ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN LINEAREN DIFFERENTIAL- UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

In zwei im 22. Bande dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeiten [1] habe ich nachgewiesen, dass die von LAPLACE und EULER herrührenden, von Anderen weiter entwickelten Methoden zur Integration gewöhlicher linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale nicht nur auf Systeme solcher Gleichungen sondern auch auf partielle lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragen werden können, wobei keine andere Voraussetzung hinsichtlich der Coefficienten nöthig war als die, dass sie rationale Funktionen sind. Als Fundament der ganzen Untersuchung diente die auf partielle lineare Differentialausdrücke ausgedehnte LAGRANGE'sche Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken, welche sich als die allgemeine Quelle der betreffenden Methoden erwies. Die Benutzung dieser Beziehung hat vor der Methode der partiellen Integration, obwohl beide von einander nicht wesentlich verschieden, jedoch und vor allem den Vortheil, dass die Darstellung des Gegenstandes unter Zuhülfenahme der genannten Beziehung erheblich an Übersichtlichkeit gewinnt.

---

[1] *Über die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale.* April 1896. *Über die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale.* Mai 1896.

In dem vorliegenden Aufsatze beabsichtige ich, einen in den genannten Arbeiten von demselben Gesichtspunkte aus ebenfalls berührten Gegenstand, den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, zu vervollständigen.

Bevor ich hierzu übergehe, benutze ich diese Gelegenheit, um hervorzuheben, dass die LAPLACE'sche Methode schon früher von Herrn PICARD auf gewisse partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewandt worden ist. In seiner Arbeit *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre*,[1] auf die ich vom Herausgeber der Acta mathematica kürzlich aufmerksam gemacht worden bin, weist nämlich Herr PICARD nach, dass diese Methode auf Gleichungen der Form

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E\frac{\partial\varphi}{\partial y} + F\varphi = 0,$$

deren Coefficienten Polynome vom ersten Grade sind, übertragen werden kann. Indem er

$$\varphi = \iint e^{xu+yv}\psi(u, v)\,du\,dv$$

setzt, findet er für ψ die Differentialgleichung

$$P\frac{\partial\psi}{\partial u} + Q\frac{\partial\psi}{\partial v} + R\psi = 0,$$

deren Coefficienten Polynome vom zweiten Grade sind. Eine besondere Erörterung wird sodann speciellen Gleichungen der obigen Form, in erster Linie der Gleichung von EULER und POISSON, gewidmet.

§ 1.

Wir wollen zunächst ganz allgemein nachweisen, *dass jede homogene partielle lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine geeignete Integralsubstitution in eine homogene partielle lineare Differenzengleichung mit einerlei Coefficienten formell transformirt werden kann, und dass auch das Umgekehrte möglich ist.*

---

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 5, 1891.

Für gewöhnliche lineare Differential- und Differenzengleichungen hat bekanntlich LAPLACE [1] das erstere und Herr PINCHERLE [2] das letztere gezeigt.

Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen wollen wir der kürze halber gleich zwei annehmen.

Will man den zwischen den genannten Gleichungen bestehenden Zusammenhang in formaler Hinsicht deutlich überblicken, so ist die folgende, a. a. O. ebenfalls benutzte, symbolische Form zu berücksichtigen, auf die jede partielle lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten gebracht werden kann:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0. \tag{1}$$

Hier bezeichnen die $f(u, v)$ ganze rationale Funktionen von u, v, so dass also

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{h,k} C_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\varphi = \sum_{h,k} C_{hk} x\frac{\partial}{\partial x}\ldots x\frac{\partial}{\partial x} y\frac{\partial}{\partial y}\ldots y\frac{\partial}{\partial y}\varphi.$$

Bekanntlich ist

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^u y^v = x^u y^v f(u, v), \tag{2}$$

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^u y^v\varphi = x^u y^v f\left(x\frac{\partial}{\partial x} + u, y\frac{\partial}{\partial y} + v\right)\varphi, \tag{3}$$

weil diese Formeln für die einzelnen Glieder von f gelten.

Die Transformation einer partiellen Differentialgleichung in die entsprechende Differenzengleichung gestaltet sich nun sehr übersichtlich, wenn man sich der verallgemeinerten LAGRANGE'schen Beziehung [3] in der folgenden Form bedient:

$$\Phi\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^\mu y^\nu\Phi$$
$$= x\frac{\partial}{\partial x}P(\varphi, \Phi) + y\frac{\partial}{\partial y}Q(\varphi, \Phi),$$

[1] *Théorie analytique des probabilités.*

[2] *Sopra una trasformazione delle equazione differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa.* Nota letta al Istituto Lombardo nell' adunanza del 17 giugno 1886.

[3] Siehe meine oben citirte Arbeit über partielle Differentialgleichungen.

wo P und Q in φ, Φ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Man setze $\varphi = x^u y^v$ und Φ gleich einer Lösung der Gleichung

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right) x^\mu y^\nu \Phi = 0. \tag{4}$$

Benutzt man zugleich die Formel (2), multiplicirt mit $x^{-1}y^{-1}$ und integrirt in der x-Ebene längs einer Linie (x), in der y-Ebene längs einer Linie (y), so ergiebt sich zunächst:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}(u, v) \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \Phi(x, y) x^{u+\mu-1} y^{v+\nu-1} dx\, dy$$
$$= \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x} P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y} Q\right) dx\, dy.$$

Hieraus folgt sodann der schon a. a. O. erhaltene Satz:

Bedeutet Φ eine Lösung der Differentialgleichung (4) *und sind die Integrationswege* (x) *und* (y) *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x} P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y} Q\right) dx\, dy = 0$$

identisch erfüllt ist, so besitzen wir in

$$F(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \Phi(x, y) x^{u-1} y^{v-1} dx\, dy \tag{5}$$

eine Lösung der Differenzengleichung

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}(u, v) F(u+\mu, v+\nu) = 0. \tag{6}$$

Nunmehr wollen wir zeigen, dass auch umgekehrt die Differenzengleichung (6) durch die Formel

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} F(u, v) x^{-u} y^{-v} du\, dv \tag{7}$$

in die Differentialgleichung (4) transformirt werden kann.

