SUR UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME CLASSIQUE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

E. PHRAGMÉN
à STOCKHOLM.

On sait le rôle fondamental que joue, dans la théorie élémentaire des fonctions analytiques, le théorème qui dit qu'une fonction entière est nécessairement une constante, si, en valeur absolue, elle reste partout inférieure à une quantité donnée.

En me servant des propriétés de l'expression analytique bien connue indiquée par LAPLACE et ABEL, et appliquée avec tant de succès par M. POINCARÉ et M. BOREL à l'étude de plusieurs problèmes difficiles, je suis arrivé à une extension assez remarquable de ce théorème.

Pour faciliter l'exposé de mon résultat je démontrerai successivement six théorèmes. Le premier de ces théorèmes s'énonce ainsi:

Théorème I. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour les points x situés à l'intérieur d'un certain angle, l'exposant k et le grandeur α de l'angle étant assujettis à la condition $k\alpha < \pi$;*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les autres points x* (C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

Pour la démonstration nous pourrons supposer que l'angle considéré ait son sommet à l'origine et qu'il soit orienté de manière que l'axe réel des x coïncide avec sa bissectrice. Choisissons alors $k_1 > k$ mais tel qu'on ait encore

$$k_1 \alpha < \pi;$$

et considérons l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty F\left(a^{\frac{1}{k_1}} x\right) e^{-a} da, \tag{1}$$

l'axe réel positif étant pris pour chemin d'intégration.

La convergence de cette intégrale étant meilleure que celle de l'intégrale

$$C_1 \int_0^\infty \left| e^{-\left[a - a^{\frac{k}{k_1}} \cdot |x|^k\right]} da \right|, \tag{2}$$

ou de l'intégrale

$$C_2 \int_0^\infty | e^{-a} da |, \tag{3}$$

il est évident que notre intégrale converge uniformément dans tout domaine fini et que, par conséquent, elle représente une fonction entière de x.

Or, on démontre aisément que cette fonction entière reste partout inférieure, en valeur absolue, à une certaine constante.

Remarquons, en effet, qu'on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, choisir pour chemin d'intégration au lieu de l'axe réel positif, une demi-droite infinie quelconque issue de l'origine et faisant avec l'axe positif un angle aigu. En effet, cela se démontre immédiatement en comparant avec les intégrales (2) et (3).

En posant maintenant

$$x = re^{\varphi i}, \qquad a = \rho e^{\theta i}$$

on aura

$$a^{\frac{1}{k_1}} x = r\rho^{\frac{1}{k_1}} e^{\left(\varphi + \frac{\theta}{k_1}\right)i},$$

et on pourra aisément choisir θ de manière que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et que, en même temps, $\varphi + \frac{\theta}{k_1}$ soit, en valeur absolue, supérieur ou égal à $\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire de manière que le point $a^{\frac{1}{k_1}} x$ ne soit pas situé à l'intérieur de l'angle donné. En effet, si

$$\frac{\alpha}{2} \leqq |\varphi| \leqq \pi,$$

on fera $\theta = 0$, et si $|\varphi| < \frac{\alpha}{2}$ on choisira θ de même signe que φ et tel que $|\theta| = k_1\left(\frac{\alpha}{2} - |\varphi|\right)$. On aura alors

$$\left|F\left(a^{\frac{1}{k_1}} x\right)\right| < C_2$$

et par conséquent

$$|\Phi(x)| < C_2 \int_0^\infty |e^{-a} da| \leqq \frac{C_2}{\cos \frac{k_1 \alpha}{2}}.$$

La fonction $\Phi(x)$ sera donc nécessairement une constante.

Or, on en conclut immédiatement que la fonction $F(x)$ est elle-même une constante.

En effet, puisque l'intégrale (1) converge uniformément en tout domaine fini, on sait que, en écrivant

$$F(x) = \sum_\lambda F_\lambda x^\lambda$$

et en faisant

$$\Phi_\lambda = F_\lambda \int_0^\infty a^{\frac{\lambda}{k_1}} e^{-a} da,$$

on a

$$\Phi(x) = \sum_\lambda \Phi_\lambda x^\lambda.$$

Or, puisque nous avons démontré que $\Phi_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ il s'ensuit $F_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, 2, 3, \dots$; et par suite

$$F(x) = F_0 = \Phi_0.$$

c. q. f. d.

