

ÜBER EINE RIEMANN'SCHE FUNKTIONENKLASSE MIT ZERFALLENDER THETA-FUNKTION.

VON
HERMANN SCHUMACHER

AUS RUHRORT.

Einleitung.

1. Als »binomisch« bezeichnet man die algebraischen Funktionen von z , die verzweigt sind wie die n te Wurzel aus einer rationalen Funktion $f(z)$ von z . Unbeschadet der Allgemeinheit darf man voraussetzen, dass $f(z)$ eine ganze Funktion von z ist. Denkt man durch eine passende Substitution 1. Ordnung der Variablen etwaige Verzweigungspunkte im Unendlichen vorher beseitigt, so ist der Grad dieser ganzen Funktion von z ein Multiplum von n , also etwa $n \cdot m$; ihre Nullpunkte sind dann die Verzweigungspunkte der zu $s = \sqrt[n]{f(z)}$ gehörigen RIEMANN'schen Fläche.

In Übungen über RIEMANN'sche Flächen (S. S. 1905) hat nun Herr Professor Dr. WELLSTEIN durch eine gruppentheoretisch normierte kanonische Zerschneidung der RIEMANN'schen Fläche gezeigt, dass, u. a. wenn n eine Primzahl ist, und f genau $n \cdot m$ verschiedene Nullpunkte hat, die Periodizitätsmoduln der Integrale

1. Gattung des durch $s = \sqrt[n]{f(z)}$ erzeugten Körpers von nur $n \cdot m - 3$ mit den Verzweigungspunkten veränderlichen Moduln abhängen und zwar im Körper der n ten Einheitswurzeln; $n \cdot m - 3$ ist bekanntlich auch die Anzahl der absoluten Invarianten; den Grund dieses Zusammenhanges hat Herr WELLSTEIN in seiner Arbeit: »Zur Funktionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde« angegeben.¹

Es war nun von Interesse, die von Herrn WELLSTEIN entwickelte allgemeine Methode an einem speziellen Falle durchzuführen. Nächst dem schon oft untersuchten hyperelliptischen Falle $n = 2$ kam zunächst der Fall $n = 3$ in Betracht, der von anderer Seite bearbeitet wird.² Über den Fall $n = 4$, $m = 1$ handelt die

¹ Nova acta Leopoldina, Band 74, No. 2.

² Vergl. übrigens: I. WELLSTEIN, Zur Theorie der Funktionenklasse $s^2 = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$. Math. Annalen. Band 52.

Dissertation von SCHULZ-BANNEHR,¹ die zu dem schönen Resultate führt, dass die dem Geschlecht $p = 3$ angehörige Thetafunktion dieses Falles sich durch drei elliptische Thetafunktionen darstellen lässt, von denen die eine einen allgemeinen, die beiden anderen denselben speziellen Modul besitzen. Der nächste Fall war $n = 5$, wo für $m = 1$ nach dem angegebenen Satze die Thetafunktion von nur zwei absoluten Moduln abhängen muss. Ihr Geschlecht ist $p = 6$. In dem ersten Teil der nachfolgenden Dissertation soll nun zunächst die gruppentheoretisch normierte kanonische Zerschneidung der RIEMANN'schen Fläche nach den Vorträgen des Herrn WELLSTEIN für den Fall, dass n eine Primzahl und $m = 1$ ist, entwickelt, und dann der Spezialfall $n = 5$, $m = 1$ vollständig durchgeführt werden. Für die Thetafunktion wird in dem speziellen Falle ein fertiger Ausdruck berechnet, der zu einer weiteren Bearbeitung geradezu herausfordert.

2. Zu unserm Beispiele $n = 5$, $m = 1$ führten auch invariantentheoretische Erwägungen. Falls nämlich die Invariante 18. Grades I_{18} von $f(z)$ verschwindet, ohne dass Nullpunkte zusammenfallen, so lassen sich, wie Herr WELLSTEIN in einem Seminarvortrage gezeigt hat, zwei Integrale 1. Gattung auf Integrale eines und desselben Körpers vom Geschlecht $p = 2$ zurückführen. Diese Reduktion wird im zweiten Teil der nachfolgenden Arbeit ausgeführt.

