einheitskreis selbst mit seinen sämtlichen Diskontinuitätsintervallen, die Endpunkte derselben ausgeschlossen, teilnimmt. Man gelangt zu dieser Triangulation, wenn man, anstelle der früher gewählten im Nullpunkt zentrierten Kreisflächen $K^{(n)}$ mit wachsenden Radien (vgl. Nr. 32), mehrfach zusammenhängende Kreisbereiche $K^{(n)}$ wählt, die man erhält, indem man die Punktmenge der Grenzpunkte in endlich viele Peripherieintervalle beliebig kleiner Maximallänge einschliesst, deren Endpunkte Diskontinuitätspunkte sind, und sodann zu diesen Intervallen die zugehörenden Orthogonalkreise des Einheitskreises konstruiert, die durch die Intervallendpunkte hindurchgehen. Die Zusammenhangsordnung der Bereiche $K^{(n)}$ wird dabei mit unbegrenzt wachsendem Index n ihrerseits unbegrenzt wachsen. Die mit $K^{(n)}$ äquivalenten Kreisbereiche haben wegen der angenommenen eigentlichen Diskontinuität der Gruppe eine endliche Summe der Umfänge aller Begrenzungskreise. Desgleichen haben die in den sämtlichen Bildkreisbereichen liegenden sich zum Teil gegenseitig überdeckenden Peripherieintervalle eine endliche Gesamtsumme. Daraus folgt, dass die Bildkreisbereiche allmählich unendlich kleine Maximaldurchmesser bekommen, und weiter folgt aus der eigentlichen Diskontinuität, dass die Bildkreisbereiche sich nur gegen die Grenzpunkte der Gruppe häufen. Der Bereich $K^{(n)}$ wird demnach nur von endlich vielen seiner Bilder getroffen, und wir bemerken, dass wir ganz in Analogie mit den Betrachtungen der Nr. 32 auf der Basis der Bereiche $K^{(n)}$ und ihrer äquivalenten eine Parzellierung und Triangulation des gesamten Diskontinuitätsgebietes der Fundamentalgruppe erhalten, wie wir wünschen. Damit ist wieder ein System von Grundparzellen gewonnen, das nunmehr die Diskontinuitätsintervalle der Peripherie automatisch einbezieht. — Fricke erreicht die Einbeziehung der Diskontinuitätsintervalle durch die »Normalpolygone«; s. unsere Anmerkung pag. 126.

Beachtet man, dass die auf dem Einheitskreise liegende Grenzpunktmenge einer Fundamentalgruppe durch diese in sich selbst transformiert wird, so findet man ohne weiteres, dass die Anzahl der Grenzpunkte nur gleich 0, 1, 2 oder ∞ sein kann. In der Tat ist die Anzahl der Substitutionen einer hyperbolischen Fundamentalgruppe, von der Einheitsgruppe abgesehen, stets unendlich. Ein System endlich vieler Punkte gestattet unendlich viele Substitutionen aber nur dann, wenn es lediglich aus einem oder höchstens aus zwei Punkten besteht. Es sind dies die in der Fussnote schon erwähnten Sonderfälle.

Durchgreifend unterscheiden wir jetzt *drei Typen hyperbolischer Fundamentalgruppen.*