Pour mieux apprécier la portée du théorème que nous venons de démontrer, il se recommande de le transformer dans le théorème suivant:

Théorème II. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour tous les points x appartenant à un certain angle A de grandeur α, l'exposant k satisfaisant à la condition $k\alpha < \pi$.*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les points x appartenant à l'un ou l'autre de deux angles B_1 et B_2 contigus de côté et d'autre à l'angle A,*

(C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cela posé, on aura nécessairement, tant que x reste compris dans l'angle A

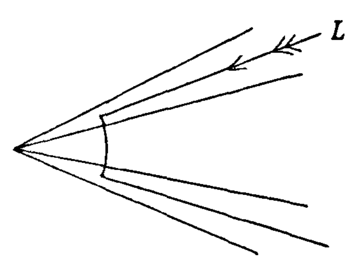
$$\lim_{|x|=\infty} \frac{F(x)}{(\log x)^\beta} = 0,$$

l'exposant β étant choisi supérieur à l'unité. Cette expression convergera uniformément vers sa valeur limite.

Pour démontrer ce nouveau théorème il suffira d'étudier l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^\beta}. \tag{4}$$

Nous formerons le chemin d'intégration des parties infinies de deux demi-droites issues du sommet des angles A, B_1, B_2 — nous supposerons que ce soit l'origine — et comprises dans l'intérieur des angles B_1 et B_2 respectivement, et d'une partie de circonférence les reunissant.



Il est clair que cette intégrale converge quel que soit x pourvu seulement que x ne soit pas situé sur le chemin d'intégration. Il est clair aussi que la valeur de notre intégrale ne varie pas si on change le chemin d'intégration, pourvu que ce chemin reste conforme aux indications données ci-dessus, et que le point x reste toujours du même côté du chemin d'intégration.

Notre intégrale définit donc deux fonctions analytiques, soit $F_1(x)$ et $F_2(x)$, selon que x est situé du même côté que l'origine ou de l'autre côté par rapport au chemin d'intégration L.

On a donc, pour x situé à l'intérieur de l'angle formé par la réunion des trois angles A, B_1, B_2,

$$F_1(x) = \int_{L_1} \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^\beta},$$

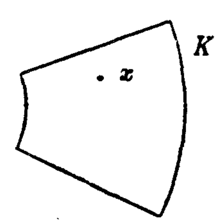
$$F_2(x) = \int_{L_2} \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^\beta}$$

si l'arc de circonférence qui entre dans le chemin L_1 a un rayon supérieur à $|x|$ et celui qui entre dans L_2 un rayon inférieur à $|x|$.

Il s'ensuit, si x appartient à l'intérieur de l'angle $(B_1 + A + B_2)$

$$F_2(x) - F_1(x) = \int_K \frac{F(z)}{z - x} \frac{dz}{(\log z)^\beta}$$

K étant le chemin d'intégration indiqué dans la figure



c'est-à-dire

$$F_2(x) - F_1(x) = \frac{F(x)}{(\log x)^\beta}. \tag{5}$$

La fonction $F_1(x)$ est régulière dans tout domaine fini. C'est donc une fonction entière.

Or, cette fonction satisfait aux conditions posées dans le théorème I, si l'angle nommé dans ce théorème est formé de deux demi-droites situées dans les angles B_1 et B_2 respectivement, et choisies de manière que l'angle α_1 inclus par elles satisfasse à la condition

$$k\alpha_1 < \pi.$$

On a évidemment, en effet,

(6) $$\lim_{|x|=\infty} F_1(x) = 0,$$

tant que x reste extérieur à cet angle ou même à un angle un peu moindre, et

(7) $$\lim_{|x|=\infty} F_2(x) = 0$$

tant que $|x|$ reste intérieur au même angle ou même à un angle un peu plus grand. Cette dernière propriété, combinée avec la formule (5), montre que la fonction $F_1(x)$ possède la propriété exigée sous 1° du théorème I.

