SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE PESANT SUSPENDU PAR L'UN DE SES POINTS

PAR

R. LIOUVILLE
à PARIS.

Le mouvement d'un corps solide pesant, dont un point reste fixe, peut être regardé comme défini par six équations différentielles, de forme simple et symétrique; on en a depuis longtemps obtenu trois intégrales et le multiplicateur, ce qui réduit tout le problème à la recherche d'une intégrale unique.

Cependant on ne connut, jusqu'en ces dernières années, qu'un seul cas de réduction aux quadratures, celui qui se présente quand le centre de gravité du solide se trouve sur l'un des axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension. Indiqué d'abord par LAGRANGE, puis étudié par JACOBI, il a été traité par HALPHEN d'une façon complète. (*Fonctions elliptiques,* tome II, chapitre 2 et 3.)

C'est seulement en 1888 qu'un nouveau cas d'intégration fut trouvé par M^{me} de KOWALEWSKI, dont le mémoire sur le sujet reçut l'un des prix décernés par l'Académie des Sciences de Paris. Quelques années plus tard, l'éminent géomètre avait obtenu des résultats plus importants encore, mais la mort l'empêcha de les publier et c'est par une note, insérée en 1892 dans un ouvrage de M. POINCARÉ que le monde savant fut averti de la découverte faite par SOPHIE KOWALEWSKI.

»Je crois savoir», disait M. POINCARÉ, »que M^{me} de KOWALEWSKI a découvert de nouveaux cas d'intégrabilité. Les notes qu'on a retrouvées après sa mort sont malheureusement insuffisantes pour permettre de reconstituer ses démonstrations et ses calculs.» En même temps et, comme conséquence accessoire d'une de ses théories. M. POINCARÉ démontrait l'impossibilité d'une nouvelle intégrale algébrique, si l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe n'est pas de révolution.

Dans le Mémoire qui va suivre, je me suis proposé de déterminer tous les cas dans lesquels le problème de la rotation admet une quatrième intégrale algébrique. Mes recherches, entreprises en vue d'un concours pour le prix BORDIN de 1894, étaient à peu près terminées lorsqu'une indication fut donnée par MM. APPELL et POINCARÉ dans »l'Intermédiaire des mathématiciens» (mars 1894). Il en résultait que la méthode employée par SOPHIE KOWALEWSKI dans l'étude de cette même question était celle qui a été obtenue par M. BRUNS (Acta mathematica, tome 11, 1887) et dont ce savant a déduit une proposition importante concernant le problème des trois corps.

Le temps m'eût fait défaut pour entrer dans cette voie et celle que j'ai suivie en est tout à fait distincte. Je crois cependant qu'un essai fait en vue d'utiliser la méthode de M. BRUNS présenterait un véritable intérêt, car si l'on voit sans peine qu'elle se prête à la recherche de conditions nécessaires et par suite à la démonstration de théorèmes négatifs, il semble au contraire plus difficile d'en conclure des conditions suffisantes, à moins de posséder l'intégrale elle-même.

L'étude des intégrales algébriques des équations de la dynamique peut être considérée à deux points de vue différents: ou bien, le problème n'est pas déterminé et l'on se propose de le choisir afin qu'il admette une intégrale algébrique, de degré donné; ou bien, le problème est l'un de ceux qui se posent naturellement et l'on veut savoir s'il existe une intégrale algébrique, quel qu'en soit le degré. Dans ces deux catégories de questions, les difficultés ne sont nullement les mêmes; c'est à la seconde que se rapporte l'objet de ce travail.

Après avoir remarqué que les équations différentielles du problème jouissent d'une homogénéité particulière, j'en déduis sans peine une première conséquence, c'est que »s'il existe une quatrième intégrale rationnelle, on peut toujours la supposer entière» (§ 1). Le polynôme qui la représente doit être ordonné d'une certaine manière, indiquée par la forme même des équations à résoudre; je donne alors le mode de construction de ses premiers termes et je montre que tout consiste dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. Avant d'en continuer l'examen, je suis conduit à signaler deux systèmes invariants, symétriques l'un de l'autre, chacun d'eux composé de trois équations; je calcule

1° les solutions qui s'en déduisent et qui dépendent de trois arbitraires,

2° les solutions infiniment voisines des précédentes, données aussi par des formules assez concises.

Il convient d'observer d'ailleurs que cet ensemble de résultats n'implique aucune condition spéciale à remplir, soit par l'ellipsoïde d'inertie du solide relatif au point de suspension, soit par la position du centre de gravité de ce solide dans le volume qu'il occupe.

Les propriétés des solutions simples ainsi définies sont l'un des éléments dont je me sers pour établir à la fois les conditions d'existence d'une quatrième intégrale algébrique et la possibilité d'en abaisser le degré au-dessous d'un nombre assignable. Mais je dois d'abord donner quelques explications nouvelles sur les termes des divers ordres qui appartiennent à cette intégrale et sur leur construction successive.

Il est aisé de constater que, non seulement le premier ordre, mais chacun des ordres est composé de termes qui s'obtiennent en intégrant des systèmes d'équations différentielles linéaires, à seconds membres. Ces mêmes systèmes, rendus homogènes, sont tous intégrables sans nulle difficulté. Le nombre des inconnues à déterminer croît avec l'ordre auquel ils correspondent, cependant la relation qu'ils conservent avec le premier d'entre eux est des plus simples et suffit à justifier les formules définitives. Celles-ci donnent en général les termes d'ordre n dans l'intégrale, quand ceux d'ordre $n-1$ sont déjà trouvés; toutefois, des exceptions aux règles ordinaires peuvent se présenter, si deux variables, qui figurent comme inconnues dans les équations différentielles du problème et comme paramètres dans les systèmes linéaires précédents, sont dans des rapports faisant partie d'une série de nombres commensurables. Ces cas exceptionnels résultent, soit de ce que l'un des systèmes linéaires admet une équation caractéristique dont les racines ne sont pas distinctes, soit de ce que les quadratures, exécutées sur les seconds membres des mêmes systèmes, introduiraient des logarithmes. Or il peut arriver qu'aucune singularité n'apparaisse, même si l'une ou l'autre de ces circonstances se rencontre; l'homogénéité dont on a déjà fait usage, jointe à une symétrie bien visible, montrent qu'alors l'intégrale existe. La question tout entière s'est donc réduite à ceci:

En profitant des arbitraires dont on dispose, est-il possible de supprimer les singularités dans tous les cas exceptionnels?

Les arbitraires dont il s'agit sont des polynômes entiers et homogènes de deux variables; l'un constitue le terme d'ordre zéro dans l'intégrale cherchée, les autres appartiennent aux termes d'ordre pair et résultent des intégrations successives. Or on démontre que, s'ils ne permettaient d'éviter les singularités dans la construction de l'intégrale, les formules définissant les solutions simples ne devraient aussi donner lieu qu'à trois combinaisons algébriques. Les conditions à satisfaire pour en établir quatre sont donc celles d'où dépend l'existence de l'intégrale elle-même. L'une d'elles est que le centre de gravité du solide soit situé dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension. (D'après un théorème de M. Poincaré, il a fallu d'abord supposer que cette surface est de révolution.)

La dernière condition, c'est qu'en désignant par $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{C}$ les carrés des axes de l'ellipsoïde, le premier axe situé dans l'équateur, le second perpendiculaire à ce plan, le rapport $\frac{2C}{A}$ soit un nombre entier, qui peut d'ailleurs être quelconque.

Ainsi sont résolues les questions relatives à la possibilité du problème; celles qui touchent au calcul effectif de l'intégrale exigent de nouveaux efforts. J'ai dit en effet qu'au cours des opérations certains polynômes entiers et homogènes s'introduisent comme arbitraires. Leur définition est une conséquence immédiate de la théorie, mais les moyens directs de les déterminer doivent être regardés comme impraticables. Le premier de ces polynômes et le plus important est le terme d'ordre zéro dans l'intégrale cherchée; c'est surtout afin de l'obtenir qu'ont été rassemblées les matières du § 7.

Sans rien supposer au sujet du rapport $\frac{C}{A}$, j'indique d'abord certaines séries représentant formellement les inconnues du problème et douées de convergence sauf en des circonstances spéciales. Leurs termes sont déduits les uns des autres d'une façon simple et, tandis que pour construire une intégrale, on devait résoudre des systèmes linéaires, à seconds membres, formés d'équations de plus en plus nombreuses, les systèmes linéaires qui s'offrent ici ne se composent jamais que de trois équations et leurs seconds membres seuls diffèrent; l'homogénéité procure encore des données générales sur les formules définitives. Ces dernières établissent la possibilité de représenter la quatrième intégrale algébrique, dans tous les cas où elle existe, par le produit de deux polynômes entiers et homogènes, dont l'ensemble est symétrique. Rien ne donne à penser que l'intégrale ait sous cette forme son moindre degré; mais si celle-ci est choisie, le degré, toujours pair à cause de l'homogénéité, doit devenir un multiple de quatre et le terme d'ordre zéro dans l'intégrale est un carré parfait; deux de ses diviseurs sont immédiatement connus; pour les autres, certaines propriétés de l'intégrale et des séries précédentes donnent une expression simple qui les comprend. Il y figure deux nombres entiers, dont la détermination précise est la principale difficulté qui reste à surmonter pour obtenir l'intégrale elle-même.

Le dernier paragraphe renferme quelques indications sur ce sujet, mais concerne surtout les intégrales uniformes; j'espère pouvoir revenir à bref délai sur cette question.

J'ajouterai en terminant qu'une méthode, analogue à celle que j'ai employée dans ce travail, m'a permis d'étudier les cas d'intégration algébrique dans un problème fort différent; il s'agit du mouvement d'un solide invariable mobile, *sans forces accélératrices,* dans un liquide indéfini. Les équations différentielles qu'on rencontre alors n'ont que des analogies assez vagues avec celles de la rotation des solides; je n'ai eu cependant, pour les traiter, que peu de modifications à faire à l'analyse qui va suivre.

§ 1. *L'intégrale cherchée, s'il y en a une algébrique, peut être mise sous forme entière.*

Le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut se déterminer, on le sait, à l'aide des équations suivantes, quand l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution,

$$A\frac{dp}{dt} = A_1 qr - \mu x_2 \sin\varepsilon, \qquad A\frac{dq}{dt} = -A_1 pr + \mu(x_1 \sin\varepsilon - x_3 \cos\varepsilon),$$

$$(1) \qquad C\frac{dr}{dt} = \mu x_2 \cos\varepsilon, \qquad A_1 = A - C,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = rx_2 - qx_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = px_3 - rx_1, \qquad \frac{dx_3}{dt} = qx_1 - px_2;$$

p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée suivant les axes de l'ellipsoïde, $\frac{1}{\sqrt{C}}$ la longueur de l'un d'eux, celui qui est perpendiculaire à l'équateur, $\frac{1}{\sqrt{A}}$ est celle de l'autre, contenu dans ce plan; μ, ε sont deux paramètres, dont la valeur définit la position du centre de gravité du corps par rapport au point de suspension. Quand le dernier, ε, s'évanouit, le centre de gravité est situé dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension.

Si le système (1) admet une intégrale algébrique, outre celles qui existent dans tous les cas, il est aisé de comprendre qu'il est permis de la supposer rationnelle à l'égard de x_1, x_2, x_3, p, q, r et μ. J'ajoute qu'elle doit exister, quel que soit μ, car en remplaçant x_1, x_2, x_3 par des inconnues nouvelles

$$X_1 = \mu x_1, \qquad X_2 = \mu x_2, \qquad X_3 = \mu x_3,$$

les équations (1) se changent en celles qui correspondraient à $\mu = 1$. Ces équations jouissent d'une homogénéité particulière; quand on multiplie p, q, r, par une constante k, t par k^{-1}, x_1, x_2, x_3 par k^2, elles ne sont pas altérées. Toute fonction φ possédant cette homogénéité satisfait à la relation

$$(2)\qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial p}+q\frac{\partial\varphi}{\partial q}+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+2x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+2x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+2x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}-t\frac{\partial\varphi}{\partial t}=m\varphi,$$

dans laquelle m est son degré.

Soit

$$\frac{R}{S}$$

la fraction rationnelle qui doit constituer, pour le système (1), une quatrième intégrale indépendante de t, en sorte que R et S soient des fonctions entières des inconnues, et du paramètre μ. Il est clair que l'expression

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\partial R}{A\partial p}(A_1qr-\mu x_2\sin\varepsilon)+\frac{\partial R}{A\partial q}(-A_1pr+\mu x_1\sin\varepsilon-\mu x_3\cos\varepsilon)+\ldots,$$

doit être divisible par R. Il y a donc une identité telle que celle-ci

$$(3)\qquad \frac{dR}{dt}=\lambda R,$$

où λ est un polynôme entier. Je puis toujours imaginer que R soit une fonction, douée de l'homogénéité indiquée et dont le degré soit m; $\frac{dR}{dt}$ possède alors la même homogénéité et son degré est $m+1$. Par suite, λ est homogène et de degré 1; mais c'est une fonction entière de p, q, r, x_1, x_2, x_3; il est donc nécessaire qu'elle soit de la forme

$$(4)\qquad \lambda=\lambda_0 p+\lambda_1 q+\lambda_2 r,$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ étant des constantes. Comme conséquence, λ ne peut renfermer μ, car il contiendrait alors x_1, x_2, x_3, dont ce paramètre est inséparable, ce qui serait contraire à l'équation (4).

