SUR LES ENSEMBLES FINIS ET LE PRINCIPE DE L'INDUCTION COMPLÈTE.

PAR

E. ZERMELO

à GÖTTINGEN.

1. Introduction.

Le principe de l'induction complète est-il démontrable ou non? Voilà une question qui dans ces dernières années a préoccupé beaucoup d'esprits. Dans plusieurs articles de la *Revue de Métaphysique et de Morale*[1] M. POINCARÉ a défendu la thèse que ce principe est un *jugement synthétique a priori;* d'autres auteurs comme MM. COUTURAT, RUSSELL et WHITEHEAD ont soutenu le contraire et présenté des démonstrations du principe en question.

Le principe de l'induction permet de démontrer des théorèmes sur les nombres finis en raisonnant de n à $n + 1$. La question dépend par suite de la façon dont on définit le nombre fini. Or pour moi tout théorème que l'on énonce pour des nombres finis n'est rien d'autre qu'un théorème sur les *ensembles finis;* il faut donc avant tout définir ce qu'on entend par là.

On a proposé plusieurs définitions des ensembles finis. On peut par exemple avec DEDEKIND[2] prendre pour base la transformation d'un ensemble en lui-même; on peut aussi en se servant des idées de CANTOR[3] partir de la notion des ensembles bien-ordonnés. Il faudrait montrer que toutes ces définitions peuvent être ramenées l'une à l'autre; c'est ce que je me suis proposé de faire dans cet article. A cet effet je me suis appuyé sur les notions fondamentales

[1] 13e Année N:o 6, 14e Année N:o 1, N:o 3.

[2] Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.

[3] Mathematische Annalen vol. 49 p. 207.

de DEDEKIND et de CANTOR tout en les énonçant encore une fois pour la commodité du lecteur. Je serais heureux si ces considérations pouvaient contribuer à bien mettre en évidence l'utilité qu'ont, pour l'étude des fondements des »vraies mathématiques», les notions et les méthodes de la théorie des ensembles.

J'ai pu éviter dans les démonstrations l'emploi de l'axiome de DEDEKIND[1] qui présuppose l'existence d'ensembles infinis; mais j'ai cru au contraire pouvoir recourir au principe du »choix arbitraire»[2] pour la démonstration du théorème IV.

2. Définitions fondamentales.

Nous appellerons *»chaîne simple»*[3] un ensemble M qui jouit de la propriété suivante: Il existe une correspondance univoque et réciproque entre, d'une part, les éléments de M, sauf peut-être l'un d'entre eux que nous nommerons le dernier et, d'autre part, les éléments d'une partie de M, soit M', qui ne contient pas l'un des éléments de M (le premier); cette correspondance ne permettant pas la division de M en parties séparées. Deux parties de M sont dites »séparées» par rapport à une certaine correspondance lorsqu'aucun élément de l'une n'a son image dans l'autre et réciproquement.

Un ensemble est appelé *»fini»*, si tous ses éléments font partie d'une chaîne simple contenant un dernier élément. Si au contraire une chaîne simple n'a pas de dernier élément, l'ensemble qui contient tous ses éléments est nommé *»dénombrable»*.

La définition proposée pour les ensembles finis exprime d'une façon précise ce que M. POINCARÉ entend, en définissant les nombres finis »par récurrence» ou »par des additions successives». En effet, les éléments d'un ensemble sont définis *»successivement»* lorsque chaque élément (sauf le premier) est déterminé par le précédent. Il faut donc qu'il y ait une correspondance telle qu'à chaque élément — à l'exception du premier ou du dernier — corresponde un autre élément de l'ensemble. Mais cela ne suffit pas; la correspondance supposée ne servirait à rien, s'il n'y avait pas *enchaînement* entre les diverses parties de la série, ou en termes plus précis, s'il existait ce que nous avons appelé des »parties séparées».

---

[1] DEDEKIND, l. c. 66.

[2] ZERMELO, Math. Ann. vol. 59 p. 514.

[3] La notion de »chaîne» est due à DEDEKIND (l. c. 37), mais sa définition des ensembles finis diffère beaucoup de la mienne. Voir cet article N:o 6.