On a donc, en appliquant ce théorème,

$$F_1(x) = \text{const.}$$

ou bien, en vertu de (6)

$$F_1(x) = 0,$$

ce qui donne, d'après (5),

$$\frac{F(x)}{(\log x)^\beta} = F_2(x),$$

identité qui persiste dans l'angle $(B_1 + A + B_2)$ et qui, en vertu de la formule (7), contient le résultat que nous voulions démontrer.

Nous ajouterons encore le théorème suivant qui constitue une généralisation du théorème I.

Théorème III. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_\lambda e^{|x|^{k_\lambda}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *quand x reste compris dans un certain angle A_λ de grandeur α_λ, les quantités k_λ et α_λ étant assujetties aux inégalités*

$$k_\lambda \alpha_\lambda < \pi,$$

2° $|F(x)| < \overline{C}$ *quand x reste extérieur à tous les angles A_λ.*

Parmi les angles A_λ il n'y a pas deux qui soient contigus. C_λ et $\overline{C}$ désignent des constantes.

Cela posé, la fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

En effet, d'après le second théorème, on conclut qu'on a, sans restriction,

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{F(x)}{(\log x)^{\beta}} = 0$$

et cela uniformément dans toutes les directions. On en conclut aisément que

$$F(x) = \text{const.}$$

Les fonctions

$$E_{\frac{\alpha}{\pi}}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{x^{\lambda}}{\left|\underline{\frac{\alpha}{\pi}\lambda}\right.}$$

étudiées par M. Mittag-Leffler, nous donnent l'exemple de fonctions qui restent finies à l'extérieur d'un angle de grandeur α, et qui, dans cet angle, deviennent infinies comme

$$\frac{\pi}{\alpha} e^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Par conséquent, nous ne pouvons pas, dans nos théorèmes, échanger la condition

$$k\alpha < \pi$$

contre cette autre condition

$$k\alpha \leqq \pi.$$

D'un autre côté on peut dire que nos théorèmes font ressortir les fonctions $E_{\frac{\alpha}{\pi}}(x)$ de M. Mittag-Leffler comme les fonctions les plus simples de leur espèce, en ce sens que, parmi les fonctions devenant infinies seulement dans un angle de grandeur α, il n'y en a pas dont l'ordre de croissance soit essentiellement inférieur à celui de $E_{\frac{\alpha}{\pi}}(x)$.

On peut démontrer des théorèmes analogues aux précédents, se rattachant à d'autres classes de fonctions étudiées par M. Mittag-Leffler, et dont je dois la connaissance à une communication personelle de l'auteur.

La fonction entière

$$e^{e^{x}}$$

ne devient infini pour x infini que lorsque la partie réelle de x est positive et la partie imaginaire de x comprise entre

$$2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2},$$

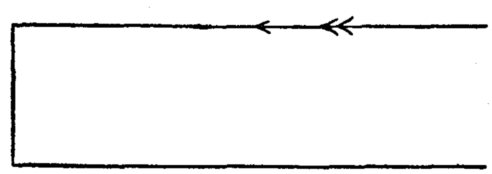
λ étant un nombre entier quelconque. Or, il est facile de former une nouvelle fonction qui devient infinie de la même manière que cette fonction, mais seulement lorsque la partie imaginaire de x est comprise entre

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad +\frac{\pi}{2},$$

la partie réelle étant positive. Il suffit de former l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{e^z}\,dz}{z-x}$$

le chemin d'intégration étant composé de deux droites parallèles à l'axe des x, infinies dans le sens positif de cet axe et situées de côté à d'autre de lui à une distance intermédiaire entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ces deux droites sont réunies à l'aide d'une droite orthogonale à l'axe réel, comme l'indique la figure.



Cette intégrale représente deux fonctions analytiques différentes, soit $\mathcal{E}_1(x)$ et $\mathcal{E}_2(x)$, selon que le point x est situé du même côté par rapport au contour d'intégration que les points réels négatifs infiniment distants, ou du côté opposé. D'ailleurs le chemin d'intégration peut être choisi arbitrairement dans les limites indiquées sans que la valeur de l'intégrale soit changée. Il s'ensuit immédiatement que la fonction $\mathcal{E}_1(x)$ est une fonction entière, et que les deux fonctions sont réunies par l'identité

$$\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x) = e^{e^x}.$$

La fonction $\mathcal{E}_2(x)$ est par conséquent, elle aussi, une fonction entière.

