

THÉORIE DES ÉQUATIONS REPRÉSENTABLES
PAR TROIS SYSTÈMES LINÉAIRES DE POINTS COTÉS

PAR

MAURICE D'OCAGNE

à PARIS.

Préambule.

1. Supposons qu'une équation donnée entre α_1 , α_2 et α_3 puisse se mettre sous la forme

$$(E) \quad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime que les points définis en coordonnées homogènes respectivement par

$$(\alpha_1) \quad x = f_1(\alpha_1), \quad y = \varphi_1(\alpha_1), \quad t = \psi_1(\alpha_1),$$

$$(\alpha_2) \quad x = f_2(\alpha_2), \quad y = \varphi_2(\alpha_2), \quad t = \psi_2(\alpha_2),$$

$$(\alpha_3) \quad x = f_3(\alpha_3), \quad y = \varphi_3(\alpha_3), \quad t = \psi_3(\alpha_3),$$

sont en ligne droite. Si donc, dans les trois systèmes de formules précédents, nous faisons varier respectivement α_1 , α_2 et α_3 en ayant soin d'inscrire à côté de chaque point obtenu la valeur du paramètre correspondant, nous n'aurons qu'à *couper les trois systèmes de points cotés ainsi construits par une droite quelconque pour obtenir un système de valeurs de α_1 , α_2 et α_3 satisfaisant à l'équation donnée.*

Les points cotés correspondant à chaque paramètre sont distribués sur une courbe qui en est dite le *support*.

2. Si $f_i(\alpha_i)$, $\varphi_i(\alpha_i)$, $\psi_i(\alpha_i)$ sont des fonctions linéaires d'une même fonction $\theta_i(\alpha_i)$, le système (α_i) a pour support une ligne droite sur laquelle il constitue une sorte de graduation. Lorsque la fonction θ_i change, cette ligne droite reste la même; seule la graduation se modifie. Le cas le plus simple est celui où la fonction $\theta_i(\alpha_i)$ se réduit à α_i ; le système de points cotés (α_i) est alors dit *linéaire*.

Le problème se pose d'abord de reconnaître quelles sont les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés et de déterminer pour une telle équation les fonctions f_i , φ_i , ψ_i ($i = 1, 2, 3$) correspondantes. C'est l'objet de la première partie de ce Mémoire.

Si, en faisant varier α_i par échelons égaux, ou obtient sur le support rectiligne des points également espacés les uns des autres, le système est dit *régulier*. Un tel système réalisant, au point de vue de la représentation géométrique, le maximum de simplicité, il est intéressant de rechercher si, par une transformation homographique appropriée, on peut rendre réguliers un, deux, ou même les trois systèmes linéaires servant à représenter une équation donnée. C'est l'objet de la seconde partie du Mémoire.

A la vérité, on aurait pu traiter les deux problèmes à la fois, mais la solution eût alors perdu en netteté sans gagner beaucoup en brièveté; aussi la division adoptée pour le sujet a-t-elle paru préférable.

Le premier problème est susceptible d'une interprétation géométrique qui se trouve indiquée dans une Note placée à la fin de la première partie.

Formules et remarques préliminaires.

3. Etant donné un ensemble de trois systèmes de points cotés, on peut toujours, en conservant les cotes, lui faire subir une transformation homographique quelconque puisque, dans une telle transformation, l'alignement des points se conserve.

On pourra des lors faire en sorte que les supports des trois systèmes soient des droites assignées d'avance, en distinguant toutefois les cas où ces supports sont ou non concourants, circonstance qui subsiste pour toute transformation homographique.

1^{er} Cas. *Les supports ne sont pas concourants.* Dans ce cas, une transformation homographique permet de faire coïncider deux des supports avec les axes de coordonnées Ox et Oy et le troisième avec la droite de l'infini du plan Oxy (ce qui revient à faire correspondre à chaque valeur de α_3 une direction du plan). Les trois systèmes sont dès lors définis par

$$(a) \quad \begin{cases} x = m_1\alpha_1 + n_1, & y = 0, & t = p_1\alpha_1 + q_1, \\ x = 0, & y = p_2\alpha_2 + q_2, & t = m_2\alpha_2 + n_2, \\ x = p_3\alpha_3 + q_3, & y = m_3\alpha_3 + n_3, & t = 0, \end{cases}$$

et l'équation représentée prend la forme

$$(Ea) \quad (m_1\alpha_1 + n_1)(m_2\alpha_2 + n_2)(m_3\alpha_3 + n_3) + (p_1\alpha_1 + q_1)(p_2\alpha_2 + q_2)(p_3\alpha_3 + q_3) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(E'a) \quad M(\alpha_1 + s_1)(\alpha_2 + s_2)(\alpha_3 + s_3) + P(\alpha_1 + t_1)(\alpha_2 + t_2)(\alpha_3 + t_3) = 0.$$

2^e Cas. *Les supports sont concourants.* Dans ce cas, une transformation homographique permet de faire coïncider deux des supports avec Ox et Oy et le troisième avec la bissectrice de l'angle de ces axes. Les trois systèmes sont alors définis par

$$(b) \quad \begin{cases} x = m_1\alpha_1 + n_1, & y = 0, & t = p_1\alpha_1 + q_1, \\ x = 0, & y = m_2\alpha_2 + n_2, & t = p_2\alpha_2 + q_2, \\ x = m_3\alpha_3 + n_3, & y = m_3\alpha_3 + n_3, & t = -(p_3\alpha_3 + q_3), \end{cases}$$

et l'équation représentée prend la forme

$$(Eb) \quad \frac{p_1\alpha_1 + q_1}{m_1\alpha_1 + n_1} + \frac{p_2\alpha_2 + q_2}{m_2\alpha_2 + n_2} + \frac{p_3\alpha_3 + q_3}{m_3\alpha_3 + n_3} = 0,$$

qu'on peut encore écrire

$$(E'b) \quad \frac{t_1}{\alpha_1 + s_1} + \frac{t_2}{\alpha_2 + s_2} + \frac{t_3}{\alpha_3 + s_3} = N.$$

Chacune des équations (Ea) et (Eb) développée est de la forme

$$(E) \quad A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + B_1\alpha_2\alpha_3 + B_2\alpha_3\alpha_1 + B_3\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D = 0.$$

Toute la question revient à mettre une équation donnée du type (E) sous l'une des formes (Ea) ou (Eb) , en ayant pour tous les paramètres des valeurs réelles.