Der Nachweis gründet sich auf die Voraussetzung, dass die Integrationswege (u) und (v) ihrer ganzen Länge nach in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe um gewisse Strecken verschoben werden können, *ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.* Bleibt der Werth von (7) bei Verschiebung der Integrationswege um die resp. Strecken μ und ν ungeändert, so ist

$$x^\mu y^\nu \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)} \int\limits_{(v)} F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du\, dv.$$

Durch Differentiation folgt

$$\left(-x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(-y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k x^\mu y^\nu \Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)} \int\limits_{(v)} u^h v^k F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du\, dv,$$

woraus sich die noch allgemeinere Formel sofort ergiebt:

$$f\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right) x^\mu y^\nu \Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)} \int\limits_{(v)} f(u, v) F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du\, dv.$$

Ist nun $F(u, v)$ eine Lösung der Differenzengleichung (6) so giebt uns diese Formel unmittelbar den Satz:

Bedeutet $F(u, v)$ eine Lösung der Differenzengleichung (6), *so besitzen wir in* (7) *eine Lösung der Differentialgleichung* (4), *wofern der Integrationsweg* (u) *um die Strecken* $1, 2, \ldots, m$ *und der Integrationsweg* (v) *um die Strecken* $1, 2, \ldots, n$ *in der* (*einen oder anderen*) *Richtung der reellen Axe verschoben werden können, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.*

Da jede homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten offenbar auf die Form (4) und jede homogene lineare Differenzengleichung mit einerlei Coefficienten auf die Form (6) gebracht werden kann, so findet man aus den obigen Sätzen, dass die Integration jeder solchen Differentialgleichung stets auf die Integration einer entsprechenden Differenzengleichung, und vice versa, *formell* zurückführbar ist. Sobald die eine dieser Gleichungen gegeben ist, kann auch die andere unmittelbar angegeben werden.

§ 2.

Es ergiebt sich zugleich ohne weiteres, dass die Ordnung der Differentialgleichung gleich ist der Gradzahl der Differenzengleichung in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen; die Ordnung der einen Gleichung bestimmt aber keineswegs die der anderen. Im Nachfolgenden beabsichtigen wir nun, gewisse *Systeme* von partiellen Differentialgleichungen *beliebiger Ordnung* hervorzuheben, deren Integration mit Hülfe von Lösungen simultaner Differenzengleichungen *erster Ordnung* geleistet werden kann. Die ersteren Gleichungen können passend *hypergeometrische* Differentialgleichungen genannt werden, während die letzteren solche Differenzengleichungen erster Ordnung sind, welche durch *Gammafunktionen* befriedigt werden können.

Setzt man

$$(8) \qquad G(u, v) = a^u b^v P(u, v) \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma(p_\nu u + q_\nu v + c_\nu),$$

wo die p, q positive oder negative *ganze* Zahlen bedeuten, während P eine Funktion mit den periodischen Eigenschaften $P(u+1, v) = P(u, v)$, $P(u, v+1) = P(u, v)$ bezeichnet, so hat man einen ziemlich allgemeinen Ausdruck, welcher einem Systeme von zwei simultanen Differenzengleichungen erster Ordnung genügt. Auf Grund der Funktionalgleichung von $\Gamma(z)$ folgt in der That

$$(9) \qquad \begin{cases} G(u+1, v) = \dfrac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)} G(u, v), \\[2ex] G(u, v+1) = \dfrac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)} G(u, v), \end{cases}$$

wo f_1, g_1, f_2, g_2 gewisse ganze rationale Funktionen von u, v bezeichnen.

Setzt man also

$$(10) \qquad \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)} \int\limits_{(v)} G(u, v) x^{-u} y^{-v} du dv,$$

so befriedigt Φ das folgende System

$$(11)\qquad \begin{cases} f_1\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_1\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x\Phi, \\ f_2\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_2\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)y\Phi, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Integrationswege (u) *und* (v) *um die Strecke Eins in der Richtung der reellen Axe verschoben werden können, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.*

Die obigen Ausdrücke f, g sind ganze rationale Funktionen einer besonderen Beschaffenheit, indem sie nämlich infolge ihrer Entstehung in lauter Faktoren der Form $pu + qv + c$, unter p, q ganze Zahlen verstanden, zerlegt werden können. Ferner sind sie von einander nicht völlig unabhängig; denn aus den simultanen Gleichungen (9) folgt offenbar

$$\frac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)}\frac{f_2(u+1, v)}{g_2(u+1, v)} = \frac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)}\frac{f_1(u, v+1)}{g_1(u, v+1)}.$$

Diese Gleichung drückt mithin eine allgemeine Bedingung aus, welche nothwendig erfüllt sein muss, damit die Gleichungen des Systems (9) mit einander verträglich seien.

Versteht man allgemein unter einer *hypergeometrischen Funktion* zweier Variabeln jede Funktion, welche einem Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen der Form (11) genügt, unter $f(u, v)$, $g(u, v)$ ganze rationale Funktionen verstanden, deren *irreduktible* Faktoren alle die *lineare* Form $pu + qv + c$ haben, so gehören zu solchen Funktionen, wie man sich leicht überzeugt, besonders auch diejenigen, welche Herr Appell in seiner Arbeit *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* [1] untersucht hat.

Zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen nimmt Herr Appell vier Reihen $F_1, \ldots, F_4$, von denen beispielsweise die erste die Form hat

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, y) = \sum \frac{(\alpha, \mu+\nu)(\beta, \mu)(\beta', \nu)}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}\,(\gamma, \mu+\nu)} x^\mu y^\nu,$$

wo $(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$ und die Indices μ, ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe von der Null an durchlaufen. Diese Reihe befriedigt nach dem § 5 der genannten Arbeit das System

[1] Journal de mathématiques. S. III. T. 8.

$$\begin{cases} (x-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y(1-x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\dfrac{\partial z}{\partial x}-\beta y\dfrac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta z=0, \\ (y-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x(1-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]\dfrac{\partial z}{\partial y}-\beta' x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta' z=0. \end{cases}$$

Man verificirt nun leicht, dass dieses System mit dem folgenden identisch ist:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\gamma-1\right)z=x\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+\beta\right)\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)z, \\ y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma-1\right)z=y\left(y\dfrac{\partial}{\partial y}+\beta'\right)\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\alpha\right)z, \end{cases}$$

und auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass unsere Behauptung auch für die übrigen Reihen F richtig ist.

Diesen Differentialgleichungen entsprechen offenbar die folgenden Differenzengleichungen

$$\begin{cases} F(u+1,v)=\dfrac{u(u+v-\gamma+1)}{(u-\beta+1)(u+v-\alpha+1)}F(u,v), \\ F(u,v+1)=\dfrac{v(u+v-\gamma+1)}{(v-\beta'+1)(u+v-\alpha+1)}F(u,v). \end{cases}$$

Die allgemeinste Lösung dieses Systems ist

$$\Gamma(u)\Gamma(\beta-u).\Gamma(v)\Gamma(\beta'-v).\Gamma(u+v-\gamma+1)\Gamma(\alpha-u-v).P(u,v),$$

wo P eine willkürliche Funktion mit den Eigenschaften

$$P(u+1,v)=P(u,v), \qquad P(u,v+1)=P(u,v)$$

bedeutet. Setzt man für $G(u,v)$ in (10) diesen Ausdruck ein, so stellt also Φ eine Lösung des obigen Systems von Differentialgleichungen dar, wofern zugleich die Integrationswege auf die im Satze angegebene Weise verschiebbar sind.