Soit

$$(5)\qquad R=R_0+R_1\mu+\ldots+R_n\mu^n,$$

$R_0, R_1, \ldots, R_n$ étant indépendantes de μ; $R_0, R_1, \ldots, R_n$ sont homogènes à l'égard des variables x_1, x_2, x_3, considérées séparément. La première d'entre elles, R_0, ne dépend donc que de p, q, r; elle vérifie de plus la condition

$$\frac{dR}{dt} = \lambda R,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial R_0}{A \partial p} A_1 qr - \frac{\partial R_0}{A \partial q} A_1 pr = R_0(\lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r). \tag{6}$$

Quand $p^2 + q^2$ reste constante, il faut, en vertu de l'égalité précédente, que R_0 devienne une fonction de p, satisfaisant à l'équation différentielle

$$A_1 rd \log R_0 = \frac{A}{q}(\lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r) dp, \tag{7}$$

ou bien

$$d\left[\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p\right] = \frac{\lambda_0 p dp}{q} + \lambda_2 r \frac{dp}{q} = -\lambda_0 dq + \lambda_2 r \frac{dp}{q},$$

ou encore, en posant $p^2 + q^2 = \alpha^2$,

$$d\left[\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p + \lambda_0 q\right] = \frac{\lambda_2 r dp}{\sqrt{\alpha^2 - p^2}}. \tag{8}$$

On en conclut

$$\frac{A_1 r}{A} \log R_0 - \lambda_1 p + \lambda_0 q = \lambda_2 ir \log(p + i\sqrt{\alpha^2 - p^2}) + r \log \delta, \tag{9}$$

δ étant une fonction de $p^2 + q^2$ et de r.

Or R_0 doit être exprimable algébriquement et comme λ_0, λ_1 sont des constantes, facteurs de termes où n'entre pas r,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 0; \tag{10}$$

de plus, $\frac{A\lambda_2 i}{A_1}$ est un nombre rationnel e. La conséquence est que

$$\lambda_2 = -\frac{A_1 ei}{A}. \tag{10}$$

Si donc il existe une fonction R vérifiant l'identité (3), il suffit d'y changer i en $-i$ pour avoir une autre fonction, S, pour laquelle la même identité soit vérifiée, à moins cependant que R soit une fonction réelle. Dans ce dernier cas, e ne peut être que nul et R est elle-même une intégrale entière; dans le premier, le produit RS satisfait à la condition

$$\frac{d(RS)}{dt} = 0$$

et, par suite, fournit encore une intégrale entière.

§ 2. *Calcul des premiers termes appartenant à l'intégrale, lorsqu'elle existe.*

Des relations (9), (10) et (11), § 1, on déduit que R_0 s'exprime ainsi

$$R_0 = \rho(p + iq)^e, \tag{1}$$

ρ ne contenant que r et $p^2 + q^2$. Chaque terme du développement (5), § 1, satisfait évidemment à l'équation suivante,

$$\begin{aligned}(2)\quad & A_1 qr\frac{\partial R_i}{A\partial p} - A_1 pr\frac{\partial R_i}{A\partial q} + \frac{\partial R_i}{\partial x_1}(rx_2 - qx_3) + \frac{\partial R_i}{\partial x_2}(px_3 - rx_1) + \frac{\partial R_i}{\partial x_3}(qx_1 - px_2) \\ & + x_2 \cos\varepsilon \frac{\partial R_{i-1}}{C\partial r} + (x_1 \sin\varepsilon - x_3 \cos\varepsilon)\frac{\partial R_{i-1}}{A\partial q} - x_2 \sin\varepsilon\frac{\partial R_{i-1}}{A\partial p} - \lambda R_i = 0.\end{aligned}$$

En outre,

1° R_i est une fonction homogène, de degré i par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, considérées comme formant un groupe distinct;

2° elle satisfait aussi, en vertu d'une autre homogénéité, à l'équation (2) du paragraphe précédent, c'est à dire, dans le cas actuel, à celle-ci,

$$p\frac{\partial R_i}{\partial p} + q\frac{\partial R_i}{\partial q} + r\frac{\partial R_i}{\partial r} + 2x_1\frac{\partial R_i}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial R_i}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial R_i}{\partial x_3} = mR_i; \tag{3}$$

ces deux conditions jointes exigent que l'on ait

$$p\frac{\partial R_i}{\partial p} + q\frac{\partial R_i}{\partial q} + r\frac{\partial R_i}{\partial r} = (m - 2i)R_i; \tag{4}$$

en d'autres termes, R_i est aussi homogène à l'égard des variables p, q, r, constituant un second groupe séparé; le degré de cette homogénéité est

$m-2i$. En conséquence, R_n ne renferme que x_1, x_2, x_3 et le nombre entier m est égal à $2n$.

Je fais maintenant $i=1$ dans l'équation (2) et comme, d'après ce qui précède, on peut mettre R_1 sous la forme

$$x_1 R_1' + x_2 R_1'' + x_3 R_1''',$$

$R_1', \ldots$ etc. ne dépendant que de p, q, r, les coefficients de x_1, x_2, x_3 dans l'équation obtenue devront être isolément nuls. On en conclut

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1}{A} r\left(q\dfrac{\partial R_1'}{\partial p} - p\dfrac{\partial R_1'}{\partial q}\right) + qR_1''' - rR_1'' + \sin\varepsilon\dfrac{\partial R_0}{A\partial q} - \lambda_2 r R_1' = 0, \\ \dfrac{A_1}{A} r\left(q\dfrac{\partial R_1''}{\partial p} - p\dfrac{\partial R_1''}{\partial q}\right) + rR_1' - pR_1''' + \cos\varepsilon\dfrac{\partial R_0}{C\partial r} - \sin\varepsilon\dfrac{\partial R_0}{A\partial p} - \lambda_2 r R_1'' = 0, \\ \dfrac{A_1}{A} r\left(q\dfrac{\partial R_1'''}{\partial p} - p\dfrac{\partial R_1'''}{\partial q}\right) + pR_1'' - qR_1' - \cos\varepsilon\dfrac{\partial R_0}{A\partial q} - \lambda_2 r R_1''' = 0. \end{cases}$$

Soit $\omega = p^2 + q^2$, $p + iq = y_1$ et, par suite,

$$(6)\qquad p - iq = y_2 = \frac{\omega}{y_1}.$$

Il est clair que, si l'on regarde ω et r comme des constantes, le système précédent équivaut aux équations différentielles,

$$(5')\quad \begin{cases} 2A_1 r\dfrac{\partial R_1'}{\partial y_1} + A\left[\left(1-\dfrac{\omega}{y_1^2}\right)R_1''' - \dfrac{2irR_1''}{y_1} - \dfrac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1' + \dfrac{2i\sin\varepsilon}{y_1}\dfrac{\partial R_0}{A\partial q}\right] = 0, \\ 2A_1 r\dfrac{\partial R_1''}{\partial y_1} + A\left[\dfrac{2ir}{y_1}R_1' - i\left(1+\dfrac{\omega}{y_1^2}\right)R_1''' \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{2i\cos\varepsilon}{y_1}\dfrac{\partial R_0}{C\partial r} - \dfrac{2i\sin\varepsilon}{y_1}\dfrac{\partial R_0}{A\partial p} - \dfrac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1''\right] = 0, \\ 2A_1 r\dfrac{\partial R_1'''}{\partial y_1} + A\left[i\left(1+\dfrac{\omega}{y_1^2}\right)R_1'' - \left(1-\dfrac{\omega}{y_1^2}\right)R_1' - \dfrac{2i\cos\varepsilon}{y_1}\dfrac{\partial R_0}{A\partial q} - \dfrac{2\lambda_2 ir}{y_1}R_1'''\right] = 0. \end{cases}$$

Elles prennent une apparence plus simple en posant

$$(6')\qquad R_1' + iR_1'' = 2\rho_1' y_1^e, \qquad R_1' - iR_1'' = 2\rho_1'' y_1^e, \qquad R_1''' = \rho_1''' y_1^e;$$

à cause de l'expression trouvée pour e,

$$A\frac{\lambda_2 i}{A_1}=e,$$

elles deviennent ainsi

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1'}{\partial y_1}-\frac{r}{y_1}\rho_1'+\frac{1}{2}\rho_1'''+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}-\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}\right]=0,\\ &\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1''}{\partial y_1}+\frac{r}{y_1}\rho_1''-\frac{1}{2}\frac{\omega}{y_1^2}\rho_1'''+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}-\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}\right]=0,\\ &\frac{A_1 r}{A}\frac{\partial\rho_1'''}{\partial y_1}+\frac{\omega}{y_1^2}\rho_1'-\rho_1''+\frac{\cos\varepsilon}{y_1^{e+1}}\left[\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}-\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}\right]=0. \end{aligned}$$

Je considère le système linéaire, adjoint au précédent et homogène,

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial v_1'}{\partial y_1}+\frac{Av_1'}{A_1y_1}-\frac{A\omega}{A_1 r y_1^2}v_1'''=0,\\ &\frac{\partial v_1''}{\partial y_1}-\frac{Av_1''}{A_1y_1}+\frac{A}{A_1 r}v_1'''=0,\\ &\frac{\partial v_1'''}{\partial y_1}-\frac{Av_1'}{A_1 r}+\frac{A\omega}{A_1 r y_1^2}v_1''=0; \end{aligned}$$

Il est satisfait, si je prends

$$(9)\qquad \begin{aligned} &v_1'=y_1^M,\qquad v_1''=\frac{A_1 r}{A\omega}\left[\frac{A}{A_1 r}-\frac{2A_1 r}{A\omega}(M+1)\left(M+\frac{A}{A_1}\right)\right]y_1^{M+2},\\ &v_1'''=\frac{A_1 r}{A\omega}\left(M+\frac{A}{A_1}\right)y_1^{M+1}, \end{aligned}$$

avec la condition

$$(10)\qquad (M+1)\left[1-\frac{A_1^2r^2}{A^2\omega}\left(M+\frac{A}{A_1}\right)\left(M+2-\frac{A}{A_1}\right)\right]=0,$$

c'est à dire qu'on en connait trois solutions généralement distinctes. Or chacune d'elles donne lieu à une identité telle que celle-ci,

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\frac{A_1 r}{A}\frac{d}{dy_1}(v_1'\rho_1'+v_1''\rho_1''+v_1'''\rho_1''')\\ &+\frac{1}{y_1^{e+1}}\left[v_1'\left(\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}-\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}\right)\right.\\ &\left.+v_1''\left(\cos\varepsilon\frac{\partial R_0}{2C\partial r}-\sin\varepsilon\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}\right)+v_1'''\cos\varepsilon\left(\frac{\partial R_0}{A\partial y_1}-\frac{\partial R_0}{A\partial y_2}\right)\right]=0, \end{aligned}$$

de laquelle se déduit par une quadrature l'expression

$$(12) \qquad v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1''';$$

Comme d'ailleurs, d'après (1),

$$(13) \qquad R_0 = \rho y_1^e,$$

l'on voit, en donnant à M la valeur -1, que la dérivée

$$\frac{d}{dy_1}(v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1''')$$

contiendrait un terme en y_1^{-1} et l'expression (12) elle-même un logarithme, ce qui est inadmissible, si l'on n'avait

$$(14) \qquad e\rho \sin\varepsilon = 0.$$

En conséquence, ou bien

$$(15) \qquad \sin\varepsilon = 0,$$

ou bien $e = 0$, cette dernière hypothèse signifiant que le polynôme R serait une intégrale indécomposable.