4. En vue d'alléger la suite de notre exposé, nous allons définir ici certaines fonctions des coefficients et faire quelques remarques relatives à des équations qui s'y rattachent et qui joueront plus loin un rôle important.

Posons

$$(I) \quad \begin{cases} F_0 = B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 - AD, \\ E_i = AC_i - B_jB_k, \quad F_i = F_0 - 2B_iC_i, \quad G_i = B_iD - C_jC_k. \end{cases} \quad (i,j,k=1,2,3)$$

Le discriminant du premier membre de l'équation (E) rendu homogène peut s'écrire

$$(II) \quad \Delta = F_0^2 - 4(B_1C_1B_2C_2 + B_2C_2B_3C_3 + B_3C_3B_1C_1 - AC_1C_2C_3 - B_1B_2B_3D),$$

et on a

$$(III) \quad F_i^2 - 4E_iG_i = \Delta. \quad (i=1,2,3)$$

Si donc on considère les trois équations

$$(\varphi_i) \quad \varphi_i(\rho) = E_i\rho^2 + F_i\rho + G_i = 0, \quad (i=1,2,3)$$

la condition de réalité des racines est pour chacune d'elles

$$\Delta \geq 0.$$

On a encore

$$(IV) \quad \begin{cases} E_iB_i^2 + F_iAB_i + G_iA^2 = -E_jE_k, \\ E_iC_i^2 + F_iB_jC_k + G_iB_j^2 = -E_kG_j, \\ E_iD^2 + F_iC_iD + G_iC_i^2 = -G_jG_k. \end{cases}$$

On en déduit que si $E_k = 0$, c'est à dire si l'équation (φ_k) a une racine infinie, l'équation (φ_i) a une racine égale à $\frac{B_i}{A}$, égale aussi à $\frac{C_k}{B_j}$, et de même l'équation (φ_j) une racine égale à $\frac{B_j}{A}$, égale aussi à $\frac{C_k}{B_i}$, etc.

Enfin, on voit bien aisément que, parmi les trois systèmes E_i, F_i, G_i ($i = 1, 2, 3$) il ne peut y en avoir un composé de trois éléments nuls sans qu'il en soit de même pour l'un des deux autres. La variable dont l'indice diffère de ceux de ces deux systèmes entre alors dans un binôme qui se met en facteur dans le premier membre de (E) . Cette équation cesse alors d'établir un lien entre les trois variables, et il n'y a plus lieu dès lors d'en rechercher une représentation.

Dans le cas où tous les coefficients de (E) sont différents de zéro, cette proposition se démontre ainsi qu'il suit. On a

$$AC_i - B_j B_k = 0, \quad B_j C_j + B_k C_k - B_i C_i - AD = 0, \quad B_i D - C_j C_k = 0.$$

Tirant A et D des équations extrêmes pour porter leurs valeurs dans l'équation du milieu on obtient

$$(B_j C_j - B_i C_i)(B_k C_k - B_i C_i) = 0.$$

L'un de ces deux facteurs est nécessairement nul; soit le premier. Rapprochant l'équation qui en résulte des deux extrêmes du groupe précédent, on en conclut que

$$\frac{A}{B_k} = \frac{B_j}{C_i} = \frac{B_i}{C_j} = \frac{C_k}{D} = \frac{1}{\lambda}.$$

Dès lors, l'équation (E) , qui peut s'écrire

$$\alpha_i \alpha_j (A \alpha_k + B_k) + \alpha_i (B_j \alpha_k + C_i) + \alpha_j (B_i \alpha_k + C_j) + C_k \alpha_k + D = 0,$$

devient

$$(\alpha_k + \lambda)(A \alpha_i \alpha_j + B_j \alpha_i + B_i \alpha_j + C_k) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Si un ou plusieurs coefficients de (E) sont nuls, la démonstration ci-dessus se modifie un peu dans la forme, mais subsiste pour le fond. Partout, dans la suite, nous supposons donc E_i, F_i et G_i ($i = 1, 2, 3$) non nuls à la fois.

PREMIÈRE PARTIE.

A. *Equations représentables par trois systèmes linéaires non concourants.*

5. Afin d'éviter toute hypothèse particulière nous représenterons par i, j, k une permutation quelconque des indices 1, 2, 3 et nous supposons les équations (E) , (Ea) , $(E'a)$ remplacées par celles que l'on obtient avec ce changement de notation des indices.

Sur la forme $(E'a)$, on voit que pour $\alpha_i = -s_i$, le premier membre de l'équation se réduit à un produit de binômes en α_j et α_k . Or, le résultat de cette substitution dans le premier membre de (E) est

$$(B_i - As_i)\alpha_j\alpha_k + (C_j - B_k s_i)\alpha_j + (C_k - B_j s_i)\alpha_k + D - C_i s_i.$$

Pour que ce polynôme se décompose comme il a été dit il faut que

$$(B_i - As_i)(D - C_i s_i) - (C_j - B_k s_i)(C_k - B_j s_i) = 0,$$

ou, si on se réfère à la définition donnée au n° précédent, que

$$\varphi_i(s_i) = 0.$$

On trouverait de même que

$$\varphi_i(t_i) = 0.$$

Si donc ρ'_i et ρ''_i sont les deux racines de l'équation (φ_i) , on voit que l'équation $(E'a)$ peut s'écrire

$$(E'a) \quad M(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) + P(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j)(\alpha_k + \rho''_k) = 0.$$

Les racines ρ' et ρ'' doivent d'après cela être réelles; elles doivent aussi être inégales. Si, en effet, on avait $\rho'_i = \rho''_i$, le binôme $\alpha_i + \rho_i$ se mettrait en facteur commun et l'équation se décomposerait. Donc, d'après

ce qui a été vu au n° précédent, pour que l'équation (E) soit représentable par trois systèmes linéaires non concourants il faut que le discriminant Δ soit > 0 .

On va voir que cette condition nécessaire est également suffisante en prouvant que lorsqu'elle est remplie, on obtient toujours pour M et P des valeurs réelles.

6. Il faut d'abord reconnaître le lien qui doit nécessairement exister d'une part entre les racines du groupe (ρ'), de l'autre entre les racines du groupe (ρ'').