Was endlich den näheren Zusammenhang zwischen den Lösungen der beiden allgemeineren Systeme (9) und (11) betrifft, so kann eine ziemlich zutreffende Andeutung davon gegeben werden, indem wir uns hier der Kürze halber auf die Darlegung des Zusammenhanges zwischen den Gammafunktionen und den gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichungen beschränken. Denn alles, was im Nachfolgenden von den letzteren nachgewiesen wird, lässt sich fast unverändert auf die ersteren Gleichungen (9) und (11) übertragen. Die folgenden Paragraphen enthalten zugleich die Hauptergebnisse einer früheren, viel ausführlicheren Arbeit des Verfassers über den betreffenden Gegenstand. [1]

§ 3.

Unter einer gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung verstehen wir jede Gleichung der Form

$$(a_0 - b_0 x)y + (a_1 - b_1 x)x\frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_m x)x^m \frac{d^m y}{dx^m} = 0. \tag{12}$$

Mit Benutzung der symbolischen Formeln

$$x^\nu \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} - \nu + 1\right)y, \qquad g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy = xg\left(x\frac{d}{dx} + 1\right)y$$

erhält sie die Gestalt

$$f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy, \tag{13}$$

wo

$$\begin{cases} f(-z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z(z-1)\ldots(z-m+1), \\ g(-z) = b_0 + b_1(z-1) + \ldots + b_m(z-1)(z-2)\ldots(z-m). \end{cases} \tag{14}$$

Offenbar ist $f(-z) = 0$ die zur singulären Stelle $x = 0$, und $g(z-1) = 0$ die zur Stelle $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung der Differentialgleichung.

---

[1] Siehe *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen.* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. 21, 1895.) Der Zusammenhang zwischen den Gammafunktionen und den partiellen hypergeometrischen Differentialgleichungen ist in meiner Arbeit *Zur Theorie zweier allgemeinen Classen bestimmter Integrale* (Acta Fenn. Tom. 22.) näher erörtert worden.

Die Differenzengleichung, welche dieser Differentialgleichung entspricht, ist nach § 1

$$(15) \qquad F(z+1) = \frac{f(z)}{g(z)} F(z).$$

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $a_m = 1$ und $b_n = -1$, unter b_n die letzte von den Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_m$ verstanden, welche von Null verschieden ist. Setzt man nun

$$(16) \qquad \begin{cases} f(z) = (-1)^m \ (z-\rho_1)(z-\rho_2)\ldots(z-\rho_m), \\ g(z) = (-1)^{n-1}(z-\sigma_1)(z-\sigma_2)\ldots(z-\sigma_n), \end{cases}$$

und

$$(17) \qquad G(z) = \Gamma(z-\rho_1)\ldots\Gamma(z-\rho_m)\Gamma(1+\sigma_1-z)\ldots\Gamma(1+\sigma_n-z),$$

so besitzen wir in $P(z)G(z)$, wo P eine willkürliche Funktion mit der Eigenschaft $P(z+1) = (-1)^{m-1}P(z)$, die allgemeinste Lösung der Gleichung (15). Für unseren Zweck ist es aber keineswegs nöthig, diese Funktion P als eine völlig unbestimmte periodische Funktion aufzufassen. Es genügt schon, wenn wir P in der Form

$$(18) \qquad P(z, m) = \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_m)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{C_\nu}{\sin\pi(z-c_\nu)}$$

annehmen, wo die C willkürliche Constanten, während die c bestimmte Grössen sind, unter denen keine zwei sich finden, deren Differenz gleich der Null oder einer ganzen Zahl.

Setzt man

$$(19) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z)} P(z, m)G(z)x^{-z}dz,$$

so genügt Φ nach dem früher Dargelegten der obigen Differentialgleichung, falls der Integrationsweg (z) in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins verschoben werden kann, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.

Unser Hauptzweck ist nun der Nachweis, dass das *allgemeine Integral* der obigen Differentialgleichung — wenigstens bis auf eine additive, aus Potenzen und Logarithmen zusammengesetzte, endliche Summe — durch diesen Ausdruck (19) bei geeigneter Wahl des Integrationsweges (z) dargestellt werden kann, oder kürzer, *dass jede hypergeometrische Differentialgleichung mit Hülfe der Gammafunktion vollständig integrirt werden kann.* Dieser Satz lautet eigenthümlich, wenn man ihn mit dem anderen zusammenstellt, *dass die Gammafunktion selbst bekanntlich keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann.*

§ 4.

Hinsichtlich der *ganzen* Funktion $P(z, m)$ ist Folgendes zu beachten. Bedeuten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ $(\mu < m)$ beliebige Werthe, unter denen auch gleiche Grössen sich finden können, so ergiebt sich auf Grund einer, für den Fall $\mu = 1$ anzustellenden, einfachen Rechnung, dass man über die unbestimmten Constanten C stets so verfügen kann, dass die Gleichung entsteht:

$$P(z, m) = \sin \pi(z - \alpha_1) \ldots \sin \pi(z - \alpha_\mu) P(z, m - \mu),$$

d. h. so, dass $P(z, m)$ an den Stellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ verschwindet, während in $P(z, m - \mu)$ noch $m - \mu$ willkürliche Constanten übrig bleiben.

Die Integrationswege, deren wir uns bedienen werden, sind aus drei, den Coordinatenaxen parallelen, durch keinen Pol des Integranden hindurchgehenden, geraden Linien zusammengesetzt, und zwar soll unter $(-\infty)$ die gebrochene Linie

$$-\infty + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_2 \text{ —— } -\infty + i\omega_2,$$

sowie unter $(+\infty)$ die gebrochene Linie

$$+\infty + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_2 \text{ —— } +\infty + i\omega_2$$

verstanden werden. Über die reellen Grössen ω, ω_1, ω_2 soll weiterhin näher verfügt werden.

Auf Grund der Funktionalgleichung des Integranden und mit Benutzung eines aus der Weierstrass'schen Arbeit über die analytischen Fakultäten leicht zu entnehmenden Satzes über das Verhalten des Produktes

$$\frac{f(z)}{g(z)} \frac{f(z \pm 1)}{g(z \pm 1)} \cdots \frac{f(z \pm k)}{g(z \pm k)}$$

bei wachsendem k ergiebt sich zunächst Folgendes:

Ist $m > n$, so stellt unser Integral (19), über eine Linie $(-\infty)$ erstreckt, in der ganzen x-Ebene eine monogene Funktion von x dar, für welche die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ die einzigen singulären Stellen sind. Dagegen hat es in diesem Falle keinen Sinn, das Integral (19) auf eine Linie $(+\infty)$ zu beziehen.

