SUR LE DEGRÉ DE GÉNÉRALITÉ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE

PAR

CH. RIQUIER
à CAEN.

Introduction.

Etant donné un système différentiel complètement intégrable, on peut, comme j'ai eu occasion de l'établir,[1] fixer, par la seule considération de ses premiers membres, l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement un groupe d'intégrales ordinaires du système, et mettre en évidence les fonctions (ou constantes) arbitraires, en nombre fini, dont dépend la solution générale. Cela étant, nommons *genre* d'une fonction arbitraire le nombre de ses variables, désignons par λ le genre maximum des arbitraires ci-dessus spécifiées, et appelons μ le nombre des arbitraires qui, parmi elles, sont de genre λ. On voit immédiatement que le nombre des arbitraires restantes peut être augmenté au delà de toute limite: si l'on désigne en effet par n un entier positif aussi grand qu'on le voudra, et par x_0 une valeur initiale de x choisie comme on voudra, toute fonction arbitraire, $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$, des p variables $x, y, z, \ldots, t$ peut être mise sous la forme

$$\phi_0(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)\phi_1(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^2\phi_2(y, z, \ldots, t) + \ldots$$
$$+ (x - x_0)^{n-1}\phi_{n-1}(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^n \Psi(x, y, z, \ldots, t),$$

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

où figurent, avec une arbitraire de genre p,

(1) $$\Psi(x, y, z, \ldots, t)$$

n arbitraires de genre $p - 1$,

(2) $$\psi_0(y, z, \ldots, t)\,,\ \psi_1(y, z, \ldots, t)\,,\ \psi_2(y, z, \ldots, t)\,,\ \ldots\,,\ \psi_{n-1}(y, z, \ldots, t);$$

en conséquence, la donnée de la fonction arbitraire $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$ équivaut visiblement à celle des fonctions arbitraires (1) et (2).

Considérons maintenant un système différentiel quelconque, supposons-le réduit, de diverses manières, à une forme complètement intégrable, et comparons, dans ces diverses formes, le nombre et la nature des éléments arbitraires que l'économie des conditions initiales met en évidence: il est clair, d'après ce qui précède, que les résultats intéressants d'une semblable comparaison ne peuvent se rapporter qu'aux valeurs prises, dans les formes considérées, par les entiers λ et μ. Cela étant, je me suis proposé de rechercher s'il y avait effectivement sur ce point quelque loi générale, et cette étude m'a conduit à diverses propositions qui m'ont semblé utiles à connaître. L'une d'elles, notablement supérieure aux autres en importance, a été, il y a quelques mois, communiquée à l'Académie des Sciences;[1] elle peut se formuler à peu près comme il suit:

Considérons d'abord deux systèmes complètement intégrables, S', S'', désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement, et convenons de dire que les formes complètement intégrables S', S'' ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$ s'annulent à la fois; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S' a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de S'', suivant que, parmi ces deux différences, la première qui ne s'annule pas est positive ou négative. Cela posé, et un système différentiel (compatible) étant donné, si l'on envisage dans leur ensemble toutes les formes complètement intégrables que ce système est susceptible de prendre, certaines d'entre elles, dites *monoïques*,[2] qui semblent en constituer l'immense majorité, pré-

[1] Comptes-Rendus du 22 janvier 1900.

[2] Dans la communication que j'ai faite à ce sujet à l'Académie des Sciences, j'avais employé, pour désigner les formes en question, le mot *isonome*, auquel j'ai cru devoir renoncer pour adopter le mot *monoïque*.

sentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.

Cette propriété, qui pourrait fournir une définition du degré de généralité de tout système différentiel compatible, se trouve, ainsi que les divers résultats de nature analogue auxquels j'ai pu parvenir, exposée en détail dans le présent Mémoire: le lecteur pourra constater que la considération des *cotes*, à laquelle je suis redevable de tous mes résultats antérieurs, m'a été, ici encore, d'une utilité capitale. [1]

PREMIÈRE PARTIE.

Systèmes différentiels explicites, arithmoïques, monoïques.

1. Je dirai qu'un système différentiel est *limité* ou *illimité*, suivant qu'il se compose d'un nombre limité ou illimité d'équations, et je supposerai expressément, comme je l'ai fait dans mes travaux antérieurs, que tout système différentiel directement donné est limité: c'est toujours, en effet, à de pareils systèmes que conduit la mise en équations des problèmes de mathématiques appliquées.

Etant donné un système différentiel (limité) impliquant les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, nous nommerons *groupe d'intégrales* du système un groupe de fonctions,

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

développables dans quelque domaine par la série de TAYLOR, et qui, substituées à $u, v, \ldots$, transforment en identités les diverses équations proposées; souvent aussi, nous nommerons *solution analytique* du système un pareil groupe de fonctions. Les intégrales seront dites *ordinaires*, s'il existe quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient développables par la série de TAYLOR, mais que de plus leurs va-

[1] Voir le n° 10 du présent Mémoire.

leurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les premiers et les seconds membres du système donné soient à la fois développables.

Nous nous bornerons ici à la considération exclusive des solutions analytiques ordinaires, et nous dirons qu'un système différentiel (limité) est *analytiquement possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque solution de cette espèce.

Etant donnés deux systèmes différentiels (limités), si toute solution analytique ordinaire du premier est en même temps une solution analytique ordinaire du second, nous dirons que le second est une *conséquence analytique* du premier; si chacun d'eux est une conséquence analytique de l'autre, les systèmes seront dits *analytiquement équivalents*.

2. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations d'un système (limité) donné en transforme les premiers et les seconds membres en des fonctions composées des variables, des intégrales et de quelques-unes de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux premiers et aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables le sont aussi, et l'on peut, en conséquence, différentier indéfiniment les relations du système. Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées, puis les résultats de ces combinaisons être différentiés à leur tour, et fournir les éléments de nouvelles combinaisons qui seront elles-mêmes différentiées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution aux inconnues $u, v, \ldots$ d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

3. Si aux équations qui composent un système (limité) donné Σ on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, le groupe illimité résultant de cette adjonction s'appellera le *système Σ prolongé*.

D'après ce qui vient d'être dit (2), un groupe quelconque d'intégrales ordinaires du système Σ satisfait identiquement à toutes les relations du système Σ prolongé: dès lors, si l'on convient de considérer pour un instant les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres comme autant de variables indépendantes distinctes, le système Σ prolongé ne peut manquer d'être *numériquement* vérifié par des valeurs particulières quelconques, $x_0, y_0, \ldots$, de $x, y, \ldots$, prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales considérées et de leurs dérivées de tous ordres (cela, bien entendu, dans les limites assignées par la définition même des intégrales ordinaires).

Inversement, supposons que, dans un domaine où les premiers et les seconds membres de Σ soient à la fois développables, le système Σ prolongé admette quelque solution *numérique;* supposons en outre que, en désignant par $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs numériques de $x, y, \ldots$, les développements, entiers en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, qui ont pour coefficients, aux facteurs numériques connus près, les valeurs numériques de $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées de tous ordres, soient *convergents.* Cela étant, *les sommes des développements dont il s'agit constituent un groupe d'intégrales ordinaires du système Σ.*

Désignons en effet par $U, V, \ldots$ les sommes de ces développements, et considérons un domaine $\mathfrak{D}$ des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de $x, y, \ldots$ en lesquelles se transforment, par la substitution de $U, V, \ldots$ à $u, v, \ldots$, les deux membres des diverses équations Σ, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. Par la manière même dont les développements $U, V, \ldots$ ont été construits, les valeurs initiales de $x, y, \ldots$, de $U, V, \ldots$ et de leurs dérivées de tous ordres constituent la solution numérique dont l'existence a été supposée dans le système Σ prolongé. Donc les fonctions de $x, y, \ldots$ qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation quelconque du système Σ, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

et par suite sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$.

4. Le théorème précédent montre quel intérêt il peut y avoir, étant donné un système différentiel limité, à considérer, au point de vue des solutions numériques, tel ou tel des systèmes illimités qui s'en déduisent. Il convient de poser à cet égard quelques définitions.

Considérons d'abord un système différentiel, limité ou illimité, composé de relations ayant toutes la forme entière par rapport aux dérivées d'ordre suffisamment grand des inconnues;[1] assimilons-y pour un instant les variables $x, y, \ldots$, les inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, et convenons expressément de ne considérer, parmi les solutions numériques d'un pareil système, que celles qui tombent dans quelque domaine où les premiers et les seconds membres soient à la fois développables: cela étant, nous dirons que le système est *numériquement possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque solution de cette espèce.

Considérons maintenant, sous le bénéfice des mêmes restrictions, non plus un, mais deux systèmes différentiels, limités ou illimités: si toute solution numérique du premier est en même temps une solution numérique du second, nous dirons que le second est une *conséquence numérique* du premier; et si chacun d'eux est une conséquence numérique de l'autre, les systèmes seront dits *numériquement équivalents.*[2]

5. Etant donné un système limité S, résolu par rapport à certaines des fonctions inconnues ou de leurs dérivées, nous dirons qu'une quantité quelconque, prise dans l'ensemble illimité que forment les inconnues et leurs dérivées de tous ordres, est, par rapport au système considéré S, *principale* ou *paramétrique*, suivant qu'elle coïncide ou non, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées: il est clair, d'après cela, que toute quantité principale figure au moins une fois (souvent même plusieurs) dans les premiers membres du système S prolongé, tandis que les quantités paramétriques n'y figurent jamais.

---

[1] Cette condition se trouve remplie d'elle même dans un système limité.

[2] La substitution des expressions *conséquence numérique, équivalence numérique,* etc., aux expressions généralement usitées, *conséquence algébrique, équivalence algébrique,* etc., me semble présenter, entre autres avantages, celui d'éviter toute équivoque sur la signification du mot *algèbre.*

Cela étant, supposons que les seconds membres du système considéré S, tous développables à l'intérieur d'un même domaine, ne contiennent *effectivement* aucune quantité principale; supposons en outre (circonstance qui est loin de se réaliser toujours) que du système S prolongé on puisse déduire un autre système, numériquement équivalent, fournissant, pour chacune des quantités principales du système S, une ou plusieurs expressions indépendantes de toute quantité principale:[1] nous dirons, en pareil cas, que le système différentiel donné S est *explicite*; les relations du système S prolongé et celles du système numériquement équivalent qu'on en peut déduire se nommeront respectivement *relations primitives* et *relations ultimes* du système S; enfin les expressions respectivement fournies par ces deux sortes de relations pour les diverses quantités principales seront affectées des deux mêmes qualifications.

6. *Quand un système explicite possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la série de Taylor, à partir des valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement les valeurs initiales de toutes les quantités paramétriques.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ n'excèdent pas les limites indiquées par la définition même des intégrales ordinaires.)

Effectivement, si l'on donne aux variables $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, les intégrales dont il s'agit et leurs dérivées de tous ordres prennent, elles aussi, leurs valeurs initiales; comme celles des diverses quantités paramétriques sont supposées connues, l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0$$

transforme les seconds membres des relations ultimes en des quantités connues, et fait connaître, par suite, les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est à dire de toutes les quantités principales.

On connaît donc ainsi les valeurs initiales des intégrales considérées et de toutes leurs dérivées sans distinction: or, ces valeurs initiales ne sont autres, aux facteurs numériques connus près, que les coefficients des développements cherchés.

---

[1] Il va sans dire que ce système équivalent est supposé ne fournir, pour chacune des quantités principales, qu'un nombre limité de semblables expressions.

7. Des intégrales ordinaires quelconques d'un système explicite étant supposées développées par la série de TAYLOR à partir de valeurs initiales quelconques, $x_0, y_0, \ldots,$ des variables indépendantes $x, y, \ldots,$ les portions de ces développements formées par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales des quantités paramétriques, se nommeront les *déterminations initiales*, relatives à $x_0, y_0, \ldots,$ des intégrales dont il s'agit.

Cela posé, le théorème du numéro précédent peut encore s'exprimer comme il suit:

Quand un système explicite possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la série de Taylor peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.

On peut d'ailleurs, comme je l'ai établi,[1] fixer à l'aide des considérations les plus élémentaires l'économie des fonctions (ou constantes), en nombre fini, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales.

8. *Inversement, cherchons si, dans un système explicite, il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs initiales des variables, prises conjointement avec celles des quantités paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures à un domaine où ces derniers soient développables.)

I. *Pour qu'un pareil groupe existe, il est tout d'abord nécessaire que les relations ultimes s'accordent à fournir, pour chacune des quantités principales, une seule et même valeur initiale.*

II. *Cette concordance numérique étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition même des intégrales analytiques (1).

---

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

III. *Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations ultimes s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système explicite donné.*

Car les valeurs initiales (données) de $x, y, \ldots$ et des quantités paramétriques, et les valeurs initiales (calculées à l'aide des relations ultimes) des quantités principales, constituent pour les relations ultimes, et par suite pour les relations primitives, dont l'ensemble n'est autre chose que le système explicite prolongé, une solution numérique donnant lieu à des développements convergents (3).

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation ultime, étant du premier degré par rapport à la quantité principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

9. Nous dirons qu'un système explicite est *passif*, si la concordance numérique des relations ultimes a lieu pour tout système de valeurs attribuées à $x, y, \ldots$ et aux quantités paramétriques, ou, ce qui revient au même, si, en considérant pour un instant $x, y, \ldots$ et les quantités paramétriques comme autant de variables indépendantes distinctes, les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque sont toutes identiquement égales entre elles.

Dans un système explicite, nous nommerons *conditions brutes de passivité* l'ensemble de toutes les relations obtenues en égalant entre elles les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque: pour que le système soit passif, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que toutes les relations dont il s'agit se réduisent à des identités. Il arrive fréquemment d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, que la réalisation de cette circonstance pour un groupe limité et nettement défini, extrait de l'ensemble des conditions brutes, entraîne, à titre de conséquence nécessaire, sa réalisation pour toutes les conditions brutes sans exception: nous nommerons, en pareil cas, *conditions sélectives de passivité* les relations contenues dans ce groupe limité.