Sur la forme ($E''a$) de l'équation, on voit que son premier membre devient identiquement nul pour $\alpha_i = -\rho'_i$, $\alpha_k = -\rho'_k$. Faisant cette substitution dans le premier membre de (E) et annulant le coefficient du terme en α_j , on a

$$A\rho'_i\rho'_k - B_i\rho'_k - B_k\rho'_i + C_j = 0.$$

La substitution $\alpha_j = -\rho'_j$, $\alpha_k = -\rho'_k$ donne de même

$$A\rho'_j\rho'_k - B_j\rho'_k - B_k\rho'_j + C_i = 0.$$

Eliminant ρ'_k entre ces deux dernières équations on obtient

$$E_i\rho'_i - B_iC_i = E_j\rho'_j - B_jC_j,$$

ou, en doublant les deux membres, ajoutant à chacun F_0 et tenant compte des formules (I) (n° 4),

$$2E_i\rho'_i + F_i = 2E_j\rho'_j + F_j.$$

On trouverait de même

$$2E_i\rho'_i + F_i = 2E_k\rho'_k + F_k.$$

Ces deux dernières équations peuvent s'écrire

$$\frac{d}{d\rho'_i} \varphi_i(\rho'_i) = \frac{d}{d\rho'_j} \varphi_j(\rho'_j) = \frac{d}{d\rho'_k} \varphi_k(\rho'_k).$$

Pareillement, on obtiendrait

$$\frac{d}{d\rho''_i} \varphi_i(\rho''_i) = \frac{d}{d\rho''_j} \varphi_j(\rho''_j) = \frac{d}{d\rho''_k} \varphi_k(\rho''_k).$$

On peut donc dire que *les trois racines du groupe (ρ') d'une part, du groupe (ρ'') de l'autre donnent une même valeur à la dérivée du polynome (φ) correspondant.*

On peut encore remarquer, en résolvant l'équation (φ_i), que

$$2E_i\rho_i + F_i = \pm \sqrt{\Delta}.$$

Les racines d'un même groupe correspondent donc à un même signe pris pour $\sqrt{\Delta}$.

En résumé, on est libre de choisir parmi les racines de (φ_i) la racine ρ'_i et la racine ρ''_i , mais, une fois ce choix fait, les racines ρ'_j et ρ'_k d'une part, ρ''_j et ρ''_k de l'autre sont déterminées sans ambiguïté.

Remarque. Une ou plusieurs des équations (φ) peuvent avoir une racine infinie (jamais les deux, d'après la remarque finale du n° 4). Dès lors, E_i étant nul, la quantité $2E_i\rho_i + F_i$ prend la forme indéterminée $0 \times \infty$ pour la racine ρ_i infinie, mais comme elle prend la valeur parfaitement déterminée F_i pour la racine ρ_i finie, le criterium indiqué s'applique au moyen de cette seconde racine. Il est donc valable dans tous les cas.

7. Abordons maintenant le calcul de M et P . Pour cela, remarquons que l'identification de ($E''a$) et de (E) conduit à huit équations de la forme

$$MR' + PR'' = K,$$

où R' , R'' et K ont les systèmes de valeurs

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{lll} R' = 1 & , & R'' = 1 & , & K = A , \\ R' = \rho'_i & , & R'' = \rho''_i & , & K = B_i , \\ \dots & , & \dots & , & \dots , \\ R' = \rho'_j\rho'_k & , & R'' = \rho''_j\rho''_k & , & K = C_i , \\ \dots & , & \dots & , & \dots , \\ R' = \rho'_i\rho'_j\rho'_k & , & R'' = \rho''_i\rho''_j\rho''_k & , & K = D . \end{array} \right.$$

Prenons deux de ces équations, distinguées par les indices 0 et 1. Nous en tirons

$$\frac{M}{R'_1K_0 - R'_0K_1} = \frac{P}{R''_0K_1 - R''_1K_0}.$$

Par suite, l'équation $(E''a)$ devient

$$(A) \quad (R'_1 K_0 - R''_0 K_1)(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) \\ - (R'_1 K_0 - R''_0 K_1)(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j)(\alpha_k + \rho''_k) = 0.$$

Nous allons voir comment cette équation peut s'adopter à tous les cas possibles caractérisés par le passage à l'infini d'une au de plusieurs racines ρ' et ρ'' .

1^{er} Cas. *Les six racines ρ' et ρ'' sont finies.* Dans ce cas, E_i, E_j, E_k sont différents de zéro. Nous prendrons ici dans le système (Σ)

$$R'_0 = 1, \quad R''_0 = 1, \quad K_0 = A, \\ R'_1 = \rho'_k, \quad R''_1 = \rho''_k, \quad K_1 = B_k.$$

L'équation (A) devient alors

$$(A_1) \quad (A\rho'_k - B_k)(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) \\ - (A\rho''_k - B_k)(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j)(\alpha_k + \rho''_k) = 0.$$

2^o Cas. *Une racine est infinie.* Soit $\rho''_k = \infty$,¹ auquel cas $E_k = 0$. L'équation (A_1) du n^o précédent, divisée par ρ''_k , peut s'écrire

$$\left(A - \frac{B_k}{\rho''_k}\right)(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) \\ - (A\rho'_k - B_k)(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j)\left(\frac{\alpha_k}{\rho''_k} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho''_k = \infty$, elle devient

$$(A_2) \quad A(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) - (A\rho'_k - B_k)(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j) = 0.$$

3^o Cas. *Deux racines de même groupe sont infinies.* Soient $\rho''_j = \rho''_k = \infty$, auquel cas $E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici dans le système (Σ)

$$R'_0 = 1, \quad R''_0 = 1, \quad K_0 = A, \\ R'_1 = \rho'_j \rho'_k, \quad R''_1 = \rho''_j \rho''_k, \quad K_1 = C_i.$$

¹ Lorsqu'une racine est infinie on peut simplifier le calcul des autres en s'appuyant sur les remarques faites à propos des formules (IV) du n^o 4.

L'équation (A) divisée par $\rho_j' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(A - \frac{C_i}{\rho_j' \rho_k''}\right)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (A\rho_j' \rho_k' - C_i)(\alpha_i + \rho_i')\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j'} + 1\right)\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k'} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_3) \quad A(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') - (A\rho_j' \rho_k' - C_i)(\alpha_i + \rho_i') = 0.$$

4° Cas. Deux racines de groupes différents sont infinies. Soient $\rho_j' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas on a encore $E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici

$$R_0' = \rho_k', \quad R_0'' = \rho_k'', \quad K_0 = B_k, \\ R_1' = \rho_j', \quad R_1'' = \rho_j'', \quad K_1 = B_j.$$

L'équation (A) divisée par $\rho_j' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(B_k \frac{\rho_j''}{\rho_k''} - B_j\right)(\alpha_i + \rho_i')\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j'} + 1\right)(\alpha_k + \rho_k') \\ - \left(B_k - B_j \frac{\rho_k'}{\rho_j'}\right)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j'')\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_j' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_4) \quad B_j(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_k + \rho_k') + B_k(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'') = 0.$$

On voit qu'ici le terme en $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ a disparu, c'est à dire que $A = 0$. C'est là ce qui distingue ce cas du précédent.