Erster Typus: Die hyperbolischen Fundamentalgruppen mit *geschlossenem Mannigfaltigkeitstypus* der zugehörenden Fundamentalmannigfaltigkeiten. Sie sind durch die Eigenschaft charakterisierbar, dass es eine mit dem Einheitskreis konzentrische kleinere Kreisfläche gibt, die zu jedem Punkte innerhalb des Einheitskreises mindestens einen äquivalenten aufweist. Da in diesem Falle, wie wir sahen, ein Fundamentalbereich angegeben werden kann, der ebenfalls ganz in einer Kreislinie $|\zeta| < q < 1$ enthalten ist, so ergibt sich sofort folgendes: Die Maximaldurchmesser der mit dem Kreise $|\zeta| = q$ äquivalenten Kreise werden allmählich unendlich klein, mithin auch die Maximaldurchmesser der Bilder des einfach zusammenhängenden Fundamentalbereichs. Das Diskontinuitätsnetz, bestimmt durch die Gesamtheit der Bilder des Fundamentalbereichs, zeigt daher gegen die Peripherie hin eine immer feinere Struktur und lässt so ohne weiteres erkennen, dass auf der Peripherie des Einheitskreises selbst keine eigentliche Diskontinuität mehr besteht. Die Peripherie besteht vielmehr nur aus Grenzpunkten. Weiter kann man behaupten, dass die Menge der Fixpunkte der Substitutionen die Peripherie des Einheitskreises allenthalben bedeckt, sodass kein noch so kleines Peripherieintervall frei bleibt. Im anderen Falle würde man nämlich nach einem oben angewandten Schlussverfahren (pag. 146) ein Teilintervall eines von Fixpunkten frei gebliebenen Intervalls haben, auf dem die Gruppe eigentlich diskontinuierlich sein muss.

Zweiter Typus: Die hyperbolischen Fundamentalgruppen mit *offenem Mannigfaltigkeitstypus* der zugehörenden Fundamentalmannigfaltigkeit, die auf der *Peripherie* des Einheitskreises nicht *eigentlich diskontinuierlich* sind. Für sie besteht der Satz, dass die Menge der Fixpunkte, wie beim ersten Typus, auf der Peripherie überall verteilt ist. Diese Gruppen lassen sich stets aus unabhängigen Erzeugenden aufbauen, deren Anzahl endlich oder unendlich gross ist, entsprechend dem Umstande, dass die zugehörende Fundamentalmannigfaltigkeit durch endlich oder unendlich viele getrennte Querschnitte zu einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit aufgeschnitten werden kann.

Dritter Typus: Die hyperbolischen Fundamentalgruppen mit *offenem Mannigfaltigkeitstypus* der zugehörenden Fundamentalmannigfaltigkeit, die auf der Peripherie des *Einheitskreises eigentlich diskontinuierlich* sind. Ihre Grenzpunktmenge ist, wie wir sahen, im allgemeinen (nämlich mit Ausnahme von den drei erwähnten niederen Fällen) eine unendliche Menge diskreter Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises, die im Falle endlichen Zusammenhanges der Fundamentalmannigfaltigkeit, d. i. im Falle der Erzeugungsmöglichkeit der Gruppen aus endlich vielen Erzeugenden, stets in endlich viele Intervalle mit beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden kann, im Falle unendlich hohen Zusammenhanges, d. h. bei unendlich vielen Erzeugenden jedenfalls in endlich viele Intervalle eingeschlossen werden kann, deren Maximallänge einen beliebig klein vorgegebenen Kleinheitsgrad hat. Diese Gruppen können ebenfalls stets aus unabhängigen Erzeugenden in endlicher oder unendlich hoher Zahl aufgebaut werden, je nachdem nämlich die zugehörende Fundamentalmannigfaltigkeit endliche oder unendlich hohe Zusammenhangsordnung besitzt.

39. *Nähere Betrachtung der drei Typen bei den allgemeinen hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Beziehung der Mannigfaltigkeiten des dritten Typus zu den vollkommenen orthosymmetrischen Riemannschen Flächen und zu den vollkommenen reellen analytischen Kurven.* Der Unterscheidung der drei Typen bei den hyperbolischen Fundamentalgruppen entspricht eine Typenunterscheidung der hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Wir umfassen mit den Entwicklungen dieser Nummer die Mannigfaltigkeiten endlichen wie unendlich hohen Zusammenhanges, sowie wir mit den Entwicklungen der vorigen Nummer die hyperbolischen Fundamentalgruppen mit endlich vielen und mit unendlich vielen Erzeugenden umfassten.