Je calcule, à l'aide des relations (10) et (11), les trois déterminations de la somme $v_1'\rho_1' + v_1''\rho_1'' + v_1'''\rho_1'''$ et supprimant dans chacune d'elles la facteur y_1^M qu'elle contient, j'aurai pour définir les trois quantités

$$\rho_1', \; y_1^2\rho_1'', \; y_1\rho_1''',$$

trois équations linéaires, où les inconnues sont multipliées par des facteurs constants. On a donc

$$(16) \qquad \rho_1' = \alpha + \beta y_1 + \gamma y_1^2, \quad y_1^2\rho_1'' = \alpha' + \beta' y_1 + \gamma' y_1^2, \quad y_1\rho_1''' = \alpha'' + \beta'' y_1 + \gamma'' y_1^2,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ désignant des constantes, c'est à dire des fonctions de ω et r, qu'il reste à construire. Elles sont données par le système (7), dont on déduit

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\alpha'' - 2\alpha r = \frac{\cos\varepsilon}{C}\frac{\partial\rho}{\partial r}, \\ &\frac{A_1 r}{A}\alpha'' - \omega\alpha + \alpha' = \frac{\cos\varepsilon}{A}\left(e\rho + \omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right), \\ &2\left(\frac{2A_1}{A} - 1\right)r\alpha' + \omega\alpha'' = 0; \end{aligned}$$

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
2\left(\frac{A_1}{A}-1\right)r\beta+\beta'' &= -\frac{2\sin\varepsilon}{A}\frac{\partial\rho}{\partial\omega},\\
\omega\beta-\beta' &= \quad 0,\\
2\left(\frac{A_1}{A}-1\right)r\beta'+\omega\beta'' &= -\frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(e\rho+\omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right);
\end{aligned}
$$

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
2\left(\frac{2A_1}{A}-1\right)r\gamma+\gamma'' &= 0,\\
\frac{A_1 r}{A}\gamma''+\omega\gamma-\gamma' &= \frac{\cos\varepsilon}{A}\frac{\partial\rho}{\partial\omega},\\
2r\gamma'-\omega\gamma'' &= -\frac{\cos\varepsilon}{C}\frac{\partial\rho}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Avant de résoudre ces équations, j'ai à faire une remarque très simple sur le système différentiel ((1) § 1), duquel dépend tout le problème. Et d'abord, j'introduis comme inconnues y_1, y_2, à la place de p, q; puis, au lieu de x_1, x_2,

$$z_1 = x_1 + ix_2, \qquad z_2 = x_1 - ix_2,$$

enfin, je prends pour variable $\tau = it$. Cela fait, le système indiqué devient

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
\frac{Ady_1}{d\tau} &= -A_1 r y_1 + \mu(z_1\sin\varepsilon - x_3\cos\varepsilon), & \frac{dz_1}{d\tau} &= x_3 y_1 - r z_1,\\
\frac{Ady_2}{d\tau} &= \quad A_1 r y_2 + \mu(x_3\cos\varepsilon - z_2\sin\varepsilon), & \frac{dz_2}{d\tau} &= r z_2 - x_3 y_2,\\
\frac{2Cdr}{d\tau} &= \quad \mu\cos\varepsilon(z_2 - z_1), & \frac{2dx_3}{d\tau} &= y_2 z_1 - y_1 z_2.
\end{aligned}
$$

Quand on y permute y_1, y_2 et z_1, z_2, sans toucher à x_3 ni r, il suffit de changer τ en $-\tau$, pour qu'il se reproduise lui-même. L'intégrale R, ne contenant pas τ, doit donc être symétrique en y_1, y_2 et z_1, z_2, ce qui exige, puisque $y_1 y_2 = \omega$,

$$(21)\qquad \alpha = \gamma', \qquad \alpha' = \gamma\omega^2, \qquad \alpha'' = \gamma''\omega, \qquad \beta\omega = \beta'.$$

En tenant compte de ces identités, les relations (19) se confondent toutes avec (17) et, posant pour abréger,

$$(22)\qquad \Delta = \omega + r^2\left(1 - \frac{2A_1}{A}\right),$$

je trouve, en les résolvant

$$\Delta . \alpha = \frac{\cos\varepsilon}{2A_1}\left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right] - \frac{\cos\varepsilon . \Delta}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r},$$

$$(23) \qquad \Delta . \alpha' = \frac{\omega\cos\varepsilon}{2A_1}\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right],$$

$$\Delta . \alpha'' = \frac{r\cos\varepsilon}{A_1}\left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\left[\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) - e\rho\right].$$

Comme $\alpha, \alpha', \alpha''$ doivent être des polynômes entiers en ω et r, on voit que l'expression suivante

$$\omega\left[\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right] - e\rho$$

est divisible par Δ.

D'après les résultats établis § 1, l'on peut toujours faire en sorte que e soit égal à zéro; cette supposition étant faite, la différence

$$\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{A}{2Cr}\frac{\partial\rho}{\partial r}$$

s'évanouit avec Δ.

Quant aux coefficients β, β', β'', on ne peut les déterminer d'une façon complète par les relations (18) et il est aisé d'en apercevoir la raison.

§ 3. *Etude d'une solution particulière remarquable.*

Les équations (20), § 2, admettent deux solutions particulières simples, qui méritent d'être signalées. Je suppose qu'à l'origine du mouvement il soit satisfait aux conditions

$$(1) \qquad y_1 = z_1 = x_3 = 0,$$

manifestement invariantes. Pour les trois autres inconnues, voici les équations à vérifier

$$A\frac{dy_2}{d\tau} = A_1 r y_2 - \mu z_2 \sin\varepsilon,$$

$$(2) \qquad 2C\frac{dr}{d\tau} = \mu z_2 \cos\varepsilon,$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = r z_2.$$

Leurs intégrales s'aperçoivent sans difficulté: celle des forces vives est la suivante,

$$Cr^2 - \mu z_2 \cos\varepsilon = H, \tag{3}$$

où H désigne la constante arbitraire; la première équation différentielle devient ensuite

$$\frac{dy_2}{dz_2} = \frac{A_1 y_2}{Az_2} - \frac{\mu\sqrt{C}\sin\varepsilon}{A\sqrt{H + \mu z_2 \cos\varepsilon}}; \tag{4}$$

et l'on en peut conclure

$$y_2 = -\mu\sqrt{C}\sin\varepsilon\, z_2^{\frac{A_1}{A}} \int \frac{dz_2}{z_2^{\frac{A_1}{A}}\sqrt{H + \mu z_2\cos\varepsilon}}; \tag{5}$$

de plus, à cause de la 3^{me} équation (2),

$$\tau = \sqrt{\frac{C}{H}}\log\left(\frac{r\sqrt{C} - \sqrt{H}}{r\sqrt{C} + \sqrt{H}}\right) + \text{constante}, \tag{6}$$

ce qui achève l'intégration.

Une seconde solution, symétrique de la première, s'obtient en supposant $y_2 = z_2 = x_3 = 0$.

Il importe de posséder les solutions infiniment voisines de celles qui précèdent; à cet effet, plaçons-nous dans le cas défini par les conditions (1) et soient représentées ainsi

$$y_1 + \eta_1\,,\; y_2 + \eta_2\,,\; r + \eta_3\,,\; z_1 + \xi_1\,,\; z_2 + \xi_2\,,\; x_3 + \xi_3\,,$$

les valeurs des inconnues, infiniment peu différentes de celles qui satisfaisaient à ces conditions: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$ sont déterminés par le système

$$\begin{aligned}
&A\frac{d\eta_1}{d\tau} = -A_1 r\eta_1 + \mu(\xi_1\sin\varepsilon - \xi_3\cos\varepsilon), && \frac{d\xi_1}{d\tau} = -r\xi_1,\\
(7)\quad &A\frac{d\eta_2}{d\tau} = A_1(r\eta_2 + y_2\eta_3) - \mu(\xi_2\sin\varepsilon - \xi_3\cos\varepsilon), && \frac{d\xi_2}{d\tau} = r\xi_2 + z_2\eta_3 - y_2\xi_3,\\
&2C\frac{d\eta_3}{d\tau} = \mu(\xi_2 - \xi_1), && 2\frac{d\xi_3}{d\tau} = y_2\xi_1 - z_2\eta_1;
\end{aligned}$$

mais celui-ci admet des intégrales évidentes

$$
\begin{aligned}
&z_2\xi_1 = \alpha,\\
(8)\qquad &A(y_2\xi_1 + z_2\eta_1) + 2Cr\xi_3 = \beta,\\
&Ay_2\eta_1 + 2Cr\eta_3 - \mu(\xi_1 + \xi_2)\cos\varepsilon - 2\mu\xi_3\sin\varepsilon = \gamma;
\end{aligned}
$$

et, comme des deux premières on déduit

$$(9)\qquad \xi_3 = \frac{1}{2Cr}\left[\beta - Az_2\eta_1 - \frac{Aay_2}{z_2}\right],$$

cela permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad \frac{d\eta_1}{dz_2} &= \eta_1\left[\frac{\mu\cos\varepsilon}{2(H + \mu z_2\cos\varepsilon)} - \frac{A_1}{Az_2}\right]\\
&+ \frac{\mu}{2ACr^2z_2^2}[2C\alpha r\sin\varepsilon - \beta\cos\varepsilon] + \frac{\mu\alpha\cos\varepsilon}{2Cr^2}\frac{y^2}{z_2^2},
\end{aligned}
$$

ou bien encore

$$(11)\quad \frac{d}{dz_2}\left[\frac{\eta_1 z_2^{\frac{A_1}{A}}}{\sqrt{H + \mu z_2\cos\varepsilon}}\right] = \frac{\mu z_2^{\frac{A_1}{A}-2}}{2(H + \mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{C\alpha r\sin\varepsilon - \beta\cos\varepsilon}{A} + \alpha\cos\varepsilon . y_2\right].$$

La dernière des formules (8) donne entre η_3 et ξ_2 une relation connue; la troisième équation (7) ramène donc aux quadratures le calcul des solutions cherchées.

Parmi les conséquences à tirer de ces résultats, on remarque d'abord les suivantes:

1°. Entre les inconnues

$$\eta_1\,,\; y_2 + \eta_2\,,\; r + \eta_3\,,\; \xi_1\,,\; z_2 + \xi_2\,,\; \xi_3,$$

y_2, z_2 et r étant définies par les équations (2), il doit exister des relations algébriques, au nombre de quatre. Les formules, qui déterminent $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$ et dans lesquelles n'entre pas τ, doivent donc renfermer une seule transcendante irréductible; j'entends par là qu'il ne peut y figurer deux fonctions transcendantes, si l'une ne dépend point algébriquement de l'autre et de ξ_1 ou de z_2.

Or, à cause de (5), η_1 contient à la fois les trois intégrales

$$\int \frac{z_2^{\frac{A_1}{A}-2}\, dz_2}{H+\mu z_2 \cos\varepsilon}, \qquad \int \frac{z_2^{\frac{A_1}{A}}\, dz_2}{(H+\mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \int \frac{z_2^{-\frac{A_1}{A}}\, dz_2}{(H+\mu z_2\cos\varepsilon)^{\frac{1}{2}}},$$

la première et la troisième multipliées par un facteur qui s'annule avec $\sin\varepsilon$. Il est clair qu'aucune réduction n'est possible, par exemple entre les deux premières de ces transcendantes. Il est donc nécessaire que $\sin\varepsilon$ s'évanouisse. Il y a une exception évidente, relative au cas de LAGRANGE, pour lequel $\cos\varepsilon$ est égal à zéro.

En d'autres termes, hormis ce cas, le centre de gravité doit être dans l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension.

2°. En outre, $\frac{A_1}{A}$ est un nombre rationnel; s'il en était autrement, $z_2^{\frac{A_1}{A}}$ serait une fonction transcendante et entrerait dans l'expression des inconnues, sans être algébriquement réductible aux transcendantes qui l'accompagnent.

3°. Ces hypothèses étant faites, les équations du problème deviennent

$$(12)\quad \begin{aligned} &A\frac{dy_1}{d\tau} = -(A_1 r y_1 + \mu x_3), && A\frac{dy_2}{d\tau} = A_1 r y_2 + \mu x_3, && 2C\frac{dr}{d\tau} = \mu(z_2 - z_1), \\ &\frac{dz_1}{d\tau} = x_3 y_1 - r z_1, && \frac{dz_2}{d\tau} = r z_2 - x_3 y_2, && 2\frac{dx_3}{d\tau} = y_2 z_1 - y_1 z_2. \end{aligned}$$

et l'on voit qu'elles jouissent d'une importante propriété: quand on y change de signe y_1, y_2, z_1, z_2 et μ, sans toucher à x_3 ni r, elles se reproduisent non modifiées. Par suite, dans les formules ((16) § 2), faisant connaitre le coefficient de la première puissance de μ dans l'intégrale R, il est permis de supposer

$$\beta = \beta' = \beta'' = 0;$$

leurs seconds membres deviennent ainsi des fonctions paires de la variable y_1.

4°. Le système (12) étant admis, l'équation (5) doit être remplacée par la suivante,

$$(13)\qquad y_2 = h_1 z_2^{\frac{A_1}{A}},$$

dans laquelle h_1 est une constante quelconque et l'on en conclut

$$(14)\qquad \eta_1 = \frac{1}{2} z_2^{-\frac{A_1}{A}} (\mu z_2 + H)^{\frac{1}{2}} \left[\mu \alpha h_1 \int \frac{z_2^{-\frac{2C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu\beta}{A} \int \frac{z_2^{-\frac{C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

A cause de (8), on en déduit encore

$$(15)\qquad \frac{d}{dz_2}\left(\frac{\xi_2}{r z_2}\right) = \frac{4\alpha}{r z_2^3} + \frac{\gamma z_2 + \alpha\mu}{2 C r^2 z_2^2} + \frac{h_1}{2 C r^3}\left[A \alpha h_1 z_2^{-\frac{2C}{A}} - \beta z_2^{-\frac{C}{A}-1} \right].$$

Mais les transcendantes, à l'aide desquelles s'exprime η_1 et qui résulteraient de quadratures seulement indiquées, ont tous leurs points critiques algébriques, à moins que $\frac{2C}{A}$ soit un nombre entier. D'ailleurs, si cette condition n'est pas remplie, ξ_2 renferme cependant des logarithmes, en vertu de l'équation (15); η_1 devrait donc être liée à z_2 par une relation algébrique, où ξ_2 ne peut entrer. Or ceci est visiblement inadmissible quand $\frac{2C}{A}$ est un nombre fractionnaire. Il faut donc que ce soit un nombre entier.