3. Der Spezialfall $I_{18} = 0$ gewinnt hierdurch ein ganz besonderes Interesse, zumal durch das Buch von KRAZER² die zahlreichen Arbeiten über die Reduzierbarkeit ABEL'scher Integrale allgemein zugänglich geworden sind und die Frage der Reduktibilität aktuell gemacht haben. Nach Sätzen von PICARD und POINCARÉ³ müssen nämlich auch die übrigen vier Integrale 1. Gattung reduzierbar sein und zwar auf das Geschlecht $p = 4$, und die zugehörige Thetafunktion muss zerfallen in Thetafunktionen von den Geschlechtern $p = 2$ und $p = 4$. Während Beispiele zerfallender Thetafunktionen mit einem elliptischen Faktor reichlich vorhanden sind,⁴ fehlt es gerade an instruktiven Beispielen für zerfallbare Thetafunktionen mit Faktoren höheren Geschlechts. Um so lieber folgte ich daher der Anregung des Herrn WELLSTEIN, die Zerfällung der Thetafunktion wirklich auszuführen, worüber der dritte Teil der Dissertation handelt.

¹ SCHULZ-BANNEHR, Zur Invarianten- und Funktionentheorie einer speziellen Kurve 4. Ordnung. Dissertation, Strassburg i. E. 1904.

² A. KRAZER, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903.

³ A. KRAZER, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 499, Satz XII und Satz XIII.

⁴ Literatur bei KRAZER. Ausserdem: V. DOERR, Beitrag zur Lehre vom identischen Verschwinden der Riemann'schen Thetafunktion, Dissertation, Strassburg i. E. 1883.

Erster Teil.

Theorie des allgemeinen Falles ($I_{18} \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} 0$).

§ 1. Ein allgemeines Zerschneidungsprinzip Riemann'scher Flächen mit linearer Transformation in sich.

4. Die folgenden Betrachtungen gelten in einem viel weiteren Umfange, als wir sie wiedergeben; wir beschränken uns der Kürze wegen auf die Grundgleichung:

$$(1) \quad s^n = f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n),$$

die für $n = 5$ unsern speziellen Fall einschliesst, und dürfen, da uns schliesslich nur der Fall $n = 5$ interessieren wird, zur weiteren Vereinfachung der folgenden Überlegungen annehmen, dass n eine Primzahl ist. Die Nullpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ von $f(z)$ seien alle endlich und voneinander verschieden.

Die zu s gehörige RIEMANN'sche Fläche besitzt n Blätter und n Verzweigungspunkte. Die n Verzweigungspunkte entsprechen den n Nullpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ von $f(z)$ und die n Blätter den n Wurzelwerten von s ; und zwar ordnen wir, wenn $[s]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[n]{f(z)}$ bedeutet, dem ν ten Blatte ($\nu = 1, 2, \dots, n$) den Wert

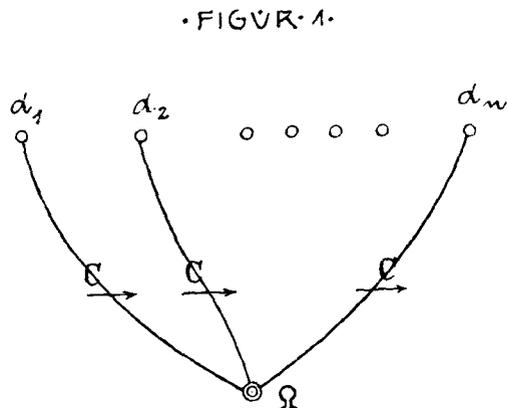
$$(2) \quad s_\nu = \rho^\nu [s]$$

zu, wo

$$(3) \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

ist.