Ist $m = n$, so stellt unser Integral, über eine Linie $(-\infty)$ erstreckt, für $|x| < 1$ eine monogene Funktion von x dar, für welche $x = 0$ im allgemeinen eine singuläre Stelle ist. Für $|x| > 1$ hat es dagegen keinen Sinn. Erstreckt man es aber über eine Linie $(+\infty)$, so stellt es für $|x| > 1$ eine monogene Funktion dar, hat aber für $|x| < 1$ keinen Sinn.

Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass sich der Integrand in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene wie eine rationale Funktion verhält, kann der Satz des § 3 auf Grund des CAUCHY'schen Theorems so ausgesprochen werden:

Lässt sich der zur imaginären Axe parallele Theil des Integrationsweges $(-\infty)$, resp. $(+\infty)$, in der Richtung der reellen Axe um die Strecke *Eins* verschieben, ohne dabei irgend einen Pol des Integranden zu passiren, so genügt Φ der Differentialgleichung (13).

Liegt kein Pol innerhalb des vom Integrationswege eingeschlossenen Gebietes, so ist Φ identisch gleich der Null.

Jeder Pol des Integranden ist als Glied in irgend einer der $m + n$ arithmetischen Reihen

$$\rho_\mu\,,\ \rho_\mu - 1\,,\ \ldots,\ \rho_\mu - \nu\,,\ \ldots \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

$$\sigma_\mu + 1\,,\ \sigma_\mu + 2\,,\ \ldots,\ \sigma_\mu + 1\,,\ \ldots \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

enthalten, und zwar ist der betreffende Pol, bei unbestimmten Werthen der Constanten C, ein p-facher, falls er p Reihen gemeinschaftlich ist.

§ 5.

Ein bemerkenswerter Fall, auf welchen wir alle übrigen im folgenden Paragraphen zurückführen werden, tritt nun dann ein, wenn eine reelle Grösse ω so angenommen werden kann, dass die Grössen ρ und σ die Bedingungen erfüllen

$$\Re(\rho_\mu) < \omega < \omega + 1 < \Re(\sigma_\nu + 1), \qquad {\scriptstyle \mu = 1, 2, \ldots, m, \atop \nu = 1, 2, \ldots, n,} \tag{22}$$

unter $\mathfrak{R}(\rho)$ den reellen Theil von ρ verstanden. Der zur imaginären Axe parallele Theil der beiden Wege $(-\infty)$ und $(+\infty)$ kann in diesem Falle in der Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins verschoben werden, ohne dabei irgend einen Pol zu passiren. Also genügt Φ der Gleichung (13).

Wählt man überdies ω_1 und ω_2 so, dass der Weg $(-\infty)$ die sämmtlichen Stellen (20), *der Weg $(+\infty)$ dagegen die sämmtlichen Stellen* (21) *einschliesst, so lässt sich zeigen, dass der Ausdruck Φ in seinem jedesmaligen Gültigkeitsbereiche das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (13) *darstellt.*

Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, wo das Integral über eine Linie $(-\infty)$ der soeben angegebenen Beschaffenheit erstreckt ist.

In üblicher Weise stellen wir uns vor, dass die Wurzeln $-\rho_1, \ldots, -\rho_m$ der zur singulären Stelle $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung $f(-\rho) = 0$ derart in Gruppen gesondert sind, dass die Wurzeln einer und derselben Gruppe sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, während die Differenz irgend zweier, zu verschiedenen Gruppen gehörigen Wurzeln keine ganze Zahl ist. Die sämmtlichen Wurzeln irgend einer solchen Gruppe mögen durch $-\rho_1 \geqq -\rho_2 \geqq \cdots \geqq -\rho_k$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen $\geqq$ sich auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht.

Verfügen wir über die willkürlichen Constanten von $P(z, m)$ so, dass P sich in

$$P(z, m) = \sin\pi(z-\rho_{k+1}) \ldots \sin\pi(z-\rho_m) P(z, k)$$

verwandelt, so kann der Integrand nicht mehr an den zu denjenigen Reihen (20) gehörenden Stellen unendlich werden, deren erste Glieder $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_m$, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, zu den übrigen Wurzelgruppen gehören. Dadurch geht das Integral (19) in das folgende über:

$$(23) \qquad \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(-\infty)} G(z) \sin\pi(z-\rho_{k+1}) \ldots \sin\pi(z-\rho_m) P(z, k) x^{-z} dz,$$

wo P noch k willkürliche Constanten C enthält. Wir behaupten nun, *dass dieses Integral das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\rho_1, \ldots, -\rho_k)$ gehörende Integral der Differentialgleichung* (13) *darstellt.*

Die Richtigkeit hiervon ergiebt sich, wenn man dieses Integral mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes in eine Reihe verwandelt. Die sämmtlichen Pole des Integranden sind nach dem Obigen als Glieder in den k von dem Integrationswege $(-\infty)$ eingeschlossenen aritmetischen Reihen

$$(24) \qquad \rho_\mu\,,\ \rho_\mu - 1\,,\ \ldots,\ \rho_\mu - \nu\,,\ \ldots \qquad \mu = 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ k$$

enthalten, welche beziehungsweise die Reihen der Pole der in $\boldsymbol{G}(z)$ vorkommenden Faktoren $\Gamma(z-\rho_1),\ldots,\Gamma(z-\rho_k)$ bilden. Die Ordnung irgend einer dieser Stellen als Pol des Integranden ist also bei unbestimmten C genau gleich der Anzahl derjenigen Faktoren $\Gamma(z-\rho_1),\ldots,\Gamma(z-\rho_k)$, die an der betreffenden Stelle unendlich werden, d. h. gleich der Anzahl derjenigen Reihen (24), für welche die betreffende Stelle ein *gemeinsames* Glied ist. Weil die Grössen $\rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \ldots \leqq \rho_k$ sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, so ist unter den Reihen (24) die Reihe

$$(25) \qquad \rho_1\,,\ \rho_1 - 1\,,\ \ldots,\ \rho_1 - \nu\,,\ \ldots$$

dadurch bemerkenswerth, dass ihre sämmtlichen Glieder in jeder der übrigen Reihen enthalten sind. An allen diesen Stellen (25) wird somit der Integrand bei unbestimmten C genau von der k^{ten} Ordnung unendlich gross, an den übrigen Stellen (24) aber von niedrigerer oder höchstens von der k^{ten} Ordnung.