3. L'induction complète appliquée aux membres d'une chaîne simple.

Théorème I. Si M est une chaîne simple, tout sous-ensemble de M contenant le premier élément e ainsi que les images de tous ses éléments est identique à M lui-même.

Il en résulterait que toute propriété du premier élément qui, si elle est vraie pour un élément quelconque est vraie aussi pour son image, s'étend à tous les éléments de l'ensemble.

Démonstration. Soit M_0 la partie commune de tous les sous-ensembles M_1 de M qui contiennent e et les images de chacun de leurs éléments, et soit $R = M - M_0$ l'ensemble complémentaire. Alors tous les éléments de M_0 ont leurs images en M_0 puisque ces dernières sont communes à tous les ensembles M_1. La réciproque est également vraie: à l'exception de e tout élément de M_0 est image d'un autre, car autrement on pourrait supprimer en M_0 un élément différent de e et ne jouissant pas de cette propriété; l'ensemble restant serait encore un M_1, ce qui est contraire à la définition de M_0. Il en résulte qu'aucun élément de M_0 ne peut être l'image d'un élément de R et réciproquement; les parties M_0 et R seraient donc séparées à moins que M_0 ne soit identique à M.

C'est la définition de l'ensemble M_0 (»la chaîne de l'élément e» d'après DEDEKIND l. c. 44) que M. POINCARÉ[1] a rejetée comme »non-prédicative» dans ma démonstration du théorème de BERNSTEIN. Mais MM. RUSSELL[2] et PEANO[3] ont déjà fait à l'argumentation de M. POINCARÉ certaines critiques qui me paraissent justifiées. (Voir le dernier alinéa du N:o 6.)

4. Les ensembles doublement bien-ordonnés.

Rappelons qu'un ensemble est dit »ordonné» lorsqu'une prescription permet de distinguer lequel de deux éléments quelconques a et b précède et lequel suit l'autre. Un ensemble est dit »bien-ordonné» lorsqu'en plus chacun de ses sous-ensembles possède un »premier élément» et un seul c'est-à-dire un élément qui précède tous les autres.

---

[1] Revue de Métaphysique et de Morale 14e Année p. 315.
[2] Rev. d. Met. e. d. Mor. 14e Année p. 632.
[3] Revista de Matematica VIII N:o 5 p. 152.

Définition. Nous dirons qu'un ensemble est »*doublement bien-ordonné*« lorsqu'il est bien-ordonné et lorsque chacun de ses sous-ensembles possède non seulement un premier mais aussi un »dernier« élément c'est-à-dire un élément qui suit tous les autres.

Théorème II. Tout ensemble fini M peut être doublement bien-ordonné et, réciproquement, tout ensemble doublement bien-ordonné est fini.

Démonstration. Supposons que l'ensemble fini M soit une chaîne simple dont le premier élément soit désigné par e et le dernier par u. Nous allons montrer que tout élément a de M définit un ensemble $E(a)$ doublement bien-ordonné commençant par e, finissant par a et tel que chaque élément x' de $E(a)$ qui diffère de e soit l'image de l'élément x immédiatement précédant. En effet le théorème est évident pour $a = e$ et, s'il est vrai pour l'élément quelconque a, il est également vrai, comme nous allons le voir, pour son image a'. A cet effet considérons l'ensemble $E(a)$ qui, par hypothèse, finit par a et ajoutons-y a' comme dernier élément; nous obtenons de cette façon l'ensemble $E(a')$ exigé, doublement bien-ordonné et finissant par a'. On voit donc, en s'appuyant sur le théorème I, qu'on peut considérer finalement l'ensemble $E(u)$. Cet ensemble $E(u)$ contient tous les éléments de M; car il contient e, et, s'il contient un x différent du dernier élément u, l'élément immédiatement suivant ne peut pas différer de l'image x' de x. En d'autres termes l'ensemble M est doublement bien-ordonné.

Soit d'autre part un ensemble M doublement bien-ordonné, commençant par e et finissant par u. Alors on peut faire correspondre à chaque élément x, à la seule exception près de u, l'élément immédiatement suivant x' et l'on obtient de cette façon, comme nous allons le voir, une chaîne simple. En effet, si ce procédé conduisait à des parties »séparées«, une d'entre elles au moins ne contiendrait pas u et posséderait par hypothèse un dernier élément v, tandis que l'élément immédiatement suivant v' figurerait dans la partie complémentaire.