Eine hyperbolische Mannigfaltigkeit werden wir als eine solche vom *ersten Typus* zu bezeichnen haben, wenn sie *geschlossen* ist. Eine solche ist, wie wir gesehen haben, einer geschlossenen Riemannschen Fläche bzw. einer algebraischen Kurve äquivalent, deren *Geschlecht* $p \geqq 2$ ist. Letztere Bedingung ist eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit es sich um eine hyperbolische geschlossene Mannigfaltigkeit handelt.

Die ungeschlossenen hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die wir auch als *offene Riemannsche Mannigfaltigkeiten* bezeichnen, zerfallen in solche des zweiten und des dritten Typus. Eine offene hyperbolische Mannigfaltigkeit gehört dem *zweiten Typus* an, wenn ihre *Fundamentalgruppe* eine solche des *zweiten Typus* ist. Wir bezeichnen sie dann auch als eine *uneigentlich offene hyperbolische Mannigfaltigkeit.* Eine offene hyperbolische Mannigfaltigkeit gehört dem *dritten Typus* an, wenn ihre *Fundamentalgruppe* dem *dritten Typus* angehört. Wir bezeichnen sie dann auch als eine *eigentlich offene hyperbolische Mannigfaltigkeit.*

Jede *uneigentlich offene hyperbolische Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist einer uneigentlich offenen hyperbolischen Riemannschen Fläche, bzw. einem uneigentlich offenen hyperbolischen analytischen Gebilde äquivalent. Bezüglich der Repräsentation einer solchen Mannigfaltigkeit durch eine Riemannsche Fläche können wir jetzt behaupten, dass eine solche Riemannsche Fläche *niemals ein freies analytisches Randstück* besitzen kann. Nehmen wir nämlich eine Riemannsche Fläche mit freiem analytischem Randstück gegeben an, so können wir diese durch Hinzunahme der zu ihr in Bezug auf die Achse des Reellen symmetrischen Riemannschen Fläche, unter Zuordnung symmetrisch gelegener Punkte des betrachteten analytischen Randteils und seines Spiegelbildes, zu einer umfassenderen, jetzt idealen Riemannschen Fläche vervollständigen, bei deren Uniformisierung die ursprünglich betrachtete Riemannsche Fläche in ein Orthogonalkreispolygon mit, allgemein zu reden, unendlich vielen begrenzenden Orthogonalkreisbögen übergeht, ein Polygon, von dem wir durch Produktbildung zur Uniformisierenden der ursprünglichen Riemannschen Fläche gelangen. Das zeigt uns aber, dass diese Uniformisierende auf dem analytischen Randstück regulär ist, sodass diesem Randstück auf der Peripherie des Einheitskreises, allgemein zu reden, unendlich viele Peripherieintervalle entsprechen werden, die durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe aus einem derselben hervorgehen. Das bedeutet, dass wir es mit einer Gruppe des dritten Typus zu tun haben. Das ist ein Widerspruch gegen die Annahme, die analytisch berandete Riemannsche Fläche sei vom zweiten Typus.

Wir formulieren das eben gewonnene Ergebnis als einen besonderen *Satz:* Die Uniformisierende einer mit *freier analytischer Berandung* versehenen Riemannschen Fläche verhält sich auf der freien regulären Berandung dieser Fläche stets regulär. Eine solche Fläche repräsentiert daher stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit des *dritten Typus.*