Tant que la partie réelle de x reste positive et la partie imaginaire comprise entre deux limites choisies arbitrairement entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$, on conclut de la représentation

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{e^{e^z}}{z-x}\,dz$$

que

$$\lim_{x=\infty} \mathcal{E}_2(x) = 0. \tag{8}$$

De même on a

$$\lim_{x=\infty} \mathcal{E}_1(x) = 0 \tag{9}$$

quand la partie réelle de x est positive ou nulle, ou quand, cette partie réelle étant négative, la partie imaginaire reste extérieure à deux limites choisies arbitrairement de manière à embrasser l'intervalle de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

La manière dont se comporte la fonction $\mathcal{E}_1(x)$ à l'infini est complètement caractérisée par les deux formules (8) et (9), si on se rappelle que

$$\mathcal{E}_1(x) = e^{e^x} + \mathcal{E}_2(x).$$

Passons maintenant aux théorèmes analogues aux théorèmes précédents qui se rattachent à cette fonction.

Théorème IV. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|e^{kx}|}$ *tant que la partie réelle de x reste positive et la partie imaginaire comprise entre deux parallèles à l'axe réel dont la distance mutuelle est α, k et α remplissant la condition $k\alpha < \pi$,*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour toutes les autres valeurs de x.*

(C_1 et C_2 désignant deux constantes.)

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

Choisissons en effet $k_1 > k$ mais de manière qu'on ait encore

$$k_1\alpha < \pi,$$

et formons l'intégrale

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a + \xi\right)e^{-a}da. \tag{10}$$

La convergence de cette intégrale étant comparable à celle de l'une ou l'autre des deux intégrales

$$C_1\int_0^\infty \left|e^{e^{a^{\frac{k}{k_1}}e^{k\xi}}} e^{-a}da\right|$$

ou

$$C_2\int_0^\infty |e^{-a}da|$$

on s'assure immédiatement, 1° que l'intégrale converge uniformément quand ξ reste compris dans un domaine fini quelconque, le chemin d'intégration étant une demi-droite issue de l'origine et faisant avec l'axe réel un angle aigu, et 2° que la valeur de l'intégrale est la même indépendamment de la manière dont on choisit le chemin d'intégration dans les limites indiquées.

Il s'ensuit que l'intégrale (10) représente une fonction entière de ξ. Mais il s'ensuit aussi que cette fonction est une constante, car on démontre facilement, en choisissant le chemin d'intégration de manière que $\frac{1}{k_1}\log a + \xi$ appartient au domaine où la fonction $F(x)$ reste inférieure à C_2 en valeur absolue, qu'elle reste partout finie.

Pour conclure que la fonction $F(x)$ est elle aussi une constante, il faut connaître un théorème qui vient d'être démontré par M. Lerch au tome 27 de ce journal.[1] Indépendamment de M. Lerch, j'ai démontré moi-même le même théorème dans une conférence faite à l'université de Stockholm, il y a quelques années.

Voici l'énoncé de ce théorème:

Si l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^\infty f(a)e^{-ax}da$$

[1] *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.*

converge pour $x \geqq x_0$ (x_0 étant réel), *et si on a*

$$\varphi(x_0 + \nu c) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

c désignant une constante positive, on aura nécessairement

$$f(a) = 0$$

pour toutes les valeurs positives de a.

Je donnerai ici ma propre démonstration qui consiste dans une simple application du facteur de discontinuité employé par M. von Koch dans ses recherches sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (ce journal, t. 24, p. 159).