Nous dirons qu'un système explicite est *complètement intégrable*, s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies (il va sans dire que les déterminations initiales choisies pour les diverses inconnues doivent être supposées toutes convergentes).

Lorsqu'un système explicite est complètement intégrable, les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque ne peuvent manquer d'être toutes identiquement égales entre elles: si l'on désigne en effet par N l'ordre maximum des expressions ultimes de la quantité principale considérée, le système donné, qui, par hypothèse, admet un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales convergentes arbitrairement choisies, admet, notamment, un groupe d'intégrales tel, que, pour des valeurs arbitrairement choisies des variables, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, , \ldots, N$ prennent des valeurs arbitrairement choisies, tandis que les quantités paramétriques d'ordre supérieur à N prennent toutes la valeur zéro. Les expressions ultimes dont il s'agit sont donc numériquement égales pour toutes valeurs des quantités qu'elles renferment, c'est à dire qu'elles sont identiquement égales entre elles.

D'après cela, pour qu'un système explicite soit complètement intégrable, il faut et il suffit: 1° qu'il soit passif; 2° que la convergence des déterminations initiales arbitrairement choisies pour ses intégrales hypothétiques entraîne la convergence des portions restantes de leurs développements.

10. Soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues engagées dans un système explicite; $x, y, \ldots$ les variables indépendantes; et

$$(3)\qquad \begin{cases} c_u\,,\ c_{u,x}\,,\ c_{u,y}\,,\ \ldots, \\ c_v\,,\ c_{v,x}\,,\ c_{v,y}\,,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

des entiers arbitrairement choisis sous la seule condition que ceux d'entre eux qui ne se trouvent pas contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), savoir

$$(4)\qquad \begin{cases} c_{u,x}\,,\ c_{u,y}\,,\ \ldots, \\ c_{v,x}\,,\ c_{v,y}\,,\ \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

soient tous positifs, chacun des entiers restants $c_u, c_v, \ldots$ pouvant être à volonté positif, nul ou négatif. Désignant alors par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \ldots,$ et considérant une dérivée quelconque, d'ordre positif ou nul, de cette inconnue, par exemple

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots},$$

nous nommerons *arithme* de la dérivée en question l'entier

$$c_w + \alpha c_{w,x} + \beta c_{w,y} + \ldots.$$

Il est clair qu'en désignant par φ le plus petit (au point de vue algébrique) des entiers $c_u, c_v, \ldots,$ toute dérivée d'ordre n ($n \geqq 0$) de $u, v, \ldots$ a un arithme au moins égal à $n + \varphi$, puisque chacun des entiers (4) est positif et au moins égal à 1. Il résulte de là: 1° que l'arithme d'une dérivée quelconque (d'ordre positif ou nul) de $u, v \ldots$ ne tombe jamais au dessous de φ; 2° qu'en désignant par C un entier déterminé quelconque (au moins égal à φ), le nombre des dérivées (d'ordre positif ou nul) de $u, v, \ldots$ possédant un arithme égal à C est essentiellement limité.

Du système donné on peut, comme nous l'avons expliqué, déduire par des différentiations et combinaisons variées, une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution aux inconnues $u, v, \ldots$ d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires. Parmi les relations auxquelles peuvent conduire des calculs de cette nature, nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre quelque inconnue ou dérivée d'inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité (inconnue ou dérivée) dont l'arithme surpasse celui du premier membre; et nous dirons, pour abréger, qu'une semblable relation est *arithmoïque*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la quantité qui figure dans son premier membre. Si, moyennant un choix convenable des entiers (3), les relations ultimes du système explicite donné sont, sauf un nombre limité d'entre elles, toutes arithmoïques, nous dirons que le système lui-même est *arithmoïque*.

Enfin, dans le cas, particulièrement remarquable, où les diverses définitions qui précèdent peuvent être satisfaites moyennant l'attribution d'une valeur commune (positive) aux entiers (4) et de valeurs convenables aux entiers restants $c_u, c_v, \ldots,$ les relations, expressions et systèmes arithmoïques seront dits *monoïques*.

Les systèmes que j'ai nommés *orthoïques* sont des systèmes explicites arithmoïques; ils comprennent comme cas particulier les systèmes *orthonomes*, qui sont monoïques.[1]

Du type orthoïque et du type orthonome on peut, comme nous allons le voir, déduire respectivement un type arithmoïque et un type monoïque d'une généralité plus grande.

11. Imaginons un système S, formé des groupes successifs d'équations

$$S_1, S_2, \ldots, S_q,$$

auxquels correspondent les groupes successifs d'inconnues

$$s_1, s_2, \ldots, s_q,$$

de la façon suivante:

1° La réunion de ces derniers reproduit une fois et une seule chacune des inconnues du système proposé S.

2° Dans le groupe des équations S_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q;$$

ce même groupe S_k, si l'on y considère pour un instant comme des fonctions données les inconnues

$$s_{k+1}, \ldots, s_q,$$

est orthoïque par rapport aux inconnues s_k, sauf exception possible pour le groupe des équations S_1, qui peut, ou bien être orthoïque par rapport aux inconnues s_1, ou bien les exprimer directement à l'aide des variables indépendantes, des inconnues suivantes $s_2, \ldots, s_q$, et de quelques-unes de leurs dérivées.

3° Les seconds membres du système S ne contiennent aucune dérivée principale des inconnues.

---

[1] Pour les propriétés des systèmes *orthoïques* et *orthonomes*, voir le Mémoire intitulé: *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (Acta mathematica, t. 23).

Nous nommerons *polyorthoïques* les systèmes, évidemment explicites, qui remplissent à la fois toutes ces conditions.

On peut, relativement à leur passivité, formuler l'énoncé suivant:

Pour qu'un système polyorthoïque soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque des fonctions inconnues soient égales identiquement (c'est à dire pour toutes valeurs attribuées, et aux variables $x, y, \ldots,$ et aux quantités paramétriques qui y figurent).

Cette propriété, déjà établie dans l'hypothèse $q = 1$,[1] s'étend de proche en proche, par des raisonnements tout semblables, à une valeur quelconque de q.

En conséquence, un système orthoïque ou polyorthoïque étant donné, nous nommerons *conditions sélectives de passivité* (9) le groupe limité et bien défini des relations obtenues en égalant entre elles les diverses expressions ultimes d'une même dérivée *cardinale* quelconque.

En remplaçant, dans la définition des systèmes polyorthoïques, le mot *orthoïque* par le mot *orthonome*, on tombera sur le cas, particulièrement remarquable, des systèmes *polyorthonomes*.

Un système orthonome, s'il est passif, ne peut manquer d'être complètement intégrable: il est aisé d'en conclure qu'un système polyorthonome jouit de la même propriété.

12. *Tout système polyorthoïque*

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

est arithmoïque.

I. Rappelons tout d'abord que, dans un système orthoïque, les *cotes premières* des variables indépendantes sont des entiers tous positifs, celles des fonctions inconnues des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, et que la *cote première* d'une dérivée quelconque de telle ou telle inconnue s'obtient en ajoutant à la cote première de l'inconnue intéressée les cotes premières de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Cela posé, et un système polyorthoïque

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

[1] Voir le Mémoire cité plus haut.

étant donné, *nous choisirons comme arithmes des inconnues* s_k *et de leurs dérivées* ($k = 1, 2, \ldots, q$) *les cotes premières que ces diverses quantités possèdent dans le groupe orthoïque* S_k.

II. Il résulte évidemment de la nature orthoïque du groupe S_k par rapport aux inconnues s_k que si une quantité quelconque, appartenant à l'ensemble illimité que forment ces inconnues et leurs dérivées de tous ordres, figure *effectivement* dans un second membre de S_k, elle possède un arithme inférieur ou au plus égal à celui du premier membre correspondant. Mais il y a plus, et *l'on peut toujours, en modifiant au besoin telles ou telles cotes premières, supposer que le système polyorthoïque donné vérifie la double condition suivante:* 1° *la cote première minima des variables indépendantes* $x, y, \ldots$ *dans le groupe* S_k *n'est pas inférieure à leur cote première maxima dans l'un quelconque des groupes suivants* $S_{k+1}, \ldots, S_q$; 2° *chacune des équations dont se compose le système polyorthoïque donné est arithmoïque.*

Effectivement, le groupe S_k ne cesse pas de vérifier, par rapport aux inconnues s_k, la définition de l'orthoïcité, soit lorsqu'on ajoute un même entier arbitraire aux cotes premières des inconnues s_k, soit lorsqu'on multiplie par un même entier positif arbitraire les cotes premières des inconnues s_k et celles qui ont été attribuées, dans S_k, à $x, y, \ldots$. Cela étant, je considère le groupe S_{q-1}, et j'y multiplie les cotes premières des inconnues s_{q-1} et de $x, y, \ldots$ par un même entier positif de grandeur telle, que la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_{q-1} ne soit pas inférieure à leur cote première maxima dans le groupe S_q; puis j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-1} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-1} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système S_q qui figurent dans le second membre correspondant. Cela fait, je considère le groupe S_{q-2}, et j'y multiplie les cotes premières des inconnues s_{q-2} et de $x, y, \ldots$ par un même entier positif de grandeur telle, que la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_{q-2} ne soit pas inférieure à leur cote première maxima dans le groupe S_{q-1}; puis j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-2} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-2} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système (S_{q-1}, S_q) qui figurent dans le second membre correspondant. Et ainsi de suite jusqu'au groupe S_1.

III. Nous dirons, pour abréger, qu'une relation déduite d'un système polyorthoïque est *régulière*, si d'une part elle est arithmoïque, et si d'autre part, ayant pour premier membre une dérivée (d'ordre positif ou nul) de quelqu'une des inconnues s_k, elle ne contient *effectivement* dans son second membre aucune des inconnues $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ ni aucune de leurs dérivées. L'expression fournie par une semblable relation pour la quantité qui figure dans son premier membre, sera, elle aussi, qualifiée de *régulière*.

En se reportant à la définition des systèmes polyorthoïques (11), et en supposant, comme il est permis de le faire, les cotes premières fixées conformément aux indications de l'alinea précédent II, on voit immédiatement que chacune des équations qui composent un système polyorthoïque est régulière.

On peut d'ailleurs, comme nous allons l'établir, exécuter sur toute relation régulière déduite du système certaines opérations, de nature déterminée, qui laissent subsister cette propriété.

Si sur une relation régulière déduite du système on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des inconnues ou dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions régulières des quantités en question, on tombe encore sur une relation régulière.

A. *Si sur une relation régulière on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$\delta_k = f(x, y, \ldots, \delta', \ldots) \tag{5}$$

une relation régulière dans laquelle δ_k désigne une dérivée (d'ordre positif ou nul) des inconnues s_k, et $\delta', \ldots$ des quantités satisfaisant à la double condition: 1° d'appartenir à l'ensemble illimité que forment les inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q \tag{6}$$

et leurs dérivées de tous ordres; 2° d'avoir un arithme inférieur ou au plus égal à celui de δ_k. La relation déduite de (5) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que $\delta', \ldots$ et leurs dérivées premières relatives à x, quantités qui toutes appartiennent à l'ensemble formé par les inconnues (6) et leurs dérivées de tous ordres. D'un autre côté, si l'on désigne par $c_k, c', \ldots$ les arithmes respectifs de $\delta_k, \delta', \ldots$, et par $c_{k,x}$ la cote première attribuée à x dans le groupe orthoïque S_k, les relations

$$c_k - c' \geqq 0, \ldots,$$

vérifiées par hypothèse, entraînent évidemment

$$(7) \qquad (c_k + c_{k,x}) - (c' + c_{k,x}) \geqq 0, \ldots,$$

et aussi, à cause de $c_{k,x} > 0$,

$$(8) \qquad (c_k + c_{k,x}) - c' > 0, \ldots.$$

Or, il résulte des relations (8) que les arithmes respectifs des quantités $\delta', \ldots$ sont inférieurs à celui de $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$; d'ailleurs, comme la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_k n'est pas inférieure à leur cote première maxima dans les divers groupes suivants $S_{k+1}, \ldots, S_q$, les entiers

$$c' + c_{k,x}, \ldots$$

sont au moins égaux aux arithmes respectifs des quantités

$$\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots,$$

et il résulte alors des relations (7) que les arithmes dont il s'agit ne surpassent pas celui de $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$.

Ainsi, les conditions formulées dans la définition d'une relation régulière ne cessent pas d'être satisfaites après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elles ne cessent pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

B. *Si dans le second membre d'une relation régulière on remplace telles ou telles quantités (inconnues ou dérivées) par des expressions régulières des quantités en question, on tombe encore sur une relation régulière.*

Considérons une relation régulière dont le premier membre δ_k appartienne à l'ensemble formé par les inconnues s_k et leurs dérivées de tous ordres, et désignons par δ' l'une des quantités (inconnues ou dérivées) figurant au second membre; puis, considérant une expression régulière de δ', nommons δ'' l'une des inconnues ou dérivées qui y figurent. Comme δ' appartient, par hypothèse, à l'ensemble formé par les inconnues (6) et leurs dérivées de tous ordres, il en sera de même, à plus forte raison, de δ''; d'un autre côté, l'arithme de δ'' étant au plus égal à celui de δ', et ce dernier au plus égal à celui de δ, il est clair que l'arithme de δ'' est au plus égal à celui de δ. En conséquence, les substitutions opérées dans le second membre de la relation donnée ne peuvent altérer la nature régulière de celle-ci.

C. Le simple rapprochement de ***A*** et ***B*** prouve dans toute sa généralité l'exactitude de l'énoncé formulé au début de l'alinéa III.