Auf Grund des CAUCHY'schen Satzes ist nun das Integral (23) gleich einer Reihe, deren Glieder die zu den Stellen (24) gehörigen Residuen sind. Aus den Gleichungen

$$x^{-z} = x^{-\rho_1+\nu}\left[1 - \frac{z-\rho_1+\nu}{\underline{|1}}\log x + \frac{(z-\rho_1+\nu)^2}{\underline{|2}}\log^2 x + \ldots\right],$$

$$\boldsymbol{G}(z)\sin\pi(z-\rho_{k+1})\ldots\sin\pi(z-\rho_m)P(z\,,k)$$
$$= \frac{K_k^{(\nu)}}{(z-\rho_1+\nu)^k} + \ldots + \frac{K_1^{(\nu)}}{z-\rho_1+\nu} + \mathfrak{P}(z-\rho_1+1),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, findet man, dass das zur Stelle $z=\rho_1-\nu$ gehörige Residuum die Form

$$x^{-\rho_1+\nu}\left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}}\log x + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}}(\log x)^{k-1}\right]$$

hat und bei unbestimmten C den Logarithmus thatsächlich in der $(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält. Die zu den übrigen, nicht allen Reihen (24) gemeinsamen Polen gehörigen Residuen, welche wir mit S_ν bezeichnen wollen, enthalten dagegen höchstens die $(k-2)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$. Für das Integral (23) ergiebt sich also die Reihenentwicklung

$$(26) \quad \sum_\nu S_\nu + x^{-\rho_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}} \log x + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}} (\log x)^{k-1} \right] x^\nu,$$

welche bei unbestimmten C die $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$ wirklich enthält.

Die Richtigkeit unserer Behauptung, dass (23) das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\rho_1, \ldots, -\rho_k)$ gehörige Integral der Differentialgleichung (13) darstellt, wird erwiesen, wenn wir zeigen, dass man durch geeignete Verfügung über die unbestimmten Constanten von $P(z, k)$ bewirken kann, dass diese Entwicklung (26) sich successive in Reihen verwandelt, worin die höchsten wirklich enthaltenen Potenzen von $\log x$ beziehungsweise die Exponenten $k-2, k-1, \ldots, 0$ besitzen. Denn zwischen solchen Reihen, deren Ansahl hier gleich k ist, wenn die ursprüngliche Reihe (26) mitgerechnet wird, kann bekanntlich keine lineare Gleichung bestehen. Verfügen wir in der That über diese Constanten so, dass sich $P(z, k)$ in $\sin \pi(z-\rho_1) P(z, k-1)$ verwandelt, so wird der Integrand bei unbestimmten Werthen der noch in $P(z, k-1)$ vorkommenden $k-1$ Constanten C an den Stellen (25) genau von der $(k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich gross. Hieraus folgt wie oben, dass die Reihenentwicklung des Integrals nunmehr bloss die $(k-2)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$ wirklich enthält. Fährt man mit der Specialisirung der Constanten auf diese Weise fort, so geht (26) schliesslich in eine Reihe der Form

$$x^{-\rho_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} K^{(\nu)} x^\nu$$

mit von Null verschiedenen Coefficienten über; und hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

Weil das Integral (19), über die früher erwähnte Linie $(-\infty)$ erstreckt, nach dem oben Dargelegten das allgemeinste, zu einer *beliebigen* Wurzelgruppe der determinirenden Gleichung $f(-\rho) = 0$ gehörende Integral der Differentialgleichung (13) umfasst, so stellt dasselbe auch das allgemeine Integral dieser Gleichung dar, und zwar in der ganzen x-Ebene oder nur in dem Gebiete $|x| < 1$, je nachdem $m > n$ oder $= n$ ist. Erstreckt man es aber im letzteren Falle $(m = n)$ über die früher erwähnte Linie $(+\infty)$, so repräsentirt es offenbar auch im Gebiete $|x| > 1$ das allgemeine Integral derselben Gleichung.

§ 6.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Integration einer hypergeometrischen Differentialgleichung, deren Constanten ρ, σ die Bedingungen (22) nicht erfüllen, auf den im vorigen Paragraphen erörterten Fall zurückgeführt werden kann.

Multiplicirt man den Ausdruck $G(z)$ mit $z - \rho_1$, so nimmt der Parameter ρ_1 infolge $(z - \rho_1)\Gamma(z - \rho_1) = \Gamma(z - \rho_1 + 1)$ um Eins ab. Durch wiederholte Anwendung dieser Operation folgt offenbar, dass $G(z)$, nach Multiplikation mit einer passenden ganzen Funktion $D(z)$, in einen Ausdruck $G_1(z) = D(u)G(z)$ derselben Form übergeht, deren Constanten aber die Bedingungen (22) erfüllen. Eine entsprechende Transformation kann mit der Differentialgleichung $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy$, d. h. mit

$$(27) \qquad \left(x\frac{d}{dx} + \rho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \rho_m\right)y = -\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_n\right)xy$$

vorgenommen werden. Fügt man nämlich auf beiden Seiten den symbolischen Faktor $\left(x\frac{d}{dx} + \rho_1 - 1\right)$ hinzu und setzt $\left(x\frac{d}{dx} + \rho_1\right)y = u$, so ergiebt sich für u eine Differentialgleichung, welche sich von der obigen bloss dadurch unterscheidet, dass $\rho_1 - 1$ statt ρ_1 geschrieben wird. Hieraus folgt, dass der Differentialausdruck

$$(28) \qquad D\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = u,$$

unter $D(z)$ die oben erwähnte ganze Funktion verstanden, ebenfalls einer hypergeometrischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)u = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xu$$

Genüge leistet, deren Constanten aber die Bedingungen (22) erfüllen. Die

Constanten ρ der Gleichung von y unterscheiden sich nur um ganze Zahlen von den entsprechenden Constanten der Gleichung von u, während die σ in beiden Gleichungen dieselben sind. Man hat zugleich

$$G_1(z+1) = \frac{f_1(z)}{g(z)} G_1(z).$$

Das allgemeine Integral der letzteren Differentialgleichung ist mithin nach dem vorigen Paragraphen:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\pm\infty)} G_1(z) P(z, m) x^{-z} dz, \tag{29}$$

wo sich die Integration je nach den Umständen auf eine Linie $(+\infty)$ oder $(-\infty)$ der früher angegebenen Art bezieht. Das allgemeine Integral von (27) ist in der allgemeinsten Lösung von (28) enthalten, und diese Lösung lässt sich, weil wir für u den Ausdruck (29) besitzen, ebenfalls in geschlossener Form darstellen. Durch wiederholte Anwendung der Identität

$$x^{\rho-1}\left(x\frac{d}{dx} + \rho\right)X = \frac{d}{dx}(x^\rho X)$$

und jedesmalige unbestimmte Integration folgt schliesslich aus (28) und (29):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\pm\infty)} \frac{G_1(z)}{D(z)} P(z, m) x^{-z} dz + R(x, \log x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\pm\infty)} G(z) P(z, m) x^{-z} dz + R(x, \log x), \end{aligned} \tag{30}$$

wo R eine gewisse ganze Funktion von $\log x$ bedeutet, deren Coefficienten Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten.