Si on fait

$$F(a) = \int_0^a f(a) e^{-ax_0} da$$

on sait, d'après l'hypothèse, que $F(a)$ reste inférieur en valeur absolue à une certaine constante C. D'ailleurs on a

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + t) &= \int_0^\infty F'(a) e^{-at} da \\ &= t \int_0^\infty F(a) e^{-at} da. \end{aligned}$$

En posant

$$\psi(t) = \int_0^\infty F(a) e^{-at} da$$

on aura donc

$$\psi(t) = \frac{\varphi(x_0 + t)}{t}$$

et par suite, en vertu de l'hypothèse,

$$\psi(\nu c) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Soit maintenant α une quantité positive ou nulle et considérons la série infinie

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{\text{I}}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{\text{I}}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \dots.$$

Cette série converge absolument pour les valeurs positives de t, et uniformément pour toutes les valeurs de t supérieures à une limite positive quelconque.

On a, en effet,

$$\left|\frac{\text{I}}{\underline{|\lambda}}\psi(\lambda t)e^{\lambda\alpha t}\right| \leqq \int_0^\infty |F(a)|e^{-a\lambda t}da\frac{e^{\lambda\alpha t}}{\underline{|\lambda}}$$

$$\leqq \frac{C}{\lambda t}\frac{e^{\lambda\alpha t}}{\underline{|\lambda}}.$$

Il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{\text{I}}{\underline{|2}}\psi(2t)^{2\alpha t} + \frac{\text{I}}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \dots$$

$$= \int_0^\infty F(a)\left[e^{(\alpha-a)t} - \frac{\text{I}}{\underline{|2}}e^{2(\alpha-a)t} + \frac{\text{I}}{\underline{|3}}e^{3(\alpha-a)t} - \dots\right]da$$

ou encore

$$\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{\text{I}}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{\text{I}}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \dots = \int_0^\infty F(a)[\text{I} - e^{-e^{(\alpha-a)t}}]da.$$

On en tire aisément

$$(\text{II}) \qquad \lim_{t=\infty}\left\{\psi(t)e^{\alpha t} - \frac{\text{I}}{\underline{|2}}\psi(2t)e^{2\alpha t} + \frac{\text{I}}{\underline{|3}}\psi(3t)e^{3\alpha t} - \dots\right\} = \int_0^\alpha F(a)da.$$

En effet, on voit immédiatement que

$$\lim_{t=\infty}\int_0^\alpha F(a)[\text{I} - e^{-e^{(\alpha-a)t}}]da = \int_0^\alpha F(a)da;$$

et puisque

$$\left|\int_a^\infty F(a)\left[1 - e^{-e^{(a-a)t}}\right]da\right| < C\int_a^\infty \left(1 - e^{-e^{(a-a)t}}da\right)$$

$$= C\int_0^\infty \left(1 - e^{-e^{-at}}\right)da$$

$$= \frac{C}{t}\int_0^\infty \left(1 - e^{-e^{-a}}\right)da$$

$$\left(< \frac{C}{t}\right)$$

on a encore

$$\lim_{t=\infty}\int_a^\infty F(a)\left[1 - e^{-e^{(a-a)t}}\right]da = 0.$$

Faisons maintenant

$$t = \nu c \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

on aura d'après l'hypothèse

$$\phi(t)e^{at} - \frac{1}{\underline{|2}}\phi(2t)e^{2at} + \ldots = 0;$$

en effet chaque terme sera nul.

Il s'ensuit donc de la formule (11) que l'on a

$$\int_0^a F(a)da = 0$$

indépendamment de la valeur, supposée positive, de α.

On a donc nécessairement aussi

$$F(a) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^a f(a)e^{-ax_0}da = 0$$

pour toutes les valeurs positives de a, et enfin

$$f(a) = 0$$

pour les mêmes valeurs.

Pour appliquer ce résultat à la question qui nous occupe, faisons dans la formule

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a + \xi\right)e^{-a}da = \text{const.}$$

$\xi = \frac{1}{k_1}\log\frac{1}{x}$. On aura, en désignant la constante par C,

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log\frac{a}{x}\right)e^{-a}da = C$$

ou encore, pour x positif,

$$\int_0^\infty F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right)e^{-ax}\,da = \frac{C}{x},$$

formule qui peut s'écrire

$$\int_0^\infty \left(F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right) - C\right)e^{-ax}da = 0.$$

Il s'ensuit, en vertu du théorème de M. Lerch, que

$$F\left(\frac{1}{k_1}\log a\right) = C$$

pour les valeurs positives de a. Or, $F(x)$ est une fonction entière; on a donc identiquement

$$F(x) = C. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En partant du théorème que nous venons de démontrer, on arrive facilement au théorème suivant.