IV. *Tout système polyorthoïque est arithmoïque.*

Les diverses équations qui composent le système donné étant, comme nous l'avons fait remarquer, toutes régulières, il résulte de la propriété ci-dessus établie (III) que les relations primitives et ultimes le sont toutes. En particulier, les relations ultimes sont toutes arithmoïques, ce qui prouve la nature arithmoïque du système.

13. *Tout système polyorthonome*

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

est monoïque.

I. Un système orthonome n'est, comme nous l'avons dit ailleurs,[1] qu'un système orthoïque où les cotes premières des variables indépendantes sont toutes égales à un même entier (positif).

Cela étant, et *un système orthonome étant donné, il est toujours permis de supposer que la valeur commune (positive) des cotes premières attribuées aux variables indépendantes est égale à* 1.

Effectivement, soient

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;

[1] *Sur une question fondamental du Calcul intégral.*

$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;

c' la cote première (positive) commune à toutes les variables $x, y, \ldots$, et $c'_u, c'_v, \ldots$ les cotes premières respectives des inconnues $u, v, \ldots$;

$c''_x, c''_y, \ldots, c''_u, c''_v, \ldots$ les cotes secondes respectives de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$;

etc.;

$c^{(p)}_x, c^{(p)}_y, \ldots, c^{(p)}_u, c^{(p)}_v, \ldots$ les cotes $p^{\text{ièmes}}$ respectives des mêmes quantités.

Cela posé, nous attribuerons, comme il suit, à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ une cote supplémentaire que nous considérerons comme *antérieure* à celles que possède déjà cette quantité: nous affecterons d'abord $x, y, \ldots$ des cotes respectives $1, 1, \ldots$; désignant ensuite par c_u le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_u}{c'}$, par c_v le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_v}{c'}$, etc., nous affecterons les inconnues $u, v, \ldots$ des cotes respectives $c_u, c_v, \ldots$. Les entiers $c', c'_u, c'_v, \ldots, c_u, c_v, \ldots$ sont évidemment liés par les relations

$$0 \leqq \frac{c'_u}{c'} - c_u < 1,$$

$$0 \leqq \frac{c'_v}{c'} - c_v < 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour plus de netteté, nous réunirons dans le Tableau suivant les $p + 1$ cotes successives qui se trouvent actuellement attribuées à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 1, & \ldots, & c_u, & c_v, & \ldots, \\
c', & c', & \ldots, & c'_u, & c'_v, & \ldots, \\
c''_x, & c''_y, & \ldots, & c''_u, & c''_v, & \ldots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c^{(p)}_x, & c^{(p)}_y, & \ldots, & c^{(p)}_u, & c^{(p)}_v, & \ldots.
\end{array}$$

En supprimant de ce Tableau la première ligne,

$$1, 1, \ldots, c_u, c_v, \ldots,$$

on retombe, naturellement, sur l'ancien système de cotes.

Cela étant, il suffit, pour établir le point que nous avons en vue, de considérer deux quantités quelconques appartenant l'une et l'autre à l'ensemble que forment les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, et de faire voir que si la seconde est, dans l'ancien système de cotes, *normale* vis à vis de la première,[1] elle jouit de la même propriété dans le nouveau.

Désignons à cet effet par w_1 et w_2 deux quantités (distinctes ou non) prises dans le groupe $u, v, \ldots$, et soient

$$(9) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\beta_1+\cdots} w_1}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\beta_1} \ldots},$$

$$(10) \qquad \frac{\partial^{\alpha_2+\beta_2+\cdots} w_2}{\partial x^{\alpha_2} \partial y^{\beta_2} \ldots}$$

deux dérivées (d'ordre positif ou nul) de ces quantités respectives. Je dis tout d'abord qu'en supposant vérifiée la relation

$$(11) \qquad [c'_{w_1} + (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots)c'] - [c'_{w_2} + (\alpha_2 + \beta_2 + \ldots)c'] \geqq 0,$$

on a nécessairément aussi

$$(12) \qquad (c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq 0.$$

Effectivement, la relation (11) peut s'écrire

$$\left(\frac{c'_{w_1}}{c'} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots\right) - \left(\frac{c'_{w_2}}{c'} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots\right) \geqq 0,$$

ou

$$(c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq \left(\frac{c'_{w_2}}{c'} - c_{w_2}\right) - \left(\frac{c'_{w_1}}{c'} - c_{w_1}\right).$$

Or, chacune des parenthèses figurant au second membre de cette dernière relation est une quantité non négative et moindre que 1; leur différence est donc algébriquement supérieure à -1, et à plus forte raison le premier membre; finalement, ce premier membre, étant un entier, ne peut être que supérieur ou égal à zéro, ce qu'exprime justement la relation (12).

Cela étant, supposons que, dans l'ancien système de cotes, la quantité

---

[1] Ibid.

(10) soit normale vis à vis de la quantité (9), ou, en d'autres termes, que les différences

$$(13)\qquad\begin{cases}[c'_{w_1}+(\alpha_1+\beta_1+\ldots)c']\;-[c'_{w_2}+(\alpha_2+\beta_2+\ldots)c'],\\ [c''_{w_1}+\alpha_1c''_x+\beta_1c''_y+\ldots]-[c''_{w_2}+\alpha_2c''_x+\beta_2c''_y+\ldots],\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ [c^{(p)}_{w_1}+\alpha_1c^{(p)}_x+\beta_1c^{(p)}_y+\ldots]-[c^{(p)}_{w_2}+\alpha_2c^{(p)}_x+\beta_2c^{(p)}_y+\ldots]\end{cases}$$

ne soient pas toutes nulles, et que la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas soit positive. La relation (11) se trouve alors nécessairement vérifiée, et par suite aussi la relation (12); il est aisé d'en conclure que si, en tête des différences (13), on écrit la différence

$$(c_{w_1}+\alpha_1+\beta_1+\ldots)-(c_{w_2}+\alpha_2+\beta_2+\ldots),$$

la suite ainsi obtenue jouira, elle aussi, de la propriété que nous avons, par hypothèse, attribuée à la suite (13). En d'autres termes, la quantité (10) sera, dans le nouveau système de cotes, normale vis à vis de la quantité (9), ce qu'il s'agissait d'établir.

II. *Un système polyorthonome étant donné, prenons comme arithmes des inconnues s_k $(k=1,2,\ldots,q)$ et de leurs dérivées les cotes premières que ces diverses quantités possèdent dans le groupe orthonome S_k: cela étant, on peut, dans chacun des groupes orthonomes $S_1, S_2, \ldots, S_q$, choisir pour les variables et les inconnues des cotes premières telles, que chacune des équations dont se compose le système polyorthonome donné soit monoïque.*

Il résulte en effet de l'alinéa précédent I que l'on peut supposer toutes égales à 1 les cotes premières attribuées aux variables $x, y, \ldots$ dans chacun des groupes orthonomes $S_1, S_2, \ldots, S_q$. D'ailleurs le groupe S_k ne cesse pas de vérifier, par rapport aux inconnues s_k, la définition de l'orthonomie, lorsqu'on ajoute aux cotes premières de ces inconnues un même entier arbitraire. Cela étant, je considère le groupe S_{q-1}, et j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-1} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-1} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système S_q qui figurent dans le second membre correspondant. Puis je considère le groupe S_{q-2}, et j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-2} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-2} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système (S_{q-1}, S_q) qui figurent dans le second membre correspondant. Et ainsi de suite jusqu'au groupe S_1.

III. Considérons un système polyorthonome, et supposons-y *les cotes premières fixées conformément aux indications de l'alinéa précédent* II. Cela étant:

Si sur une relation monoïque déduite du système on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des inconnues ou dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions monoïques des quantités en question, on tombe encore sur une relation monoïque.

IV. *Tout système polyorthonome est monoïque.*

Les diverses équations qui composent le système étant, comme il est permis de le supposer (II), toutes monoïques, il résulte immédiatement de l'alinéa III que les relations primitives et ultimes le sont toutes aussi, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME PARTIE.

Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme passive.

14. Etant donnés deux systèmes différentiels (limités) S et S', où se trouvent engagées les mêmes variables indépendantes $x, y, \ldots$ et les mêmes fonctions inconnues $u, v, \ldots$, si les systèmes

$$S \text{ prolongé}, \quad S' \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents, il est facile de voir que les systèmes S et S' le sont analytiquement:[1] en effet, toute solution analytique de S fournit

[1] La réciproque, qui nous est pour le moment inutile, sera démontrée plus loin.

une solution numérique de S prolongé donnant lieu à des développements convergents, par suite une solution numérique de S' prolongé jouissant de la même propriété; elle est donc aussi (3) une solution analytique de S'; de même, toute solution analytique de S' est aussi une solution analytique de S.

Cela posé, nous établirons la proposition capitale suivante:

Etant donné un système différentiel (limité) dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un système explicite passif tel, que ce dernier prolongé équivaille numériquement au premier prolongé; tel, par suite, que le deuxième système équivaille analytiquement au premier.

Parmi les formes explicites passives auxquelles conduit une semblable réduction du système donné, il en est qui, de plus, sont monoïques et complètement intégrables.

I. *Quand deux systèmes différentiels (limités) S et S' sont numériquement équivalents, les systèmes*

$$(14) \qquad S \text{ prolongé}, \quad S' \text{ prolongé}$$

jouissent de la même propriété.

Tout d'abord, si les systèmes S et S' sont numériquement impossibles, il est clair que ces systèmes prolongés le sont aussi, et par suite qu'ils sont numériquement équivalents.

Supposons que S et S' soient numériquement possibles et équivalents: je dis que chacun des systèmes (14) est une conséquence numérique de l'autre, que le second, par exemple, est une conséquence numérique du premier.

Effectivement, on peut partager les équations du système S en deux groupes, dont le premier,

$$(15) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

forme un système réduit, tandis que le second est une conséquence numérique du premier. Toute équation de S' est alors une conséquence numérique du groupe réduit, et peut, d'après cela, se mettre sous la forme

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m = 0,$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ désignent certaines fonctions dépendant des variables $x, y, \ldots,$ des inconnues $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées. Cela étant, désignons par $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta,\ldots}[F]$ un symbole indiquant qu'on a appliqué à F la règle de différentiation des fonctions composées, successivement α fois par rapport à x, puis β fois par rapport à y, etc. Il s'agit de faire voir que l'équation

$$\mathfrak{A}_{\alpha,\beta,\ldots}[\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m] = 0$$

est une conséquence numérique du système S prolongé. Or, il est clair qu'en développant par la règle des fonctions composées le premier membre de la relation précédente, on tombe sur une somme de termes dont chacun est de la forme

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\delta,\ldots}[\Phi_k] \times \mathfrak{A}_{\varepsilon,\theta,\ldots}[F_k],$$

avec les conditions

$$\gamma + \varepsilon = \alpha, \qquad \delta + \theta = \beta \ , \quad \ldots,$$

et il suffit alors d'observer que la relation

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon,\theta,\ldots}[F_k] = 0$$

appartient au système (15) prolongé, par suite au système S prolongé.

II. *Lorsque à un système différentiel (limité) S on adjoint un groupe (limité) H, conséquence numérique de quelque groupe (limité) extrait du système S prolongé, les systèmes*

$$S \text{ prolongé}, \ (S, H) \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Tout d'abord, si le système S prolongé est numériquement impossible, il en est de même de (S, H) prolongé, et ces deux systèmes sont numériquement équivalents.

Supposons que S prolongé soit numériquement possible: comme il est évidemment une conséquence numérique de (S, H) prolongé, il nous suffit d'établir que, réciproquement, (S, H) prolongé est une conséquence numérique de S prolongé. Or, les équations H étant des conséquences numériques de certaines équations, en nombre fini, du système S prolongé, l'une quelconque des équations H est de la forme

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_g L_g = 0, \tag{16}$$

où

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, L_g = 0 \tag{17}$$

désignent des équations convenablement choisies du système S prolongé, et $A_1, A_2, \ldots, A_g$ des fonctions convenablement choisies. Si, sur l'équation (16), on effectue, conformément à la règle des fonctions composées, un nombre quelconque de différentiations consécutives, il est visible, en vertu d'un raisonnement semblable à celui de l'alinéa I, que la relation résultante est une conséquence numérique du système (17) prolongé, par suite une conséquence numérique du système S prolongé. Ainsi, H prolongé est une conséquence numérique de S prolongé; donc (S, H) prolongé jouit de la même propriété ce qu'il s'agissait d'établir.

III. *Considérons un système différentiel (limité) composé des deux groupes S, T, et soient Σ un groupe (limité) extrait de S prolongé, T' le groupe déduit de T en y remplaçant certaines des quantités (inconnues ou dérivées) qui y figurent par des expressions respectivement tirées d'équations qui soient des conséquences numériques de Σ. Cela étant, les systèmes*

$$(S, T) \text{ prolongé}, \ (S, T') \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Il est clair que lorsqu'une équation est conséquence numérique d'un système, elle l'est de tout système comprenant les diverses relations du premier: il est donc toujours permis de supposer que le groupe Σ contient toutes les équations S, et qu'il est de la forme

$$\Sigma = (S, \sigma).$$

Cela étant, il résulte évidemment de nos hypothèses que les systèmes

$$(\Sigma, T), \ (\Sigma, T'),$$

c'est à dire

$$(S, \sigma, T)\ ,\ (S, \sigma, T')$$

sont numériquement équivalents; donc, en vertu de I, les systèmes

$$(S, \sigma, T) \text{ prolongé, } (S, \sigma, T') \text{ prolongé}$$

jouissent de la même propriété. D'ailleurs, puisque σ fait partie de S prolongé, il est clair que le système (S, σ) prolongé n'est autre que le système S prolongé; donc on peut dire que les systèmes

$$(S, T) \text{ prolongé, } (S, T') \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents, ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. *Si, dans un système différentiel (limité) S, résolu par rapport à certaines dérivées (d'ordre positif ou nul) des inconnues, on attribue, conformément aux indications données dans un Mémoire antérieur,*[1] *p cotes à chacune des variables et des inconnues, et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités normales par rapport au premier membre correspondant,*[2] *on peut, sans changer les cotes, en déduire un système S', possédant à la fois les propriétés suivantes:*

1°. *Les systèmes S et S' se composent d'un même nombre d'équations, et ont respectivement les mêmes premiers membres.*

2°. *Dans le système S', chaque second membre n'est pas seulement, comme dans S, indépendant de toute quantité anormale, il l'est aussi de toute quantité principale.*

3°. *Les systèmes*

$$S \text{ prolongé, } S' \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Dans le Mémoire cité (n$^{\text{os}}$ 7 et 8), nous avons désigné par $u, v, \ldots$ diverses fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots$; puis, considérant certains ensembles formés avec des dérivées de $u, v, \ldots$, nous avons supposé que ces dernières étaient toutes d'ordre supérieur à zéro: mais les conclusions formulées dans le passage en question, auquel nous

---

[1] *Sur une question fondamentale du Calcul intégral,* n° 6.