Nun zu den hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten des *dritten Typus.* Liegt eine solche Mannigfaltigkeit vor, so liefert uns ihre Uniformisierende nach der Definition eine *Fundamentalgruppe des dritten Typus.* Denken wir nun an Stelle des Einheitskreises durch lineare Transformation die obere Halbebene gesetzt, sodass die transformierte Fundamentalgruppe aus lauter reellen Substitutionen mit positiver Koeffizientendeterminante besteht, die keine Halbebenenvertauschung bewirken; setzen wir ferner diesen Übergang zweckmässig so vorgenommen voraus, dass der unendlich ferne Punkt Diskontinuitätspunkt der transformierten Fundamentalgruppe wird, so können wir durch Ansatz des Quotienten zweier *Poincaréscher Thetareihen* gleicher Dimension mit reeller rationaler Grundfunktion sofort den Übergang von der Fundamentalgruppe zu einer *orthosymmetrischen Riemannschen Fläche* F_s vollziehen, deren eine Hälfte f_s excl. der Symmetrielinien selbst mit der gegebenen Mannigfaltigkeit des dritten Typus äquivalent ist. Das vollständige System der Symmetrielinien repräsentiert uns lauter freie Berandung der f_s. Dieser freien Berandung entspricht in der ζ-Ebene dass vollständige System der Diskontinuitätsintervalle. Hierin liegt schon, dass f_s ausser dem System der Symmetrielinien von F_s keine weitere freie analytische Berandung aufweisen kann. Denn einem weiteren freien Rande müssten nach dem vorhin erwähnten Satze bestimmte Diskontinuitätsintervalle oder Teile solcher auf dem ζ-Einheitskreise entsprechen; aber alle Diskontinuitätsintervalle sind bereits für die Symmetrielinien von F_s verbraucht.

Die einzelne Symmetrielinie von F_s ist ihrerseits entweder eine beiderseits offene Linie oder eine geschlossene Linie. Die geschlossenen entsprechen offenbar den hyperbolischen Öffnungen der Mannigfaltigkeit. Jede solche Linie wird als unendliches Liniengewinde eineindeutig auf ein vollständiges Diskontinuitätsintervall übertragen, wenn man, von einem einzelnen Zweige der Uniformisierenden ausgehend, die Abbildung längs der Symmetrielinie hin verfolgt. Die offenen Symmetrielinien hingegen werden durch den einzelnen Zweig unmittelbar eineindeutig auf ein vollständiges Diskontinuitätsintervall übertragen.

Denkt man sich nun umgekehrt eine beliebige orthosymmetrische Riemannsche Fläche F_s gegeben[1] und sei f_s die eine Hälfte derselben, so gilt im allgemeinen nicht ohne weiteres der Satz, dass dem Symmetrieliniensystem der F_s das vollständige System der Diskontinuitätsintervalle der zu f_s gehörenden Fundamentalgruppe entspricht, vielmehr ergibt sich, dass im Falle endlicher Zusammenhangsordnung der F_s die weitere Bedingung erfüllt sein muss, dass F_s keine hyper-

[1] Eine beliebige symmetrische Riemannsche Fläche nenne ich orthosymmetrisch, wenn sie durch das System ihrer Symmetrielinien in zwei getrennte Hälften zerlegt wird. Klein hat früher diese Bezeichnung für geschlossene Riemannsche Flächen angewandt. Vgl. Bemerkungen, die ich über allgemeine symmetrische Riemannsche Flächen in Journ. f. Math. Bd. 139, S. 266—267 mache.

bolischen Öffnungen besitzt. Ist aber die Zusammenhangsordnung von F_s unendlich gross, so muss der Bedingung genügt sein, dass F_s eine Riemannsche Fläche des zweiten Typus ist, d. h. uneigentlich offen ist.

Während die Richtigkeit der vorstehenden Behauptung für Flächen endlicher Zusammenhangsordnung sofort ersichtlich sein dürfte, ist der Satz für die unendliche Zusammenhangsordnung etwas näher zu begründen. In der Tat würde die Annahme, die Fläche F_s mit unendlich hohem Zusammenhange sei vom dritten Typus, zur Folge haben, dass man von dieser F_s durch Vermittlung ihrer Hauptuniformisierenden zu einer neuen symmetrischen Riemannschen Fläche Φ_s übergehen könnte, deren eine Hälfte ψ_s ein eineindeutiges Abbild der ganzen F_s wäre. Die Fläche ψ_s würde nun auch die Bilder der Symmetrielinien von F_s auf sich enthalten, und es würde sich als Bild von f_s eine Teilfläche ψ' innerhalb ψ_s ergeben mit analytischen Randlinien, von denen nur ein Teil in eineindeutiger Punktbeziehung zum vollständigen System der Symmetrielinien von f_s steht. Die Uniformisierung von ψ' würde daher ergeben, dass die Bilder dieses Teiles das System der zur Fundamentalgruppe von f_s (f_s ist äquivalent ψ') gehörenden Diskontinuitätsintervalle des Einheitskreises nicht ausschöpfen würden. Das ist ein Widerspruch.