Théorème V. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|e^{kx}|}$ *tant que la partie réelle de x reste positive et sa partie imaginaire comprise entre $-\frac{\alpha}{2}$ et $+\frac{\alpha}{2}$, k et α remplissant l'inégalité*

$$k\alpha < \pi;$$

2° $|F(x)| < C_2$ *tant que la partie réelle de x reste positive et sa partie imaginaire comprise soit entre $-\frac{a}{2} - \delta$ et $-\frac{a}{2}$ soit entre $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2} + \delta$, δ désignant une quantité positive arbitrairement donnée.*

(C_1 et C_2 désignant deux constantes.)

Cette fonction $F(x)$ satisfera, pour toutes les valeurs de x indiquées sous 1°, *à la condition*

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = 0$$

et cette expression tendra vers sa limite uniformément pour toutes les valeurs en question (β désigne une quantité réelle supérieure à l'unité).

Ce théorème se démontre à l'aide de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(z)}{z-x}\,\frac{dz}{z(\log z)^\beta},$$

le chemin d'intégration étant composée de deux droites parallèles à l'axe réel, infinies dans le sens positif et situées de côté et d'autre de cet axe à une distance intermédiaire entre $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2} + \delta$, et d'une droite orthogonale à l'axe réel joignant ces deux droites.

Cette intégrale définira deux fonctions analytiques différentes $F_1(x)$ et $F_2(x)$, dont l'une $F_1(x)$ est une fonction entière et l'autre est liée à cette fonction par l'identité

$$F_2(x) - F_1(x) = \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta}.$$

On démontre comme plus haut que

$$F_1(x) = 0$$

de sorte qu'on a identiquement

$$\frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = F_2(x)$$

et on conclut de là que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x(\log x)^\beta} = 0$$

pour toutes les valeurs de x dont la partie réelle est positive et la partie imaginaire comprise entre deux limites, comprises elles-mêmes entre $-\frac{a}{2}-\delta$ et $\frac{a}{2}+\delta$.

On peut résumer tous les résultats obtenus jusqu'ici dans le théorème suivant:

Théorème VI. *Soit $F(x)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $|F(x)| < C_\lambda e^{|x|^{k_\lambda}}$ *dans certains angles de grandeur α_λ* ($k_\lambda \alpha_\lambda$ étant $<\pi$)

2° $|F(x)| < \bar{C}_\nu e^{\left|e^{\bar{k}_\nu x}\right|}$ *dans certaines bandes limitées par deux droites parallèles et une droite qui les coupe, $\bar{k}_\nu$ étant choisi de manière que $\bar{k}_\nu x$ soit réel sur la droite médiane de la bande et la largeur de la bande $\bar{\alpha}_\nu$ satisfaisant à l'inégalité $|\bar{k}_\nu|\bar{\alpha}_\nu < \pi$.*

3° $|F(x)| < C$ *pour toutes les autres valeurs de x.*

C_λ, $\bar{C}_\nu$, C sont des constantes, et on suppose que parmi les angles et bandes considérés il n'y ait pas deux qui soient contigus.

Cela posé, la fonction $F(x)$ sera nécessairement une constante.

La démonstration de ce théorème est intuitive.

Avant de finir nous avons encore une remarque à ajouter.

Tous les théorèmes que nous venons de démontrer sont susceptibles d'une généralisation assez importante, qu'il suffira de formuler par rapport au théorème I.

Théorème I a. *Soit $F(x)$ une fonction analytique uniforme et régulière à l'extérieur d'un cercle K donné. Supposons qu'on ne sache pas si cette fonction est régulière à l'infini ou non, mais qu'on connaisse chez elle les deux propriétés suivantes:*

1° $|F(x)| < C_1 e^{|x|^k}$ *pour les points x situés à l'extérieur de K et à l'intérieur d'un certain angle, l'exposant k et la grandeur α de l'angle étant assujettis à la condition $k\alpha < \pi$;*

2° $|F(x)| < C_2$ *pour tous les autres points extérieurs à K* (C_1 et C_2 désignant deux constantes).