[2] Ibid.

prions le lecteur de vouloir bien se reporter, restent applicables, alors même que les ensembles considérés contiendraient quelque dérivée d'ordre nul.

Cela étant, si le système proposé S a ses seconds membres indépendants de toute quantité principale, la proposition est vraie d'elle-même.

En nous plaçant maintenant dans l'hypothèse contraire, considérons l'ensemble illimité que forment les quantités principales du système S, et soit ω la classe maxima des premiers membres de S. De l'ensemble des relations déduites de S par différentiations, j'extrais un groupe Q choisi de telle sorte, que, dans le système

$$(S, Q),$$

chacune des quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ figure comme premier membre une fois et une seule. Le système (S, Q) a donc pour premiers membres (tous distincts entre eux) les diverses quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ du système S, et en outre certaines quantités principales de classe ω du même système. Dans le système (S, Q), le groupe formé par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe 1 du système S, appartient tout entier à S: car autrement, quelqu'une des équations de ce groupe se déduirait par différentiation de quelqu'une des équations de S, et par suite aurait son premier membre de classe supérieure à la classe minima, qui est 1. Mais le groupe formé dans (S, Q) par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe $k = 2, 3, \ldots, \omega - 1$, *peut* contenir des équations extraites de S et d'autres extraites de Q. Cela étant, je désignerai par

$$S_1, S_2, \ldots, S_{\omega-1}, S_\omega$$

les groupes, extraits de S, dont les premiers membres sont de classes respectives

$$1, 2, \ldots, \omega - 1, \omega;$$

et, semblablement, je désignerai par

$$Q_2, \ldots, Q_{\omega-1}$$

les groupes, extraits de Q, dont les premiers membres sont de classes respectives

$$2, \ldots, \omega - 1.$$

Puis, je partagerai le système (S, Q) en groupes successifs de la façon suivante:

$$S_1, S_2, Q_2, S_3, Q_3, \ldots, S_{\omega-1}, Q_{\omega-1}, S_\omega.$$

Rien n'est plus facile que d'éliminer des seconds membres de ce système toutes les quantités principales: effectivement, dans (S_2, Q_2), on remplacera les quantités principales de première classe par leurs valeurs tirées de S_1, ce qui donnera (S'_2, Q'_2); puis, dans (S_3, Q_3), les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S'_2, Q'_2), ce qui donnera (S'_3, Q'_3); et ainsi de suite jusqu'à S_ω, qui sera remplacé par un groupe S'_ω. On tombera finalement sur le système

$$S_1, S'_2, Q'_2, S'_3, Q'_3, \ldots, S'_{\omega-1}, Q'_{\omega-1}, S'_\omega.$$

Il est clair que le système S', formé par la réunion des groupes

$$S_1, S'_2, S'_3, \ldots, S'_{\omega-1}, S'_\omega,$$

satisfait aux conditions 1° et 2° de notre énoncé, et il s'agit d'établir qu'il satisfait aussi à la condition 3°, c'est-à-dire que le système S' prolongé équivaut numériquement au système S prolongé.

Observons tout d'abord que les relations Q_2 proviennent nécessairement du prolongement de S_1, les relations Q_3 du prolongement de (S_1, S_2), les relations Q_4 du prolongement de (S_1, S_2, S_3), etc., enfin les relations $Q_{\omega-1}$ du prolongement de $(S_1, S_2, \ldots, S_{\omega-2})$.

Cela étant, et d'après le calcnl ci-dessus décrit, le système (S_1, S_2) équivaut numériquement au système (S_1, S'_2): donc (S_1, S_2) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S'_2) prolongé (I).

Considérons le système (S_1, S_2, S_3). Si, dans les relations S_3, on remplace les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S'_2, Q'_2), qui équivaut numériquement à (S_1, S_2, Q_2), et qui par suite est une conséquence numérique de certaines équations du système (S_1, S_2) prolongé, il résulte de III que le système

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement au système

$$(S_1, S_2, S'_3) \text{ prolongé.}$$

D'ailleurs, puisque nous venons de démontrer que (S_1, S_2) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S_2') prolongé, il est clair que

$$(S_1, S_2, S_3') \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2', S_3') \text{ prolongé.}$$

On en déduit, par comparaison, que (S_1, S_2, S_3) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S_2', S_3') prolongé.

Considérons maintenant le système (S_1, S_2, S_3, S_4). Si, dans les relations S_4, on remplace les quantités principales des trois premières classes par leurs valeurs tirées de

$$(S_1, S_2', Q_2', S_3', Q_3'),$$

qui équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2, Q_2, S_3, Q_3),$$

et qui par suite est une conséquence numérique de certaines équations du système (S_1, S_2, S_3) prolongé, il résulte de III que

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2, S_3, S_4') \text{ prolongé.}$$

Nous venons de démontrer d'ailleurs que

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2', S_3') \text{ prolongé,}$$

et il en résulte que

$$(S_1, S_2, S_3, S_4') \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2', S_3', S_4') \text{ prolongé.}$$

Donc, en définitive,

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2', S_3', S_4') \text{ prolongé.}$$

Et ainsi de suite.

V. *Si l'on considère diverses fonctions*

$$u, v, \ldots, w$$

des variables indépendantes

$$x, y, \ldots, z,$$

et que l'on forme successivement, avec des dérivées de $u, v, \ldots, w$, *divers ensembles (limités), dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité.*

J'ai déjà eu l'occasion, dans mes travaux antérieurs, d'établir cette proposition.[1]

VI. *En désignant par* K *un entier positif donné, et par* $u, v, w, \ldots$ *diverses fonctions des variables indépendantes* $x, y, z, \ldots$, *on peut attribuer à*

$$u, v, w, \ldots, x, y, z, \ldots,$$

des cotes

$$c_u, c_v, c_w, \ldots, c_x, c_y, c_z, \ldots$$

choisies de telle façon, que, dans l'ensemble des ordres $0, 1, 2, \ldots, K$, *les dérivées de* $u, v, w, \ldots$ *aient des cotes toutes distinctes entre elles.*

Il suffit pour cela que, la dernière des quantités $c_x, c_y, c_z, \ldots$ étant supposée positive, on ait les relations

$$c_x > Kc_y, \; c_y > Kc_z, \; \ldots,$$

$$c_u > c_v + Kc_x, \; c_v > c_w + Kc_x, \; \ldots.$$

Considérons en effet deux dérivées pour chacune desquelles l'ordre total, positif ou nul, soit au plus égal à K, et supposons d'abord qu'elles

[1] Voir à ce sujet les Annales de l'Ecole Normale, juin 1893, p. 171 et suivantes; ou les Acta mathematica, t. 23, p. 289 et suivantes.

appartiennent à la même fonction. En pareil cas, la différence de leurs cotes est visiblement

$$(\alpha-\alpha')c_x+(\beta-\beta')c_y+(\gamma-\gamma')c_z+\dots, \tag{18}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$ désignent les ordres partiels respectifs en $x, y, z, \dots$ des deux dérivées considérées; d'ailleurs les quantités $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, ... ne sont pas toutes nulles, et l'on peut toujours supposer, en renversant, s'il le faut, le sens de la différence (18), que la première d'entre elles qui ne s'annule pas est positive. Si l'on a $\alpha-\alpha'>0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_x-(\beta' c_y+\gamma' c_z+\dots),$$

à plus forte raison à

$$c_x-(\beta'+\gamma'+\dots)c_y,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_y, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Si l'on a $\alpha-\alpha'=0$, $\beta-\beta'>0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_y-(\gamma' c_z+\dots),$$

à plus forte raison à

$$c_y-(\gamma'+\dots)c_z,$$

différence encore positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_z, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Et ainsi de suite.

Supposons maintenant que les deux dérivées considérées appartiennent à deux fonctions distinctes. En nommant c et c' les cotes respectives, nécessairement inégales, de ces deux fonctions, et $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$ les ordres partiels respectifs des deux dérivées par rapport à $x, y, z, \dots$, les cotes de ces dernières auront pour différence

$$c-c'+(\alpha-\alpha')c_x+(\beta-\beta')c_y+(\gamma-\gamma')c_z+\dots.$$

Or, si l'on suppose $c-c'>0$, ce qui est évidemment permis, l'expression précédente est au moins égale à

$$(c-c')-(\alpha' c_x+\beta' c_y+\gamma' c_z+\dots),$$

à plus forte raison à

$$(c - c') - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots)c_x,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_x, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité.

VII. Supposons actuellement que les variables $x, y, z, \ldots$ et les fonctions $u, v, w, \ldots$ aient été affectées chacune de p cotes, conformément aux indications données dans un Mémoire antérieur; considérons alors certaines dérivées, d'ordre positif ou nul, et en nombre limité, de ces fonctions; partageons-les en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leur cotes premières, puis les dérivées de chaque groupe en sous-groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes secondes, puis à leur tour les dérivées de chaque sous-groupe en sous-groupes partiels successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes troisièmes, et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. De cette opération résultera finalement une suite de groupes.

Cela étant, si quelqu'un des groupes définitifs ainsi obtenus contient plus d'un terme, on peut toujours, puisque l'ordre maximum des dérivées considérées est, d'après notre hypothèse même, essentiellement fini, attribuer à chacune des variables et des inconnues une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ telle, que toutes les dérivées considérées, et à plus forte raison celles d'entre elles qui appartiennent à un même groupe, aient des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes distinctes entre elles (IV); on pourra alors, *sans modifier l'ordre relatif des groupes*, fractionner chacun d'eux d'après les valeurs décroissantes des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ de ses termes. Les dérivées considérées (d'ordre positif ou nul) se trouveront donc, en définitive, rangées dans un ordre tel, *que chacune d'elles soit normale par rapport à toutes les quantités situées à sa gauche:* nous exprimerons cette dernière propriété en disant qu'elles sont *normalement solées*.

VIII. Ces préliminaires posés, désignons par A le système différentiel donné, que nous nous proposons de réduire à une forme explicite passive.

Nous commencerons par attribuer aux variables et aux inconnues qui s'y trouvent engagées des *cotes premières* assujetties à la seule restriction que celles des variables indépendantes soient toutes positives. Puis, désignant par γ la plus petite des cotes premières attribuées aux inconnues, et considérant l'ensemble formé par les dérivées, d'ordres positifs ou nuls, de ces inconnues, nous supposerons écrit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, d'abord l'ensemble de toutes les dérivées (d'ordre évidemment égal à zéro) dont la cote première est γ, puis à gauche de celui-ci l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma + 1$, puis à gauche de ce dernier l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma + 2$, et ainsi de suite indéfiniment. Cela posé, soit Γ la cote première maxima des dérivées (d'ordre positif ou nul) qui figurent *effectivement* dans A, et $[\Gamma]$ la portion de la suite précédente formée par les diverses dérivées dont la cote première ne surpasse pas Γ: en attribuant, s'il le faut, aux variables et aux inconnues des cotes secondes convenablement choisies, nous isolerons normalement, sans modifier l'ordre relatif des groupes composants (VII), les termes de la suite limitée $[\Gamma]$; nous chercherons alors quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure *effectivement* dans les équations du système, puis, résolvant par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système, B, contenant une équation de moins que le proposé, et où ne figure plus la quantité éliminée, ni aucune des quantités situées à sa gauche dans la suite $[\Gamma]$. Nous considérerons, parmi les quantités restantes de cette suite, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent *effectivement* dans B, nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de B où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. Si ce calcul de résolutions successives ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait analytiquement impossible, il nous conduira à un système $\mathfrak{H}$, composé de relations toutes normales.

Cela étant, le système $\mathfrak{H}$ sera, conformément à l'alinéa IV, remplacé par un système composé de relations en même nombre et ayant respectivement les mêmes premiers membres, mais dont les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le soient aussi de toute quantité principale. Dans ce dernier système, les inconnues pourront se partager en deux groupes, σ, τ, et les équations en trois groupes, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, satisfaisant aux conditions suivantes: le groupe $\mathfrak{s}$ aura pour premiers membres les inconnues σ, le groupe $\mathfrak{S}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des mêmes inconnues σ, et le groupe (orthoïque) $\mathfrak{T}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des inconnues τ; quant aux seconds membres de toutes ces équations, ils ne contiendront, avec les variables indépendantes, que des dérivées paramétriques, d'ordre positif ou nul, des inconnues τ. On éliminera alors du groupe $\mathfrak{S}$, à l'aide des équations $\mathfrak{s}$ différentiées, les dérivées des inconnues σ, puis du groupe résultant, à l'aide des équations $\mathfrak{T}$, les premiers membres de ces équations mêmes; le groupe $\mathfrak{S}$ se trouvera ainsi transformé en un groupe A_1, indépendant des inconnues σ et de leurs dérivées, et ne contenant, parmi les inconnues τ et leurs dérivées, aucune quantité dont la cote première surpasse Γ, ni aucun des premiers membres de $\mathfrak{T}$. Sur le système A_1 on opérera des résolutions successives, comme on l'a fait sur le système A, et, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, les formules de résolution successive seront adjointes à $\mathfrak{T}$; de cette adjonction résultera un système $\mathfrak{A}_1$, composé de relations toutes normales, et où ne se trouvent engagées que les inconnues τ.