Nennen wir eine orthosymmetrische Fläche F_s *vollkommen*, wenn sie als solche entweder geschlossen oder uneigentlich offen ist, d. h. entweder dem ersten oder dem zweiten Typus angehört, so erkennen wir jetzt den Satz, dass *jede offene Riemannsche Mannigfaltigkeit des dritten Typus der einen Hälfte einer vollkommenen orthosymmetrischen Riemannschen Fläche äquivalent ist.*

Nach dem Vorstehenden kann jede Riemannsche Mannigfaltigkeit des dritten Typus durch eine Riemannsche Fläche mit freier regulärer[1] analytischer Berandung repräsentiert werden. Eine solche Fläche ist z. B. die pag. 151 gewonnene Fläche f_s. Umgekehrt gehört jede Riemannsche Fläche mit einem freien analytischen Randstück dem dritten Mannigfaltigkeitstypus an. Hiernach können wir die Riemannschen Mannigfaltigkeiten des dritten Typus auch definieren als diejenigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche einer Riemannschen Fläche mit mindestens einem freien analytischen Randstück äquivalent sind.

[1] Der Begriff der Regularität einer analytischen Linie in einem Punkte ist hier in einem allgemeineren, organisch begründeten Sinne gebraucht. Ein solches Linienstück nennen wir nämlich in einem Punkte, den es durchläuft, mit Bezug auf einen angrenzenden Flächenteil, der von dem Linienstück berandet wird, auch dann »regulär«, wenn dieser Flächenteil durch eine im betrachteten Punkte verzweigte Wurzeltransformation mit passendem ganzzahligen Wurzelexponenten in einen in gewöhnlichem Sinne regulär begrenzten schlichten Flächenteil übergeht.

Eine beliebig gegebene Riemannsche Fläche F mit freien analytischen Randteilen repräsentiert jedoch durch ihre im ganzen vorhandene freie »reguläre» Berandung im allgemeinen die »*wahre ideale Berandung der Mannigfaltigkeit*» nur unvollständig. Den vorhandenen regulären Randteilen entsprechen bei der Uniformisierung jedenfalls Diskontinuitätsintervalle auf der Peripherie des Einheitskreises, wobei aber diese Diskontinuitätsintervalle im allgemeinen nur unvollständig ausgeschöpft werden. Durch Vermittlung der Uniformisierungsgrösse erkennt man jedoch den Satz, dass die eineindeutige Beziehung, welche zwischen der Fläche F und ihrer Repräsentation durch die eine Hälfte einer mit ihr äquivalenten vollkommenen orthosymmetrischen Fläche besteht, ihrerseits auch auf dem vorhandenen freien regulären analytischen Rande der gegebenen Riemannschen Fläche »regulär» [1] sein muss. Denkt man sich andererseits die Riemannsche Fläche F irgendwie in eine Riemannsche Fläche mit freier analytischer Berandung zunächst nur unter Beachtung der inneren Punkte transformiert, so wird diese Beziehung im allgemeinen nicht auf die analytische Berandung der beiden Flächen ausgedehnt werden können, vielmehr wird einem freien analytischen Randstück der einen Fläche im allgemeinen bei der andern kein freies Randstück entsprechen, sondern es wird die Abbildungsfunktion längs eines solchen Randstückes ein unbestimmtes Verhalten haben. Hat man jedoch eine endlich-vielfach zusammenhängende endlich-vielblättrige gewöhnliche Riemannsche Fläche, deren vollständige Begrenzung von endlich vielen geschlossenen regulären Linien gebildet wird, abgesehen von endlich vielen noch hinzukommenden Punktierungspunkten, und hat man eine Abbildung einer solchen Fläche auf eine andere ebenso beschaffene, so überträgt sich die Abbildungsbeziehung ohne weiteres in »regulärer» Weise auch auf die volle Berandung, incl. sogar der Punktierungsstellen.