5°. Si $\frac{2C}{A}$ est un nombre entier, toutes les quadratures non éxécutées peuvent être représentées de cette manière

$$\int \frac{z_2^{-N_1-\frac{1}{2}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}},$$

ou de celle-ci

$$\int \frac{z_2^{-N_1} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}},$$

N_1 désignant un nombre entier. La première est algébrique et peut recevoir la forme

$$-\frac{2\mu^{N_1-\frac{1}{2}}}{\sqrt{C}} \int \frac{r'^{2N_1+1} dr'}{(C - H r'^2)^{N_1+\frac{1}{2}}},$$

en posant $r = \frac{1}{r'}$. La seconde, contient un logarithme et ce dernier porte sur l'expression

$$\frac{\sqrt{C} - r'\sqrt{H}}{\sqrt{C} + r'\sqrt{H}};$$

tous les autres termes sont rationnels à l'égard de r'. C'est ce même logarithme qui figure dans ξ_2: il suffit donc de l'éliminer entre les relations faisant connaitre

$$\eta_1, \; z_2 + \xi_2,$$

pour obtenir une équation intégrale algébrique.

Ainsi, quand $\frac{2C}{A}$ est un nombre entier, il y a une solution des équations (12) dans laquelle y_1, z_1, x_3 sont infiniment petits, pour laquelle en outre, non plus trois, mais quatre des équations intégrales sont algébriques.

§ 4. *Calcul des divers termes qui doivent composer l'intégrale R. Propriétés des coefficients.*

S'il existe, hormis les trois intégrales qui appartiennent à tous les cas et qui sont les suivantes

$$(1) \qquad \begin{gathered} Ay_1y_2 + Cr^2 - \mu(z_1 + z_2) = H, \qquad A(y_1z_2 + y_2z_1) + 2Crx_3 = H_1, \\ z_1z_2 + x_3^2 = H_2, \end{gathered}$$

une intégrale rationnelle R, nous avons vu qu'on peut toujours la supposer entière, c'est à dire supposer e (§ 1) égal à zéro. Lorsqu'elle est développée sous la forme

$$R = R_0 + \mu R_1 + \ldots + \mu^n R_n,$$

un terme quelconque R_h de ce développement se laisse représenter par l'expression symbolique

$$(2) \qquad R_h = (z_1\rho_h'' + z_2\rho_h' + x_3\rho_h''')^h,$$

chaque produit

$$\rho_h^{\prime\prime h_1}\rho_h^{\prime h_2}\rho_h^{\prime\prime\prime h_3}$$

étant remplacé par une fonction de r et de ω, qu'il reste à calculer.

Cette recherche elle-même dépend de l'équation ((2) § 2) à laquelle R_h doit être assujettie,

$$(3)\qquad \frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial R_h}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial R_h}{\partial y_1}\right)+(rz_2-x_3y_2)\frac{\partial R_h}{\partial z_2}+(x_3y_1-rz_1)\frac{\partial R_h}{\partial z_1}$$
$$+\frac{1}{2}(y_2z_1-y_1z_2)\frac{\partial R_h}{\partial x_3}+x_3\left(\frac{\partial R_{h-1}}{A\partial y_2}-\frac{\partial R_{h-1}}{A\partial y_1}\right)+(z_2-z_1)\frac{\partial R_{h-1}}{2C\partial r}=0.$$

J'emploie, pour abréger, les notations suivantes

$$\frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h'}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h'}{\partial y_1}\right)+r\rho_h'-\frac{1}{2}y_1\rho_h'''=D\rho_h',$$

$$(4)\qquad \frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h''}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h''}{\partial y_1}\right)-r\rho_h''+\frac{1}{2}y_2\rho_h'''=D\rho_h'',$$

$$\frac{A_1 r}{A}\left(y_2\frac{\partial\rho_h'''}{\partial y_2}-y_1\frac{\partial\rho_h'''}{\partial y_1}\right)+y_1\rho_h''-y_2\rho_h'\;=D\rho_h'''.$$

Pourvu qu'on regarde les opérations D comme soumises aux règles ordinaires du calcul des différentielles, en égalant à zéro le coefficient de chaque monôme $z_1^{h_1}z_2^{h_2}x_3^{h_3}$, dans l'équation (3), j'obtiens une série d'identités, auxquelles il est aisé de donner cette forme

$$(5)\qquad hD(\rho_h^{\prime\prime h_1}\rho_h^{\prime h_2}\rho_h^{\prime\prime\prime h_3})+\frac{h_2}{2C}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2-1}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3})-\frac{h_1}{2C}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1-1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3})$$
$$+\frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3-1})-\frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3-1})=0.$$

D'après cela, si l'on veut obtenir les fonctions $\rho_h^{\prime\prime h_1}\rho_h^{\prime h_2}\rho_h^{\prime\prime\prime h_3}$, étant données celles d'indice inférieur $h-1$, l'on reconnait qu'il faut, en traitant r et ω comme des constantes, intégrer un système d'équations différentielles linéaires, non homogènes, dans lequel la variable indépendante est y_1. Or le système homogène, adjoint à celui-ci, admet comme solutions les produits de h solutions, distinctes ou non distinctes, appartenant au système ((8) § 2). Je les représenterai par l'expression

$$v_h^{\prime\prime h_1}v_h^{\prime h_2}v_h^{\prime\prime\prime h_3},$$

en écrivant ainsi le système indiqué,

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_h'}{\partial y_1} + \frac{Av_h'}{A_1 y_1} - \frac{A\omega}{A_1 r y_1^2} v_h''' &= \text{o},\\
&\frac{\partial v_h''}{\partial y_1} - \frac{Av_h''}{A_1 y_1} + \frac{A}{A_1 r} v_h''' &= \text{o},\\
&\frac{\partial v_h'''}{\partial y_1} - \frac{A}{A_1 r} v_h' + \frac{A\omega}{A_1 r y_1^2} v_h'' &= \text{o}.
\end{aligned}
$$

Soient encore $w = \frac{\omega}{r^2}$, $f(M) = \frac{iAwr}{A_1(M+\text{I})+C}$; M est un exposant défini par l'équation déjà trouvée, ((10) § 2)

$$
(7)\qquad (M+\text{I})\left[\text{I} - \frac{A_1^2}{A^2 w}\left(M + \frac{A}{A_1}\right)\left(M + 2 - \frac{A}{A_1}\right)\right] = \text{o}.
$$

Lorsqu'on désigne par M' et M'' ses deux racines différentes de $-\text{I}$ il est satisfait aux identités

$$
(8)\qquad M' + M'' + 2 = \text{o},\qquad f(M')f(M'') - \omega = \text{o},
$$

faciles à vérifier.

Cela dit, on résoudra le système (6) par les formules

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
v_h' &= Lrw^{\frac{1}{2}} y_1^{-1} + L'f(M')y_1^{M'} + L''f(M'')y_1^{M''},\\
v_h'' &= \frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}} y_1 + \frac{L'}{f(M')} y_1^{M'+2} + \frac{L''}{f(M'')} y_1^{M''+2},\\
v_h''' &= \frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL'y_1^{M'+1} + iL''y_1^{M''+1},
\end{aligned}
$$

où L, L', L'' sont des constantes quelconques. Les fonctions, dont nous avons d'abord à faire usage,

$$
v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3},
$$

sont les coefficients de facteurs numériques dans le développement de cette puissance

$$
(lv_h' + l'v_h'' + l''v_h''')^h,
$$

où l, l', l'' sont regardés comme des constantes à volonté. Ce sont les inconnues d'un système linéaire, déduit de (6) comme il a été dit et dont toutes les solutions sont les termes de l'expression suivante

$$\left[l\left(Lrw^{\frac{1}{2}}y_1^{-1}+L'f(M')y_1^{M'}+L''f(M'')y_1^{M''}\right)+l'\left(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}}y_1+\frac{L'}{f(M')}y_1^{M'+2}+\frac{L''}{f(M'')}y_1^{M''+2}\right)\right.$$
$$\left.+\,l''\left(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}}+iL'y_1^{M'+1}+iL''y_1^{M''+1}\right)\right]^h,$$

c'est à dire sont données par les formules

$$(10)\qquad y_1^{h_2-h_1}v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3}=\left(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}}+\frac{L'}{f(M')}y_1^{M'+1}+\frac{L''}{f(M'')}y_1^{M''+1}\right)^{h_1}$$
$$\times\left(Lrw^{\frac{1}{2}}+L'f(M')y_1^{M'+1}+L''f(M'')y_1^{M''+1}\right)^{h_2}\left(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}}+iL'y_1^{M'+1}+iL''y_1^{M''+1}\right)^{h_3}.$$

On y doit considérer comme constituant des solutions distinctes les coefficients de toutes les constantes

$$L^{g_1}L'^{g_2}L''^{g_3},$$
$$(g_1+g_2+g_3=h_1+h_2+h_3=h)$$

dans le développement de l'expression précédente. Celle-ci peut encore s'écrire, d'une façon plus commode,

$$(10')\qquad y_1^{h_2-h_1+h(M'+1)}v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3}=\left(\frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}}y_1^{M'+1}+\frac{L'}{f(M')}y_1^{2(M'+1)}+\frac{L''}{f(M'')}\right)^{h_1}$$
$$\times\left(Lrw^{\frac{1}{2}}y_1^{M'+1}+L'f(M')y_1^{2(M'+1)}+L''f(M'')\right)^{h_2}\left(\frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}}y_1^{M'+1}+iL'y_1^{2(M'+1)}+iL''\right)^{h_3},$$

et, si l'on pose, après avoir désigné par $h_{1.1}, h_{1.2}, \ldots$ etc. des nombres entiers positifs,

$$h_1=h_{1.1}+h_{1.2}+h_{1.3},\qquad h_2=h_{2.1}+h_{2.2}+h_{2.3},\qquad h_3=h_{3.1}+h_{3.2}+h_{3.3},$$

$$(11)\qquad B_h=\frac{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}{\underline{|h_{1.1}}\,\underline{|h_{1.2}}\,\underline{|h_{1.3}}\,\underline{|h_{2.1}}\,\underline{|h_{2.2}}\,\underline{|h_{2.3}}\,\underline{|h_{3.1}}\,\underline{|h_{3.2}}\,\underline{|h_{3.3}}},$$

puis,

$$g_1 = h_{1.1} + h_{2.1} + h_{3.1}, \qquad g_2 = h_{1.2} + h_{2.2} + h_{3.2}, \qquad g_3 = h_{1.3} + h_{2.3} + h_{3.3},$$

elle se développe de cette manière

$$(12) \qquad y_1^{h_2-h_1+h(M'+1)} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3}$$
$$= \sum B_h L^{g_1} L'^{g_2} L''^{g_3} (rw^{\frac{1}{2}})^{h_{2.1}-h_{1.1}} f(M')^{h_{2.2}-h_{1.2}} f(M'')^{h_{2.3}-h_{1.3}} i^{h_{3.2}+h_{3.3}} \left(\frac{C}{Aw^{\frac{1}{2}}}\right)^{h_{3.1}} y_1^{(M'+1)(g_2-g_3+h)}.$$