Sur le système $\mathfrak{A}_1$ on opérera comme on vient de le faire sur le système $\mathfrak{A}$, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par une suite de groupes, dont le dernier sera orthoïque, tandis que tous les précédents auront leurs premiers membres finis. Cet ensemble de formules, toutes normales, fournira, moyennant application de l'alinéa IV, un système composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque $\mathfrak{O}$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° un groupe $\mathfrak{f}$, exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{O}$, et des dérivées paramétriques de celles-ci.

Si le groupe orthoïque $\mathfrak{O}$ est passif, il est clair que le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O})$, auquel on a réduit le proposé, a une forme explicite passive. Si le groupe $\mathfrak{O}$ n'est point passif, on observera que ses conditions sélectives de passivité, P, constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire (9). Deux cas peuvent alors se présenter, suivant que la cote première maxima des quantités (inconnues ou dérivées) figurant *effectivement* dans les relations P ne surpasse pas l'entier Γ, ou qu'elle le surpasse. Dans le premier cas, les quantités (inconnues ou dérivées) figurant *effectivement* dans le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{G}, P)$ sont toutes contenues dans la suite $[\Gamma]$, dont les termes se trouvent déjà normalement isolés à l'aide des cotes antérieurement attribuées aux variables et aux inconnues. Dans le second cas, en désignant par Γ' un certain entier supérieur à Γ, ces mêmes quantités sont toutes contenues, non plus dans la suite $[\Gamma]$, mais dans la suite analogue et plus étendue $[\Gamma']$, et *il peut arriver* que, dans la portion de cette suite située à gauche de $[\Gamma]$, la considération des cotes antérieures ne suffise pas à isoler normalement les dérivées: mais alors, en adjoignant aux cotes antérieures de chaque variable ou inconnue une cote nouvelle convenablement choisie, on pourra faire en sorte que l'isolement, déjà réalisé dans la portion $[\Gamma]$ de la suite $[\Gamma']$, le soit en outre dans la portion restante. Quelle que soit donc l'occurrence qui se présente, en désignant par Γ' un certain entier supérieur ou égal à Γ, et adjoignant au besoin des cotes supplémentaires à celles qui existent déjà, on pourra, sans déranger l'ordre déjà adopté pour les termes de $[\Gamma]$, écrire les termes de la suite $[\Gamma']$, qui comprend $[\Gamma]$, dans un ordre tel, que chacune des quantités qu'elle contient soit normale par rapport à toutes celles qui se trouvent à sa gauche. Cela posé, on considérera le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{G}, P)$, et on recommencera sur lui la suite des opérations précédemment exécutées sur le système donné A, avec cette seule différence que les résolutions successives du début se trouveront simplifiées, et que, par suite de la nature normale des relations $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{G}$, elles devront être exécutées seulement sur le groupe P. Cette suite d'opérations conduira, sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, à remplacer le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{G}, P)$ par un autre composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque $\mathfrak{G}'$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système $\mathfrak{G}$; 2° un groupe $\mathfrak{f}'$, exprimant les inconnues restantes du système $\mathfrak{G}$ et les premiers membres de $\mathfrak{f}$ à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{G}'$, et des dérivées paramétriques de celles-ci. Si le groupe orthoïque $\mathfrak{G}'$ est passif, le système $(\mathfrak{f}', \mathfrak{G}')$, auquel se trouve ramené le proposé, a une forme explicite passive. Dans le cas contraire, on opérera sur lui comme on l'a fait précédemment sur $(\mathfrak{f}, \mathfrak{G})$. Et ainsi de suite.

Or, il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément: soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, indiquant l'impossibilité analytique; soit à une forme explicite passive contenant, avec un groupe orthoïque, des formules où figurent, comme premiers membres, les inconnues non engagées dans le groupe orthoïque. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, la suite

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}), (\mathfrak{f}', \mathfrak{O}'), \ldots$$

serait *illimitée*, et les groupes orthoïques $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}', \ldots$ rempliraient, *à partir d'un rang suffisamment éloigné*, la double condition suivante: 1° ils impliqueraient tous les mêmes fonctions inconnues; 2° en considérant deux groupes orthoïques consécutifs, $\mathfrak{O}^{(k)}$, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, les équations du second, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, seraient en nombre supérieur à celles du premier, $\mathfrak{O}^{(k)}$, et auraient pour premiers membres: d'une part les premiers membres de $\mathfrak{O}^{(k)}$, d'autre part certaines dérivées paramétriques de $\mathfrak{O}^{(k)}$. En vertu de V, toutes les dérivées d'ordre positif des inconnues impliquées dans les groupes orthoïques finiraient donc par devenir principales, et les conditions sélectives de passivité ne fourniraient plus alors que des relations d'ordre zéro; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, soit à une diminution du nombre des inconnues engagées dans les groupes orthoïques.

Finalement donc, et sauf le cas d'impossibilité, le système proposé se trouve remplacé par un système explicite passif composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe *orthoïque* passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées paramétriques de celles-ci. D'ailleurs, ainsi qu'il résulte des alinéas I, II, III et IV, toutes les opérations successivement effectuées sur le système primitif sont de nature telle, que *le système final prolongé équivaut numériquement au système primitif prolongé;* et cette équivalence numérique entre les systèmes prolongés entraîne, comme nous l'avons fait observer, l'équivalence analytique entre les systèmes eux-mêmes.

Dans la réduction précédente, les cotes premières des variables indépendantes ont été assujetties à la seule condition d'être toutes positives: si on les assujettit en outre à la condition d'être toutes égales, le groupe orthoïque qui entre dans la composition du système final sera *orthonome*, et le système proposé se trouvera réduit à une forme monoïque complètement intégrable.

15. Nous venons d'exposer, dans le numéro précédent, un mode très-général de réduction à la forme explicite passive: on peut aisément, comme nous allons le voir, en imaginer un plus général encore.

I. *Etant donné un système (limité) Σ tel, que Σ prolongé soit numériquement possible, l'application au système Σ de la méthode exposée au numéro précédent ne peut conduire à une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, et, par suite, si l'on attribue à celles-ci des cotes premières toutes égales entre elles, conduit forcément à quelque système complètement intégrable.*

Effectivement, une semblable relation,

$$F(x, y, \ldots) = 0, \tag{19}$$

où le premier membre n'est pas identiquement nul, ferait partie d'un système Ψ jouissant de cette propriété, que Ψ prolongé équivaudrait numériquement à Σ prolongé, et, par suite, que Ψ prolongé serait numériquement possible. Or, si l'équation (19) et toutes celles qui s'en déduisent par différentiations étaient numériquement vérifiées par quelque système de valeurs particulières de $x, y, \ldots$, la fonction $F(x, y, \ldots)$ serait identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. *Si, par rapport à un système explicite passif S, on considère un ensemble limité, Δ, de quantités paramétriques, le système S admet certainement quelque solution analytique telle, que, pour des valeurs numériques données des variables $x, y, \ldots$, les quantités dont il s'agit prennent des valeurs numériques données.*

Effectivement, puisque le système S est passif, le système S prolongé admet quelque solution numérique où $x, y, \ldots$ et les quantités de l'ensemble Δ possèdent les valeurs choisies. Si cette solution numérique donne lieu à des développements tous convergents, la proposition est démontrée (3). Il reste à examiner le cas où la solution dont il s'agit donne lieu à des développements qui ne le sont pas tous.

Observons à cet effet qu'en vertu de la possibilité numérique du système S prolongé, l'application au système S de la méthode exposée au numéro précédent conduit forcément, si l'on attribue aux diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, à un système S' complètement intégrable, tel d'ailleurs, que S' prolongé équivaille numériquement à S prolongé (I). Pour simplifier, nous supposerons que, dans la formation du système S', les cotes premières de toutes les fonctions inconnues ont été choisies aussi égales entre elles, circonstance d'où résulte, notamment, que chaque relation ultime de S' est, à cause de sa nature normale, d'ordre exactement égal à celui de son premier membre.

Cela posé, désignons par K l'ordre maximum des quantités paramétriques figurant dans l'ensemble Δ, et par $\mathfrak{U}'_K$ l'ensemble, essentiellement limité, des relations ultimes d'ordre inférieur ou égal à K du système S'. La solution numérique, ci-dessus considérée, du système S prolongé vérifie aussi le système S' prolongé, qui lui équivaut numériquement; elle vérifie, par suite, les relations $\mathfrak{U}'_K$. Considérons maintenant, dans S' prolongé, une solution numérique auxiliaire déterminée par les conditions suivantes: 1° que $x, y, \ldots$ et toutes les quantités paramétriques de S' d'ordre inférieur ou égal à K y aient respectivement les mêmes valeurs que dans la solution précédente; 2° que les quantités paramétriques de S' d'ordre supérieur à K, s'il en existe, aient des valeurs toutes nulles. En vertu des formules $\mathfrak{U}'_K$, les quantités principales de S' d'ordre inférieur ou égal à K auront aussi, dans la solution numérique auxiliaire, les mêmes valeurs que dans la première. Cela étant, puisque les quantités paramétriques d'ordre inférieur ou égal à K sont en nombre essentiellement limité, la solution numérique auxiliaire donnera lieu, dans le système S', à des déterminations initiales convergentes, et par suite, puisque le système S' est complètement intégrable, à des développements tous convergents; elle vérifie d'ailleurs, en vertu de l'équivalence numérique, le système S prolongé, et, par suite, fournit une solution analytique du système S. Le système S admet donc une solution analytique telle, que, pour les valeurs de $x, y, \ldots$ figurant dans la première solution numérique, les fonctions inconnues et toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à K prennent les valeurs respectives figurant dans cette même solution; telle, par conséquent, que, pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités de l'ensemble Δ prennent respectivement les valeurs données.

III. Considérons un système différentiel (S_1, S_2), et supposons: d'une part, que le groupe S_2, où se trouvent engagées une partie seulement des inconnues, ait une forme explicite; d'autre part, que le groupe S_1, si l'on y considère comme données les inconnues dont il s'agit, ait lui-même, par rapport aux inconnues restantes, une forme explicite. Soit s_2 le groupe des inconnues engagées dans S_2; s_1 le groupe des inconnues restantes. Des seconds membres de S_1 éliminons, à l'aide des relations ultimes de S_2, toutes les quantités qui sont principales par rapport à S_2, et désignons par R_1 le groupe résultant.

Cela étant, *pour que le système* (R_1, S_2), *évidemment explicite par rapport à l'ensemble de toutes les inconnues* s_1, s_2, *soit passif, il faut et il suffit: 1° que le groupe* S_2 *(aux seules inconnues* s_2*) soit passif; 2° que la substitution aux inconnues* s_2 *d'intégrales quelconques de* S_2 *transforme le groupe* S_1 *en un système passif* $\mathfrak{S}_1$ *(aux seules inconnues* s_1*).*

A. En se reportant à la définition de la passivité, on peut dire d'une manière générale que, pour qu'un système explicite soit passif, il faut et il suffit que le système prolongé soit numériquement possible, quelques valeurs que l'on attribue, d'une part aux variables indépendantes $x, y, \ldots$, d'autre part aux quantités paramétriques du système.

D'après cela, pour que (R_1, S_2) soit passif, il faut et il suffit que (R_1, S_2) prolongé, ou, ce qui revient au même, que (S_1, S_2) prolongé soit numériquement possible dans les conditions ci-dessus indiquées.

Pour cette possibilité numérique, il est d'ailleurs nécessaire et suffisant: 1° que le système S_2 soit passif; 2° que les conditions brutes de passivité (9) du système S_1, considéré isolément, soient conséquences numériques des relations ultimes de S_2. On le voit immédiatement en substituant au système (S_1, S_2) prolongé le système, numériquement équivalent, qui comprend, d'une part les relations ultimes de S_2, d'autre part celles de S_1 considéré isolément.

B. Pour former les conditions brutes de passivité du système $\mathfrak{S}_1$, déduit, comme on sait, du système S_1 par la substitution aux inconnues s_2 d'un groupe d'intégrales du système S_2, on peut, comme nous allons le voir, former d'abord celles du système S_1, en éliminer, à l'aide des relations ultimes de S_2, toutes les quantités qui sont principales par rapport au système S_2, et, finalement, substituer aux inconnues s_2 les intégrales dont il s'agit.

On peut en effet, pour former les conditions brutes de passivité du système $\mathfrak{S}_1$, former d'abord celles de S_1, et y substituer ensuite aux inconnues s_2 les intégrales considérées de S_2; d'ailleurs, puisque ces dernières vérifient, quels que soient $x, y, \ldots$, toutes les relations ultimes de S_2, on ne changera rien au résultat, si, préalablement à cette substitution, on remplace, dans les conditions brutes de passivité de S_1, toutes les quantités principales de S_2 par des expressions tirées de relations ultimes de S_2.

C. Revenons maintenant à la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent alinéa III.

Si le système (R_1, S_2) est passif, il résulte de ***A***: 1° que le système S_2 possède lui-même cette propriété; 2° que si, dans les conditions brutes de passivité du système S_1, considéré isolément, on remplace par leurs expressions tirées des relations ultimes de S_2 toutes les quantités qui sont principales par rapport à S_2, on tombe sur des relations identiquement vérifiées. Donc les conditions brutes de passivité du système $\mathbb{S}_1$, qui, en vertu de ***B***, se déduisent des relations précédentes par la substitution aux inconnues s_2 d'un groupe d'intégrales de S_2, seront elles-mêmes identiquement vérifiées.

Il en résulte que les conditions posées sont nécessaires.