5° Cas. Les trois racines d'un même groupe sont infinies. Soient $\rho_i'' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas $E_i = E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici

$$R_0' = 1, \quad R_0'' = 1, \quad K_0 = A, \\ R_1' = \rho_i' \rho_j' \rho_k', \quad R_1'' = \rho_i'' \rho_j'' \rho_k'', \quad K_1 = D.$$

L'équation (A) divisée par $\rho_i'' \rho_j'' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(A - \frac{D}{\rho_i'' \rho_j'' \rho_k''} \right) (\alpha_i + \rho_i') (\alpha_j + \rho_j') (\alpha_k + \rho_k') \\ - (A \rho_i' \rho_j' \rho_k' - D) \left(\frac{\alpha_i}{\rho_i''} + 1 \right) \left(\frac{\alpha_j}{\rho_j''} + 1 \right) \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1 \right) = 0.$$

Pour $\rho_i' = \rho_j' = \rho_k' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_5) \quad A(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') - (A \rho_i' \rho_j' \rho_k' - D) = 0.$$

6° Cas. Deux racines de l'un des groupes et une de l'autre sont infinies.

Soient $\rho_i' = \rho_j' = \rho_k' = \infty$, auquel cas on a encore $E_i = E_j = E_k = 0$.

Nous prendrons ici

$$R_0 = \rho_i' \quad , \quad R_0' = \rho_i'' \quad , \quad K_0 = B_i,$$

$$R_1 = \rho_j' \rho_k', \quad R_1' = \rho_j'' \rho_k'', \quad K_1 = C_i.$$

L'équation (A) divisée par $\rho_i' \rho_j'' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(B_i - C_i \frac{\rho_i''}{\rho_j'' \rho_k''} \right) \left(\frac{\alpha_i}{\rho_i'} + 1 \right) (\alpha_j + \rho_j') (\alpha_k + \rho_k') \\ - \left(B_i \frac{\rho_j' \rho_k'}{\rho_i'} - C_i \right) (\alpha_i + \rho_i') \left(\frac{\alpha_j}{\rho_j''} + 1 \right) \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1 \right) = 0.$$

Pour $\rho_i' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_6) \quad B_i(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') + C_i(\alpha_i + \rho_i') = 0.$$

On voit qu'ici encore il n'y a pas de terme en $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$, c'est à dire que $A = 0$. En outre, B_i est différent de zéro, ce qui, avec l'hypothèse faite, entraîne nécessairement $B_j = B_k = 0$.

8. *Résumé.* Si on compare à l'équation (Ea) chacune des équations de (\mathfrak{A}_1) à (\mathfrak{A}_6) , on voit que, pour $\Delta > 0$, la représentation peut être définie par les formules (a) du n° 3, les paramètres m, n, p, q étant donnés par les tableaux ci-dessous dans lesquels on les suppose rangés dans l'ordre

$$m_i, n_i, p_i, q_i,$$

$$m_j, n_j, p_j, q_j,$$

$$m_k, n_k, p_k, q_k.$$

1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ A\rho''_k - B_k & , & \rho'_k(A\rho''_k - B_k) & , & B_k - A\rho'_k & , & \rho''_k(B_k - A\rho'_k) & . \end{array}$$

2^o Cas. $E_i, E_j \neq 0$; $E_k = 0$:¹

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & B_k - A\rho'_k & . \end{array}$$

3^o Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & C_i - A\rho'_j \rho'_k & . \end{array}$$

4^o Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ 0 & , & \text{I} & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ B_j & , & \rho'_i B_j & , & 0 & , & B_k & . \end{array}$$

5^o Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & 0 & , & \text{I} & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & D - A\rho'_i \rho'_j \rho'_k & . \end{array}$$

6^o Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A = 0$; $B_i \neq 0$:²

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & , & \text{I} & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ B_i & , & \rho'_k B_i & , & 0 & , & C_i & . \end{array}$$

¹ Dans ce cas $A \neq 0$ nécessairement; car $A = 0$, $E_k = 0$ entraînent soit $B_i = 0$, soit $B_j = 0$, par suite soit $E_j = 0$, soit $E_i = 0$.

² On vient de voir que les deux autres B sont nécessairement nuls.

**B. Équations représentables par trois systèmes
linéaires concourants.**

9. Nous avons vu que lorsque les trois systèmes linéaires sont concourants l'équation (E) est susceptible de prendre la forme ($E'b$) qui peut encore s'écrire

$$N(\alpha_i + s_i)(\alpha_j + s_j)(\alpha_k + s_k) \\ - t_i(\alpha_j + s_j)(\alpha_k + s_k) - t_j(\alpha_k + s_k)(\alpha_i + s_i) - t_k(\alpha_i + s_i)(\alpha_j + s_j) = 0.$$

On voit que pour $\alpha_i = -s_i$, $\alpha_j = -s_j$, $\alpha_k = -s_k$, elle se décompose en un produit de binômes. Il en résulte, comme au n° 5, que s_i , s_j , s_k sont racines respectivement des équations (φ_i) , (φ_j) , (φ_k) .

Ces trois équations doivent donc encore avoir leurs racines réelles. Or, si ces racines étaient inégales l'équation (E) serait représentable par trois systèmes non concourants, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent, et cela serait contraire à l'hypothèse actuelle. Chacune des équations (φ) a donc nécessairement ici ses racines égales et, par suite,

$$\Delta = 0.$$

Si ρ_i , ρ_j , ρ_k sont ces trois racines, l'équation précédente deviendra donc

$$(E''b) \quad N(\alpha_i + \rho_i)(\alpha_j + \rho_j)(\alpha_k + \rho_k) \\ - t_i(\alpha_j + \rho_j)(\alpha_k + \rho_k) - t_j(\alpha_k + \rho_k)(\alpha_i + \rho_i) - t_k(\alpha_i + \rho_i)(\alpha_j + \rho_j) = 0.$$

L'identification de cette équation et de (E) donne les huit équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & N = A, \\ (2_i) \quad & N\rho_i - t_i = B_i, \\ & \dots \dots \dots \\ (3_i) \quad & N\rho_j\rho_k - t_j\rho_k - t_k\rho_j = C_i, \\ & \dots \dots \dots \\ (4) \quad & N\rho_i\rho_j\rho_k - t_i\rho_j\rho_k - t_j\rho_k\rho_i - t_k\rho_i\rho_j = D. \end{aligned}$$