Der Beziehung der Mannigfaltigkeiten des dritten Typus zu den vollkommenen orthosymmetrischen Flächen läuft parallel eine Beziehung dieser Mannigfaltigkeiten zu den *vollkommenen orthosymmetrischen reellen analytischen Kurven*. Wir nennen eine reelle orthosymmetrische analytische Kurve vollkommen, wenn sie, komplex verstanden, eine Mannigfaltigkeit des dritten Typus darstellt. Um von der Mannigfaltigkeit zu einer mit ihr äquivalenten vollkommenen orthosymmetrischen reellen Kurve zu gelangen, bilden wir auf der pag. 151 gewonnenen F_s (u-Ebene) wieder mittels Poincaréscher Reihen eine zu dieser Fläche eigentlich gehörende analytische Funktion unter passender Wahl der Pole. Bilden wir zu

[1] D. h. eventuell nach Heranziehung der in letzter Fussnote erwähnten Wurzeltransformationen.

dieser die konjugierte Funktion des konjugierten Arguments und addieren beide, so finden wir eine Funktion v, die auf den Symmetrielinien von F_s reell ist. Offenbar können wir über die Pole so disponieren, dass (u, v) eine mit F_s äquivalente Kurve wird. Diese reelle Kurve ist dann zugleich auch vollkommen, weil F_s vollkommen war. Ihre reellen Züge entsprechen eineindeutig den betrachteten Symmetrielinien der F_s.

Die Definition der vollkommenen orthosymmetrischen reellen analytischen Kurve können wir auch wie folgt geben: Eine reelle analytische Kurve heisst vollkommen, wenn es nicht möglich ist, sie (komplex verstanden) durch eine auf den reellen Zügen der Kurve reelle, biuniforme ev. birationale Transformation auf einen Teil einer anderen reellen Kurve (auch diese komplex verstanden) zu transformieren. Ein solcher Teil wird auch dann als vorliegend erachtet, wenn die Bildkurve erst nach Weglassung eines oder mehrerer reeller Züge oder von Teilen oder Punkten derselben in das Gebilde verwandelt wird, das mit der gegebenen Kurve in eineindeutiger Äquivalenzbeziehung steht. Eine orthosymmetrische reelle algebraische Kurve ist nach unserer Definition stets vollkommen.

Wir haben bei den vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen dieser Nummer auf die etwa vorhandenen parabolischen Öffnungen der Mannigfaltigkeit keine besondere Rücksicht genommen, bemerken zum Schluss nur, dass es nach einem früher (Nr. 37) angewandten Verfahren offenbar immer möglich ist, zu erreichen, dass diese Öffnungen in der Repräsentation durch vollkommene Flächen oder Kurven sich als Punktierungen dieser Flächen bzw. Kurven darbieten. Eine Kurve »punktieren» bedeutet dabei die Herausnahme eines Punktes aus der Gesamtheit der Punkte der komplex verstandenen Kurve.

40. *Hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit parabolischen Substitutionen in der Fundamentalgruppe.*[1] Während die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlechte 1 nur von parabolischen Substitutionen gebildet wird, besteht für die *geschlossenen* hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, d. i. für die geschlossenen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht $p \geqq 2$ *der Satz, dass die Fundamentalgruppe überhaupt keine parabolischen Substitutionen* enthält. (POINCARÉ.)

Zum Beweise nehmen wir an, eine geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeit liefere eine parabolische Substitution der zugehörenden Fundamentalgruppe.

[1] Die Resultate dieser Nummer lassen sich auch mit Hilfe von FRICKES Begriff des »Normalpolygons» gewinnen; s. den Satz in Bd. I, pag. 114—115, der »Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen».