Je dis qu'elles sont suffisantes, c'est à dire (***A***) que, si on les suppose satisfaites, le système (S_1, S_2) prolongé est numériquement possible, quelques valeurs que l'on attribue, d'une part aux variables $x, y, \ldots$, d'autre part aux quantités paramétriques du système. Au système (S_1, S_2) prolongé substituons en effet, comme l'équivalence numérique nous en donne le droit, le système illimité comprenant: 1° les relations ultimes de S_2; 2° celles du système S_1, considéré isolément. Les relations ultimes du système passif S_2 sont numériquement possibles pour les valeurs données de $x, y, \ldots$ et des quantités paramétriques de ce même système, et elles fournissent alors, pour les quantités principales, un système déterminé et unique de valeurs. Tout revient donc à prouver que les relations ultimes du système S_1 isolé sont numériquement possibles, lorsqu'on y attribue: 1° aux variables $x, y, \ldots$ et aux quantités paramétriques du système S_2 les valeurs données; 2° aux quantités principales du système S_2 les valeurs déduites des précédentes; 3° aux quantités paramétriques du système S_1, considéré par rapport aux seules inconnues s_1, les valeurs données. Et pour cela, il suffit évidemment d'établir que le groupe limité Ω_1, formé par les diverses relations ultimes de S_1 qui ont pour premier membre une même dérivée principale quelconque, est numériquement possible dans les conditions que nous venons d'indiquer.

A cet effet, désignons par K_1 l'ordre maximum des relations Ω_1 relativement à l'ensemble des inconnues s_1, s_2, par Ψ_2 le groupe limité que forment, dans le système S_2, les relations ultimes ayant pour premiers membres les quantités principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$, et enfin par K_2 l'ordre maximum des relations Ψ_2 ($K_2 \geqq K_1$). En vertu de l'alinéa II, le système passif S_2 admet quelque solution analytique, $\mathfrak{J}_2$, telle, que pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_2$ de ce même système prennent les valeurs données. Cela étant, si, dans la système S_1, on substitue aux inconnues s_2 les intégrales $\mathfrak{J}_2$, on tombe, en vertu même de nos hypothèses, sur un système passif $\mathfrak{S}_1$; et, pour la raison déjà invoquée, ce dernier système admet quelque solution analytique, $\mathfrak{J}_1$, telle, que pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$ de ce même système prennent les valeurs données. En conséquence, les formules ultimes du système S_2, et en particulier les relations du groupe limité Ψ_2, se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_2 et leurs dérivées de tous ordres par les valeurs correspondantes des intégrales $\mathfrak{J}_2$ et de leurs dérivées semblables. De même, les formules ultimes du système $\mathfrak{S}_1$ se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_1 et leurs dérivées de tous ordres par les valeurs correspondantes des intégrales $\mathfrak{J}_1$ et de leurs dérivées semblables; et il en résulte évidemment que les formules ultimes du système S_1, en particulier les relations du groupe limité Ω_1, se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_1, les inconnues s_2, et leurs dérivées de tous ordres, par les valeurs correspondantes des fonctions $\mathfrak{J}_1$, des fonctions $\mathfrak{J}_2$, et de leurs dérivées semblables. Si l'on observe maintenant que les relations Ψ_2 sont d'ordre au plus égal à K_2, qu'elles ont pour premiers membres les diverses quantités principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$ ($K_1 \leqq K_2$) du système S_2, et que les relations Ω_1 sont elles-mêmes d'ordre au plus égal à K_1; si d'un autre côté on a égard aux conditions initiales successivement choisies pour les intégrales $\mathfrak{J}_2$ et $\mathfrak{J}_1$: on se convaincra sans peine que les relations Ω_1 sont numériquement possibles dans les conditions indiquées plus haut.

IV. Nous pouvons aborder maintenant le mode de réduction plus général auquel il a été fait allusion au début du présent numéro.

Considérons un système différentiel (limité) quelconque $\Sigma^{(1)}$, et partageons-y arbitrairement les inconnues en ensembles successifs

$$s_1, s_2, \ldots, s_g.$$

Dans le système $\Sigma^{(1)}$, ne prenons actuellement que les équations où figurent *effectivement* les inconnues de l'ensemble s_1 ou leurs dérivées, et traitons ce système partiel, Φ_1, comme si les seules inconnues y étaient s_1, *en considérant pour un instant les inconnues des ensembles* $s_2, \ldots, s_g$ *comme des fonctions données*. En lui appliquant la méthode exposée au numéro 14, on lui substituera (sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique ne contenant aucune des inconnues $s_1, s_2, \ldots, s_g$ ni aucune de leurs dérivées, et subsistant entre les seules variables indépendantes $x, y, \ldots$) un système explicite, S_1, composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque, S_1'', où se trouvent engagées certaines inconnues, s_1'', de l'ensemble s_1, et dont les conditions sélectives de passivité (11) ne contiennent aucune des inconnues s_1 ni aucune de leurs dérivées; 2° un groupe S_1' de relations exprimant les inconnues restantes s_1' de l'ensemble s_1 à l'aide des variables $x, y, \ldots$, des inconnues s_1'' et de leurs dérivées paramétriques (il va sans dire que dans les seconds membres de S_1' et S_1'' figurent en outre les inconnues $s_2, \ldots, s_g$ et leurs dérivées).

Outre les équations Φ_1, le système $\Sigma^{(1)}$ en contenait d'autres où ne se trouvaient pas engagées les inconnues s_1; à ces équations on adjoindra les conditions sélectives de passivité du groupe orthoïque S_1'', ainsi que toutes les relations indépendantes des inconnues s_1 que l'on a pu être conduit à écrire dans la phase précédente du calcul. De cette adjonction résulte un système $\Sigma^{(2)}$, où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_2, \ldots, s_g.$$

Dans le système $\Sigma^{(2)}$, ne prenons actuellement que les équations où figurent *effectivement* les inconnues s_2 ou leurs dérivées, et traitons ce système partiel, Φ_2, comme si les seules inconnues y étaient s_2, *en considérant pour un instant les inconnues des ensembles* $s_3, \ldots, s_g$ *comme des fonctions données*. En lui appliquant la méthode exposée au n° 14, on lui substituera (sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique ne contenant aucune des inconnues $s_2, s_3, \ldots, s_g$ ni aucune de leurs dérivées, et subsistant entre les seules variables indépendantes $x, y, \ldots$) un système explicite, S_2, composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque, S_2'', où se trouvent engagées certaines inconnues, s_2'', de l'ensemble s_2, et dont les conditions sélectives de passivité ne contiennent aucune des inconnues s_2 ni aucune de leurs dérivées; 2° un groupe S_2' de relations exprimant les inconnues restantes, s_2', de l'ensemble s_2, à l'aide des variables $x, y, \ldots,$ des inconnues s_2'' et de leurs dérivées paramétriques (il va sans dire que dans les seconds membres de S_2' et S_2'' figurent en outre les inconnues $s_3, \ldots, s_g$ et leurs dérivées).

Outre les équations Φ_2, le système $\Sigma^{(2)}$ en contenait d'autres où ne se trouvaient pas engagées les inconnues s_2; à ces équations on adjoindra les conditions sélectives de passivité du groupe orthoïque S_2'', ainsi que toutes les relations indépendantes des inconnues s_2 qu'on a pu être conduit à écrire dans la phase précédente du calcul. De cette adjonction résulte un système $\Sigma^{(3)}$, où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_3, \ldots, s_g.$$

Sur le système $\Sigma^{(3)}$ on opérera comme on l'a déjà fait sur $\Sigma^{(1)}$ et $\Sigma^{(2)}$, et ainsi de suite.

Finalement, et sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots,$ le système proposé se trouvera remplacé par

$$\overbrace{S_1', S_1''}^{S_1}, \overbrace{S_2', S_2''}^{S_2}, \ldots, \overbrace{S_g', S_g''}^{S_g}.$$

Dans ce dernier système, le groupe S_k ou (S_k', S_k'')

$$(k = 1, 2, \ldots, g),$$

où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_g,$$

est explicite lorsqu'on l'envisage par rapport aux seules inconnues s_k, et il est tel, en outre, que la simple substitution aux inconnues

$$s_{k+1}, \ldots, s_g$$

d'intégrales quelconques du système

$$S_{k+1}, \ldots, S_g$$

le transforme en un système passif. En particulier, le dernier groupe S_g, où se trouvent engagées les seules inconnues s_g, est explicite et passif.

D'après cela, si l'on élimine successivement des seconds membres de S_{g-1} toutes les quantités qui sont principales par rapport au groupe S_g, puis des seconds membres de S_{g-2} toutes celles qui sont principales par rapport au groupe (S_{g-1}, S_g), etc., et finalement des seconds membres de S_1 toutes celles qui sont principales par rapport au groupe $(S_2, \ldots, S_g)$, il résulte de l'alinéa précédent III que l'on tombe sur un système explicite passif

$$\overbrace{T'_1, T''_1}^{T_1}, \overbrace{T'_2, T''_2}^{T_2}, \ldots, \overbrace{T'_g, T''_g}^{T_g}.$$

Dans ce système, les équations $T'_1, T'_2, \ldots, T'_g$ ont pour premiers membres les inconnues des ensembles respectifs $s'_1, s'_2, \ldots, s'_g$, et les équations T''_1, $T''_2, \ldots, T''_g$ sont entièrement indépendantes des inconnues dont il s'agit et de leurs dérivées: si donc des équations $T'_1, T'_2, \ldots, T'_g$ on forme un groupe unique T', le système

$$T', T''_1, T''_2, \ldots, T''_g,$$

formé de $g + 1$ groupes successifs, sera polyorthoïque et passif.

16. Nous terminerons cette deuxième Partie par l'exposé des deux propriétés générales suivantes:

I. *Pour qu'un système différentiel (limité) Σ soit analytiquement possible, il faut et il suffit que le système Σ prolongé soit numériquement possible.*

De ce que nous avons dit au n° 3, il résulte déjà que la condition est nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante: car, en la supposant remplie, l'application au système Σ de la méthode exposée au n° 14 conduit forcément, si l'on attribue aux variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, à un système complètement intégrable (15, I) et analytiquement équivalent à Σ (14).

II. *Pour que deux systèmes différentiels (limités), Σ, Σ', soient analytiquement équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes*

$$\Sigma \text{ prolongé}, \ \Sigma' \text{ prolongé}$$

soient numériquement équivalents.

Nous avons déjà vu, au début du n° 14, que la condition est suffisante.

Elle est d'ailleurs nécessaire.

Effectivement, si Σ et Σ' sont analytiquement impossibles, Σ prolongé et Σ' prolongé sont numériquement impossibles (I), et par suite numériquement équivalents.

Supposons Σ et Σ' analytiquement possibles et équivalents: je dis que toute solution numérique de Σ prolongé est aussi une solution numérique de Σ' prolongé. Appliquons en effet au système Σ la méthode exposée au n° 14, en attribuant aux diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, et en même temps, pour simplifier, aux diverses fonctions inconnues des cotes premières toutes égales entre elles: nous tomberons ainsi sur un système complètement intégrable, S, où toute relation ultime sera, à cause de sa nature normale, d'ordre exactement égal à celui de son premier membre; les trois systèmes Σ, Σ', S seront analytiquement équivalents, les systèmes

$$\Sigma \text{ prolongé, } S \text{ prolongé}$$

numériquement équivalents (14), et, en conséquence, il nous suffira d'établir que toute solution numérique de S prolongé est également une solution numérique de Σ' prolongé. Prenons donc dans Σ' prolongé une relation quelconque σ', désignons par m son ordre, puis, à la solution numérique considérée de S prolongé substituons celle où les variables $x, y, \ldots$ et les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ du système S ont respectivement les mêmes valeurs, tandis que les quantités paramétriques des ordres supérieurs à m ont pour valeur commune zéro: les quantites principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ du système S conservent alors, elles aussi, en vertu des relations ultimes, les mêmes valeurs numériques, en sorte que la solution numérique primitivement considérée de S prolongé se trouve remplacée par une autre qui jouit des deux propriétés suivantes: 1° les variables $x, y, \ldots$ et toutes les quantités, principales et paramétriques, des ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ ont conservé respectivement les mêmes valeurs numériques; 2° la nouvelle solution numérique de S prolongé donne certainement lieu à des développements convergents, et fournit par suite une solution analytique de S. Cela étant, puisqu'elle fournit une solution analytique de S, elle en fournit une de Σ', analytiquement équivalent à S, donc elle vérifie numériquement Σ' prolongé; il en résulte que la solution numérique primitive vérifie, parmi les relations de Σ' prolongé, celles au moins dont l'ordre ne dépasse par m, et en particulier la relation σ', arbitrairement choisie dans Σ' prolongé.

Ainsi, nous avons prouvé que toute solution numérique de Σ prolongé est en même temps une solution numérique de Σ' prolongé; on prouverait de même la réciproque.

TROISIÈME PARTIE.

Propositions relatives au degré de généralité d'un système différentiel quelconque.

17. Nous nommerons *arbitraire de genre h* toute fonction arbitraire de h variables; les constantes arbitraires sont, d'après cette définition, des arbitraires de genre zéro.

Etant donné un système explicite S, représentons schématiquement, à l'aide des lettres $x_0, y_0, \ldots$, les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes $x, y, \ldots$, et, dans les déterminations initiales, relatives à $x_0, y_0, \ldots$, des intégrales hypothétiques du système, considérons tous les coefficients comme arbitraires: cela étant, la seule connaissance des premiers membres de S permet, comme je l'ai établi,[1] de représenter ces déterminations initiales schématiques par des sommes de termes, en nombre limité, dont chacun s'obtient en multipliant une fonction arbitraire de quelques-unes des variables $x, y, \ldots$ par un certain monome entier en $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$. Pour un même système explicite S, il existe presque toujours diverses manières de représenter, à l'aide de pareilles sommes, l'ensemble des déterminations initiales: considérant l'une quelconque des représentations dont il s'agit, nous désignerons d'une manière générale par λ le genre maximum des arbitraires qui y figurent, et par μ le nombre de celles dont le genre est λ.