Die Verzweigungslinien denken wir uns so gelegt, dass sie von den Verzweigungspunkten ausgehend nach einem Punkte Ω konvergieren, der kein Verzweigungspunkt ist. Dann hängen die n Blätter längs den Verzweigungslinien in gleicher Weise zusammen, und zwar permutieren sich die n Zweige (2) von s , wenn man bei positiver Umkreisung (entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers) eines Ver-



zweigungspunktes die zugehörige Verzweigungslinie überschreitet, nach dem Zyklus

$$(4) \quad C = (1, 2, \dots, n).$$

Das Geschlecht der RIEMANN'schen Fläche ist

$$(5) \quad p = (n - 2) \frac{n - 1}{2}$$

nach der Formel

$$(6) \quad 2p = w - 2(n - 1),$$

wo w die Summe der Ordnungen der einzelnen Verzweigungspunkte bedeutet.

Zu der durch die Gl. (1) erzeugten Funktionenklasse gehören also $p = (n - 2) \frac{n - 1}{2}$ linear unabhängige ABEL'sche Integrale 1. Gattung, die in irgend einer Gestalt mit u_μ ($\mu = 1, 2, \dots, p$) bezeichnet seien.

5. Um diese Integrale auf der RIEMANN'schen Fläche eindeutig zu machen, ist ein Querschnittsystem S erforderlich, das aus $p = (n - 2) \frac{n - 1}{2}$ Querschnittpaaren a, b besteht. Wendet man die Abbildung

$$(7) \quad s' = s \cdot \varrho,$$

durch die die Grundgleichung (1) in sich selbst übergeht, auf die RIEMANN'sche Fläche an, so geht auch diese in sich über, indem jedes einzelne Blatt in das zyklisch folgende verwandelt wird. Jede geschlossene Kurve λ bildet sich also auf eine Kurve λ' ab, die kongruent mit λ immer im zyklisch folgenden Blatte verläuft. Das Querschnittsystem S , das wir jetzt mit $S^{(1)}$ bezeichnen wollen, geht also durch die Abbildung (7) in ein neues System $S^{(2)}$ über, dessen einzelne Schnitte kongruent mit denen von $S^{(1)}$, aber immer im zyklisch folgenden Blatte verlaufen. Wir wollen sagen, $S^{(1)}$ wird durch die Abbildung (7) »um ein Blatt verschoben«. Wendet man die Abbildung (7) wiederholt an, so durchläuft $S^{(1)}$ nacheinander die Lagen $S^{(2)}, S^{(3)}, \dots, S^{(n)}, S^{(n+1)}, \dots$, wo

$$S^{(n+1)} = S^{(1)}$$

ist. $S^{(1)}$ erfährt also eine Gruppe zyklischer Verschiebungen.

Nun habe das Integral 1. Gattung u_μ die Periodizitätsmoduln ($\mu = 1, 2, \dots, p$; $\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$\omega_{\mu, 1}^{(\nu)}, \omega_{\mu, 2}^{(\nu)}, \dots, \omega_{\mu, p}^{(\nu)} \text{ an den Schnitten } a_\mu^{(\nu)},$$

und

$$\omega_{\mu, p+1}^{(\nu)}, \omega_{\mu, p+2}^{(\nu)}, \dots, \omega_{\mu, 2p}^{(\nu)} \text{ an den Schnitten } b_{\mu}^{(\nu)},$$

die zusammen das Schnittsystem $S^{(\nu)}$ bilden. Dann lassen sich die Periodizitätsmoduln des Schnittsystems $S^{(\nu+1)}$ linear und homogen mit ganzzahligen Koeffizienten durch die Periodizitätsmoduln des Schnittsystems $S^{(\nu)}$ ausdrücken, und zwar sind die ganzzahligen Koeffizienten dieselben für jeden Wert von ν . Also für $\nu = 1$ z. B. ($\lambda = 1, 2, \dots, 2p$):

$$(8) \quad \omega_{\mu, \lambda}^{(2)} = c_{1\lambda} \omega_{\mu, 1}^{(1)} + c_{2\lambda} \omega_{\mu, 2}^{(1)} + \dots + c_{2p, \lambda} \omega_{\mu, 2p}^{(1)}$$