Denken wir uns die Gruppe als reelle Substitutionsgruppe in einer Variabeln ζ' dargestellt, sodass die betreffende parabolische Substitution die Form einer Parallelverschiebung parallel der Achse des Reellen hat, deren Grösse 2π sei, so bemerken wir, dass es in der ζ'-Ebene äquivalente Punkte der Form $\pm\pi + ic$ gibt, unter c eine beliebig grosse positive Grösse verstanden. Diese beiden Punkte erscheinen vom Nullpunkte aus unter einem beliebig kleinen Winkel 2λ. Wir legen durch die beiden zugeordneten Punkte jetzt einen Kreis k hindurch, der die Schenkel des erwähnten Winkels in den genannten beiden Punkten berührt. Der erwähnte scheinbare Winkel ist dann zugleich die Winkelinvariante des erwähnten Kreises. Wegen der Geschlossenheit der Fundamentalmannigfaltigkeit haben wir einen Fundamentalbereich im ζ-Einheitkreis, der ganz enthalten ist in einem konzentrischen Kreise $|\zeta| < q < 1$. Denken wir uns den idealen Mittelpunkt des Kreises k (dieser wird auf der Achse des Imaginären von dem durch die zugeordneten Punkte hindurchgehenden Kreise mit dem Nullpunkte $\zeta' = 0$ als Mittelpunkt ausgeschnitten) durch Vermittlung einer Substitution der Fundamentalgruppe in einen Punkt des erwähnten Fundamentalbereichs transformiert, so bemerken wir sofort, dass in Anbetracht der Kleinheit der Winkelinvariante des Kreises k die parabolische Substitution in eine Substitution transformiert wird, die zwei beliebig nahe benachbarte Punkte in der Weise ineinander überführt, dass auch zugeordnete Richtungselemente beliebig wenig voneinander abweichen. Das bedeutet aber, dass wir eine infinitesimale Substitution der Gruppe gewinnen würden. Solche können jedoch in der Fundamentalgruppe nicht vorkommen.

Für *offene Mannigfaltigkeiten* ergibt sich, wie wir wissen, bei Umlaufung einer einzelnen parabolischen Öffnung der Mannigfaltigkeit, stets eine parabolische Substitution. Hier gilt nun der folgende Satz, der sowohl für Mannigfaltigkeiten *endlichen wie unendlich hohen Zusammenhangs* besteht, dass die sämtlichen parabolischen Substitutionen der Gruppe ausschliesslich[1] von parabolischen Öffnungen herrühren, präziser: Die offene Mannigfaltigkeit M werde durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M_0 verwandelt gedacht. Es ist dann nach unsrer Konstruktion der Aufschneidung klar, dass in einer Öffnung immer nur endlich viele dieser Querschnitte endigen können. Die Substitutionen der Fundamentalgruppe andrerseits entstehen aus den endlich und unendlich vielen unabhängigen Erzeugenden, die ein in M_0 isoliert gedachter Zweig der Uniformisierenden ζ längs den Querschnitten aufweist. Den einfachen Umlaufungen der

[1] Ein einziger Ausnahmefall besteht, der unten genannt wird.

einzelnen parabolischen Öffnungen entsprechen nun gewisse endliche Kombinationen der Fundamentalsubstitutionen, die man sich ohne weiteres bilden kann, wenn M_0 gewonnen ist. Diese Kombinationen, deren positive und negative Potenzen, sowie schliesslich die vermöge irgend einer Gruppensubstitution gebildeten Transformierten der Kombinationen und ihrer positiven und negativen Potenzen, bilden das vollständige System aller parabolischen Substitutionen der Fundamentalgruppe. Parabolische Substitutionen kommen also in der Fundamentalgruppe einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit dann und nur dann vor, wenn die Mannigfaltigkeit offen ist und parabolische Öffnungen hat.