---

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

Cela posé, il est facile de se convaincre que, *pour un même système explicite S, les nombres λ et μ gardent des valeurs constantes, quelque choix que l'on fasse parmi les représentations diverses dont nous venons de parler.*

Effectivement, dans l'une quelconque de ces représentations, la détermination initiale d'une inconnue quelconque, w, se trouve figurée, conformément à ce qui précède, par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(x - x_0)^a (y - y_0)^b \dots F, \tag{20}$$

$a, b, \dots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par g la somme $a + b + \dots$, par k un entier positif quelconque, et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'ordre inférieur ou égal à k sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur ou égal à $k - g$. D'après cela, pour obtenir le nombre P_k des dérivées paramétriques du système S dont l'ordre (positif ou nul) ne surpasse pas k, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $k - g$, ce qui donne,[1] en désignant par r le genre de l'arbitraire F,

$$\frac{(k - g + 1)(k - g + 2) \dots (k - g + r)}{1 . 2 \dots r}; \tag{21}$$

on répètera, pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, le calcul auquel donne lieu l'expression (20), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour w, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus. Il est essentiel de remarquer ici que l'expression (21) est un polynome entier en k ayant pour terme de degré maximum $\frac{k^r}{1 . 2 \dots r}$.

---

[1] On sait que le nombre des termes d'un polynome complet de degré q à h variables est donné par la formule

$$\frac{(q + 1)(q + 2) \dots (q + h)}{1 . 2 \dots h}.$$

Cela posé, considérons, dans le système S, deux représentations de l'ensemble des déterminations initiales schématiques, et désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement. On a nécessairement $\lambda' = \lambda''$: car autrement le nombre P_k serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de degrés différents. Et, cela étant, on ne peut manquer d'avoir aussi $\mu' = \mu''$: car autrement le nombre P_k serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de même degré, où les termes de degré maximum auraient des coefficients différents.

18. *Si l'on réduit à une forme monoïque passive* (10) (*avec ou sans changement des variables et des inconnues*) *un système différentiel donné quelconque non impossible, les nombres λ et μ, définis au numéro précédent, ont des valeurs indépendantes du mode de réduction adopté.*

Si, plus généralement, on réduit ce même système à une forme explicite passive, et qu'on désigne par L, M les valeurs constantes spécifiées dans la première partie de l'énoncé, on a nécessairement, ou bien

$$L - \lambda > 0,$$

ou bien

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu > 0,$$

ou bien enfin

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu = 0.$$

I. *On peut, sans restreindre la généralité de la définition des systèmes monoïques, supposer que les entiers positifs* (4), *assujettis par cette définition à être tous égaux, ont pour valeur commune l'unité.*

Considérant en effet un système monoïque quelconque, désignons, comme au n° 10, par c_u, c_v, ... les entiers (positifs, nuls ou négatifs) contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), et soient

c la valeur commune (positive) des entiers restants, c'est à dire des entiers (4);

c'_u le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c_u}{c}$;

c'_v le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c_v}{c}$;

etc. . . .

Je dis qu'en substituant aux entiers

(22) $$c_u\,,\ c_v\,,\ \ldots\,,\ c$$

les entiers respectifs

(23) $$c'_u\,,\ c'_v\,,\ \ldots\,,\ 1,$$

le système proposé ne cesse pas de satisfaire à la définition des systèmes monoïques. Pour l'établir, je considérerai deux quantités quelconques appartenant l'une et l'autre à l'ensemble que forment les inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, et je ferai voir que si l'arithme ancien de la deuxième quantité ne surpasse pas l'arithme ancien de la première, la même chose a lieu pour les arithmes nouveaux.

Nous avons en effet, entre les entiers (22) et (23), les relations

$$0 \leqq \frac{c_u}{c} - c'_u < 1, \qquad 0 \leqq \frac{c_v}{c} - c'_v < 1\,, \ \ldots .$$

Désignons maintenant par w_1 et w_2 deux quantités (distinctes ou non) prises dans le groupe $u\,, v\,, \ldots,$ et soient

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\beta_1+\cdots} w_1}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\beta_1}\ldots}\,,\ \frac{\partial^{\alpha_2+\beta_2+\cdots} w_2}{\partial x^{\alpha_2}\partial y^{\beta_2}\ldots}$$

deux dérivées (d'ordre positif ou nul) de ces quantités respectives. Il s'agit de faire voir qu'en supposant vérifiée la relation

(24) $$[c_{w_1} + (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots)c] - [c_{w_2} + (\alpha_2 + \beta_2 + \ldots)c] \geqq 0,$$

on a nécessairement aussi

(25) $$(c'_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c'_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq 0.$$

Or, la relation (24) peut s'écrire

$$\left(\frac{c_{w_1}}{c} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots\right) - \left(\frac{c_{w_2}}{c} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots\right) \geqq 0,$$

ou

$$(c'_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c'_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 \ldots) \geqq \left(\frac{c_{w_2}}{c} - c'_{w_2}\right) - \left(\frac{c_{w_1}}{c} - c'_{w_1}\right).$$

Chacune des parenthèses qui figurent au second membre de cette dernière relation étant non-négative et moindre que 1, leur différence est algébriquement supérieure à -1, et à plus forte raison le premier membre; d'ailleurs ce premier membre, étant un entier, ne peut être que supérieur ou égal à zéro, ce qu'exprime justement la relation (25).

Il est donc permis, dans un système monoïque, de supposer tous égaux à 1 les entiers (4): *c'est ce que nous ferons toujours dans la démonstration ci-après.*

II. Considérons un système différentiel explicite S, où se trouvent engagées certaines fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots,$ et que nous supposerons d'ailleurs de nature quelconque (monoïque ou non, arithmoïque ou non). Désignons, comme au n° 10, par $c_u, c_v, \ldots$ les entiers (positifs, nuls ou négatifs) contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), et attribuons aux entiers restants, c'est à dire aux entiers (4), la valeur commune 1. Parmi les quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas un entier donné C, les unes sont principales, les autres paramétriques, relativement au système S: cela étant, proposons-nous d'évaluer le nombre de celles qui sont paramétriques.

En désignant par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \ldots,$ la détermination initiale schématique de w dans le système S peut, comme on sait, se représenter par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(26) \qquad (x - x_0)^a (y - y_0)^b \ldots F,$$

$a, b, \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par g la somme $a + b + \ldots,$ et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'arithme inférieur ou égal à C sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur où égal à $C - c_w - g$. D'après cela, pour obtenir le nombre cherché, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $C - c_w - g$, ce qui donne, en dé signant par r le genre de l'arbitraire F,

$$(27) \qquad \frac{(C - c_w - g + 1)(C - c_w - g + 2)\dots(C - c_w - g + r)}{1 \cdot 2 \dots r};$$

on répètera, pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, le calcul auquel donne lieu l'expression (26), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour w, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus.

Observons que l'expression (27) est un polynome entier en C ayant pour terme de degré maximum $\frac{C^r}{1 \cdot 2 \dots r}$.

III. Supposons maintenant qu'un système différentiel quelconque (non impossible) ait été mis, sans changement des variables et des inconnues, d'abord sous une forme *monoïque passive* S', puis sous une forme *explicite passive* S''; et soient λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui correspondent respectivement à ces deux formes. Je dis qu'*on a nécessairement, ou bien*

$$\lambda' - \lambda'' > 0,$$

ou bien

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' > 0,$$

ou bien enfin

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

Convenons en effet, soit qu'il s'agisse de S', soit qu'il s'agisse de S'', d'évaluer l'arithme d'une quantité quelconque (inconnue ou dérivée) conformément aux mêmes conventions que dans le système monoïque S' (I). Soient en outre:

C un entier donné;

$\mathfrak{H}'$ le groupe illimité formé par les relations ultimes de S';

N'_C le nombre des quantités principales de S' dont l'arithme ne surpasse pas C, et $\mathfrak{H}'_C$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_C le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'arithme ne surpasse pas C;

$\mathfrak{H}''$, N''_C, $\mathfrak{H}''_C$, P''_C les objets analogues pour S''.

Le système S' étant monoïque, ses relations ultimes, à part un nombre limité d'entre elles, le sont toutes, et dès lors, à partir d'une valeur suffisamment grande de C, le groupe $\mathfrak{H}'_C$ ne contient *effectivement*, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas C. D'ailleurs, $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$ sont numériquement équivalents (5) (16, II); il en résulte que $\mathfrak{H}'_C$ est une conséquence numérique de $\mathfrak{H}''$, et, par suite, que les relations $\mathfrak{H}'_C$ se transforment en identités quand on y tient compte des relations $\mathfrak{H}''_C$. Les systèmes $\mathfrak{H}'_C$, $\mathfrak{H}''_C$ étant réduits, le nombre des relations $\mathfrak{H}'_C$ est donc au plus égal à celui des relations $\mathfrak{H}''_C$, et l'on a, à partir de C suffisamment grand,

$$N'_C \leqq N''_C;$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_C + P'_C = N''_C + P''_C,$$

il en résulte évidemment

$$P'_C \geqq P''_C.$$

Cela étant, on ne peut avoir $\lambda' < \lambda''$: car, s'il en était ainsi, les nombres P'_C et P''_C, évalués conformément aux indications de l'alinéa II, seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers en C dont le premier serait de degré inférieur au second; à partir de C suffisamment grand, on aurait donc, contrairement à ce qui précède,

$$P'_C < P''_C.$$

Je dis de plus que, dans l'hypothèse $\lambda' = \lambda''$, on ne peut avoir $\mu' < \mu''$: car, s'il en était ainsi, les nombres P'_C et P''_C seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers de même degré en C, et le coefficient du terme de degré maximum serait plus petit pour le premier polynome que pour le second, ce qui entraînerait encore, à partir de C suffisamment grand,

$$P'_C < P''_C.$$

IV. *Les nombres λ et μ gardent des valeurs constantes dans toutes les formes monoïques passives auxquelles on peut, sans changement des variables et des inconnues, réduire le système différentiel donné.*

Effectivement, supposons que les systèmes S' et S'', considérés à l'alinéa précédent, soient l'un et l'autre monoïques. Comme nous venons de le voir, on a nécessairement:

$$\text{ou bien} \quad \lambda' - \lambda'' > 0;$$
$$\text{ou bien} \quad \lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' > 0;$$
$$\text{ou bien} \quad \lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

En vertu du même raisonnement, fait en sens inverse, on a nécessairement aussi:

$$\text{ou bien} \quad \lambda'' - \lambda' > 0;$$
$$\text{ou bien} \quad \lambda'' - \lambda' = 0, \qquad \mu'' - \mu' > 0;$$
$$\text{ou bien} \quad \lambda'' - \lambda' = 0, \qquad \mu'' - \mu' = 0.$$

Or, ces deux conclusions ne sont conciliables que si l'on a

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

V. *Les valeurs constantes que gardent les nombres λ et μ dans les circonstances spécifiées à l'alinéa précédent* IV, *sont, en outre, indépendantes du changement des variables et des inconnues,* ce qui achève notre démonstration.

Ainsi que nous l'avons déjà fait observer (16, II), il existe toujours, pour un système différentiel donné (non impossible), quelque forme monoïque complètement intégrable, impliquant les mêmes variables et inconnues, et telle, que chaque relation ultime y soit d'ordre exactement égal à celui de son premier membre. Cela posé, considérons deux systèmes différentiels déduits l'un de l'autre par un changement quelconque des variables et des inconnues, et mettons chacun d'eux, comme il vient d'être dit, sous une forme monoïque complètement intégrable qui satisfasse à ces conditions. Je dis que les valeurs de λ et μ relatives à ces deux formes sont respectivement les mêmes.

Soient en effet:

S' et S'' les deux formes dont il s'agit;

λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement;

$\mathfrak{T}$ les formules de transformation;

k un entier positif quelconque;

N'_k le nombre des quantités principales de S' dont l'ordre ne surpasse pas k, et $\mathfrak{R}'_k$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_k le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'ordre ne surpasse pas k;

N''_k, $\mathfrak{U}''_k$, P''_k les objets analogues pour S''.

Il est clair que, dans chacun des groupes $\mathfrak{U}'_k$, $\mathfrak{U}''_k$, les relations sont d'ordre au plus égal à k.

Si l'on transforme maintenant l'une quelconque des relations $\mathfrak{U}'_k$ à l'aide des formules $\mathfrak{T}$, la relation résultante, vérifiée par toutes les intégrales du système S'', est une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''_k$, puisque les quantités paramétriques des ordres $0, 1, 2, \ldots, k$ du système complètement intégrable S'' sont susceptibles de prendre, avec $x, y, \ldots$, dans une solution analytique convenablement choisie de S'', des valeurs numériques données d'avance. Le groupe $(\mathfrak{U}'_k)$, transformé de $\mathfrak{U}'_k$, est donc une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''_k$; et, comme ces groupes sont réduits, on a nécessairement

$$N'_k \leqq N''_k;$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_k + P'_k = N''_k + P''_k,$$

il en résulte évidemment

$$P'_k \geqq P''_k.$$

En vertu du même raisonnement, fait en sens inverse, on aura d'autre part

$$P''_k \geqq P'_k.$$

Il en résulte, quel que soit k,

$$P'_k = P''_k.$$

On a nécessairement, dès lors, $\lambda' = \lambda''$: car autrement la valeur commune des entiers P'_k, P''_k, calculée conformément aux indications du n° 17, serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimée par deux polynomes entiers en k de degrés différents. Et, cela étant, on ne peut manquer d'avoir aussi $\mu' = \mu''$: car autrement, cette même valeur serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimée par deux polynomes entiers en k de même degré, où les termes de degré maximum auraient des coefficients différents.

19. Etant donnés deux systèmes explicites *passifs*, S', S'', désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement,

et convenons de dire que les formes passives S', S'' ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences

$$\lambda' - \lambda'' \,,\; \mu' - \mu''$$

s'annulent à la fois; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S' a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de S'', suivant que la première de ces deux différences qui ne s'annule pas est positive ou négative.

