

DÉDUCTION DE QUELQUES FORMULES ANALYTIQUES
D'UN THÉOREME ÉLÉMENTAIRE DE LA
THÉORIE DES NOMBRES

PAR

A. BERGER

à UPSAL.

Si l'on désigne par n un nombre impair positif, l'équation à deux inconnues x, y

$$(1) \quad x^2 + y^2 = n$$

n'a évidemment qu'un nombre limité de solutions entières. Nous dirons, qu'une solution x, y de cette équation est propre ou impropre, selon que le plus grand commun diviseur positif des deux nombres x, y est égal à l'unité ou plus grand que l'unité; nous désignerons dans ce mémoire par

$$\phi(n, d)$$

le nombre des solutions x, y de l'équation (1), pour lesquelles le plus grand commun diviseur positif des nombres x, y est égal à d , et par suite

$$\phi(n, 1)$$

est égal au nombre des solutions propres de cette équation. En posant n sous la forme

$$(2) \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\nu^{\alpha_\nu},$$

ou p_1, p_2, \dots, p_ν sont des nombres premiers positifs et différents les uns des autres, et où les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ satisfont aux conditions

$$(3) \quad \alpha_1 \geq 1, \quad \alpha_2 \geq 1, \quad \dots, \quad \alpha_\nu \geq 1,$$

on démontre¹ dans les éléments de la théorie des nombres, que

$$(4) \quad \phi(n, 1) = 2^{\nu+2},$$

si tous les nombres p_1, p_2, \dots, p_ν satisfont à la congruence

$$p \equiv 1 \pmod{4},$$

mais que

$$(5) \quad \phi(n, 1) = 0,$$

s'il y a un seul de ces nombres, qui satisfait à la congruence

$$p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$(6) \quad \phi(n, 1) = 4 \left\{ 1 + (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \right\} \left\{ 1 + (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \right\} \dots \left\{ 1 + (-1)^{\frac{p_\nu-1}{2}} \right\},$$

formule, qui est vraie pour tous les nombres impairs positifs n . Multiplions les facteurs du second membre de l'équation (6), nous aurons

$$(7) \quad \phi(n, 1) = 4 \left\{ 1 + \sum_r (-1)^{\frac{p_r-1}{2}} + \sum_{r,s} (-1)^{\frac{p_r-1}{2} + \frac{p_s-1}{2}} \right. \\ \left. + \sum_{r,s,t} (-1)^{\frac{p_r-1}{2} + \frac{p_s-1}{2} + \frac{p_t-1}{2}} + \dots \right\};$$

dans la première somme dans le second membre r prend les valeurs

$$1, 2, 3, \dots, \nu - 1, \nu;$$

dans la seconde somme r et s désignent toutes les combinaisons 2 à 2 de ces nombres, dans la troisième somme r, s, t désignent toutes les combinaisons 3 à 3 de ces nombres; ainsi de suite. En multipliant les facteurs du second membre de l'identité

$$(8) \quad p_r p_s p_t \dots = [1 + (p_r - 1)][1 + (p_s - 1)][1 + (p_t - 1)] \dots,$$

¹ Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie* von LEJEUNE DIRICHLET, (Dritte Auflage, §. 68).

nous aurons

$$(9) \quad p_r p_s p_t \dots = 1 + (p_r - 1) + (p_s - 1) + (p_t - 1) \dots \\ + \sum_{r,s} (p_r - 1)(p_s - 1) + \sum_{r,s,t} (p_r - 1)(p_s - 1)(p_t - 1) + \dots$$

Les nombres p_r, p_s, p_t, \dots , étant impairs, nous obtiendrons de l'équation (9)

$$(10) \quad p_r p_s p_t \dots \equiv 1 + (p_r - 1) + (p_s - 1) + (p_t - 1) + \dots \pmod{4}$$

ou

$$(11) \quad \frac{p_r p_s p_t \dots - 1}{2} \equiv \frac{p_r - 1}{2} + \frac{p_s - 1}{2} + \frac{p_t - 1}{2} + \dots \pmod{2}.$$

En appliquant cette formule à l'équation (7), nous aurons

$$(12) \quad \phi(n, 1) = 4 \left\{ 1 + \sum_r (-1)^{\frac{p_r - 1}{2}} + \sum_{r,s} (-1)^{\frac{p_r p_s - 1}{2}} + \sum_{r,s,t} (-1)^{\frac{p_r p_s p_t - 1}{2}} + \dots \right\},$$

et par suite

$$(13) \quad \phi(n, 1) = 4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

où δ parcourt les nombres

$$1, p_r, p_r p_s, p_r p_s p_t, \dots$$

Par là est démontré ce théorème:

Théorème I. Si l'on désigne par n un nombre positif impair, le nombre des solutions propres de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = n$$

à deux inconnues x et y est égal à

$$4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n , qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité.