L'une quelconque des solutions cherchées est donc déterminée par l'équation

$$(13) \qquad v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} = \Lambda(h_1, h_2, h_3, M') y_1^{(g_2-g_3)(M'+1)+h_1-h_2},$$

avec

$$(14) \quad \Lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \sum B_h (rw^{\frac{1}{2}})^{h_{2.1}-h_{1.1}} f(M')^{h_{2.2}-h_{1.2}} f(M'')^{h_{2.3}-h_{1.3}} i^{h_{3.2}+h_{3.3}} \left(\frac{C}{Aw^{\frac{1}{2}}}\right)^{h_{3.1}};$$

la sommation indiquée s'étend à toutes les valeurs des indices pour lesquelles h_1, h_2, h_3 et g_1, g_2, g_3 sont des sommes connues. D'ailleurs il est aisé d'obtenir, pour représenter ces coefficients Λ, des notations plus simples. Soient en effet

$$(15) \qquad \Gamma' = Lrw^{\frac{1}{2}} + L'f(M') + L''f(M''), \qquad \Gamma'' = \frac{L}{rw^{\frac{1}{2}}} + \frac{L'}{f(M')} + \frac{L''}{f(M'')},$$
$$\Gamma''' = \frac{LC}{Aw^{\frac{1}{2}}} + iL' + iL'';$$

il est clair alors que la relation

$$(16) \qquad \Lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{1}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}} \frac{\partial^h}{\partial L^{g_1} \partial L'^{g_2} \partial L''^{g_3}} (\Gamma''^{h_1} \Gamma'^{h_2} \Gamma'''^{h_3}),$$

dans laquelle les opérations indiquées ne sont pas symboliques, mais effectives, est équivalente à (14). Je dis maintenant que les fonctions inconnues, $\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$, sont définies en général par des égalités de cette espèce,

$$(17) \qquad \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3} = \sum_{(k \leqq h)} \alpha_{h_1.h_2.h_3}^{(k)} y_1^{2k-2h_1-h_3},$$

les quantités $\alpha^{(k)}_{h_1.h_2.h_3}$, liées aux seules variables, ω et r, étant fonctions entières, homogènes et de degré

$$2n - 2k + 2h_1 + h_3 - 2h.$$

Pour le prouver, il suffit d'établir que si des formules telles que (17) sont vraies quand l'indice h reçoit les valeurs inférieures à un nombre donné, elles le sont encore quand il atteint ce nombre lui-même. Voici comment on le peut voir: les équations linéaires (a), satisfaites par les inconnues (17), sont ce que deviennent les équations (5) après y avoir remplacé les opérations (4) par les suivantes

$$(18)\qquad \begin{aligned} D\rho'_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho'_h}{\partial y_1} + r\rho'_h - \frac{1}{2} y_1 \rho'''_h, \\ D\rho''_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho''_h}{\partial y_1} - r\rho''_h + \frac{1}{2}\frac{\omega}{y_1}\rho'''_h, \\ D\rho'''_h &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial \rho'''_h}{\partial y_1} + y_1 \rho''_h - \frac{\omega}{y_1}\rho'_h, \end{aligned}$$

et y_2 par $\frac{\omega}{y_1}$; ω, r doivent de plus être traités comme des constantes. Le système adjoint au précédent et sans seconds membres est celui qui est vérifié par les fonctions (13). Or, en vertu des propriétés bien connues des systèmes adjoints, l'identité

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\sum \frac{|\underline{h}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v''^{h_1}_h v'^{h_2}_h v'''^{h_3}_h D(\rho''^{h_1}_h \rho'^{h_2}_h \rho'''^{h_3}_h) \\ &= -\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\sum \frac{|\underline{h}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v''^{h_1}_h v'^{h_2}_h v'''^{h_3}_h . \rho''^{h_1}_h \rho'^{h_2}_h \rho'''^{h_3}_h\right] \end{aligned}$$

a lieu, quelle que soit la valeur attribuée à chacun des trois nombres g_1, g_2, g_3, dont la somme est h, les signes de sommation s'appliquant à toutes les valeurs des indices h_1, h_2, h_3, liés aussi par la seule condition

$$h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

Mais, dans les deux derniers termes de l'équation (5), les dérivées partielles étaient prises en regardant y_1 et y_2 comme les variables indépendantes; lorsqu'on fait jouer ce rôle à y_1 et ω, les termes indiqués s'expriment par

$$(20)\qquad \frac{h_3}{A}\left(y_1 - \frac{\omega}{y_1}\right)\frac{\partial}{\partial\omega}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3-1}) + \frac{h_3}{A}\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3-1}).$$

Si donc le degré en y_1 de la fonction $\rho_{h-1}^{\prime\prime h_1}\rho_{h-1}^{\prime h_2}\rho_{h-1}^{\prime\prime\prime h_3-1}$ était, selon l'hypothèse traduite par la formule (17),

$$2h - (2h_1 + h_3 + 1),$$

celui de l'expression (20) est d'une unité supérieur. D'après la relation (19), pour intégrer le système (a), j'ai à multiplier chacune des fonctions (20) par une autre, de cette forme

$$Ay_1^f,$$

à faire la somme de tous ces produits, à intégrer ensuite l'équation ainsi obtenue, où ω et r sont des constantes, à résoudre enfin des équations linéaires, à coefficients constants, qui font connaître les produits

$$y_1^f\rho_h^{\prime\prime h_1}\rho_h^{\prime h_2}\rho_h^{\prime\prime\prime h_3};$$

or je trouve par ce moyen un polynôme, entier en y_1, de degré visiblement égal à $2h - (2h_1 + h_3 + 1) + 1$. C'est celui que la proposition énoncée attribuait à l'inconnue (17). En outre, le produit de celle-ci par $y_1^{2h_1+h_3}$ est bien une fonction paire de y_1, selon l'une des remarques faites au paragraphe precédent. J'ajoute que, l'intégrale R étant symétrique en y_1, y_2; z_1, z_2, (§ 2), il en doit résulter l'égalité

$$(21)\qquad \omega^{h-k+h_1}\alpha_{h_2.h_1.h_3}^{(h-k)} = \omega^{k+h_2}\alpha_{h_1.h_2.h_3}^{(k)},$$

car $y_2 = \dfrac{\omega}{y_1}$.

§ 5. *Expression des termes qui composent l'intégrale R, dont l'existence est supposée. Mode d'achèvement des calculs qui s'y rapportent.*

Afin d'obtenir les valeurs explicites des coefficients $\alpha_{h_1.h_2.h_3}^{(k)}$, j'aurai besoin de considérer les systèmes différentiels (b'), linéaires et homogènes, obtenus en supprimant les seconds membres dans les équations (a). Je les représente ainsi

$$(1) \qquad D(u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3}) = 0,$$

avec la condition $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Le premier d'entre eux définit les trois fonctions u_1', u_1'', u_1''', par les relations suivantes,

$$(2) \qquad \frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1'}{\partial y_1} - r u_1' + \frac{1}{2} y_1 u_1''' = 0, \qquad \frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1''}{\partial y_1} + r u_1'' - \frac{1}{2} \frac{\omega}{y_1} u_1''' = 0,$$
$$\frac{A_1 r}{A} y_1 \frac{\partial u_1'''}{d y_1} + \frac{\omega}{y_1} u_1' - y_1 u_1'' = 0,$$

desquelles on conclut ceci

$$u_1' = \frac{A^2 w}{4A_1^2(M+1)^2}\left[\frac{2l}{rw^{\frac{1}{2}}} y_1 - \frac{l'}{f(M'')} y_1^{-M'} - \frac{l''}{f(M')} y_1^{-M''}\right],$$
$$(3) \qquad u_1'' = \frac{A^2 w}{4A_1^2(M+1)^2}\left[2lrw^{\frac{1}{2}} y_1^{-1} - l' f(M'') y_1^{-M'-2} - l'' f(M') y_1^{-M''-2}\right],$$
$$u_1''' = \frac{A^2 w}{2A_1^2(M+1)^2}\left[\frac{2lC}{Aw^{\frac{1}{2}}} - il' y_1^{-M'-1} - il'' y_1^{-M''-1}\right];$$

l, l', l'' sont des constantes arbitraires.

En raisonnant comme on l'a fait, au paragraphe précédent, pour le système (b), adjoint à (1), on verrait encore que toutes les solutions de ce dernier s'expriment de cette manière

$$(4) \qquad u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = \lambda(h_1, h_2, h_3, M') y_1^{(g_3 - g_2)(M'+1) + h_2 - h_1},$$

les coefficients λ étant donnés par la formule

$$(5) \qquad \lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{2^{h_3}}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}\left[\frac{A^2 w}{4A_1^2(M'+1)^2}\right]^h$$
$$\times \left[\frac{\partial^h}{\partial l^{g_1} \partial l'^{g_2} \partial l''^{g_3}}\left\{ \left(2lrw^{\frac{1}{2}} - l' f(M'') - l'' f(M')\right)^{h_1} \left(\frac{2l}{rw^{\frac{1}{2}}} - \frac{l'}{f(M'')} - \frac{l'}{f(M')}\right)^{h_2} \left(\frac{2lC}{Aw^{\frac{1}{2}}} - il' - il''\right)^{h_3} \right\}\right].$$

Dans les seconds membres de ces relations (4) et (5), toutes les opérations indiquées sont effectives et non symboliques. A chaque groupe de valeurs attribuées aux trois indices g_1, g_2, g_3, dont la somme est h, il correspond une solution particulière du système (1). La même chose avait lieu, au paragraphe précédent, lorsqu'on employait les formules (13) et (16) pour déterminer les solutions du système (b), adjoint à celui-ci. Je dirai que les solutions de ces systèmes sont concordantes, lorsqu'elles répondent aux mêmes valeurs des indices g_1, g_2, g_3. Alors il est aisé de constater que les formules (3) et ((9) § 4) ont été construites de telle façon que la somme

$$u_1'v_1' + u_1''v_1'' + u_1'''v_1''',$$

si les solutions considérées sont concordantes, soit égale à cette arbitraire,

$$Ll + L'l' + L''l'',$$

différente de zéro; la même somme est nulle au contraire quand les solutions ne sont pas concordantes.

On en déduit immédiatement que les solutions des systèmes généraux (b) et (b') vérifient les identités,

$$\sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = \frac{\underline{|h}}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_2}}, \tag{6}$$

lorsqu'elles sont choisies comme nous l'avons dit et de plus concordantes; elles vérifient au contraire celles-ci

$$\sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} = 0, \tag{7}$$

lorsque la concordance n'a pas lieu.

J'imagine que les fonctions

$$\frac{1}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3}$$

soient réunies en un tableau, celles dont l'ensemble constitue l'une des solutions du système (b) se trouvant sur une seule ligne, toutes les expressions possibles d'une même inconnue formant une seule colonne. A ce tableau correspond un déterminant V. J'en construis un autre, tout semblable, avec les fonctions adjointes,

$$\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}\, u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3}$$

et l'on voit qu'à cause des relations (6) et (7) leur produit est égal à l'unité. En outre, d'après leur composition, si l'un des éléments du premier est v, l'élément de même situation dans le second est

$$\frac{\partial V}{V \partial v}.$$

Ayant donc à résoudre un système linéaire dans lequel chaque équation a pour coefficients les éléments d'une même ligne du déterminant V, je devrai les multiplier par les éléments contenus dans une même colonne du déterminant

$$(8) \qquad \left\| \underline{|g_1} \, \underline{|g_2} \, \underline{|g_3} \, u_h''^{h_1} u_h'^{h_2} u_h'''^{h_3} \right\|,$$

inverse de V et faire la somme des produits ainsi formés.

Ces remarques faites, je reviens au système (a), définissant les inconnues

$$\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$$

qu'il s'agit d'obtenir. En admettant pour plus de brièveté ces notations,

$$(9) \qquad \begin{aligned} \theta(h_1, h_2, h_3, i') &= \frac{h_3}{A} \frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}}{\partial \omega} - \frac{h_1}{2C} \frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1-1.h_2.h_3}}{\partial r}, \\ \vartheta(h_1, h_2, h_3, i') &= \frac{h_2}{2C} \omega \frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2-1.h_3}}{\partial r} - \frac{h_3}{A} \omega \frac{\partial \alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}}{\partial \omega} \\ &\quad + \frac{h_3}{A}(2h_1 + h_3 - 2i' - 1) \alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3-1}, \end{aligned}$$

et celle-ci

$$(10) \qquad T(h_1, h_2, h_3, i') = \theta(h_1, h_2, h_3, i' - 1) + \vartheta(h_1, h_2, h_3, i'),$$

le système à intégrer, (a), s'écrit de cette manière, (§ 4),

$$(a) \qquad hD(\rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}) + \sum_{(i')} T(h_1, h_2, h_3, i') y_1^{2i'-2h_1-h_3} = 0$$

et l'on en déduit

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{hA_1 r}{A} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1} \, \underline{|h_2} \, \underline{|h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3} \right] \\ &- \sum \frac{\underline{|h}}{\underline{|h_1} \, \underline{|h_2} \, \underline{|h_3}} T(h_1, h_2, h_3, i') y_1^{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)} = 0; \end{aligned}$$

les sommes sont étendues à toutes les valeurs de h_1, h_2, h_3, satisfaisant à l'égalité $h_1 + h_2 + h_3 = h$ et à toutes les valeurs de i' inférieures à h.

L'intégration donne en général

$$(12) \qquad \sum \frac{|\underline{h}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . \rho_h''^{h_1} \rho_h'^{h_2} \rho_h'''^{h_3}$$

$$-\sum \frac{|\underline{h-1}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} \cdot \frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{2i' - h + (g_2 - g_3)(M' + 1)} y_1^{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)} = \text{constante } F,$$

elle introduit une constante arbitraire, c'est à dire une fonction de r et de ω, qui, d'après la nature du problème, doit être homogène et algébrique. Comme d'ailleurs

$$y_1^{(g_2-g_3)(M'+1)}$$

est en facteur dans tous les termes de l'équation précédente, ((13) § 4), je puis diviser toute l'équation par ce facteur; elle ne renferme plus ensuite dans son premier membre que des puissances de y_1, entières et de même parité; la valeur de l'exposant M', liée à r et ω, pouvant être quelconque, il est clair que le second membre de l'équation (12) doit s'évanouir, à moins que $g_2 - g_3$ soit égal à zéro et h un nombre pair.