5. L'induction appliquée aux ensembles finis.

Théorème III. Soit une proposition démontrée d'une part pour tout ensemble contenant un seul élément et, d'autre part, pour un ensemble fini quelconque chaque fois qu'elle est vraie pour cet ensemble diminué d'un de ses éléments; alors la proposition est vraie pour tous les ensembles finis. Voilà ce que l'on appelle le raisonnement de n à $n + 1$.

Démonstration. Étant donné un ensemble M, fini et doublement bien-ordonné, la proposition est tout d'abord vraie, par hypothèse, pour le segment $E(e)$ de M

qui ne contient que le premier élément e. Si d'autre part elle est vraie pour un segment $E(a)$ dont le dernier élément est a, et qui contient tous les éléments précédents, elle sera également vraie pour le segment $E(a')$ qu'on obtient en ajoutant à $E(a)$, comme dernier élément, l'élément a' suivant immédiatement a. En vertu du théorème I la proposition sera exacte pour tous les segments $E(a)$ qui finissent par un élément quelconque de M, et en particulier pour $E(u) = M$ lui-même; c'est-à-dire pour un ensemble fini quelconque.

6. Caractère fondamental des ensembles finis.

Définition. Deux ensembles M, N sont appelés »*équivalents*», si l'on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de l'un et ceux de l'autre.

Théorème IV. Un ensemble fini n'est équivalent à aucune des ses parties; et réciproquement tout ensemble jouissant de cette propriété est fini.[1]

Démonstration. Pour démontrer la première partie du théorème nous faisons d'abord voir que la proposition est vraie pour un ensemble fini M chaque fois qu'elle l'est pour l'ensemble M_1 que l'on obtient en supprimant dans M un élément a. Supposons en effet qu'on ait établi une correspondance univoque et réciproque entre M et M', partie effective de M; désignons par a' l'image de a et par M'_1 l'ensemble des images des éléments de M_1.

Au cas où M' ne contient pas a, l'élément a' diffère de a, et M'_1 qui ne contient ni a ni a' est une partie effective de M_1.

Si au contraire a fait partie de M' l'ensemble M_1 contient un élément p différent de a qui ne fait pas partie de M', et il y a encore deux cas à considérer.

1°. a' est identique à a, et M'_1 qui ne contient ni a ni p est une partie proprement dite de M_1.

2°. a' diffère de a et de p, et a est contenu dans M'_1. Remplaçons dans M'_1 a par a'; nous obtenons de cette façon un ensemble M''_1 qui ne contient ni a ni p et qui est par conséquent une partie effective de M_1. Soit b l'élément de M_1 dont a est l'image; au moyen de notre substitution c'est à présent a' qui en est l'image, et nous avons obtenu une correspondance univoque et réciproque entre M_1 et M''_1.

Donc dans tous les cas, si M est équivalent à une de ses parties, M_1 le sera également. Mais l'impossibilité étant évidente pour un ensemble ne possé-

[1] C'est là la distinction de DEDEKIND (l. c. 64) entre les ensembles finis et infinis.

dant qu'un seul élément, en vertu du théorème III elle s'étend à tous les ensembles finis.[1]

Soit d'autre part M un ensemble quelconque qui ne soit équivalent à aucune de ses parties. Nous pouvons admettre que cet ensemble est bien-ordonné en nous appuyant sur un théorème dont j'ai donné la démonstration.[2] Alors tout sous-ensemble M_1 de M doit contenir non seulement un premier mais aussi un dernier élément. Car autrement on pourrait établir une correspondance entre M_1 et une de ses parties en définissant comme image de chaque élément x de M_1 l'élément suivant x', c'est-à-dire le premier de tous les éléments de M_1 qui suivent x. L'ensemble M est donc doublement bien-ordonné, c'est-à-dire, fini.