Soient maintenant x, y deux nombres quelconques entiers, qui satisfont à l'équation (1), et désignons par d le plus grand commun diviseur positif des nombres x et y ; en posant

$$(14) \quad x = dx_1, \quad y = dy_1,$$

les quantités x_1, y_1 seront des nombres entiers, premiers entre eux, qui satisfont à l'équation

$$(15) \quad x_1^2 + y_1^2 = \frac{n}{d^2},$$

et inversement, si l'on désigne par d un nombre entier positif, ainsi choisi, que le nombre carré d^2 soit un diviseur du nombre n , et si les nombres x_1, y_1 sont premiers entre eux et satisfont à l'équation (15), les deux nombres x, y , déterminés par les équations (14), auront le plus grand commun diviseur d , et ces nombres satisferont aussi à l'équation (1). Par là est démontrée la formule

$$(16) \quad \phi(n, d) = \phi\left(\frac{n}{d^2}, 1\right),$$

pourvu que d^2 divise le nombre n . De cette équation on obtiendra, en y appliquant le théorème I, la formule

$$(17) \quad \phi(n, d) = 4 \sum_{\delta_1} (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}},$$

où δ_1 est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre $\frac{n}{d^2}$, qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité. Le nombre n étant impair, le diviseur d sera aussi impair, et l'on aura

$$d^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

d'où il suit

$$\delta_1 d^2 \equiv \delta_1 \pmod{4};$$

de cette congruence on tire

$$(18) \quad \frac{\delta_1 - 1}{2} \equiv \frac{\delta_1 d^2 - 1}{2} \pmod{2},$$

et par suite on obtiendra de l'équation (17)

$$(19) \quad \phi(n, d) = 4 \sum_{\delta_1} (-1)^{\frac{\delta_1 d^2 - 1}{2}}.$$

Puisque δ_1 parcourt tous les diviseurs positifs du nombre $\frac{n}{d^2}$, qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité, le nombre

$\delta_1 d^2$ parcourt évidemment tous les diviseurs positifs du nombre n , qui sont divisibles par d^2 , mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2 . Par suite, en posant

$$\delta_1 d^2 = \delta,$$

nous obtiendrons de l'équation (19) la formule

$$(20) \quad \phi(n, d) = 4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n , qui sont divisibles par d^2 , mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2 . De là résulte cette proposition:

Théorème II. Soit n un nombre entier positif impair, et d un nombre positif, ainsi choisi, que le nombre carré d^2 soit un diviseur du nombre n , le nombre des solutions entières x, y de l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

pour lesquelles x et y ont le plus grand commun diviseur d , est égal à

$$4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n , qui sont divisibles par d^2 , mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2 .

Désignons maintenant par $\phi(n)$ le nombre de toutes les solutions (propres et impropres) de l'équation (1), et par

$$d_1, d_2, \dots, d_{\mu}$$

tous les nombres positifs, jouissant de la propriété, que les nombres carrés

$$(21) \quad d_1^2, d_2^2, \dots, d_{\mu}^2$$

divisent le nombre n ; il s'ensuit, qu'un diviseur quelconque du nombre n n'a d'autres diviseurs quadratiques que les nombres (21), et l'on aura évidemment la formule

$$(22) \quad \phi(n) = \sum_{s=1}^{s=\mu} \phi(n, d_s)$$

ou d'après l'équation (20)

$$(23) \quad \phi(n) = 4 \sum_{s=1}^{s=\mu} \sum_{\delta_s} (-1)^{\frac{\delta_s-1}{2}},$$

où δ_s est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n , qui sont divisibles par d_s^2 , mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d_s^2 . L'équation (23) peut se mettre sous la forme

$$(24) \quad \phi(n) = 4 \left\{ \sum_{\delta_1} (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}} + \sum_{\delta_2} (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} + \dots + \sum_{\delta_\mu} (-1)^{\frac{\delta_\mu-1}{2}} \right\}.$$