Ayant, dans toutes ces équations, remplacé N par sa valeur (1), on tire de (2_i),

$$(5) \quad t_i = A\rho_i - B_i.$$

Faisons maintenant la somme de (2_i), (2_k) et (3_j) respectivement multipliées par ρ_k , ρ_i et -1 . Il vient

$$(6_j) \quad \rho_k(A\rho_i - B_i) = B_k\rho_i - C_j.$$

De même, la somme de (2_k), (3_i), (3_j) et (4), respectivement multipliées par $\rho_i\rho_j$, $-\rho_i$, $-\rho_j$ et 1 , donne

$$(7_k) \quad \rho_j(B_k\rho_i - C_j) = C_i\rho_i - D.$$

Cela posé, nous pourrions calculer t_i , t_j , t_k dans tous les cas possibles.

Remarquons d'abord que nous pouvons, au moyen de ces formules, vérifier que chaque équation (φ) a ses racines égales.

Si, en effet, entre les équations (6_k) et (7_k) nous éliminons $\rho_i\rho_j$, nous obtenons

$$(8_k) \quad E_i\rho_i + E_j\rho_j + B_kC_k - AD = 0.$$

Si maintenant, de la somme des équations (8_k) et (8_j) nous retranchons l'équation (8_i) multipliée par 2, nous obtenons

$$2E_i\rho_i + F_i = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\rho_i}\varphi_i(\rho_i) = 0,$$

ce qui démontre que ρ_i est racine double de (φ_i) et, par suite, que $\Delta = 0$, comme nous l'avions prévu *a priori*.

Passons maintenant à l'examen des divers cas qui peuvent se présenter.

10. 1^{er} Cas. *Les trois racines sont finies.* Dans ce cas, E_i , E_j , E_k sont différents de zéro.

D'après (1) et (5) l'équation ($E'b$) devient

$$\frac{A\rho_i - B_i}{a_i + \rho_i} + \frac{A\rho_j - B_j}{a_j + \rho_j} + \frac{A\rho_k - B_k}{a_k + \rho_k} = A,$$

ou

$$(\mathfrak{A}_1) \quad \frac{A\rho_i - B_i}{a_i + \rho_i} + \frac{A\rho_j - B_j}{a_j + \rho_j} - \frac{Aa_k + B_k}{a_k + \rho_k} = 0.$$

2° Cas. Une des racines est infinie. Soit $\rho_k = \infty$, auquel cas $E_k = 0$. En vertu de (6_j) et (6_i) l'équation (\mathfrak{A}_1), multipliée par ρ_k , peut s'écrire

$$\frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} + \frac{B_k\rho_j - C_i}{a_j + \rho_j} - \frac{Aa_k + B_k}{\frac{a_k}{\rho_k} + 1} = 0.$$

Pour $\rho_k = \infty$, elle devient

$$\frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} + \frac{B_k\rho_j - C_i}{a_j + \rho_j} - (Aa_k + B_k) = 0$$

ou

$$(\mathfrak{A}_2) \quad \frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} - \frac{B_k a_j + C_i}{a_j + \rho_j} - Aa_k = 0.$$

3° Cas. Deux des racines sont infinies. Soient $\rho_j = \rho_k = \infty$, auquel cas $E_j = E_k = 0$.

En vertu de (7_k), l'équation (\mathfrak{A}_2) multipliée par ρ_j , peut s'écrire

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - \frac{B_k a_j + C_i}{\frac{a_j}{\rho_j} + 1} - A\rho_j a_k = 0.$$

Or, pour obtenir (\mathfrak{A}_2), nous avons supposé $\rho_k = \infty$, et, d'après (6_i), pour $\rho_k = \infty$, on a $A\rho_j = B_j$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - \frac{B_k a_j + C_i}{\frac{a_j}{\rho_j} + 1} - B_j a_k = 0.$$

Pour $\rho_j = \infty$, elle devient

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - (B_k a_j + C_i) - B_j a_k = 0,$$

ou

$$(\mathfrak{A}_3) \quad \frac{C_i a_i + D}{a_i + \rho_i} + B_k a_j + B_j a_k = 0.$$

4^e Cas. Les trois racines sont infinies. On a donc $E_i = E_j = E_k = 0$. L'équation (\mathfrak{B}_3), multipliée par ρ_i , s'écrit

$$\frac{C_i a_i + D}{\frac{a_i}{\rho_i} + 1} + B_k \rho_i a_j + B_j \rho_i a_k = 0.$$

Or, pour obtenir (\mathfrak{B}_3) nous avons supposé $\rho_j = \rho_k = \infty$, et, d'après (7_k) et (7_j), pour $\rho_j = \rho_k = \infty$, on a $B_k \rho_i = C_j$, $B_j \rho_i = C_k$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{C_i a_i + D}{\frac{a_i}{\rho_i} + 1} + C_j a_j + C_k a_k = 0.$$

Pour $\rho_i = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{B}_4) \quad C_i a_i + C_j a_j + C_k a_k + D = 0.$$

Ce dernier cas n'a d'ailleurs été envisagé qu'à titre de vérification, car il est de toute évidence que l'hypothèse $\Delta = E_i = E_j = E_k = 0$ entraîne nécessairement $A = B_i = B_j = B_k = 0$.

11. *Résumé.* Si on compare à l'équation (Eb) chacune des équations de (\mathfrak{B}_1) à (\mathfrak{B}_4), on voit que, pour $\Delta = 0$, la représentation peut être définie par les formules (b) du n° 3, les paramètres m, n, p, q étant définis par les tableaux ci-dessous dans lesquels on les suppose rangés dans l'ordre

$$m_i, n_i, p_i, q_i,$$

$$m_j, n_j, p_j, q_j,$$

$$m_k, n_k, p_k, q_k.$$

1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$:

$$1, \rho_i, 0, A\rho_i - B_i,$$

$$1, \rho_j, 0, A\rho_j - B_j,$$

$$1, \rho_k, -A, -B_k.$$

2° Cas. $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$:¹

$$\begin{array}{cccc} 1, & \rho_i, & 0, & B_k \rho_i - C_j, \\ 1, & \rho_j, & -B_k, & -C_i, \\ 0, & 0, & -A, & 0. \end{array}$$

3° Cas. $E_i \neq 0; E_j = E_k = 0$:²

$$\begin{array}{cccc} 1, & \rho_i, & C_i, & D, \\ 0, & 1, & B_k, & 0, \\ 0, & 1, & B_j, & 0, \end{array}$$

4° Cas. $E_i = E_j = E_k = 0$:

$$\begin{array}{cccc} 0, & 1, & C_i, & 0, \\ 0, & 1, & C_j, & 0, \\ 0, & 1, & C_k, & D. \end{array}$$

Interprétation géométrique.