oder symbolisch:

$$\left\{ \omega_{\mu}^{(2)} \right\} = \mathfrak{G} \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\},$$

wo \mathfrak{G} die Matrix:

$$(9) \quad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{2p, 1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2p, 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1, 2p} & c_{2, 2p} & \dots & c_{2p, 2p} \end{pmatrix}$$

bedeutet. Analog ist:

$$\left\{ \omega_{\mu}^{(3)} \right\} = \mathfrak{G} \left\{ \omega_{\mu}^{(2)} \right\}$$

u. s. f. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_{\mu}^{(2)} \right\} &= \mathfrak{G} \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\} \\ \left\{ \omega_{\mu}^{(3)} \right\} &= \mathfrak{G}^2 \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ \left\{ \omega_{\mu}^{(n)} \right\} &= \mathfrak{G}^{n-1} \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\} \\ \left\{ \omega_{\mu}^{(n+1)} \right\} &= \mathfrak{G}^n \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\left\{ \omega_{\mu}^{(n+1)} \right\} = \left\{ \omega_{\mu}^{(1)} \right\};$$

also ist

$$\mathfrak{G}^n = \begin{pmatrix} \text{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \text{I} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}$$

die Einheitsmatrix. *Es bilden also:*

$$(10) \quad \mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}^2, \dots, \mathfrak{C}^{n-1}$$

bei multiplikativer Zusammensetzung eine Gruppe, die der Gruppe der zyklischen Verschiebungen, die das Querschnittssystem S erfährt, isomorph ist.

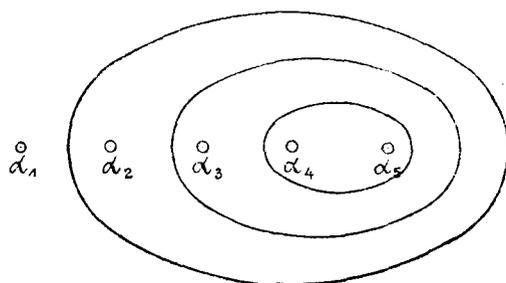
6. Die Gruppe (10) ist nach der von LOEWY eingeführten Sprechweise »unter Hervorhebung ihrer irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe« transformierbar, und zwar besitzt sie noch die besondere Eigenschaft, die LOEWY »vollständig reduzibel«¹ nennt.

Die vollständige Reduktion der Gruppe (10) können wir unmittelbar durch eine geeignete Anlage des Querschnittsystems erzielen, und zwar in umfassendster Allgemeinheit auf folgende Weise:

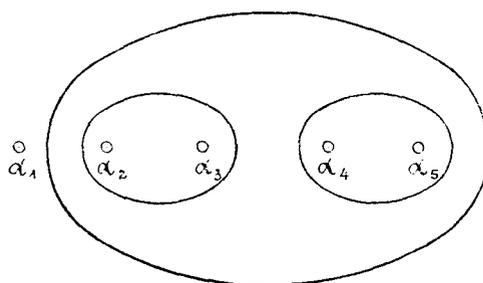
Wir denken uns über der RIEMANN'schen Fläche eine Ebene ausgebreitet und in ihr die Verzweigungspunkte eingetragen; die Verzweigungspunkte umgeben wir mit der grössten Anzahl verschiedener »Ovale«, die einander nicht schneiden und die Eigenschaften besitzen:

1. Ein Oval soll mindestens zwei Verzweigungspunkte einschliessen.

• FIGUR 2a •



• FIGUR 2b •



¹ Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses 1904. S. 196. Vergl. ausserdem folgende Arbeiten von LOEWY: 1. Zur Gruppentheorie, Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, V. 3. und 4. Heft. 2. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1902. Heft I. 3. Zur Gruppentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, Transactions of the american mathematical society, January 1904. 4. Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören, Transactions of the american mathematical society, October 1905. 5. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Mathemat. Annalen, Band 56. 6. Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Mathemat. Annalen, Band 62.