Les groupes de nombres

$$(25) \quad \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_\mu,$$

qui entrent dans le second membre de l'équation (24), ne contiennent d'autres nombres que les diviseurs positifs du nombre n . Je dis de plus, que ces groupes contiennent tous les diviseurs positifs du nombre n , car en désignant par d un diviseur positif quelconque du nombre n , ce diviseur d est nécessairement divisible par un ou par plusieurs des nombres carrés (21) et ne peut pas être divisible par d'autres nombres carrés que ceux-ci. Par suite on peut déterminer un nombre carré d_s^2 , qui appartient au groupe (21) et qui a la propriété, que d est divisible par d_s^2 , mais que d n'est divisible par aucun nombre carré plus grand que d_s^2 , d'où l'on peut conclure, que le diviseur d appartient au groupe δ_s . Enfin les nombres, qui appartiennent à un quelconque des groupes (25), sont complètement caractérisés par leur plus grand commun diviseur quadratique, et par suite un diviseur quelconque du nombre n appartient à un seul de ces groupes.

Il s'ensuit, que les nombres, qui appartiennent à tous les groupes (25), seront précisément tous les diviseurs positifs du nombre n , et par conséquent l'équation (24) peut se mettre sous la forme

$$(26) \quad \phi(n) = 4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n . De là résulte le théorème suivant, que nous avons démontré ici par un calcul tout à fait élémentaire.

Théorème III. Si l'on désigne par n un nombre positif impair, le nombre de toutes les solutions entières (propres et impropres) de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = n$$

est égal à

$$4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n .¹

En attribuant dans l'expression

$$x^2 + y^2$$

aux variables x et y toutes les valeurs entières, nous n'obtiendrons que des nombres entiers positifs; pour que ces nombres soient impairs, il faut et il suffit, que les nombres x et y satisfassent à la congruence

$$(27) \quad x + y \equiv 1 \pmod{2}.$$

Cela posé, désignons par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs positives impaires de la variable z , et formons la série

$$\sum_{x,y} \Phi(x^2 + y^2)$$

de manière, que l'on attribue aux quantités x et y toutes les valeurs entières compatibles avec la condition (27), nous n'obtiendrons que des termes de la forme

$$\Phi(n),$$

où n désigne un nombre positif impair, et d'après le théorème III nous obtiendrons le terme $\Phi(n)$ un nombre de fois exprimé par:

$$4 \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}};$$

par suite on aura l'identité

$$(28) \quad \sum_{x,y} \Phi(x^2 + y^2) = 4 \sum_n \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

¹ Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie* von LEJEUNE-DIRICHLET, (Dritte Auflage, §. 91), où ce théorème est démontré au moyen du calcul infinitésimal.

Les nombres x, y dans le premier membre de cette équation satisfaisant à la congruence (27), on aura ou

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 1 \pmod{2}$$

ou

$$x \equiv 1, \quad y \equiv 0 \pmod{2}.$$

Par suite, en désignant par h_0 tous les nombres pairs et par h_1 tous les nombres impairs, on obtient:

$$(29) \quad \sum_{x,y} \Phi(x^2 + y^2) = \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) + \sum_{h_1, h_0} \Phi(h_1^2 + h_0^2) = 2 \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2),$$

et des équations (28) et (29) on conclura la formule

$$(30) \quad \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_n \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

et on a donc ce théorème:

Théorème IV. Si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs positives impaires de la variable z , on aura la formule

$$\sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_n \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où l'on a à observer, que dans le premier membre h_0 parcourt tous les nombres pairs et h_1 tous les nombres impairs, et que dans le second membre n parcourt tous les nombres impairs positifs et δ tous les diviseurs positifs du nombre n , pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Nous transformerons maintenant la formule (30). Désignons pour cela par $\mathfrak{g}(n)$ une fonction, qui pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2 satisfait à la condition

$$(31) \quad \mathfrak{g}(n_1) \mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2),$$

on aura évidemment une égalité de la forme

$$(32) \quad \sum_{n_1} \sum_{n_2} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \mathfrak{g}(n_2) \Phi(n_1 n_2) = \sum_{\eta} c_{\eta} \Phi(\eta),$$

où chacun des nombres n, n_1, n_2 parcourt tous les nombres impairs positifs; en effet, si l'on attribue aux quantités n_1 et n_2 toutes les valeurs entières positives impaires, nous n'obtiendrons de l'expression $\Phi(n_1, n_2)$ que des termes de la forme $\Phi(n)$, où n désigne un nombre positif impair; quant au coefficient c_n , celui-ci sera évidemment déterminé par la formule