12. Si, dans l'équation (E) du n° 3, on regarde α_1, α_2 et α_3 comme des coordonnées courantes, on voit que cette équation représente une surface du 3^{ième} ordre passant par les droites du plan de l'infini situés dans les plans de coordonnées, et ayant, par suite, pour points doubles les sommets du triangle \mathfrak{T} formé par ces trois droites.

Lorsque $\Delta > 0$, les plans $\alpha_i + \rho'_i = 0$ et $\alpha_j + \rho'_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$) se coupent deux à deux suivant des droites réelles de la surface. Lorsque i et j sont différents, la droite correspondante est à distance finie et parallèle à l'axe des coordonnées α_k . Si une des racines devient infinie le plan correspondant se confond avec le plan de l'infini.

Lorsque $\Delta = 0$, $\rho'_i = \rho''_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Les deux droites parallèles à chaque axe de coordonnées se confondent en une seule, et ces

¹ Ici, comme on l'a déjà vu au n° 8, $A \neq 0$, nécessairement.

² L'équation (\mathfrak{B}_3) montre qu'ici $A = B_i = 0$.

trois droites doubles concourent en un même point qui constitue un quatrième point double de la surface. On saisit ainsi la raison géométrique de l'annulation du discriminant Δ dans ce cas.

La théorie ci-dessus présentée fournit donc un mode de représentation plane des surfaces du 3^{ième} ordre ayant trois points doubles dans le plan de l'infini. Dans ce mode de représentation, à tout point de la surface correspond une droite du plan,¹ à chaque section de la surface faite parallèlement à un des plans de coordonnées, un point coté.

Si $A = 0$, la surface se décompose en le plan de l'infini et un hyperboloïde. La condition $\Delta > 0$ signifie que l'hyperboloïde est à une nappe. Lorsque $\Delta = 0$, cet hyperboloïde se réduit à un cône.

DEUXIÈME PARTIE.

13. Si nous considérons l'ensemble des trois systèmes de points cotés

$$(\alpha_i) \quad x = f_i(\alpha_i), \quad y = \varphi_i(\alpha_i), \quad t = \psi_i(\alpha_i),$$

nous en obtenons la transformation homographique la plus générale en prenant

$$(\alpha'_i) \quad x = \lambda_1 f_i + \mu_1 \varphi_i + \nu_1 \psi_i, \quad y = \lambda_2 f_i + \mu_2 \varphi_i + \nu_2 \psi_i, \quad t = \lambda_3 f_i + \mu_3 \varphi_i + \nu_3 \psi_i,$$

le déterminant de la transformation

$$H = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro.

¹ Il suffirait d'appliquer une transformation dualistique pour obtenir une représentation point par point de la surface sur le plan.

Pour que les points (α'_i) forment un système régulier, il faut et il suffit que t soit constant et différent de zéro, c'est à dire que dans $\lambda_3 f_i + \mu_3 \varphi_i + \nu_3 \psi_i$, le coefficient du terme en α_i soit nul et le terme constant différent de zéro.

Nous allons rechercher maintenant si, par un choix convenable des paramètres λ, μ, ν rendant H différent de zéro, on peut réaliser la condition précédente pour les trois systèmes linéaires d'une équation (E) ou seulement pour deux et même pour un d'entre eux.

A. Équations représentables par trois systèmes linéaires non concourants.

14. Lorsqu'une équation appartient à cette catégorie ($\Delta > 0$), on peut prendre comme formules (α) les formules (a) du n° 3 où on remplace 1, 2, 3 par i, j, k . Les formules (α') sont alors

$$(\alpha') \left\{ \begin{array}{l} x = (\lambda_1 m_i + \nu_1 p_i) \alpha_i + \lambda_1 n_i + \nu_1 q_i, \\ x = (\mu_1 p_j + \nu_1 m_j) \alpha_j + \mu_1 q_j + \nu_1 n_j, \\ x = (\lambda_1 p_k + \mu_1 m_k) \alpha_k + \lambda_1 q_k + \mu_1 n_k, \\ y = (\lambda_2 m_i + \nu_2 p_i) \alpha_i + \lambda_2 n_i + \nu_2 q_i, \\ y = (\mu_2 p_j + \nu_2 m_j) \alpha_j + \mu_2 q_j + \nu_2 n_j, \\ y = (\lambda_2 p_k + \mu_2 m_k) \alpha_k + \lambda_2 q_k + \mu_2 n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 p_j + \nu_3 m_j) \alpha_j + \mu_3 q_j + \nu_3 n_j, \\ t = (\lambda_3 p_k + \mu_3 m_k) \alpha_k + \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k. \end{array} \right.$$

Les équations exprimant que chacun de ces systèmes est régulier sont donc, d'après la remarque faite au n° précédent,

$$(\eta a) \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0, & \text{avec la condition } \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i \neq 0, \\ \mu_3 p_j + \nu_3 m_j = 0, & \text{» } \mu_3 q_j + \nu_3 n_j \neq 0, \\ \lambda_3 p_k + \mu_3 m_k = 0, & \text{» } \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k \neq 0. \end{array} \right.$$

Remarquons tout d'abord qu'en vertu des conditions ci-dessus *on ne saurait admettre une solution dans laquelle plus d'un des paramètres λ_3, μ_3, ν_3 serait nul.*

Tout revient donc, dans chaque cas, à essayer de satisfaire au plus grand nombre possible des équations (γa) en observant cette condition. Mais, si cette seule condition est remplie par une solution, les trois conditions inscrites en regard des équations (γa) sont satisfaites. En effet, si, λ_3 et ν_3 n'étant pas nuls à la fois, on avait

$$\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i = 0,$$

il en résulterait $\frac{m_i}{p_i} = \frac{n_i}{q_i}$. Par suite, comme on le voit en se reportant à la forme (Ea) de l'équation (E) (n° 3), α_i disparaîtrait de cette équation. De même pour les deux autres équations (γa).