2. Zwei Ovale gelten als voneinander verschieden, wenn das eine wenigstens einen Verzweigungspunkt enthält, der von dem andern nicht eingeschlossen wird.

3. Einer und nur einer der Verzweigungspunkte soll von keinem Oval eingeschlossen werden.

Fig. 2 a und 2 b zeigen für $n = 5$ die möglichen Lagen der Ovale, insoweit sie typisch verschieden sind.

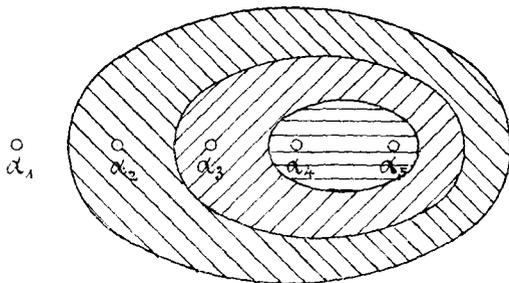
Die Anzahl dieser Ovale ist, wie man durch einen Schluss von ν auf $\nu + 1$ leicht einsieht, gleich $n - 2$.

Jedes Oval O kann seinerseits Ovale u. s. f. einschliessen. (Vergl. Fig. 2 a und 2 b.) Wir wollen ein Oval in O , das von keinem andern Oval in O eingeschlossen wird, ein »grösstes Oval in O « nennen; O kann höchstens zwei solche grösste Ovale einschliessen; also enthält ein Oval

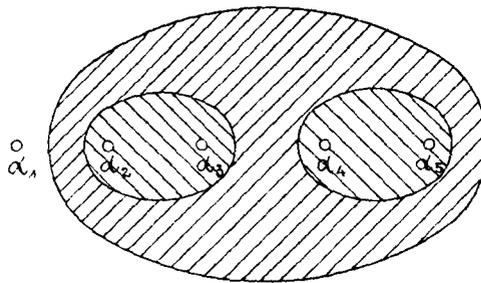
1. entweder zwei Verzweigungspunkte, oder
2. einen Verzweigungspunkt und ein grösstes Oval, oder
3. zwei grösste Ovale.

Durch diese $n - 2$ Ovale wird die Ebene in $n - 2$ »Parzellen« eingeteilt, wenn wir unter einer Parzelle den Teil der Ebene verstehen, der zwischen einem Oval und seinen grössten Ovalen enthalten ist; der äussere Raum mit dem einen nicht

• FIGUR 3 a •



• FIGUR 3 b •

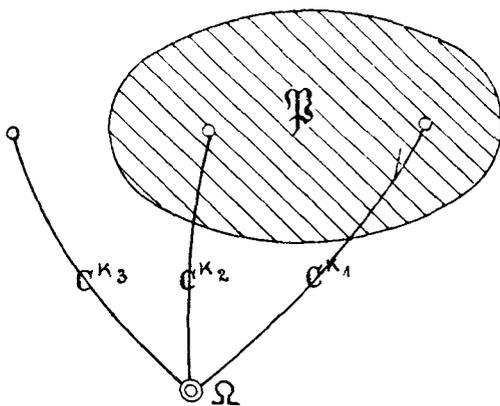


eingeschlossenen Verzweigungspunkt wird also nicht als Parzelle mitgezählt. Fig. 3 a und 3 b heben diese Parzellen für den Fall $n = 5$ durch verschiedene Schraffierung hervor.

Diese Parzellen übertragen wir nun auf die RIEMANN'sche Fläche. Dabei bildet sich jede Parzelle auf alle n -Blätter ab, und dieses Bild nennen wir kurz wiederum eine Parzelle. Eine Parzelle der RIEMANN'schen Fläche besteht also aus n übereinander liegenden Schichten, und solcher Parzellen gibt es $n - 2$.