Pour résoudre les équations (12) et en conclure les coefficients cherchés, $\alpha^{(i')}_{k_1.k_2.k_3}$, posons

$$(13) \qquad 2lrw^{\frac{1}{2}} - l'f(M'') - l''f(M') = \gamma'', \qquad \frac{2l}{rw^{\frac{1}{2}}} - \frac{l'}{f(M'')} - \frac{l''}{f(M')} = \gamma',$$

$$\frac{2lC}{Aw^{\frac{1}{2}}} - il' - il'' = \gamma''',$$

en sorte que la formule (5) devienne

$$(14) \qquad \lambda(k_1, k_2, k_3, M') = \frac{2^{h_3}}{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}} \left[\frac{A^2 w}{4A_1^2(M'+1)^2}\right]^h \frac{\partial^h}{\partial l^{g_1} \partial l'^{g_2} \partial l''^{g_3}} (\gamma''^{k_1} \gamma'^{k_2} \gamma'''^{k_3}),$$

avec

$$(15) \qquad k_1 + k_2 + k_3 = h.$$

Le produit

$$(16) \qquad \frac{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} v_h''^{h_1} v_h'^{h_2} v_h'''^{h_3} . u_h''^{k_1} u_h'^{k_2} u_h'''^{k_3}$$

s'exprime en conséquence par

$$(17)\qquad \frac{1}{\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}\,\frac{1}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}\,\frac{\partial^{2h}}{(\partial L\partial l)^{g_1}(\partial L'\partial l')^{g_2}(\partial L''\partial l'')^{g_3}}[\Gamma''^{h_1}\Gamma'^{h_2}\Gamma'''^{h_3}.\gamma''^{k_1}\gamma'^{k_2}\gamma'''^{k_3}],$$

quand $v_h''^{h_1}v_h'^{h_2}v_h'''^{h_3}$ et $u_h''^{k_1}u_h'^{k_2}u_h'''^{k_3}$ correspondent aux mêmes valeurs de g_1, g_2, g_3.

D'après les identités indiquées, la somme de ces produits, pour toutes les valeurs de g_1, g_2, g_3 est égale à l'unité, s'il est satisfait aux relations

$$k_1 = h_1, \qquad k_2 = h_2, \qquad k_3 = h_3,$$

à zéro, s'il n'en est pas ainsi. Comme conséquence,

$$(18)\qquad \alpha^{(i')}_{k_1.k_2.k_3}$$

$$= \frac{A}{hA_1 r}\sum \frac{T(h_1, h_2, h_3, i)}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}\,\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}}\,\frac{\partial^{2h}[\Gamma''^{h_1}\Gamma'^{h_2}\Gamma'''^{h_3}\gamma''^{k_1}\gamma'^{k_2}\gamma'''^{k_3}]}{(\partial L\partial l)^{g_1}(\partial L'\partial l')^{g_2}(\partial L''\partial l'')^{g_3}}\,\frac{1}{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)}.$$

Toutefois, quand $2i' = h$, on doit, dans la formule précédente, modifier les termes qui correspondent à $g_2 - g_3 = 0$, en substituant au quotient

$$\frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}\,\underline{|g_1}\,\underline{|g_2}\,\underline{|g_3}[2i' - h + (g_2 - g_3)(M' + 1)]}$$

une fonction homogène de r et ω, entière et de degré

$$2n + 2 - 3h + 2h_1 + h_3,$$

mais d'ailleurs jusqu'à présent arbitraire. Elle provient du second membre de l'équation (12), F alors n'étant pas nulle.

La formule (18) s'exprime encore d'une autre façon. Les coefficients Λ, λ ne dépendent point en effet des constantes $L, L', \ldots, l''$, dont on a fait usage pour les construire. En posant donc

$$2l = L, \qquad l' = -L', \qquad l'' = -L'',$$

l'expression de λ n'est pas changée; or $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ deviennent ainsi proportionnels à $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$, ce qui permet d'écrire d'abord la relation

$$(19)\qquad \lambda(h_1, h_2, h_3, M') = \frac{1}{(2A_1)^{2h}}\,\frac{(A^2 w)^h}{(M'+1)^{2h}}\,2^{h_3+g}(-1)^{g_2-g_3}\omega^{h_1-h_2}\Lambda(h_1, h_2, h_3, M')$$

et ensuite celle-ci

$$\alpha^{(i')}_{k_1.k_2.k_3} = \frac{A}{hA_1 r}\frac{1}{(2A_1)^{2h}}\frac{(A^2w)^h}{(M'+1)^{2h}}\,\omega^{k_1-k_2}\sum 2^{k_3+g_1}(-1)^{g_2-g_3} \tag{20}$$

$$\times\frac{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}}{|\underline{h_1}\,|\underline{h_2}\,|\underline{h_3}} A(h_1, h_2, h_3, M')A(k_1, k_2, k_3, M')\frac{T(h_1, h_2, h_3, i')}{2i'-h+(g_2-g_3)(M'+1)}.$$

Soit $M'+1=\delta$, en sorte que l'on ait

$$A^2w+C^2=A_1^2\delta^2, \tag{21}$$

à cause de la relation ((10) § 2). En remplaçant, respectivement, L, L', L'' par $Aw^{\frac{1}{2}}L$, $-iCL'$, $-iCL''$, comme on le peut faire, d'après l'observation précédente, je trouve

$$\Gamma'=\frac{r\Delta'}{A},\qquad \Gamma''=\frac{\Delta''}{Awr},\qquad \Gamma'''=\frac{\Delta'''}{C},$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta' &= LA_1^2\delta^2-(L''-L')A_1C\delta-C^2(L+L'+L''),\\ \Delta'' &= LA_1^2\delta^2+(L''-L')A_1C\delta-C^2(L+L'+L''),\\ \Delta''' &= C^2(L+L'+L'').\end{aligned} \tag{22}$$

Il en résulte pour A cette expression nouvelle

$$A(h_1, h_2, h_3, M')=\frac{i^{h+g_1}}{|\underline{g_1}\,|\underline{g_2}\,|\underline{g_3}\,C^{h_3+h}}\frac{1}{(Awr)^{h_1}}\left(\frac{r}{A}\right)^{h_2}\left(\frac{-C}{Aw^{\frac{1}{2}}}\right)^{g_1}\frac{\partial^h[\Delta''^{h_1}\Delta'^{h_2}\Delta'''^{h_3}]}{\partial L^{g_1}\partial L'^{g_2}\partial L''^{g_3}} \tag{23}$$

Je remarque encore l'identité

$$\vartheta(h_1, h_2, h_3, i') = -\,\omega^{2h_1+h_3-2i'}\,\theta(h_2, h_1, h_3, h-i'-1),$$

déduite de ((21) § 4) et de laquelle on conclut

$$T(h_1, h_2, h_3, i') = -\,\omega^{2h_1+h_3-2i'}\,T(h_2, h_1, h_3, h-i').$$

§ 6. *Valeurs exceptionnelles du rapport w. Elles introduiraient des logarithmes, qui disparaissent après un choix convenable des arbitraires dont on dispose.*

Les formules des deux paragraphes précédents sont sujettes à des exceptions qu'il est aisé d'apercevoir et qui répondent à certaines valeurs particulières du rapport $w = \frac{\omega}{r^2}$. L'une d'elles s'était offerte déjà donc l'intégration du système (b). S'il arrive en effet que l'on ait $\delta = 0$ c'est à dire

$$(1) \qquad A^2 w + C^2 = 0,$$

l'équation caractéristique de ce système, qui n'est autre que l'équation ((10) § 2), possède deux racines égales, en sorte que, pour avoir toutes les solutions distinctes, relatives à cette valeur de w, l'on doit introduire, non plus seulement des puissances de y_1, mais des termes logarithmiques. La même circonstance peut encore se présenter, et pour plusieurs valeurs de ξ, dans l'intégration du système (a), car tous les termes pour lesquels

$$(2) \qquad 2i' - h + (g_2 - g_3)\delta = 0,$$

introduisent, dans l'équation (12) du paragraphe précédent, non point une puissance de y_1, mais un logarithme. Les valeurs du rapport w, définies par les égalités (1) et (2), sont ce que nous avons appelé des valeurs exceptionnelles. Elles sont de la première catégorie, quand l'égalité (1) est vérifiée; de la seconde, dans le cas contraire.

Afin que leur présence n'empêche point d'être algébriques les intégrales du système (a), quelles sont les conditions à remplir?

Les formules ((20) § 5) font connaître les quantités $\alpha^{(i')}_{k_1 k_2 k_3}$ comme sommes de certains quotients; elles ne contiennent, on le voit sans peine, que des puissances paires de δ et sont, par conséquent, de forme rationnelle, mais elles doivent être entières, puisque l'intégrale cherchée l'est elle-même et d'ailleurs, en vertu de l'analyse précédente, les seules solutions du système (a), qui soient en général finies pour les valeurs exceptionnelles du rapport w, renferment des transcendantes logarithmiques, à moins que ces valeurs ne correspondent à aucune singularité: ceci exige que, dans les expressions (20),

1° tous les dénominateurs

$$2i' - h + (g_2 - g_3)\delta$$

divisent les numérateurs correspondants,

$$\sum \frac{\Delta T}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}};$$

2° que la somme des quotients obtenus soit divisible par δ^{2h}.

Pour faire en sorte qu'il en soit ainsi, l'on dispose de la fonction ρ, à laquelle se réduit l'intégrale R, quand μ s'évanouit, des polynômes arbitraires provenant des équations ((12) § 5), pour lesquelles F n'est pas nulle; on a vu que ces derniers existent lorsque h est pair et $g_2 = g_3$, mais ne se présentent dans aucun autre cas. Il reste à savoir si l'on peut choisir ces arbitraires de telle façon que les conditions indiquées soient remplies.

C'est ce que peuvent établir les résultats du § 3, dont je rappelle les conclusions:

Pourvu que $\sin\varepsilon$ soit égal à zéro, et le rapport $\frac{2C}{A}$ à un nombre entier, il existe, outre les trois intégrales communes à tous les cas, une quatrième intégrale algébrique, admissible pour des valeurs infiniment petites de y_1, z_1 et x_3. Cela étant, j'observe que rien n'empêche d'attribuer au rapport $\frac{\omega}{r^2}$ l'une quelconque des valeurs exceptionnelles, bien que les trois quantités y_1, z_1 et x_3 demeurent infiniment petites. Voici comment on peut s'en convaincre. Je regarde les inconnues du problème comme renfermant un certain paramètre φ, de telle façon que, si ce dernier s'annule, on en puisse conclure

$$y_1 = z_1 = x_3 = 0;$$

les valeurs infiniment petites de φ répondent alors aux solutions infiniment voisines de cette solution simple. Les notations du § 3 étant conservées, le point est de montrer qu'avec les expressions trouvées pour η_1, $y_2 + \eta_2$, ..., etc., ξ_3, on a le moyen de construire quatre combinaisons algébriques dont les arbitraires demeurent limitées, quand w reçoit ses valeurs critiques. A cet effet, comme y_1 est nul, η_1 infiniment petit, j'imagine que r s'approche de zéro et cela, de telle manière que, ni le rapport

$$\frac{y_2\eta_1}{r^2},$$

ni son inverse, ne tendent à s'évanouir. J'ai donné déjà des formules qui se laissent représenter ainsi

$$(3) \qquad z^{\frac{C}{A}-1} y_2 = h_1, \qquad Cr^2 = \mu z_2 + H,$$

$$\frac{y_2\eta_1}{r} = \frac{1}{2} h_1 \sqrt{C} \left[\mu\alpha h_1 \int \frac{z^{-\frac{2C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\beta\mu}{A} \int \frac{z_2^{-\frac{C}{A}} dz_2}{(\mu z_2 + H)^{\frac{3}{2}}} + 2\gamma \right];$$

h_1, H, ainsi que α, β, γ, sont des constantes à volonté, les trois dernières seulement de l'ordre du paramètre φ. Ces égalités mettent en évidence ce qu'il s'agissait d'établir: en conservant aux constantes des valeurs finies dans les quatre intégrales algébriques satisfaites par les solutions infiniment voisines de la solution simple, on a pu faire tendre le rapport w vers une de ses valeurs exceptionnelles. Puisqu'il ne s'est pourtant introduit aucun logarithme, c'est qu'il est possible de déterminer les polynômes arbitraires que l'on possédait, de telle manière que les divisions indiquées s'effectuent sans aucun reste. Ayant donc construit, par les procédés des §§ 4 et 5, une intégrale R, de même degré que la précédente et, cette fois, sans rien supposer sur l'ordre de grandeur de y_1, z_1 et x_3, on est assuré de lui pouvoir donner une forme entière; mais je dois ajouter à ce sujet quelques explications.

Je dis que, s'il y avait des logarithmes dans deux intégrales, distinctes et d'ordinaire finies pour toutes les valeurs critiques du rapport w, ces logarithmes subsisteraient dans des équations intégrales qu'on sait obtenir (celles qui définissent les expressions trouvées pour $\eta_1, \eta_2, \ldots, \xi_3$) et ne permettraient pas d'en former quatre combinaisons algébriques.