$$(33) \quad c_n = \sum_{n_1} \sum_{n_2} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \mathfrak{g}(n_2),$$

où les nombres impairs positifs n_1 et n_2 sont combinés entre eux de toutes les manières, qui sont compatibles avec la condition

$$n_1 n_2 = n;$$

par suite, en désignant par δ un diviseur positif quelconque du nombre n et par δ_1 le diviseur complémentaire, ainsi que l'on aura toujours

$$\delta \delta_1 = n,$$

l'équation (33) pourra se mettre sous la forme

$$(34) \quad c_n = \sum_{\delta \delta_1 = n} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \mathfrak{g}(\delta) \mathfrak{g}(\delta_1)$$

ou, en y appliquant l'équation (31),

$$c_n = \mathfrak{g}(n) \sum_{\delta \delta_1 = n} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

formule, qui peut aussi s'écrire

$$(35) \quad c_n = \mathfrak{g}(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n . En introduisant dans le second membre de l'équation (32) la valeur du coefficient c_n , donnée par la formule (35), nous aurons

$$(36) \quad \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \sum_{n_2} \mathfrak{g}(n_2) \Phi(n_1, n_2) = \sum_n \mathfrak{g}(n) \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (30) la fonction $\Phi(n)$ par $\mathfrak{g}(n)\Phi(n)$, nous obtiendrons au moyen de l'équation (36) la formule

$$(37) \quad \sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2) \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \sum_{n_2} \mathfrak{g}(n_2) \Phi(n_1 n_2);$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème V. Si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs impaires positives de la variable z , et par $\mathfrak{g}(n)$ une fonction, qui pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2 satisfait à la condition

$$\mathfrak{g}(n_1) \mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2),$$

on aura

$$\sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2) \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \sum_{n_2} \mathfrak{g}(n_2) \Phi(n_1 n_2),$$

où l'on a à observer, que dans le premier membre h_0 parcourt tous les nombres pairs et h_1 tous les nombres impairs, et que dans le second membre n_1 et n_2 parcourent tous les nombres impairs positifs, pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Nous allons faire quelques applications de ce théorème. Posons

$$\Phi(n) = q^n,$$

où q désigne une quantité, dont le module est moindre que l'unité, nous aurons la formule

$$(38) \quad \sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2) q^{h_0^2 + h_1^2} = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \sum_{n_2} \mathfrak{g}(n_2) q^{n_1 n_2}.$$

Pour

$$\mathfrak{g}(n) = 1$$

on en déduit

$$(39) \quad \sum_{h_0} q^{h_0^2} \sum_{h_1} q^{h_1^2} = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \frac{q^{n_1}}{1 - q^{2n_1}},$$

formule, qu'on peut mettre sous la forme ¹

$$(40) \quad (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots)(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots) \\ = \frac{q}{1 - q^2} - \frac{q^3}{1 - q^6} + \frac{q^5}{1 - q^{10}} - \frac{q^7}{1 - q^{14}} + \dots$$

Pour

$$\mathfrak{g}(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

l'équation

$$\mathfrak{g}(n_1) \mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2)$$

subsiste pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2 , et nous obtenons de l'équation (38)

$$(41) \quad \sum_{h_0, h_1} (-1)^{\frac{(h_0^2 + h_1^2) - 1}{8}} q^{h_0^2 + h_1^2} = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2} + \frac{n_1^2-1}{8}} (q^{n_1} - q^{3n_1} - q^{5n_1} + q^{7n_1} + \dots) \\ = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2} + \frac{n_1^2-1}{8}} q^{n_1} \frac{1 - q^{2n_1}}{1 + q^{4n_1}}$$

Des congruences

$$h_0 \equiv 0 \pmod{2}, \quad h_1 \equiv 1 \pmod{2}$$

on déduit

$$(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1 \equiv 2h_0^2 h_1^2 + (h_1^2 + 1)(h_1^2 - 1) \pmod{16},$$

et, en y appliquant la congruence

$$h_1^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

on aura

$$(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1 \equiv 2h_0^2 \pmod{16},$$

d'où

$$\frac{(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1}{8} \equiv \frac{h_0^2}{4} \equiv \frac{h_0}{2} \pmod{2},$$