In diesem Ausdrucke ist nach dem Obigen auch das allgemeine Integral von (27) enthalten. Es erübrigt noch die Frage zu beantworten, welche Bedingungen die unbestimmten Constanten von R erfüllen müssen, damit (30) dieses Integral darstellen soll. Wir beschränken uns auf die folgenden Andeutungen. Versteht man unter Φ das auf der rechten Seite von (30) vorkommende Integral, während Φ_1 das aus Φ durch Verschiebung des Integrationsweges um die Strecke Eins in der positiven Richtung der reellen Axe entstandene Integral bedeutet, so ist $\Phi_1 = \Phi + S$, wo S die

Summe der Residuen bezeichnet, welche zu den zwischen den Integrationswegen liegenden Polen des Integranden gehören. Andererseits lässt sich ohne Mühe zeigen, dass $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)\Phi = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)x\Phi_1$.

Eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y die Differentialgleichung $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy$ befriedigt, ist also die, dass zwischen den Constanten der beiden Ausdrücke R und S solche Beziehungen bestehen, dass

$$f\left(-x\frac{d}{dx}\right)R = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)x(R-S).$$

§ 7.

Die zur reellen Axe parallelen Theile des Integrationsweges $(-\infty)$, resp. $(+\infty)$, können, ohne dass das Integral (19) seinen Sinn verliert, in zahlreichen Fällen — d. h. wenn die willkürlichen Constanten von $P(z, m)$ passend beschränkt werden — um die Eckpunkte der gebrochenen Linie so gedreht werden, dass dieselbe in eine unbegrenzte, auf der reellen Axe senkrecht stehende, gerade Linie übergeht. Die so erhaltenen Integrale besitzen gewisse bemerkenswerthe Eigenschaften, welche hier nicht unerwähnt gelassen werden dürfen. Dieselben gehören einer sehr allgemeinen Klasse von bestimmten Integralen an, für welche eine charakteristische Beziehung hergeleitet werden kann, welche auf dem Gebiete complexer Funktionen genau der FOURIER'schen Integralformel auf reellem Gebiete entspricht.

Es existirt eine erhebliche Menge monogener Funktionen von folgender Beschaffenheit. *In der Ebene der complexen Veränderlichen $z = u + iv$ kann ein zur imaginären Axe paralleler Streifen ($\alpha \leqq u \leqq \beta$) so angenommen werden, dass sich die betreffende Funktion $F(z)$ in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Streifens regulär verhält und für unendlich grosse, demselben Streifen angehörende Werthe auf die Form*

$$|F(z)| = e^{-\vartheta|v|}f(u, v) \tag{31}$$

derart gebracht werden kann, dass ϑ eine positive Constante, während f eine positive Veränderliche bezeichnet, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt *oder wenigstens nach Multiplikation mit* $e^{-\varepsilon|v|}$ *diese Eigenschaft bekommt, wie klein auch die positive Zahl* ε *angenommen werden mag.*

Um gleich einige allgemeine Beispiele anzuführen, erinnern wir an die Formel[1]

$$|\Gamma(z)| = e^{-\frac{\pi}{2}|v|}\left|z^{u-\frac{1}{2}}\right|\left|\sqrt{2\pi}+\varepsilon\right|, \tag{32}$$

wo ε eine gegen die Null gleichmässig abnehmende Grösse bezeichnet, falls $|v|$ ohne Ende wächst, während u zwischen beliebigen aber endlichen Grenzen bleibt. Mit Benutzung dieser Formel folgt leicht

$$|G(z)| = e^{-(m+n)\frac{\pi}{2}|v|} f(u, v), \tag{33}$$

wo f die obige Bedeutung hat. Beachtet man die Formel

$$|\sin \pi(z-a)| = e^{\pi|v|} f(u, v),$$

so findet man, dass auch der Ausdruck $G(z)P(z, k)$, falls k die Bedingung $k - 1 < \frac{m+n}{2}$ erfüllt, zu den oben charakterisirten Funktionen $F(z)$ gehört, denn für diesen Ausdruck ist $\vartheta = \left(\frac{m+n}{2} - k + 1\right)\pi$. Die Breite sowie die Lage des Parallelstreifens, auf den z beschränkt werden muss, damit f die angegebene Eigenschaft besitze, kann bei diesen Beispielen ganz beliebig sein. Aber auch wenn die Forderung hinzutritt, dass sich die betreffende Funktion in dem fraglichen Streifen überall im Endlichen regulär verhalten soll, so bleibt bei den angeführten Beispielen noch die grösste Willkürlichkeit hinsichtlich der Lage übrig, wofern die Breite jedesmal passend beschränkt wird.

Betrachtet man nun das folgende, über eine Funktion der oben angegebenen Beschaffenheit erstreckte Integral

$$\Phi(x\,;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz, \tag{34}$$

dessen Integrationsweg eine unbegrenzte in dem Streifen ($\alpha \leqq u \leqq \beta$) ge-

[1] Siehe hinsichtlich dieser Formel meine Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung.* Acta math. Bd. 15.

legene gerade Linie ist, so zeigt sich, dass dasselbe in dem durch die Ungleichheiten

$$(35)\qquad -\vartheta + 2\varepsilon \leqq \theta \leqq +\vartheta - 2\varepsilon$$

definirten Bereiche von $x = |x| e^{i\theta}$ gleichmässig convergirt, wenn kleine Umgebungen der Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen werden. Setzt man nämlich $z = a + iv$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi} | F(z) x^{-z} | \leqq |x|^{-a} e^{-2\varepsilon |v|} f(a, v),$$

wo f zugleich von x unabhängig ist. In der Reihe

$$(36)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+i\nu}^{a+i(\nu+1)} F(z) x^{-z} dz = \Phi(x\,; a)$$

sind also die absoluten Beträge der einzelnen Glieder beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} |x|^{-a} \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-2\varepsilon |v|} f(a, v) dv = |x|^{-a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |v|} . e^{-\varepsilon |v|} f(a, v) dv,$$

welche vermöge der oben angegebenen Eigenschaften von f einen endlichen und, abgesehen von dem Faktor $|x|^{-a}$, von x unabhängigen Werthe hat. Das Integral (34) ist also in dem Bereiche (35) gleichmässig convergent und stellt — da die einzelnen Glieder von (36) monogene Funktionen von x sind — auch selbst eine analytische, daselbst überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen) regulär sich verhaltende Funktion dar.

Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes findet man, dass das Integral (34) für alle die Bedingung $\alpha \leqq a \leqq \beta$ erfüllenden Werthe von a eine und dieselbe analytische Funktion von x darstellt.

Aus dem Obigen ergiebt sich zugleich die fundamentale Ungleichheit

$$(37)\qquad |\Phi(x\,; a)| < C(a, \varepsilon) |x|^{-a},$$

wo C eine nur von a und ε abhängige Constante bedeutet. Da aber Φ in dem soeben angegebenen Sinne von a unabhängig ist, so kann C auch als eine bloss von ε abhängige Grösse aufgefasst werden.

Setzt man hier das eine Mal $a = \alpha$, das andere Mal $a = \beta$, so ergeben sich die beiden Formeln

$$\lim_{x=0} x^k \Phi(x\,;\,a) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} x^k \Phi(x\,;\,a) = 0,$$

wo k eine beliebige die Bedingung $\alpha < k < \beta$ erfüllende Constante bedeutet; und umgekehrt kann auch eine Ungleichheit (37) aus diesen Gleichungen gefolgert werden.

Hieraus folgt weiter, dass das Integral

$$\int_0^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx$$

einen bestimmten Sinn besitzt, wenn $z = u + iv$ einen innerhalb des Streifens $(\alpha < u < \beta)$ gelegenen Werth besitzt. *Wir behaupten nun, dass dieses Integral gleich der ursprünglichen Funktion $F(z)$ ist.* Dies ergiebt sich sehr einfach folgendermassen:

$$\int_0^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx = \int_0^1 \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx$$

$$= \int_0^1 \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x\,;\,\beta) x^{z-1} dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wo das letzte Integral über die Begrenzung des Parallelstreifens erstreckt, und somit nach dem CAUCHY'schen Satze gleich $F(z)$ ist.

Jede Funktion $F(z)$ der vorausgesetzten Art lässt sich also gemäss der Formel

$$(38) \qquad F(z) = \int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1} dz = \int_0^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\zeta) x^{-\zeta} d\zeta$$

in der Form eines bestimmten Integrals darstellen, wo $z = u + iv$ die Bedingung erfüllt $\alpha < u < \beta$.

Diese Ergebnisse lassen sich folgenderweise umkehren:

Es sei $\Phi(x)$ eine beliebige in dem Bereiche

$$-\vartheta \leqq \theta \leqq +\vartheta$$

überall (mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$) *regulär sich verhaltende Funktion, welche für solche Werthe $x = |x|e^{i\theta}$ die Ungleichheit*

$$|\Phi(x)| < C|x|^{-a} \tag{39}$$

befriedigt, wo a eine **willkürliche**, *die Bedingung $\alpha \leqq a \leqq \beta$ erfüllende Zahl bedeutet, unter α, β $(\alpha < \beta)$ gegebene Grössen verstanden, während C eine nicht nur von x sondern auch von a unabhängige Grösse ist.*

Weil der Ausdruck $\Phi(e^{iw})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}iw}$, $w = u + iv$, in dem Parallelstreifen $-\vartheta \leqq u \leqq +\vartheta$ sich überall im Endlichen regulär verhält und dem absoluten Betrage nach kleiner als $Ce^{-\frac{\beta-\alpha}{2}|v|}$ ist, so stellt auf Grund des schon Dargelegten das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Phi(e^{iw})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}iw}t^{-w}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Phi(\xi)\xi^{z-1}d\xi = \frac{1}{2\pi}F(z),$$

$$-\vartheta \leqq a \leqq +\vartheta, \qquad e^{iw} = \xi, \qquad t = e^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-z\right)i},$$

eine in dem Gebiete $-\frac{\beta-\alpha}{2} \leqq \theta \leqq +\frac{\beta-\alpha}{2}$ von $t = |t|e^{i\theta}$, d. h. in dem Streifen $\alpha \leqq u \leqq \beta$ der Ebene der Veränderlichen $z = u + iv$, regulär sich verhaltende Funktion dar, welche die Ungleichheit $|F(z)| < K|t|^{-a}$ für $-\vartheta \leqq a \leqq +\vartheta$, und somit auch $|F(z)| < Ke^{-\vartheta|v|}$ erfüllt. Mittelst dieser Formel kann also jede Funktion $\Phi(x)$ der fraglichen Beschaffenheit in eine Funktion $F(z)$ der am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Art transformirt werden. Multiplicirt man das Integral der linken Seite mit $t^{\zeta-1}dt$ und integrirt von $t = 0$ bis $t = \infty$, so muss das Resultat nach dem schon Dargelegten gleich $\Phi(e^{i\zeta})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}i\zeta}$ sein. Macht man in der so entstehenden Formel die obigen Substitutionen und setzt zugleich $e^{i\zeta} = x$, so folgt

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(z)x^{-z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}x^{-z}dz\int_0^\infty \Phi(\xi)\xi^{z-1}d\xi, \quad \alpha \leqq a \leqq \beta, \tag{40}$$

wo $x = |x|e^{i\theta}$ die Bedingung $-\vartheta < \theta < +\vartheta$ erfüllt.

Rechnen wir alle Funktionen, welche die Eigenschaften von $F(z)$ besitzen zu einer *ersten* Funktionsklasse, während eine *zweite* Klasse aus sämmtlichen Funktionen gebildet wird, welche die Eigenschaften von $\Phi(x)$ besitzen, so entsprechen die Funktionen der beiden Klassen einander eindeutig: jede Funktion $F(z)$ der ersten Klasse wird durch die Formel (40) in eine Funktion der zweiten Klasse transformirt, und umgekehrt wird auch jede Funktion $\Phi(x)$ der zweiten Klasse durch die Formel (38) in eine Funktion der ersten Klasse transformirt. Die eine dieser Formeln ist eine nothwendige Folge der anderen. Das *Reciprocitätsgesetz*, welches hier herrscht, tritt aus den Formeln selbst hervor.

Man hat beispielsweise die bekannten Formeln

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx, \qquad 0 < z < +\infty,$$

$$\Gamma(z)\Gamma(s-z) = \Gamma(s)\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^s} dx, \qquad 0 < z < s,$$

wo sich das Zeichen $<$ auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht. Somit gelten auch die reciproken Formeln

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \qquad 0 < a < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+x)^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z) x^{-z} dz, \qquad 0 < a < s, \quad -\pi < \theta < +\pi,$$

welche man auch mit Hülfe des CAUCHY'chen Satzes direkt verificiren kann.