La démonstration en question du théorème »que tout ensemble peut être bien-ordonné» est fondée sur *»l'axiome du choix arbitraire»* que l'on peut facilement ramener au suivant: Quand un ensemble S est divisé en parties $A, B, C, \ldots$, dont aucune n'est nulle, il existe toujours un sous-ensemble S_1 de S au moins qui contient un et un seul élément $a, b, c, \ldots$ de chacune des parties $A, B, C, \ldots$ C'est un axiome assez évident dont on s'est servi jusqu'à ces derniers temps presque sans opposition et qui n'a jamais conduit à un faux résultat. Tout récemment cependant MM. Borel[3] et Peano[4] l'ont rejeté dans tous les cas où l'ensemble S possède une infinité de parties. Sans doute, le principe en question est *indémontrable*, mais il est *indispensable* à certaines théories mathématiques. Il me semble, par exemple, impossible de démontrer le théorème précédent sans avoir recours à cet axiome explicitement ou implicitement![5] Et M. Poincaré est tout à fait du même avis quand il dit:[6] »L'axiome est «self-évident» pour les classes finies; mais s'il est indémontrable pour les classes infinies, il l'est sans doute aussi pour les classes finies qu'on n'en a pas encore distinguées à ce stade de la théorie; c'est donc un jugement synthétique a priori sans lequel la «théorie cardinale» serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis.»

Dans le même article, M. Poincaré a fait à ma démonstration une autre objection, analogue à celle dont nous avons parlé à l'art. 3, savoir qu'une de mes définitions serait »non-prédicative». J'ai discuté à fond cette critique dans

---

[1] Cette démonstration est due à Cantor (Math. Ann. vol. 46, p. 490, D.).

[2] Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. vol. 59.

[3] Math. Ann. vol. 60 p. 194.

[4] Revista de Matematica VIII N:o 5 § 1.

[5] Dedekind dans sa démonstration du théorème équivalent (l. c. § 14) s'en sert de même en considérant (159) une série de représentations simultanées α_n.

[6] Revue d. Mét. e. d. Mor. 14e Année N:o 3 p. 313.

une note récemment parue.[1] Dans ce travail j'ai de plus réfuté les objections de MM. SCHOENFLIESS et BERNSTEIN qui n'admettent pas l'addition d'un seul élément à un ensemble bien-ordonné.

7. Le type ordinal des nombres cardinaux finis.

Théorème V. Un ensemble T dont tous les éléments sont des ensembles finis contient toujours comme élément au moins un ensemble E «de plus petite puissance», c'est-à-dire tel que chaque élément X de T possède un sous-ensemble équivalent à E. Et d'autre part: étant donné un ensemble fini Z, un ensemble T dont chaque élément X est un ensemble fini et équivalent à un sous-ensemble de Z contient toujours comme élément au moins un ensemble U «de plus grande puissance», c'est-à-dire tel que chaque élément de T soit équivalent à un sous-ensemble de U.

En se servant de la notion des «nombres cardinaux finis» on peut énoncer le théorème comme suit: tout ensemble de nombres cardinaux finis ordonné suivant leur grandeur est bien-ordonné et chaque segment de l'ensemble non identique à l'ensemble total est doublement bien-ordonné. L'ensemble de tous les nombres cardinaux finis est donc «dénombrable».

Démonstration. Considérons un élément A quelconque de T que nous supposerons doublement bien-ordonné et faisons usage du théorème que de deux ensembles bien-ordonnés l'un au moins est «semblable» à un segment de l'autre.[2] J'appelle »segment» d'un ensemble bien-ordonné un sous-ensemble qui, lorsqu'il contient un élément a quelconque, contient en même temps tous les éléments de l'ensemble qui précèdent a. Remarquons que deux ensembles »semblables» sont aussi équivalents. Au cas où il n'y a pas de segment de A équivalent à un autre élément de T l'élément A sera l'ensemble E de plus petite puissance demandé, puisque chaque élément de T possède un segment semblable à A. Dans le cas contraire considérons tous les segments de A équivalents à un ou à plusieurs éléments de T. Les derniers éléments de ces segments forment à leur tour un ensemble fini dont le premier élément correspond à un segment E' équivalent à un élément E de T. Cet ensemble E sera celui de plus petite puissance. En effet soit X un élément quelconque de T. Si X est équivalent à un segment

[1] ZERMELO. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Math. Ann. vol. 65, p. 107—128.

[2] G. CANTOR, Math. Ann. 49 p. 215 N.