¹ Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie* von LEJEUNE DIRICHLET, (Dritte Auflage, §. 92

et par suite on obtiendra de l'équation (41)

$$(42) \quad \sum_{h_0, h_1} (-1)^{\frac{h_0}{2}} q^{h_0^2 + h_1^2} = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2} + \frac{n_1^2-1}{8}} q^{n_1} \frac{1 - q^{2n_1}}{1 + q^{4n_1}}$$

ou

$$(43) \quad \sum_{h_0} (-1)^{\frac{h_0}{2}} q^{h_0^2} \sum_{h_1} q^{h_1^2} = 2 \sum_{n_1} (-1)^{\frac{(n_1-1)(n_1+5)}{8}} q^{n_1} \frac{1 - q^{2n_1}}{1 + q^{4n_1}}$$

ou, en divisant les deux membres par 2,

$$(44) \quad (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} \dots)(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots) \\ = q \frac{1 - q^2}{1 + q^4} + q^3 \frac{1 - q^6}{1 + q^{12}} - q^5 \frac{1 - q^{10}}{1 + q^{20}} - q^7 \frac{1 - q^{14}}{1 + q^{28}} + \dots$$

En désignant par m un nombre entier positif, la somme

$$\phi(1) + \phi(3) + \phi(5) + \dots + \phi(2m - 1)$$

est évidemment égale à la somme des nombres des solutions entières des équations indéterminées

$$(45) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5, \quad \dots \quad x^2 + y^2 = 2m - 1$$

ou égale au nombre de toutes les solutions entières simultanées de l'inégalité

$$(46) \quad x^2 + y^2 < 2m$$

et de la congruence

$$(47) \quad x + y \equiv 1 \pmod{2};$$

en effet chaque solution entière d'une quelconque des équations (45) satisfera aussi aux relations (46) et (47), et inversement chaque solution entière de ces deux relations satisfera à une des équations (45). Posons maintenant

$$(48) \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{2m}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{2m}},$$

où ξ et η sont deux inconnues nouvelles, il s'ensuit, que la somme

$$\phi(1) + \phi(3) + \dots + \phi(2m - 1)$$

est égale au nombre de toutes les solutions ξ, η de l'inégalité

$$(49) \quad \xi^2 + \eta^2 < 1,$$

où ξ et η désignent des quantités des formes (48), les quantités x et y étant des nombres entiers, qui satisfont à la congruence (47). Quant aux solutions de cette congruence, on peut les trouver de la manière suivante. En désignant par x et y deux nombres entiers quelconques, qui satisfont à la congruence, et en posant

$$(50) \quad \frac{y - x + 1}{2} = r, \quad \frac{y + x + 1}{2} = s,$$

les quantités r et s seront évidemment des nombres entiers, et des équations (50) on tire

$$(51) \quad x = s - r, \quad y = r + s - 1.$$

Nous démontrons ainsi, que nous obtiendrons toutes les solutions de la congruence (47) en laissant dans les formules (51) r et s parcourir tous les nombres entiers et en combinant ces nombres entre eux de toutes les manières possibles, et inversement on trouvera, que les valeurs, ainsi obtenues, des nombres x et y satisferont à la congruence (47). Enfin nous obtiendrons par là chaque solution seulement une fois, car à chaque solution x, y correspondent d'après les équations (50) des valeurs déterminées des quantités r et s .

En introduisant dans les équations (48) les valeurs des nombres x et y , données par les formules (51), nous trouverons, que la somme

$$\phi(1) + \phi(3) + \dots + \phi(2m - 1)$$

est égale au nombre de toutes les solutions ξ, η de l'inégalité (49) qui sont de la forme

$$(52) \quad \xi = \frac{s - r}{\sqrt{2m}}, \quad \eta = \frac{r + s - 1}{\sqrt{2m}},$$

où r et s désignent des nombres entiers quelconques.