Remarque. Pour que les trois systèmes puissent être rendus réguliers à la fois, c'est à dire pour qu'il y ait compatibilité entre les équations (γa) il faut que

$$m_1 m_2 m_3 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$

c'est à dire, si on se reporte à (Ea), que

$$A = 0.$$

On verra plus loin que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

15. Les équations (γa) ne contenant que les éléments de la troisième ligne du déterminant H , on peut disposer arbitrairement de ceux des deux premières lignes à la condition toutefois de ne pas rendre H identiquement nul.

Si, par exemple, λ_3 est différent de zéro (ce qui est partout le cas dans ce paragraphe), on pourra prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \mu_1 &= 0, & \nu_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 0, & \mu_2 &= 1, & \nu_2 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne $H = -\lambda_3$.

Dans cette hypothèse, les formules $(\alpha'a)$ deviennent

$$(\alpha a_0) \begin{cases} x = p_i \alpha_i + q_i, & y = 0 & , & t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ x = m_j \alpha_j + n_j, & y = p_j \alpha_j + q_j & , & t = (\mu_3 p_j + \nu_3 m_j) \alpha_j + \mu_3 q_j + \nu_3 n_j, \\ x = 0 & , & y = m_k \alpha_k + n_k, & t = (\lambda_3 p_k + \mu_3 m_k) \alpha_k + \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k. \end{cases}$$

On voit que les supports sont pour (α_i) l'axe des x , pour (α_k) l'axe des y , pour (α_j) la droite

$$(\sigma_j) \quad \nu_3 x + \mu_3 y = 1.$$

Cela posé, nous allons chercher, sous la condition sus énoncée, à satisfaire à une ou plusieurs des équations (ηa) dans chacun des cas que nous avons été amené à considérer (n° 8).

16. 1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_1) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 + \nu_3 = 0, \\ (B_k - A\rho'_k)\lambda_3 + (A\rho'_k - B_k)\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Elle sont généralement incompatibles, mais on peut toujours satisfaire aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 1 \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_1) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho'_i, & y = 0 & , & t = \rho'_i - \rho''_i & , \\ x = \alpha_j + \rho'_j, & y = \alpha_j + \rho'_j & , & t = \rho''_j - \rho'_j & , \\ x = 0 & , & y = (A\rho'_k - B_k)(\alpha_k + \rho'_k), & t = (\rho''_k - \rho'_k)(A\alpha_3 + B_3). \end{cases}$$

En outre, l'équation (σ_j) est ici

$$y - x = 1.$$

Si $A = 0$, le système (α_k) devient lui-même régulier.

2° Cas. $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_2) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait encore aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_2) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = \rho_i' - \rho_i'' & , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = \alpha_j + \rho_j'' & , & t = \rho_j'' - \rho_j' & , \\ x = 0 & , & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

Ici, comme on l'a déjà remarqué au n° 8, A ne peut pas être nul, et, par suite, le troisième système n'est jamais régulier.

3° Cas. $E_i \neq 0; E_j, E_k = 0; A \neq 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_3) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à la première et à la dernière en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_3) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = \rho_i' - \rho_i'' & , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = 1 & , & t = -(\alpha_j + \rho_j'), \\ x = 0 & , & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = C_i - A\rho_j'\rho_k'. \end{cases}$$

4^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A = 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_4) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à toutes trois en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent

$$(\alpha a_4) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = \rho_i' - \rho_i'', \\ x = 1 & , & y = \alpha_j + \rho_j'' & , & t = -1 & , \\ x = 0 & , & y = B_j(\alpha_k + \rho_k'), & t = B_k & . \end{cases}$$

5^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_5) \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On ne peut ici, sous la condition requise, satisfaire qu'à une seule de ces équations, par exemple à la seconde en prenant

$$\lambda_3 = 1 \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_5) \quad \begin{cases} x = 1 & , & y = 0 & , & t = \alpha_i + \rho_i' & , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = 1 & , & t = 1 & , \\ x = 0 & , & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = A(\alpha_k + \rho_k') + D - A\rho_i'\rho_j'\rho_k'. \end{cases}$$

6° Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A = 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_6) \quad \begin{cases} \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Cette fois on satisfait aux deux premières en posant encore

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_6) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho'_i, & y = 0 & , & t = 1 & , \\ x = \alpha_j + \rho'_j, & y = 1 & , & t = 1 & , \\ x = 0 & , & y = B_i(\alpha_k + \rho'_k), & t = B_i(\alpha_k + \rho'_k) + C_i. \end{cases}$$

B. Équations représentables par trois systèmes linéaires concourants.

17. Lorsqu'une équation appartient à cette catégorie ($\Delta = 0$), on peut prendre comme formules (α) les formules (b) du n° 3, où on remplace 1, 2, 3 par i, j, k . Les formules (α') du n° 13 deviennent alors

$$(\alpha' b) \quad \begin{cases} x = (\lambda_1 m_i + \nu_1 p_i) \alpha_i + \lambda_1 n_i + \nu_1 q_i, \\ x = (\mu_1 m_j + \nu_1 p_j) \alpha_j + \mu_1 n_j + \nu_1 q_j, \\ x = [(\lambda_1 + \mu_1) m_k - \nu_1 p_k] \alpha_k + (\lambda_1 + \mu_1) n_k - \nu_1 q_k, \\ y = (\lambda_2 m_i + \nu_2 p_i) \alpha_i + \lambda_2 n_i + \nu_2 q_i, \\ y = (\mu_2 m_j + \nu_2 p_j) \alpha_j + \mu_2 n_j + \nu_2 q_j, \\ y = [(\lambda_2 + \mu_2) m_k - \nu_2 p_k] \alpha_k + (\lambda_2 + \mu_2) n_k - \nu_2 q_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{cases}$$

Les équations exprimant que chacun de ces systèmes est régulier sont, d'après la remarque du n° 13,

$$(\gamma b) \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0, & \text{avec la condition} \quad \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i \neq 0, \\ \mu_3 m_j + \nu_3 p_j = 0, & \text{»} \quad \mu_3 n_j + \nu_3 q_j \neq 0, \\ (\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k = 0, & \text{»} \quad (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k \neq 0. \end{array} \right.$$

On voit que ces conditions ne permettent pas d'avoir $\nu_3 = 0$, en même temps que λ_3, μ_3 ou $\lambda_3 + \mu_3$; mais on peut prendre $\lambda_3 = \mu_3 = 0$, avec $\nu_3 \neq 0$. En outre, le raisonnement déjà fait au n° 14 montre que si la condition précédente est remplie par un système de valeurs satisfaisant à une des équations (γb) , les conditions inscrites en regard des équations (γb) le sont aussi *ipso facto*.