Cette fonction $F(x)$ sera nécessairement régulière à l'infini.

En effet, désignons par K' une circonférence extérieure à K, et considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K'} \frac{F(z)}{z-x}\,dz.$$

Cette intégrale représente deux fonctions analytiques différentes $F_1(x)$ et $F_2(x)$, selon que x est intérieur ou extérieur à K'. D'ailleurs la valeur de l'intégrale est indépendante de la manière dont on choisit K' pourvu que cette circonférence reste extérieure à K. On en conclut l'identité

$$F_1(x) - F_2(x) = F(x).$$

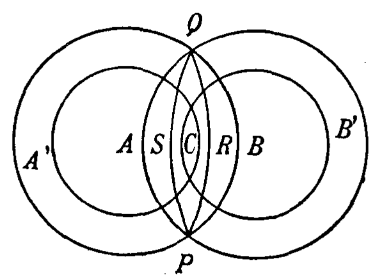
Or $F_1(x)$ est évidemment une fonction entière, et $F_2(x)$ est régulière à l'infini. Par conséquent $F_1(x)$ est une constante, en vertu du théorème I. La fonction $F(x)$ est donc bien, comme nous l'avons avancé, régulière à l'infini.

Ajoutons encore un mot sur le principe de démonstration employé tant de fois dans ce qui précède. Ce principe est au fond identique à celui qui a guidé M. Cousin dans ses recherches si remarquables sur les fonctions de plusieurs variables. Pour se convaincre plus facilement de cette identité il convient de transformer un peu l'exposition de cet auteur. Voici donc comment se présente, dans le cas le plus simple, son théorème fondamental dans notre méthode d'exposition.

Théorème de M. Cousin. *Soient A et B deux domaines continus possédant une partie commune C, constituant un seul domaine continu. Soient $\varphi(x)$ une fonction analytique définie à l'intérieur et sur le bord de A, et $\psi(x)$ une fonction analytique définie à l'intérieure et sur le bord de B. Supposons enfin que la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ soit régulière à l'intérieur et sur le bord de C.*

Cela posé, il existe une fonction analytique $f(x)$ définie à l'intérieur et sur le bord du domaine formé par la réunion des deux domaines A et B, et telles que, à l'intérieur et sur le bord de A, la différence $f(x) - \varphi(x)$, et à l'intérieur et sur le bord de B, la différence $f(x) - \psi(x)$ sont des fonctions régulières.

En effet, soit A' un domaine renfermant le domaine A à son intérieur et choisi de manière que la fonction $\varphi(x)$ soit encore définie à l'intérieur et sur le bord de A', et soit B' un domaine possédant la même propriété par rapport au domaine B et la fonction $\psi(x)$. Soient PRQ et QSP les deux contours suffisamment indiqués par la figure.



Posons

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{PRQ} \frac{\varphi(z) - \psi(z)}{z - x} dz,$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{QSP} \frac{\psi(z) - \varphi(z)}{z - x} dz.$$

La fonction $\varphi_1(x)$ est régulière à l'intérieur et sur le bord du domaine A. De même la fonction $\psi_1(x)$ est régulière à l'intérieur et sur le bord du domaine B. A l'intérieur et sur le bord de C on a, en vertu du théorème de CAUCHY,

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \psi(x) - \psi_1(x).$$

La fonction $\psi(x) - \psi_1(x)$ qui est définie à l'intérieur et sur le bord du domaine B est par conséquent la continuation analytique de la fonction $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ qui est définie à l'intérieur et sur le bord du domaine A.

Nous avons donc réussi à définir une fonction qui satisfait à toutes les conditions voulues.

C'est de cette manière que je professe la belle théorie de M. COUSIN, dans mes leçons à l'université de Stockholm, dès l'apparition de son travail. Certes, il n'y a pas, entre ce mode d'exposition et celui qu'à employé M. COUSIN lui-même, de différence très profonde. Mais j'ai trouvé que, surtout pour l'enseignement, la méthode esquissée ci-dessus possède certains avantages.