En considérant les quantités ξ et η comme des coordonnées rectangulaires d'un point, et en désignant par G la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées satisfont à la condition (49), mais

qui ne contient d'autres points que ceux-ci, cette portion du plan sera évidemment limitée, et nous trouverons, que la somme

$$\phi(1) + \phi(3) + \dots + \phi(2m - 1)$$

est égale au nombre de tous les points dans la portion G , dont les coordonnées sont de la forme (52). Mais on peut aussi considérer ces points comme les points d'intersection des deux systèmes de droites

$$(53) \quad \eta = \xi + \frac{2r - 1}{\sqrt{2m}}, \quad \eta = -\xi + \frac{2s - 1}{\sqrt{2m}},$$

où r et s parcourent tous les nombres entiers. Ces systèmes de droites sont orthogonaux, et les droites, qui appartiennent à chacun des deux systèmes, sont situées à la distance

$$\sqrt{\frac{1}{m}}$$

l'une de l'autre; il s'ensuit, que par ces droites la portion G du plan est divisée en des carrés égaux, et que l'aire de chaque carré est égal à

$$\frac{1}{m}.$$

Le nombre de ces carrés est égal au nombre des points d'intersection susdits, car à chaque carré appartiennent quatre points d'intersection, savoir les sommets du carré, mais de l'autre côté chaque point d'intersection est un sommet commun à quatre carrés. Par suite le nombre de ces carrés est égal à la somme

$$\phi(1) + \phi(3) + \dots + \phi(2m - 1);$$

or, une portion finie du plan étant divisée en des carrés égaux, dont on peut diminuer indéfiniment la grandeur, la limite du produit du nombre des carrés et de l'aire de chaque carré est évidemment égale à l'aire de cette portion du plan; donc, en désignant l'aire de la portion G par π , nous aurons

$$(54) \quad \lim_{m=\infty} \frac{\phi(1) + \phi(3) + \dots + \phi(2m - 1)}{m} = \pi,$$

et il en résulte ce théorème:

Théorème VI. En désignant par π l'aire de la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées rectangulaires ξ, η satisfont à l'inégalité

$$\xi^2 + \eta^2 < 1,$$

mais qui ne renferme d'autres points que ceux-ci, chaque nombre positif impair peut se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2,$$

où x et y désignent des nombres entiers, en moyenne de π manières différentes.

En désignant par $\mu(n)$, n étant un nombre impair positif, l'excès du nombre de ceux des diviseurs positifs δ du nombre n , qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 1 \pmod{4},$$

sur le nombre de ceux de ces diviseurs, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 3 \pmod{4},$$

on aura évidemment

$$(55) \quad \mu(n) = \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n , et des équations (26) et (55) nous obtiendrons

$$(56) \quad \mu(n) = \frac{\psi(n)}{4},$$

et par suite, m étant un nombre entier positif quelconque,

$$(57) \quad \sum_{r=1}^{r=m} \mu(2r-1) = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{r=m} \psi(2r-1);$$

des équations (54) et (57) on déduit la formule

$$(58) \quad \lim_{m=\infty} \frac{\mu(1) + \mu(3) + \dots + \mu(2m-1)}{m} = \frac{\pi}{4}.$$

De là résulte cette proposition:

Théorème VII. L'excès du nombre de ceux des diviseurs positifs δ d'un nombre impair, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 1 \pmod{4},$$

sur le nombre de ceux des diviseurs du même nombre, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 3 \pmod{4},$$

est en moyenne égal à $\frac{\pi}{4}$, la quantité π ayant le même sens que dans le théorème précédent.

Puisque dans l'équation (26) n est un nombre positif impair, et que δ à la sommation dans le second membre ne parcourt que des nombres positifs impairs, on peut y poser

$$n = 2r - 1, \quad \delta = 2k - 1,$$

où r et k sont des nombres entiers positifs; par ces substitutions on déduit de l'équation (26)

$$(59) \quad \phi(2r - 1) = 4 \sum_k (-1)^{k-1},$$

où k parcourt tous les nombres entiers positifs, pour lesquels $2k - 1$ divise $2r - 1$. En désignant par $E(x)$, x étant une quantité réelle, le plus grand des nombres entiers, qui ne surpassent pas x , de sorte que l'on aura

$$0 \leq x - E(x) < 1,$$

la différence

$$E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right) - E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right)$$

sera égale à 1 ou à 0, selon que $2k - 1$ divise ou ne divise pas $2r - 1$, et par suite on pourra mettre l'équation (59) sous la forme

$$(60) \quad \phi(2r - 1) = 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right) - E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right) \right\} (-1)^{k-1},$$

d'où l'on tire

$$(61) \quad \sum_{r=1}^{r=m} \phi(2r-1) = 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} \sum_{r=1}^{r=m} \left\{ E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right) - E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right) \right\}.$$