Zum Beweise unserer Behauptungen über offene Mannigfaltigkeiten lenken wir wieder unsere Aufmerksamkeit auf die schon betrachtete ζ'-Figur. Wir denken uns die beiden zugeordneten Punkte durch eine gradlinige Strecke l miteinander verbunden. Nunmehr denken wir uns diese Strecke vertikal ins Unendliche verschoben. Dann lehrt die Betrachtung von vorhin (pag. 155), dass die geschlossene Bildlinie L der Strecke l innerhalb der Mannigfaltigkeit einer stetigen Verschiebung unterworfen wird, bei der sie schliesslich jeden Hauptnäherungsbereich der zugrundegelegten Hauptdarstellung verlässt. Wir können deswegen einen Hauptschnitt der Hauptdarstellung passend auswählen und bei genügend hoher Lage der Strecke l behaupten, dass das Bild des oberhalb der Strecke l liegenden Parallelstreifens $-\pi \leqq R(\zeta') \leqq +\pi$ ganz auf der einen Seite des Hauptschnittes bleibt.

Denken wir eine bestimmte Lage fixiert, so können wir einen zweiten Hauptschnitt bestimmen, sodass die Bildlinie zwischen dem ersten und dem zweiten Hauptschnitt enthalten ist und dass es ferner einen Punkt P_0 innerhalb des erwähnten Halbstreifens gibt, dessen Bild ausserhalb des zweiten Hauptschnittes liegt. Das an letzteren Hauptschnitt anschliessende Reststück der Riemannschen Mannigfaltigkeit erscheint durch das Querschnittsystem in ν einfach zusammenhängende Stücke zerlegt, wenn ν die Anzahl derjenigen M_0 begrenzenden Querschnitte ist, die den zweiten Hauptschnitt kreuzen. Entfernen wir $\nu - 1$ dieser Querschnitte, so ist das Restflächenstück selbst einfach zusammenhängend aufgeschnitten. Lassen wir nun P von P_0 aus in dem Restflächenstück variieren, so wird P die Linie L niemals treffen, und folglich bewegt sich ζ' ganz oberhalb der Geraden, die die Verlängerung der Strecke s ist. Dabei erleidet aber ζ' wenigstens soviele unabhängige Substitutionen, als noch Querschnitte durch das Restflächenstück hindurchgehen. Diese Substitutionen können ihre Fixpunkte auch nur im Unendlichen haben, sind also auch nur parabolische Substitutionen, die Verschiebungen parallel der Achse des Reellen bedeuten. Und da kann es nur eine unabhängige Erzeugende geben wegen der eigentlichen Diskontinuität der Fundamentalgruppe. Das bedeutet, dass das Restflächenstück ein Öffnungsstück der Mannigfaltigkeit ist, welche Öffnung nun ihrerseits nur eine parabolische Öffnung sein kann. Der geschilderte Deformationsprozess verschiebt also die Linie L in eine parabolische Öffnung der Mannigfaltigkeit. Die parabolische Substitution entspricht folglich einer einfachen oder mehrfachen Umlaufung dieser parabolischen Öffnung im einen oder anderen Sinne.

Durch die vorstehende Entwicklung wird die Möglichkeit, dass der Umlaufung einer hyperbolischen Öffnung eine parabolische Substitution entspricht, nicht ausgeschlossen. Tritt dies ein, so muss sich der im allgemeinen ideale Rand der Öffnung, der durch Übergang zu einer Riemannschen Fläche in eine geschlossene »reguläre» Linie verwandelt werden kann, auf ein Diskontinuitätsintervall auf dem ζ-Einheitskreise abbilden, dessen beide Endpunkte in dem Fixpunkt der parabolischen Substitution zusammenfallen, der nun als einziger Grenzpunkt der Fundamentalgruppe erscheint. Das bedeutet, dass die betrachtete Mannigfaltigkeit eine zweifach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit einer hyperbolischen und einer parabolischen Öffnung ist.

Das Urmanuscript der vorliegenden Abhandlung sowie die ganze Korrespondenz darüber befinden sich im Mathematischen Institut Mittag-Leffler zu Djursholm. Dieses Manuscript wurde im Oktober 1917 (verschobener Termin) zur Bewerbung um den 1913 zur internationalen Ausschreibung gelangten Preis S. M. des Königs Gustav V. an den Hauptredakteur der Acta mathematica eingereicht.