J'ai déjà prouvé l'existence de ces dernières, sous certaines conditions que je suppose désormais remplies. L'une de ces combinaisons fait connaître les premiers éléments d'une intégrale nouvelle, développée selon les puissances d'un paramètre φ, différent de μ. Mais, parmi les éléments, dans lesquels entre φ au degré le plus proche de zéro, il est clair qu'il y en a de tous les degrés d'homogénéité inférieurs à un certain nombre entier, lié au quotient $\frac{2C}{A}$. Or voici ce qu'on en doit conclure. De tous les coefficients, que j'ai représentés par $\alpha^{(i)}_{h_1.h_2.h_3}$, il en est un pour chaque valeur de l'indice h et, à cause d'une symétrie déjà signalée, il en est au moins deux, qui sont algébriques et entiers. Cela exige l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

1°. Tous les coefficients appartenant à un même indice h sont des polynômes entiers en ω, r^2.

2°. Les coefficients appartenant à un même indice h ne sont pas tous débarrassés des transcendantes, bien que quelques-uns satisfassent à cette condition. Dans chacun d'eux et pour chaque valeur critique de la seconde catégorie, $\log y_1$ se présente multiplié par une fonction linéaire et homogène des expressions

$$\sum \frac{AT}{\underline{|h_1}\,\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}, \tag{4}$$

où il faut imaginer que δ soit remplacé par $\frac{2i' - h}{g_2 - g_3}$. Afin que le logarithme ne puisse jamais s'introduire dans un coefficient d'indices déterminés, les relations nécessaires sont en nombre égal à celui des quantités (4), qu'elles contiennent au premier degré. Les équations ainsi obtenues sont homogènes et il est évident que leur déterminant n'est pas nul, car il est le produit de plusieurs autres, invariablement égaux à l'unité. Leurs inconnues, c'est à dire les quantités (4) elles-mêmes, doivent donc s'évanouir et, comme conséquence, tous les coefficients $\alpha^{(i')}_{h_1.h_2.h_3}$ demeurent algébriques, pourvu du moins que δ diffère de zéro.

Lorsque δ s'annule, ce qui donne une valeur critique de la première catégorie, une solution des systèmes linéaires (a) § 5, restant en général finie, peut renfermer $\log y_1$ et même plusieurs de ses puissances; mais, comme ce log peut être augmenté d'un multiple quelconque de $2i\pi$, l'on voit que de la solution connue l'on en sait déduire une autre, de degré moindre en $\log y_1$, en sorte qu'il y a nécessairement, pour les systèmes linéaires indiqués, une solution non transcendante et sans cesse finie, comme il le fallait établir.

Soit n la plus haute puissance de μ que l'on trouve dans l'expression R; une conséquence de la disparition des dénominateurs qui figuraient dans la formule ((20) § 5), c'est que le coefficient de μ^n ne contient plus ω ni r^2, étant à leur égard de degré zéro; (en vertu de la relation ((21) § 4), quand $h = n$, $2h_1 + h_3 - 2k$ s'annule et représente précisément le degré de $\alpha^{(k)}_{h_1 . h_2 h_3}$). Ce coefficient de μ^n est alors une fonction entière des seules variables z_1, z_2 et x_3. Cela suffit pour que R_{n+1} s'évanouisse, c'est à dire que R soit effectivement une intégrale, entière et de degré n. Ainsi les deux conditions

$$\sin\varepsilon = 0,$$

$$\frac{2C}{A} \text{ égal à un nombre entier,}$$

reconnues nécessaires afin que le problème de la rotation admette une quatrième intégrale algébrique, sont aussi suffisantes.

§ 7. *Solutions développées en séries quand,* $\sin\varepsilon$ *étant nul, le rapport* $\frac{2C}{A}$ *demeure quelconque. Convergence dans les cas ordinaires. Conséquences relatives aux propriétés des intégrales, lorsque* $\frac{2C}{A}$ *devient un nombre entier.*

Les équations différentielles sont les suivantes, (§ 3),

$$(1)\qquad \begin{aligned} &A\frac{dy_1}{d\tau} = -(A_1 r y_1 + \mu x_3), \quad A\frac{dy_2}{d\tau} = A_1 r y_2 + \mu x_3, \quad 2C\frac{dr}{d\tau} = \mu(z_2 - z_1), \\ &\frac{dz_1}{d\tau} = x_3 y_1 - r z_1, \qquad \frac{dz_2}{d\tau} = r z_2 - x_3 y_2, \qquad 2\frac{dx_3}{d\tau} = y_2 z_1 - y_1 z_2, \end{aligned}$$

dans l'hypothèse où $\sin\varepsilon$ est égal à zéro; les inconnues $y_1, y_2, \ldots, x_3$, qui les vérifient, se développent en général selon les puissances entières de μ, de cette manière,

$$(2)\qquad y_1 = y_{1.0} + \mu y_{1.1} + \cdots, \quad \ldots\ldots, \quad x_3 = x_{3.0} + \mu x_{3.1} + \cdots$$

et les premiers termes des séries précédentes sont données par un calcul simple; je trouve d'abord

$$(3) \qquad y_{1.0} = \beta_1 e^{-\frac{A_1 r_0}{A}\tau}, \qquad y_{2.0} = \beta_2 e^{\frac{A_1 r_0}{A}\tau},$$

β_1, β_2, r_0 désignant des constantes arbitraires; puis, après avoir posé

$$(4) \qquad \theta = e^{\frac{A_1 r_0}{A}\tau}, \qquad z_1 = \zeta_1 \theta^{-1}, \qquad z_2 = \zeta_2 \theta,$$

pour déterminer $\zeta_{1.0}, \ldots, x_{3.0}$ j'obtiens un système linéaire

$$(5) \qquad \begin{gathered} \frac{d\zeta_{1.0}}{d\tau} + \frac{Cr_0}{A}\zeta_{1.0} - \beta_1 x_{3.0} = 0, \qquad \frac{d\zeta_{2.0}}{d\tau} - \frac{Cr_0}{A}\zeta_{2.0} + \beta_2 x_{3.0} = 0, \\ \frac{2dx_{3.0}}{d\tau} - \beta_2 \zeta_{1.0} + \beta_1 \zeta_{2.0} = 0, \end{gathered}$$

à coefficients constants, dont voici l'équation caractéristique

$$(6) \qquad s\left(s^2 - \beta_1\beta_2 - \frac{C^2 r_0^2}{A^2}\right) = 0.$$

Comme conséquence

$$(7) \qquad \begin{gathered} \beta_2\zeta_{1.0} + \beta_1\zeta_{2.0} + \frac{2Cr_0}{A}x_{3.0} = \beta_3, \qquad \frac{\beta_2\zeta_{1.0}}{\frac{Cr_0}{A} - s} + \frac{\beta_1\zeta_{2.0}}{\frac{Cr_0}{A} + s} + 2x_{3.0} = \beta_4 e^{-s\tau}, \\ \frac{\beta_2\zeta_{1.0}}{\frac{Cr_0}{A} + s} + \frac{\beta_1\zeta_{2.0}}{\frac{Cr_0}{A} - s} + 2x_{3.0} = \beta_5 e^{s\tau}; \end{gathered}$$

$\beta_3, \beta_4, \beta_5$ représentent encore, dans ces formules, des arbitraires, s l'une des deux valeurs différentes de zéro qui vérifient l'équation caractéristique.

Soit $e^{s\tau} = \sigma$; des relations (7) il résulte celles-ci

$$(8) \qquad \begin{gathered} \zeta_{1.0} = \frac{\beta_1}{4s^2}\left[\left(s - \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_5\sigma + 2\beta_3 - \left(s + \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_4\sigma^{-1}\right], \\ \zeta_{2.0} = \frac{\beta_2}{4s^2}\left[\left(s - \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_4\sigma^{-1} + 2\beta_3 - \left(s + \frac{Cr_0}{A}\right)\beta_5\sigma\right], \\ x_{3.0} = \frac{\beta_1\beta_2}{4s^2}\left[\beta_4\sigma^{-1} + \frac{2Cr_0}{A}\frac{\beta_3}{\beta_1\beta_2} + \beta_5\sigma\right], \end{gathered}$$

qui achèvent de définir les premiers termes des séries (2).

Parmi ceux de l'ordre suivant, trois sont déterminés par des quadratures immédiates, ce sont $r_1, y_{1.1}, y_{2.1}$; les trois autres résultent de l'intégration d'un système linéaire, à coefficients constants, qui diffère du système (5) en un seul point: Les seconds membres, au lieu d'être nuls, sont des fonctions données de la variable τ.

Dans ce calcul, il s'introduit six nouvelles constantes arbitraires, que je supposerai choisies, par exemple de telle façon que les six quantités

$$y_{1.1}, \ldots, x_{3.1},$$

s'évanouissent à la fois quand τ lui-même s'annule.

D'une manière générale, on voit sans peine que, si les termes des séries cherchées sont regardés comme connus, jusques et y compris l'ordre $h - 1$, les termes de l'ordre h s'en déduisent, les trois premiers,

$$r_h, \; y_{1.h}, \; y_{2.h}, \tag{9}$$

par des quadratures immédiates, les trois autres,

$$\zeta_{1.h}, \; \zeta_{2.h}, \; x_{3.h} \tag{10}$$

par l'intégration d'un système linéaire à coefficients constants. Celui-ci ne diffère de (5) que par la présence, dans chaque équation, d'un second membre, représenté par une fonction déjà connue de la variable τ.

Je ne crois pas utile de transcrire ici les formules qui résultent de cette intégration et je me borne à quelques remarques, dont l'exactitude est évidente.

Les six termes d'un même ordre h sont exprimés par des polynômes entiers, au moyen de τ et des exponentielles,

$$\theta, \; \theta^{-1}, \; \sigma, \; \sigma^{-1}.$$

Ce sont aussi des fonctions entières de $\beta_3, \beta_4, \beta_5$; elles sont homogènes à l'égard de cet ensemble, les trois inconnues (9) étant du degré h, les trois dernières (10), de degré $h + 1$; les coefficients qui y figurent sont enfin des fonctions rationnelles de s et de β_1, β_2, r_0; j'ajoute qu'elles jouissent encore d'une seconde homogénéité.

Afin d'en donner la définition, j'imagine que $\beta_1, \beta_2, r_0, \beta_4, \beta_5$ et par suite s soient regardés, ainsi que μ, comme étant de degré 1, β_3 du degré 2, τ du degré -1; alors σ, θ sont du degré zéro, $y_{1.h}, \ldots, x_{3.h}$, sont homogènes et de degré $1-h$, $y_1, \ldots, x_3$, sont aussi homogènes et de degré 1.

Il est naturel de se demander si les séries ainsi obtenues sont en général convergentes; c'est ce que la démonstration suivante permet d'affirmer:

L'un des théorèmes de M. Poincaré prouve que la convergence a lieu, quelles que soient les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ et de τ, pourvu que μ reste compris dans un certain domaine. Un seul cas fait exception à cette règle; il se présente quand les valeurs choisies pour τ et les constantes initiales $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ font »passer» la solution correspondante par un point singulier.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, mais que $|\mu|$ soit supérieur à cette limite pour laquelle la convergence est assurée. En posant $\mu = \mu'\mu''$, rien n'empêche de prendre $|\mu'|$ au dessous de la limite indiquée; les séries, ordonnées selon les puissances de μ', convergentes en vertu de l'hypothèse précédente, développent alors les inconnues, pour toute valeur ordinaire de τ et des constantes, après substitution de μ' à μ. Mais, à cause d'une homogénéité déjà signalée, l'on peut changer μ' en μ, si l'on remplace aussi $\beta_3, \ldots, \beta_5$ par $\frac{\beta_3}{\mu''}, \ldots, \frac{\beta_5}{\mu''}$ et, puisque les séries convergeaient pour toute valeur ordinaire de ces paramètres, avec la détermination adoptée pour μ', la conclusion nécessaire est qu'elles convergent pour toute valeur de μ.

Quand la solution considérée va »passer» par un point critique, la divergence peut se produire. Les valeurs de τ et des inconnues, relatives à ce point, doivent visiblement être telles qu'en le prenant pour origine, quelques-unes des fonctions $y_{1.h}, \ldots, x_{3.h}$, construites d'après cette nouvelle hypothèse, cessent d'être finies ou tout au moins d'être représentées par l'expression analytique qui leur convient dans les cas ordinaires.

Les formules obtenues montrent que ces circonstances sont toujours évitées, à moins que la variable τ croisse indéfiniment ou que le rapport

$$\frac{A_1 r_0}{As}$$

soit un nombre commensurable. En conséquence et tenant compte des égalités (3) et (6), on voit que les valeurs de ω et r qui répondent à des points critiques sont définies par des relations de cette espèce

$$\frac{A_1^2 r^2}{A^2\omega + C^2 r^2} = \frac{m''^2}{m'^2}, \tag{11}$$

où j'ai désigné par m', m'' deux nombres entiers réels; ces points peuvent aussi s'offrir quand τ devient supérieur à toute quantité donnée.