X' de A, l'ensemble E' qui est un segment de X' sera équivalent à un sous-ensemble de X. Dans le cas contraire A sera équivalent à un sous-ensemble de X, et l'ensemble E' qui n'est qu'un sous-ensemble de A le sera également. Donc dans tous les cas E qui est équivalent à E' est équivalent à un sous-ensemble de X.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, supposons que l'ensemble Z soit doublement bien-ordonné, et que chaque élément X de T soit équivalent à un segment X' de Z. Les derniers éléments de tous ces segments X' forment un sous-ensemble Z_0 de Z dont le dernier élément est u'. Soit de plus U' le segment de Z finissant par u' et U un élément de T équivalent à U'. Alors chaque élément X de T est équivalent à un segment X' de U' et par conséquent équivalent aussi à un sous-ensemble de U. Donc U est un ensemble de plus grande puissance parmi tous les éléments de T.

8. Conclusion.

Les théorèmes I, III et V expriment le principe de l'induction complète sous les diverses formes qu'on peut lui donner; le principe est ainsi réduit à la définition des ensembles finis que nous avons donnée ou à une des définitions équivalentes. Mais en résulte-t-il que le principe en question soit un jugement analytique? Cela dépend de la nature des axiomes sur lesquels repose la théorie des ensembles et que nous avons été contraints d'utiliser dans chacune de nos démonstrations. Si ces axiomes, que je me propose d'énoncer complètement dans un autre article, ne sont que des principes purement logiques, le principe de l'induction le sera également; si au contraire ils sont des intuitions d'une sorte spéciale, on peut continuer à regarder le principe d'induction comme un effet de l'intuition ou comme un «jugement synthétique a priori». Quant à moi, je n'oserais pour le moment, décider de cette question purement philosophique.

Pour démontrer les théorèmes annoncés, nous ne nous sommes pas appuyés sur l'hypothèse qu'il existe des ensembles infinis, c'est-à-dire des ensembles équivalents à une de leurs parties, hypothèse fondamentale de Dedekind. La théorie des ensembles en est certainement indépendante puisqu'elle énonce et démontre les théorèmes valables pour des ensembles *quelconques*. Si donc l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire la théorie des ensembles finis, que l'on peut fonder sur le principe de l'induction complète n'a pas besoin de «l'infini actuel», l'analyse au contraire et la théorie des fonctions qui ont pour base les notions de nombre irrationel et de limite exigent absolument la considération d'ensembles infinis. En effet, quelque définition que l'on donne du nombre irrationnel, il sera toujours défini par une *infinité* de nombres rationnels; car autrement le continu serait dénombrable. De même la notion de «limite» ne peut être obtenue qu'en considérant une infinité de valeurs possibles. C'est précisément cette idée des ensembles infinis due à M. CANTOR qui est le fondement de cette partie des «vraies mathématiques».

En terminant je tiens à remercier mes amis MM. CARATHÉODORY et JACCOTTET qui ont bien voulu m'aider à la rédaction française de ce mémoire.

Montreux, mai 1907.

Supplément.

M. POINCARÉ a fait suivre ma note de quelques «Réflexions» qui montrent que l'illustre géomètre est maintenant tout à fait de mon avis en ce qui concerne les «définitions prédicatives». Le petit détour qu'il emploie (p. 199), en modifiant la démonstration célèbre de CAUCHY-WEIERSTRASS, pour prouver qu'une équation algébrique a toujours une racine n'est peut-être pas absolument nécessaire. Mais dans la remarque «Plus généralement etc.» sur la limite inférieure d'un ensemble quelconque de nombres réels M. POINCARÉ rend nettement ma propre pensée et justifie ma démonstration du «Théorème I» (p. 187). Il suffit, en effet, de substituer à «l'ensemble E de nombres réels», «l'ensemble E des ensembles M_1» et à «limite inférieure e» «partie commune M_0»; on obtiendra alors:

«Si nous envisageons un ensemble E d'ensembles M_1 on peut démontrer que cet ensemble possède une partie commune M_0; cette partie commune est définie *après* l'ensemble E; et il n'y a pas de pétition de principe puisque M_0 ne fait pas en général partie de E. Dans certains cas particuliers, il peut arriver que M_0 fasse partie de E. Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque M_0 ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition,* mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de M_0.»

Et c'est en invoquant l'autorité de M. POINCARÉ lui-même que l'on peut mettre en évidence la légitimité de ma démonstration.