Remarque. Pour que les trois systèmes soient réguliers, c'est à dire pour qu'il y ait compatibilité entre les équations (γb) il faut que

$$m_1 p_2 p_3 + m_2 p_3 p_1 + m_3 p_1 p_2 = 0,$$

c'est à dire, si on se reporte à (Eb) , que

$$A = 0.$$

Comme précédemment, cette condition nécessaire n'est pas suffisante, ainsi qu'on le verra par la suite.

18. Les équations (γb) ne contenant que les éléments de la troisième ligne du déterminant H , on peut disposer arbitrairement de ceux des deux premières lignes à la condition toutefois de ne pas rendre H identiquement nul.

Si, par exemple, λ_3 est différent de zéro, on pourra prendre

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 1, \\ \lambda_2 = 0, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 0, \end{array}$$

ce qui donne $H = -\lambda_3$. Les formules ($\alpha'b$) deviennent alors

$$(\alpha b_0) \left\{ \begin{array}{l} x = p_i \alpha_i + q_i, \quad y = 0, \\ x = p_j \alpha_j + q_j, \quad y = m_j \alpha_j + n_j, \\ x = -(p_k \alpha_k + q_k), \quad y = m_k \alpha_k + n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{array} \right.$$

Si $\lambda_3 = 0$, mais que ν_3 soit différent de zéro, on pourra prendre

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 0, \end{array}$$

ce qui donne $H = \nu_3$. Les formules ($\alpha'b$) deviennent alors

$$(\alpha b'_0) \left\{ \begin{array}{l} x = m_i \alpha_i + n_i, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad y = m_j \alpha_j + n_j, \\ x = m_k \alpha_k + n_k, \quad y = m_k \alpha_k + n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{array} \right.$$

Cela posé, envisageons chacun des cas définis au n° 11.

19. 1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$. Les équations (ηb) sont ici

$$(\eta b_1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = 0. \\ \mu_3 = 0. \\ \lambda_3 + \mu_3 + A\nu_3 = 0. \end{array} \right.$$

On peut, sous les conditions requises, satisfaire dans tous les cas aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = 1.$$

Puisque λ_3 est nul et ν_3 non, il faut avoir recours aux formules $(\alpha b'_0)$ qui deviennent

$$(\alpha b'_1) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i, & y = 0, & t = A\rho_i - B_i, \\ x = 0, & y = \alpha_j + \rho_j, & t = A\rho_j - B_j, \\ x = \alpha_k + \rho_k, & y = \alpha_k + \rho_k, & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

Où voit que le support de (α_k) est la droite $y = x$.

Si $A = 0$, le système (α_k) devient lui-même régulier.

2^e Cas. $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$. Les équations (γb) sont ici

$$(\gamma b_2) \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0, \\ \mu_3 - B_k \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = B_k, \quad \nu_3 = 1.$$

Les formules $(\alpha b'_0)$ deviennent donc

$$(\alpha b'_2) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i, & y = 0, & t = B_k \rho_i - C_j, \\ x = 0, & y = \alpha_j + \rho_j, & t = B_k \rho_j - C_i, \\ x = 1, & y = 1, & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

Ici, ainsi qu'on l'a déjà remarqué au n^o 11, A ne peut pas être nul.

3^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$. Les équations (ηb) sont ici

$$(\eta b_3) \quad \begin{cases} \lambda_3 + C_i \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait aux deux dernières en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Comme λ_3 est différent de zéro, on a recours, cette fois, aux formules (αb_0) qui deviennent

$$(\alpha b_3) \quad \begin{cases} x = C_i \alpha_i + D, & y = 0, & t = \alpha_i + \rho_i, \\ x = B_k \alpha_j, & y = 1, & t = 1, \\ x = -B_j \alpha_k, & y = 1, & t = 2. \end{cases}$$

4^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$. Les équations (ηb) sont ici

$$(\eta b_4) \quad \begin{cases} \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à toutes trois en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αb_0) deviennent alors

$$(\alpha b_4) \quad \begin{cases} x = C_i \alpha_i, & y = 0, & t = 1, \\ x = C_j \alpha_j, & y = 1, & t = 1, \\ x = -(C_k \alpha_k + D), & y = 1, & t = 2. \end{cases}$$

20. *Résumé général.* Tous les résultats qui précèdent peuvent se résumer dans le tableau suivant où une quantité positive est désignée par +, une quantité non nulle quelconque par ϕ . Si un de ces signes

est souligné c'est qu'il découle *nécessairement* des autres hypothèses placées sur la même ligne.

Δ	E _i	E _j	E _k	A	Systèmes réguliers	Formules correspondantes
+	Φ	Φ	Φ	Φ	(α _i), (α _j)	(aa ₁)
+	Φ	Φ	Φ	○	(α _i), (α _j), (α _k)	(aa ₁)
+	Φ	Φ	○	<u>Φ</u>	(α _i), (α _j)	(aa ₂)
+	Φ	○	○	Φ	(α _i), (α _k)	(aa ₃)
+	Φ	○	○	○	(α _i), (α _j), (α _k)	(aa ₄)
+	○	○	○	Φ	(α _j)	(aa ₅)
+	○	○	○	○	(B _i ≠ 0) (α _i), (α _j)	(aa ₆)
○	Φ	Φ	Φ	Φ	(α _i), (α _j)	(ab ₁)
○	Φ	Φ	Φ	○	(α _i), (α _j), (α _k)	(ab ₁)
○	Φ	Φ	○	<u>Φ</u>	(α _i), (α _j)	(ab ₂)
○	Φ	○	○	<u>Φ</u>	(α _j), (α _k)	(ab ₃)
○	○	○	○	<u>○</u>	(α _i), (α _j), (α _k)	(ab ₄)

} n° 16

} n° 19

On peut donc énoncer cette proposition:

Pour qu'une équation (E) soit représentable par trois systèmes linéaires de points cotés il faut et il suffit que son discriminant Δ soit supérieur ou égal à zéro. Ces trois systèmes linéaires peuvent être rendus réguliers lorsque, A étant nul, ou bien les quantités E_i, E_j, E_k sont toutes trois différentes de zéro, ou bien, deux de ces quantités sont nulles, la troisième et Δ étant ensemble ou nuls ou non nuls.

Si E_i, E_j, E_k étant nulles, A et Δ ne le sont pas, un seul des trois systèmes linéaires peut être rendu régulier.

Dans tous les autres cas on peut rendre réguliers deux de ces systèmes.