Il résulte immédiatement de cette convention que si l'on considère trois systèmes passifs S', S'', S''', dont le premier soit plus général que le second et le second plus général que le troisième, le premier ne peut manquer d'être plus général que le troisième. Désignons en effet par

$$\lambda', \mu' \,;\; \lambda'', \mu'' \,;\; \lambda''', \mu'''$$

les valeurs de λ, μ qui se rapportent respectivement aux trois systèmes, et écrivons en un tableau rectangulaire les différences

$$\begin{array}{ll} \lambda' - \lambda'' \,, & \mu' - \mu'' \,, \\ \lambda'' - \lambda''' \,, & \mu'' - \mu''' \,, \\ \lambda' - \lambda''' \,, & \mu' - \mu''' \,; \end{array}$$

dans ce tableau, le dernier nombre de chaque colonne verticale est la somme des deux nombres placés au dessus de lui; en conséquence, si chacune des deux premières lignes horizontales possède la double propriété:

1° que les deux différences qu'elle contient ne s'annulent pas à la fois,

2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive,

la troisième ligne horizontale ne pourra manquer d'en jouir aussi.

Cela étant, la proposition du numéro précédent peut s'exprimer plus brièvement en disant que, *parmi toutes les formes explicites passives sous lesquelles on peut mettre un système différentiel donné (non impossible), les formes monoïques passives présentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.*

20. Tout système explicite où les déterminations initiales schématiques des intégrales hypothétiques ne contiennent qu'un nombre limité d'arbitraires de genre zéro, sans aucune arbitraire de genre supérieur, est

forcément monoïque. En effet, le nombre des quantités paramétriques y étant essentiellement limité, il est clair qu'à partir de k suffisamment grand, toute expression ultime d'une dérivée principale d'ordre k ne contient, avec les variables $x, y, \ldots$, que des dérivées paramétriques dont l'ordre (positif ou nul) tombe au dessous de k; il suffit dès lors, pour se convaincre que la définition des systèmes monoïques est satisfaite, d'attribuer aux entiers $c_u, c_v, \ldots$, contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), la valeur commune zéro, et aux entiers restants du même tableau la valeur commune 1.

Tout système explicite passif ne dépendant que d'un nombre limité de constantes arbitraires est complètement intégrable: car, le nombre des quantités paramétriques y étant essentiellement limité, le système admet forcément, en vertu d'une proposition antérieurement démontrée (15, II), une solution analytique telle, que, pour des valeurs numériques données des variables $x, y, \ldots$, les quantités dont il s'agit prennent des valeurs numériques données.

21. *Si un système différentiel donné peut, de quelque manière, être réduit à une forme explicite passive ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, toutes les formes explicites passives du système en question sont monoïques et dépendent du même nombre de constantes.*

Soient S' et S'' deux formes explicites passives du système donné; λ' et λ'' les valeurs de λ qui s'y rapportent respectivement. Comme d'une part la nullité de λ dans une forme explicite entraîne la nature monoïque de cette forme (20), comme d'autre part toutes les formes monoïques passives d'un système donné possèdent le même degré de généralité (19), notre proposition revient à démontrer que l'hypothèse $\lambda' = 0$ entraîne, de toute nécessité, $\lambda'' = 0$.

I. Supposons en premier lieu qu'en passant de S' à S'' on conserve les mêmes variables et inconnues, et soient:

$\mathfrak{M}'$ le groupe illimité des relations ultimes de S';

k un entier positif quelconque;

N'_k le nombre des quantités principales de S' dont l'ordre ne surpasse pas k, et $\mathfrak{M}'_k$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_k le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'ordre ne surpasse pas k;

$\mathfrak{M}''$, N''_k, $\mathfrak{M}''_k$, P''_k les objets analogues pour S''.

Puisque, en vertu de l'hypothèse $\lambda' = 0$, les quantités paramétriques sont, dans S', en nombre essentiellement limité, le groupe $\mathfrak{M}'_k$ ne contient, à partir de k suffisamment grand, que les variables indépendantes et des quantités (inconnues ou dérivées) dont l'ordre ne surpasse pas k. D'ailleurs $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ sont numériquement équivalents (5) (16, II). Il en résulte que $\mathfrak{M}'_k$ est une conséquence numérique de $\mathfrak{M}''$, et, par suite, que les relations $\mathfrak{M}'_k$ se réduisent à des identités quand on y tient compte des relations $\mathfrak{M}''_k$. Comme les groupes $\mathfrak{M}'_k$, $\mathfrak{M}''_k$ sont l'un et l'autre réduits, le nombre des relations $\mathfrak{M}'_k$ est donc au plus égal à celui des relations $\mathfrak{M}''_k$, et l'on a, à partir de k suffisamment grand,

$$N'_k \leqq N''_k;$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_k + P'_k = N''_k + P''_k,$$

il en résulte évidemment

$$P'_k \geqq P''_k.$$

Cela étant, puisque P'_k garde, à partir de k suffisamment grand, une valeur constante, il en est de même de P''_k; donc $\lambda'' = 0$.

II. Supposons en second lieu que le passage de S' à S'' nécessite le changement des variables et des inconnues. Considérons alors successivement chacun de ces systèmes, et, conservant les variables et inconnues qui s'y trouvent engagées, mettons-le sous une forme monoïque complètement intégrable, telle, en outre, que chaque relation ultime y soit d'ordre exactement égal à celui de son premier membre (voir 16, II); nommons enfin S'_1 et S''_1 les systèmes ainsi obtenus, λ'_1 et λ''_1 les valeurs de λ qui s'y rapportent respectivement. Comme nous l'avons établi plus haut (18, V), les formes S'_1, S''_1 ont le même degré de généralité, d'où résulte $\lambda'_1 = \lambda''_1$. D'ailleurs, en vertu de l'alinéa précédent I, l'hypothèse $\lambda' = 0$ entraîne $\lambda'_1 = 0$, par suite $\lambda''_1 = 0$; et, pour la même raison, la relation $\lambda''_1 = 0$ entraîne à son tour $\lambda'' = 0$, ce qu'il s'agissait d'établir.

22. *Si l'on réduit à une forme arithmoïque passive un système diffé-*

rentiel donné quelconque (non impossible), le nombre λ y a toujours la même valeur que dans le cas plus particulier d'une forme monoïque passive (18); *mais il n'en est pas nécessairement de même du nombre μ, dont la valeur est, tantôt inférieure, tantôt égale, à celle qu'il possède dans le cas dont il s'agit.*

I. Considérons la relation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_hx_h \leqq m, \tag{28}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_h$ désignent des entiers donnés, tous positifs, m un entier donné, positif ou nul, $x_1, x_2, \ldots, x_h$ des *entiers inconnus* assujettis à être tous *positifs ou nuls;* et proposons-nous de rechercher une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des solutions qu'elle admet.

1°. Supposons d'abord que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_h$ soient tous égaux à 1. En pareil cas, on a facilement la valeur exacte du nombre des solutions dont il s'agit. Ce nombre est égal, en effet, à celui des termes d'un polynome entier de degré m à h variables, c'est-à-dire à

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)}{1.2\ldots h}.$$

2°. Supposons que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_h$ aient pour valeur commune a; la relation (28) peut alors s'écrire:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq \frac{m}{a}. \tag{29}$$

Si l'on désigne par e la partie entière du quotient de m par a, et que l'on considère les deux relations

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq e, \tag{30}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq e + 1, \tag{31}$$

il est clair que toute solution de (30) est une solution de (29), et que toute solution de (29) est une solution de (31). D'après cela, on aura évidemment pour limite inférieure

$$\frac{(e+1)(e+2)\ldots(e+h)}{1.2\ldots h},$$

et pour limite supérieure

$$\frac{(e+2)(e+3)\dots(e+h+1)}{1\,.\,2\dots h}.$$

A plus forte raison, à cause de la double relation

$$\frac{m}{a}-1<e\leqq\frac{m}{a},$$

on aura pour limite inférieure

$$\frac{\frac{m}{a}\left(\frac{m}{a}+1\right)\dots\left(\frac{m}{a}+h-1\right)}{1\,.\,2\dots h},$$

et pour limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{m}{a}+2\right)\left(\frac{m}{a}+3\right)\dots\left(\frac{m}{a}+h+1\right)}{1\,.\,2\dots h}.$$

3°. Examinons maintenant le cas général.

Désignons par b le plus petit des entiers $a_1, a_2, \dots, a_h$, par B le plus grand d'entre eux; puis, considérons, en même temps que la relation (28), les deux relations

$$(32)\qquad b(x_1+x_2+\dots+x_h)\leqq m,$$

$$(33)\qquad B(x_1+x_2+\dots+x_h)\leqq m.$$

Toute solution de (33) est une solution de (28), et toute solution de (28) est une solution de (32). Le nombre des solutions de (28) a donc pour limite inférieure celui des solutions de (33), et pour limite supérieure celui des solutions de (32); à plus forte raison, il a pour limite inférieure

$$\frac{\frac{m}{B}\left(\frac{m}{B}+1\right)\dots\left(\frac{m}{B}+h-1\right)}{1\,.\,2\dots h},$$

et pour limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{m}{b}+2\right)\left(\frac{m}{b}+3\right)\dots\left(\frac{m}{b}+h+1\right)}{1\,.\,2\dots h},$$

expressions qui toutes deux sont des polynomes entiers en m de degré h.

II. Soit S un système différentiel explicite, où se trouvent engagées certaines fonctions inconnues $u, v, \dots$ des variables indépendantes $x, y, \dots$, et que nous supposerons d'ailleurs de nature quelconque. Les mêmes notations étant adoptées et les mêmes conventions étant posées qu'au début du n° 10, désignons par C un entier quelconque, et considérons l'ensemble de toutes les quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas C; parmi ces dernières, les unes sont principales, et les autres paramétriques, relativement au système S: proposons-nous actuellement d'évaluer une limite supérieure et une limite inférieure du nombre de celles qui sont paramétriques.

En désignant par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \dots$, la détermination initiale schématique de w dans le système S peut, comme on sait, se représenter par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(x - x_0)^a (y - y_0)^b \dots F, \tag{34}$$

$a, b, \dots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par i la somme

$$c_w + a c_{w,x} + b c_{w,y} + \dots,$$

et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'arithme inférieur ou égal à C sont évidemment ceux où, en multipliant les exposants de $x - x_0, y - y_0, \dots$ par les entiers respectifs $c_{w,x}, c_{w,y}, \dots$ et ajoutant les produits, on obtient un résultat inférieur ou égal à $C - i$. Evaluons donc, dans F développé, une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des termes dont il s'agit: en désignant par γ le plus petit des entiers positifs $c_{w,x}, c_{w,y}, \dots$, par Γ le plus grand, et par r le genre de l'arbitraire F, nous avons (I) comme limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{C-i}{\gamma} + 2\right)\left(\frac{C-i}{\gamma} + 3\right)\dots\left(\frac{C-i}{\gamma} + r + 1\right)}{1 \,.\, 2 \dots r},$$

et comme limite inférieure

$$\frac{\frac{C-i}{\Gamma}\left(\frac{C-i}{\Gamma} + 1\right)\dots\left(\frac{C-i}{\Gamma} + r - 1\right)}{1 \,.\, 2 \dots r}.$$

Pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, on répètera le calcul auquel donne lieu l'expression (34); on opérera pour chacune des inconnues $u, v, \ldots$ comme il vient d'être dit pour w; finalement, on ajoutera toutes les limites supérieures trouvées, et de même toutes les limites inférieures.

III. Supposons maintenant qu'un système différentiel (non impossible) ait été mis sous une forme arithmoïque passive S'. Considérant alors le système S', mettons-le, sans changement des variables et des inconnues, sous une forme monoïque passive S'', et soient λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui correspondent respectivement à ces deux formes. Il s'agit de démontrer: 1° que $\lambda' = \lambda''$; 2° que μ' ne peut surpasser μ'', et peut dans certains cas lui être inférieur.

Du n° 18 il résulte déjà qu'on ne peut avoir $\lambda'' < \lambda'$.

En désignant maintenant par C un entier quelconque, par P'_C le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'arithme ne surpasse pas C, et par P''_C le nombre analogue dans S'', un raisonnement tout semblable à celui de l'alinéa III du n° 18 prouve que l'on a, à partir de C suffisamment grand,

$$P'_C \geqq P''_C.$$

D'ailleurs, le nombre P'_C a pour limite supérieure un certain polynome entier en C de degré λ', et le nombre P''_C a pour limite inférieure un certain polynome entier en C de degré λ''; en désignant par $'F(C)$ et $''F(C)$ ces deux polynomes, on a donc, à plus forte raison,

$$'F(C) \geqq {}''F(C),$$

et il est impossible, dès lors, que l'on ait $\lambda' < \lambda''$, car, s'il en était ainsi, on aurait, à partir de C suffisamment grand,

$$'F(C) < {}''F(C),$$

ce qui est contradictoire.

Ainsi on a forcément $\lambda' = \lambda''$, d'où résulte, en vertu du n° 18, $\mu' \leqq \mu''$. Si S' est monoïque, μ' est, comme nous l'avons établi (18), nécessairement égal à μ''; mais, si S' est simplement arithmoïque sans être monoïque, μ' peut, comme nous allons le voir, être inférieur à μ''.

Considérons en effet l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y; écrite comme ci-dessus, elle constitue un système orthonome et passif, par suite monoïque et passif, dont une intégrale se trouve entièrement déterminée par la double condition que l'intégrale dont il s'agit et sa dérivée première relative à x se réduisent respectivement, pour une valeur donnée de x, à *deux fonctions données de* y; écrite au contraire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

elle constitue un système orthoïque et passif, par suite arithmoïque et passif, dont une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire, pour une valeur donnée de y, à *une fonction donnée de* x.