Au commencement de ce paragraphe, j'ai montré que les inconnues se développent en séries ordonnées selon les puissances positives de μ, les coefficients de ces puissances étant des fonctions entières de τ et des exponentielles $\theta, \sigma, \theta^{-1}, \sigma^{-1}$. Elles sont ainsi représentées par les formules,

$$(12)\qquad \begin{aligned} y_1 &= y_{1.0} + \mu y_{1.1} + \ldots + \mu^n y_{1.n} + \mu^{n+1}[y_{1.n+1}],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_3 &= x_{3.0} + \mu x_{3.1} + \ldots + \mu^n x_{3.n} + \mu^{n+1}[x_{3.n+1}], \end{aligned}$$

dans lesquelles $[y_{1.n+1}], \ldots, [x_{3.n+1}]$ désignent des expressions, non développées, mais qui tendent vers des limites finies lorsque μ tend vers zéro. Entre ces relations, au nombre de six, σ, θ, traitées comme des variables distinctes, peuvent être éliminés par des opérations algébriques. Les quatre équations obtenues sont rationnelles à l'égard des différences,

$$y_1 - \mu^{n+1}[y_{1.n+1}], \quad \ldots, \quad x_3 - \mu^{n+1}[x_{3.n+1}] \tag{13}$$

et de τ. Si cette dernière variable y figure effectivement, ce qui est le cas ordinaire, elle peut aussi être éliminée par des opérations rationnelles et cela, de plusieurs façons. Il est clair que les équations ainsi construites résultent des trois intégrales, toujours existantes, où les inconnues toutefois sont remplacées par leurs valeurs approchées (13).

Imaginons maintenant qu'après avoir choisi le rapport $\frac{C}{A}$ comme il convient, il y ait une quatrième intégrale algébrique et, par suite, une intégrale homogène et entière, de degré n à l'égard du paramètre μ. Elle implique pour $y_1, y_2, \ldots, x_3$ une relation, également vérifiée jusqu'aux termes en μ^{n+1}, par les expressions précédentes (13), qui représentaient la n^e approximation. Au reste, les équations calculées en éliminant θ, σ ne peuvent être en nombre supérieur à quatre; il est donc nécessaire que la variable τ elle-même n'y entre pas. Cette condition satisfaite, voici comment on peut former les équations dont il s'agit.

Je traite d'abord σ, θ, σ^{-1}, θ^{-1}, comme des indéterminées distinctes, que j'élimine et, le faisant, je suis conduit à calculer ces quantités en fonctions rationnelles des différences (1). Or le produit des expressions attribuées à $\beta_2\theta$, $\beta_1\theta^{-1}$ constitue une équation intégrale, aux termes près qui ont en facteur μ^{n+1}. De ces deux expressions, ni l'un ni l'autre ne peut renfermer τ, puisque leur produit ne le renferme pas; si l'une d'elles est annulée, il en résulte avec la même approximation une équation invariante, algébrique, qui n'est point une intégrale; pareille remarque est encore vraie pour la seconde. D'après cela, je construis, ce qui est possible, un polynôme entier, homogène, doué de cette propriété qu'en l'égalant à zéro et tenant compte des trois intégrales communes à tous les cas, on reproduise, jusqu'aux termes en μ^n au moins, l'une des deux équations invariantes qui viennent d'être indiquées. La même opération étant faite pour l'autre, l'un de ces deux polynômes homogènes, T_1, T_2, se déduit du second, lorsqu'on y permute y_1 avec y_2, z_1 avec z_2; c'est donc leur produit qui représente, avec l'approximation voulue, la quatrième intégrale, dont l'existence est supposée.

Il est clair que ceci est inadmissible, à moins,

que le nombre n soit pair,

qu'aucune des deux polynômes T_1, T_2, ne possède de termes, dont le degré soit supérieur à $\frac{n}{2}$, les homogénéités et la symétrie s'y opposant,

que chacun de ces polynômes, égalé à zéro, constitue une équation invariante et que le premier membre de l'intégrale soit décomposable en ces deux facteurs.

Mais, dans T_1, la partie indépendante de μ peut être représentée ainsi,

$$Ty_1^e,$$

pendant qu'elle l'est dans T_2 par

$$Ty_2^e;$$

T désigne alors une fonction de r^2 et ω qui, en vertu de la symétrie, est la même dans les deux cas. Il s'ensuit que, sous sa forme décomposable, l'intégrale commence par

$$T^2 . \omega^e .$$

J'ajoute que e doit être pair, car le dernier terme de chaque polynôme T_1, T_2, est une fonction entière de z_1, z_2, x_3, ce qui signifie que son degré d'homogénéité est un nombre pair.

Le premier terme de l'intégrale est donc un carré parfait; sa racine est divisible, au moins une fois, par ω; il resterait à définir ses autres diviseurs. J'observe d'abord que si, dans T_1 ou T_2, on donne à $y_1, y_2, \ldots, x_3$ des valeurs qui ne font pas évanouir le polynôme considéré, il devient une constante, multipliée par l'exponentielle

$$e^{-\lambda_2 \int r d\tau}$$

ou par son inverse, en sorte que

$$T_1 = T_1^{(0)} e^{-\lambda_2 \int r d\tau}, \qquad T_2 = T_2^{(0)} e^{\lambda_2 \int r d\tau}, \qquad R = T_1^{(0)} T_2^{(0)};$$

c'est ce que l'on a vu déjà dans le § 1.

Imaginons que la constante $T_1^{(0)} T_2^{(0)}$ soit donnée, indépendante de μ, et considérons les expressions de $y_1, y_2, \ldots, x_3$ qui lui rendent égale l'intégrale R. Quand $\frac{\omega}{r^2}$ prend l'une des valeurs qui font évanouir le premier terme ρ de l'intégrale, tous les autres ayant en facteur μ, le produit $T_1^{(0)} T_2^{(0)}$, qui ne dépend pas de μ par hypothèse, doit être nul, à moins que certaines des inconnues augmentent sans limites avec $\frac{1}{\mu}$. De même, T_1, par exemple, peut s'évanouir, même quand $T_1^{(0)}$ n'est pas nulle; $\int r d\tau$ est alors infinie, ce qui exige, ou bien que τ le soit aussi, ou bien que le rapport $\frac{\omega}{r^2}$ atteigne l'une des valeurs (11).

Ces remarques faites, il est évident qu'on peut satisfaire à l'ensemble des conditions suivantes:

1°. $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ ne sont pas nulles et ne dépendent pas de μ;

2° les valeurs attribuées à τ ne tendent pas vers l'infini, cependant elles donnent au rapport $\frac{\omega}{r^2}$ l'une des valeurs annulant le premier terme de l'intégrale R.

Alors l'un des dénominateurs que contient r s'évanouit et l'on en conclut que les racines de T sont comprises dans cette formule

$$m''^2(A^2\omega + C^2r^2) - m'^2A_1^2r^2 = 0,$$

où les nombres entiers m', m'', ne sont pas connus.

§ 8. *Remarques sur les moyens d'achever la détermination de l'intégrale. Proposition relative aux systèmes différentiels ayant des intégrales uniformes.*

J'ai montré § 5 comment se déduisent les uns des autres les différents termes d'une intégrale, supposée homogène et entière. Comme le degré de cette dernière est limité (§ 6), pour chaque valeur admissible du rapport $\frac{C}{A}$, son calcul au moyen de coefficients indéterminés n'offre, en théorie, pas de difficultés; en fait une méthode aussi directe ne peut convenir, ni dans l'étude générale du problème, parce qu'il s'agit surtout alors d'une solution formelle, ni même dans les cas particuliers les plus simples, en raison des opérations trop nombreuses qu'elle nécessite. Le point le plus important serait d'obtenir, pour le terme indépendant de μ dans le polynôme R, des propriétés qui le caractérisent sans l'intervention de tous les autres. Un premier pas a été fait dans cette voie vers la fin du paragraphe précédent; toutefois, le résultat établi ne suffit pas et, malgré l'intérêt visible qui s'attache à la question, non seulement dans les cas d'intégration algébrique, mais même dans les recherches relatives à l'intégration uniforme, je suis obligé d'en laisser l'étude encore incomplète, me proposant de la joindre, s'il est possible, à un prochain Mémoire. Je me borne, sur ce sujet, aux remarques suivantes, qui mettent sous un jour nouveau les propriétés des solutions périodiques.

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (1 \leq i \leq m), \tag{1}$$

dont les seconds membres ne dépendent que de $x_1, x_2, \dots, x_m$. Je suppose que, parmi leurs intégrales, $m-2$ soient connues et uniformes et ne contiennent pas t. Par elles je puis exprimer $x_1, x_2, \dots, x_m$ en fonction de x_1, x_2, et de $m-2$ constantes arbitraires $\alpha_3, \dots, \alpha_m$. Soit Δ_2 le déterminant

$$\sum \pm \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m},$$

$\Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_m$, les déterminants de même espèce qui résultent de la substitution de x_2 à $x_3, x_4, \dots, x_m$, dans Δ_2, suivie d'un changement de signe. D'après les équations proposées,

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_i}{X_1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_k} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_i}{X_1}\right)\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_k} \tag{2}$$

et, comme conséquence,

$$\frac{d\Delta_2}{dx_1} = \Delta_2\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_m}{X_1}\right)\right] - \Delta_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) - \dots - \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_m}{X_1}\right); \tag{3}$$

de sorte qu'en posant pour abréger

$$\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{X_m}{X_1}\right), \tag{4}$$

l'équation précédente et ses analogues se laissent ainsi représenter

$$\begin{aligned} &\frac{d\Delta_2}{dx_1} + \Delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \dots + \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{X_m}{X_1}\right) = \sigma_1 \Delta_2, \\ &\frac{d\Delta_3}{dx_1} + \Delta_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + \dots + \Delta_m \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{X_m}{X_1}\right) = \sigma_1 \Delta_3, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{5}$$

Quand $x_2, x_3, \dots, x_m$ sont supposées connues en fonction de x_1 et des arbitraires, les relations (5) définissent $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_m$ et, de plus, sont linéaires. Si la variable indépendante, x_1, décrit un cycle *et qu'il en soit de même de $x_2, x_3, \dots, x_m$,* un système fondamental de solutions des équations précédentes subit une substitution. Mais l'une de ces solutions est composée de fonctions uniformes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$, lorsque les intégrales connues $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m$ sont elles-mêmes uniformes. En conséquence, cette solution n'est pas altérée par les substitutions dont il s'agit. Si donc on considère le groupe de ces dernières, quand la variable x_1 décrit tous les cycles déjà définis, ce groupe ne peut point être primaire.

Imaginons que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dépendent d'un paramètre μ et que l'on sache intégrer le système (1), quand μ est égal à zéro. D'après un théorème de M. Poincaré, on peut, pour des valeurs assez petites de ce paramètre, développer les solutions suivant les puissances de μ; par suite, les coefficients des équations (5) seront développés de la même manière ainsi que, dans le groupe précédent, les coefficients des substitutions fondamentales.

Après avoir calculé ces coefficients, jusqu'aux termes en μ^n et sachant d'ailleurs, non pas obtenir les $m-2$ intégrales uniformes, mais exprimer $x_3, x_4, \ldots, x_m$ en fonction de x_1, x_2 et de $m-2$ constantes, liées d'une façon quelconque aux valeurs initiales des variables, on pourra

1° vérifier que le groupe des équations (5) n'est pas primaire;

2° choisir leurs solutions fondamentales de manière à présenter ce groupe sous la forme typique, c'est à dire mettre en évidence les sous-groupes dont il se compose. Or ceci consiste à remplacer les arbitraires par d'autres, fonctions données des précédentes et parmi lesquelles doivent être comprises les intégrales uniformes. Quand une seule de ces dernières reste inconnue, il en résulte pour elle et notamment pour celui de ses termes qui ne s'annule pas avec μ, des conditions à satisfaire, celles que je voulais signaler.

Dans le problème de la rotation, j'ai montré, (§ 7), comment les inconnues $y_1, y_2, \ldots, x_3$ et, par suite aussi, les déterminants, solutions d'un système semblable à (5), s'expriment en fonction de la variable τ et de six constantes arbitraires. Les trois intégrales uniformes, communes à tous les cas, sont liées à ces dernières par des relations simples. Les cycles décrits par l'une des inconnues, prise pour variable, doivent être tels que toutes les autres décrivent aussi des cycles; c'est dire qu'il faut considérer une solution périodique et laisser τ s'accroître d'une période, lorsque la variable nouvelle, z_1 par exemple, décrit un cycle.

Les équations différentielles ((1) § 7) n'ayant aucun point singulier à distance finie, pourvu que τ soit la variable indépendante, l'unique groupe admissible est celui qui correspond aux solutions périodiques; sa recherche n'offre rien dont la théorie soit difficile, mais les opérations sont encore assez longues pour qu'il soit indispensable de les abréger à l'aide de quelques artifices; j'en remets l'étude à une autre occasion.