Die Ausdrücke e^{-x} und $(1+x)^{-s}$ können als die einfachsten hypergeometrischen Funktionen betrachtet werden. Nehmen wir in der Formel (40) $F(z) = \mathfrak{G}(z)P(z, k)$ an, $k - 1 < \frac{m+n}{2}$, so ist $\Phi(x)$ nach den vorigen Paragraphen — wenigstens bis auf einen dort mit R bezeichneten Ausdruck — Integral einer hypergeometrischen Differentialgleichung, welches k willkürliche Constanten enthält. Die reciproke Formel (38) sagt nun aus, dass das auf der rechten Seite stehende, über eine solche hypergeometrische Funktion erstreckte Integral durch die Gammafunktion ausgedrückt werden kann. Man findet hieraus, *dass die Menge der bestimmten Integrale,* *welche auf die Gammafunktion zurückführbar sind, durch die obigen Entwicklungen ausserordentlich vermehrt worden ist.* Diese Ergebnisse lassen sich übrigens auch auf hypergeometrische Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen.

§ 8.

Wir müssen auf eine eingehendere Untersuchung der Lösungen hypergeometrischer Differentialgleichungen von den in den vorigen Paragraphen entwickelten Gesichtspunkten aus bei dieser Gelegenheit verzichten. Ein paar interessante Punkte sollen jedoch hervorgehoben werden.

Ist in der Differentialgleichung (12), resp. in dem Ausdrucke $G(z)$, die Zahl $m > n$, so kann man über die willkürlichen Constanten von $P(z, k)$ so verfügen, dass sich $G(z)P(z, k)$, $k - 1 < \frac{m+n}{2}$, an den sämmtlichen Stellen (21) regulär verhält. Bedeutet nun $F(z)$ in (40) diesen Ausdruck sowie a eine die reellen Theile der Grössen (20) übertreffende Zahl, *so hat das Integral $\Phi(x)$ mit e^{-x} die Eigenschaft gemein, dass es, mit einer beliebig hohen Potenz von x multiplicirt, gegen die Null convergirt, falls x innerhalb des Convergenzbereiches von Φ sich der Stelle $x = \infty$ annähert.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich aus der fundamentalen Ungleichheit (37), wenn man a hinreichend gross annimmt, was in diesem Falle offenbar gestattet ist. Hierzu gehört beispielsweise das folgende, zuerst von Herrn PINCHERLE[1] betrachtete Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(z-\rho_1)\ldots\Gamma(z-\rho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\ldots\Gamma(z-\sigma_n)} x^{-z}dz, \qquad m > n.$$

Ist fortwährend $m > n$, so ist bekanntlich $x = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Differentialgleichung. Weil $x = 0$ die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle ist, so können die Integrale derselben

[1] Siehe *Sulle funzioni ipergeometriche generallizate.* Rend. d. Accad. dei Lincei. Vol. IV. fasc. 12, 13. S. 792—799. 1888. Herr PINCHERLE zeigt, dass das obige Integral einer hypergeometrischen Differentialgleichung genügt. Hier kommt meines Wissens zum ersten Male in der Litteratur eine hypergeometrische Funktion in der Form eines bestimmten, über *Gammafunktionen* erstreckten Integrals vor.

durch beständig convergirende, nach wachsenden Potenzen von x fortschreitende Reihen dargestellt werden, wie dies übrigens auch in § 4 gezeigt wurde. Die Reihenentwicklungen von den in der Form (40) darstellbaren Integralen ergeben sich, indem man den Integrationsweg unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes ohne Ende in der negativen Richtung der reellen Axe verschiebt, wobei das Integral (40) gegen die Null convergirt. Verschiebt man ihn dagegen in positiver Richtung, *so ergiebt sich eine nach abnehmenden Potenzen fortschreitende* ***asymtotische*** *Entwicklung von Φ, deren Restglied durch das Integral selbst dargestellt wird.*

Setzt man Beispielsweise unter der Voraussetzung $\rho_1 < \rho_2 < a < \sigma$:

$$\Phi(x\,;\,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z-\rho_1)\Gamma(z-\rho_2)\Gamma(1+\sigma-z)x^{-z}dz$$

und nimmt der Einfachheit halber an, dass $\rho_1 - \rho_2$ keine ganze Zahl ist, so hat man für Φ einerseits die beständig convergirende, von Logarithmen freie Reihenentwicklung

$$x^{-\rho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\Gamma(\rho_1-\rho_2-\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_1+\nu)$$

$$+\,x^{-\rho_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\Gamma(\rho_2-\rho_1-\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_2+\nu)$$

und andererseits die im Bereiche $-\frac{3\pi}{2} < \theta < +\frac{3\pi}{2}$ gültige asymtotische Darstellung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-x)^{-\nu}}{\underline{|\nu}}\Gamma(1+\sigma-\rho_1+\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_2+\nu)+\Phi(x\,;\,a+k).$$

Das Restintegral besitzt nach § 6 die Eigenschaft $\lim\limits_{x=\infty} x^p\,\Phi(x\,;\,a+k) = 0$, falls $k > p - a$ angenommen wird, wobei p eine beliebig grosse positive Zahl sein kann. Der Convergenzbereich von Φ ist $-\frac{3\pi}{2} < \theta < +\frac{3\pi}{2}$ und die Differentialgleichung:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\rho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\rho_2\right)\Phi = \left(x\frac{d}{dx}+\sigma\right)x\Phi.$$

Bei näherer Erwägung der in den beiden letzten Paragraphen angestellten Untersuchungen findet man, dass dieselben zugleich eine zur Herleitung von zahlreichen asymtotischen Formeln brauchbare Methode enthalten, welche bei weitem nicht auf die Theorie der hypergeometrischen Funktionen allein beschränkt ist. Das Wesentliche dabei ist der Umstand, das die zu berechnende Funktion *oder eventuell ihr Logarithmus* als eine der zweiten Klasse angehörende Funktion $\Phi(x)$ betrachtet werden kann, für welche die entsprechende Funktion $F(z)$ der ersten Klasse in einem zur imaginären Axe parallelen Streifen von hinreichender Ausdehnung in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe (je nachdem es sich um grosse oder kleine x handelt) den Charakter einer rationalen Funktion besitzt und überdies die Eigenschaft (31) nicht einbüsst. Die asymptotische Formel für Φ, resp. $\log \Phi$, geht alsdann durch Verschiebung des Integrationsweges von (40) hervor, wobei man nur die zu den passirten Polen gehörenden Residuen zu berechnen hat.

In einer nachfolgenden Arbeit wollen wir für den Logarithmus ganzer Funktionen von endlichem Geschlecht eine Formel darstellen, aus der man mittelst der angedenteten Methode eine grosse Menge asymptotischer Formeln für solche Funktionen erhalten kann. Die STIRLING'sche Formel ist die einfachste unter den unzähligen daraus sich ergebenden Entwicklungen.

Helsingfors, April 1899.