La différence dans le second membre étant égale à 1 ou à 0, selon que $2r-1$ est un multiple ou n'est pas un multiple de $2k-1$, la dernière somme dans le second membre sera égale au nombre de ceux des nombres

$$1, 3, 5, \dots, 2m-1,$$

qui sont divisibles par $2k-1$; en désignant ce nombre par t , nous aurons évidemment pour la détermination de la quantité t les inégalités

$$(62) \quad (2t-1)(2k-1) \leq 2m-1 < (2t+1)(2k-1),$$

d'où l'on tire

$$(63) \quad t \leq \frac{2m-1}{2(2k-1)} + \frac{1}{2} < t+1,$$

ou

$$(64) \quad t = E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)} + \frac{1}{2}\right),$$

et par conséquent nous obtiendrons de l'équation (61)

$$(65) \quad \sum_{r=1}^{r=m} \phi(2r-1) = 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)} + \frac{1}{2}\right).$$

Les termes de la série dans le second membre étant décroissants et ayant des signes alternés, nous obtiendrons de l'équation (65), q étant un nombre positif quelconque,

$$(66) \quad \sum_{r=1}^{r=m} \phi(2r-1) = 4 \sum_{k=1}^{k=q} (-1)^{k-1} E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)} + \frac{1}{2}\right) + 4\theta(-1)^q E\left(\frac{2m-1}{2(2q+1)} + \frac{1}{2}\right),$$

où $0 < \theta < 1$. On tirera de là, en s'appuyant sur la définition du symbole $E(x)$,

$$(67) \quad \sum_{r=1}^{r=m} \phi(2r-1) \\ = 4 \sum_{k=1}^{k=q} (-1)^{k-1} \left(\frac{2m-1}{2(2k-1)} + \rho_k \right) + 4\theta_1 (-1)^q \left(\frac{2m-1}{2(2q+1)} + \frac{1}{2} \right),$$

où $-\frac{1}{2} < \rho_k \leq \frac{1}{2}$ et $0 < \theta_1 < 1$. En posant

$$q = E(\sqrt{m})$$

et en divisant les deux membres de l'équation (67) par m , on aura pour $m = \infty$

$$(68) \quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{r=m} \phi(2r-1) = 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

et des équations (54) et (68) on obtiendra la formule

$$(69) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Enfin nous emploierons l'équation (40) à l'évaluation d'une intégrale définie; désignons pour ce but par q une quantité positive, moindre que l'unité, et posons

$$(70) \quad S_0 = 1 + q^4 + q^{16} + q^{36} + \dots,$$

$$(71) \quad S_1 = q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots,$$

il s'ensuit

$$(72) \quad S_0 - S_1 = 1 - q + q^4 - q^9 + q^{16} - q^{25} + \dots$$

Les termes de cette série étant décroissants et ayant des signes alternés, nous aurons évidemment

où $0 < \rho < 1$. Au moyen des équations (70), (71), (73) on peut mettre l'équation (40) sous la forme

$$(74) \quad 2S_0^2 \left(1 - \frac{1}{2S_0}\right) \left(1 - \frac{\rho}{S_0}\right) = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \dots;$$

multiplions les deux membres de cette équation par

$$1 - q,$$

nous en obtiendrons pour $q = 1$

$$(75) \quad \lim_{q=1} (1 - q) S_0^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

d'où l'on tire, en y appliquant la formule (69),

$$(76) \quad \lim_{q=1} \sqrt{1 - q} S_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Puisque on a

$$\lim_{q=1} \frac{1 - q}{-\log q} = 1,$$

nous obtiendrons des équations (70) et (76)

$$(77) \quad \lim_{q=1} \sqrt{-\log q} (1 + q^4 + q^{16} + q^{36} + \dots) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Substituons dans cette équation

$$q = e^{-\frac{\delta^2}{4}},$$

où δ désigne une quantité positive, nous aurons

$$(78) \quad \lim_{\delta=0} \delta (1 + e^{-\delta^2} + e^{-4\delta^2} + e^{-9\delta^2} + \dots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, par suite, conformément à la notion d'intégrale définie,

Des formules (69) et (79), que nous avons déduites d'une proposition élémentaire de la théorie des nombres, résulte le théorème suivant:

Théorème VIII. Si l'on désigne par π l'aire de la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées rectangulaires ξ , η satisfont à l'inégalité

$$\xi^2 + \eta^2 < 1,$$

mais qui ne renferme d'autres points que ceux-ci, on aura

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