Betrachten wir nun die RIEMANN'sche Fläche daraufhin, wieviel Querschnitte sich in einer Parzelle \mathfrak{P} anlegen lassen, so liegen die Verhältnisse ähnlich, als wenn wir eine RIEMANN'sche Fläche mit nur drei Verzweigungspunkten hätten. Denn sollen die Querschnitte ganz innerhalb \mathfrak{P} liegen, so dürfen sie sowohl das \mathfrak{P} umgebende Oval O , als auch die in O liegenden grössten Ovale nicht schneiden. Umkreisen nun die Querschnitte ein in O liegendes grösstes Oval O_1 , so überschreiten sie soviel Verzweigungslinien, als Verzweigungspunkte in demselben enthalten sind, falls der Punkt Ω , von dem alle Verzweigungslinien ausstrahlen, ausserhalb sämtlicher Ovale liegt. Dieselbe Wirkung erzielen wir aber, wenn wir die z_1 Verzweigungspunkte, die in dem Ovale O_1 liegen, in einen Punkt zusammenfallen lassen, und die Blätter der RIEMANN'schen Fläche längs der neuen Verzweigungslinie nach dem Zyklus C^{z_1} aneinander heften; enthält \mathfrak{P} noch ein zweites grösstes Oval O_2 , so darf ein in \mathfrak{P} liegender Querschnitt auch nicht in O_2 eindringen; wir lassen daher auch die in O_2 liegenden z_2 -Verzweigungspunkte in einen zusammenfallen, dessen Verzweigungslinie die Blätter nach dem Zyklus C^{z_2} verbindet. Da ein in \mathfrak{P} verlaufender Querschnitt auch die äussere Grenze von \mathfrak{P} nicht überschreiten darf, so verläuft er so, als wenn auch alle ausserhalb \mathfrak{P} liegenden Verzweigungspunkte — ihre Anzahl sei z_3 — in einen zusammengefallen wären. Die in \mathfrak{P} verlaufenden Querschnitte sind demnach genau so

• FIGUR 4 •



anzulegen, als wenn die RIEMANN'sche Fläche, wie in Fig. 4, nur drei Verzweigungspunkte und drei Verzweigungslinien mit den Zyklen C^{z_1} , C^{z_2} und C^{z_3} hätte, ($z_1 + z_2 + z_3 = n$) und \mathfrak{P} nur zwei dieser Verzweigungspunkte einschliesse. Enthält \mathfrak{P} ursprünglich nur ein grösstes Oval oder keines, so liegen ausserdem noch ein, bezw. zwei Verzweigungspunkte in \mathfrak{P} , und von den Zahlen z_1 und z_2 sind dann eine, bezw. beide gleich 1. Da nun n als Primzahl vorausgesetzt wird, so kann keiner der Zyklen C^{z_1} , C^{z_2} und C^{z_3} zerfallen; die drei Verzweigungspunkte zählen also je für $n - 1$ einfache, und daher ist das Geschlecht der vereinfachten RIEMANN'schen Fläche

(11)

$$g = \frac{n - 1}{2}$$

nach Gl. (6). Es sind also $\pi = \frac{n-1}{2}$ Querschnittpaare erforderlich, um diese RIEMANN'sche Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Diese Querschnitte lassen sich auch in der ursprünglichen Parzelle \mathfrak{P} anlegen, wo die Ovale O_1 und O_2 die Rolle der Verzweigungspunkte mit den Zyklen C^{x_1} , C^{x_2} spielen; da aber jeder der drei übrig bleibenden Verzweigungspunkte von der $(n-1)$ ten Ordnung ist, so sind in jeder der $n-2$ Parzellen $\pi = \frac{n-1}{2}$ Querschnittpaare möglich, zusammen also $(n-2)\pi = p$ Querschnittpaare; da keines dieser Schnittpaare die Fläche zerstückelt, ihre Anzahl aber $p = (n-2)\frac{n-1}{2}$ ist, so reichen sie aus (vergl. S. 7), um die Integrale u_μ auf der ursprünglichen RIEMANN'schen Fläche eindeutig zu machen. Es zerfällt also das so angelegte Querschnittssystem S in $n-2$ Teilsysteme S_1, S_2, \dots, S_{n-2} von je $\frac{n-1}{2}$ Querschnittpaaren, von denen jedes für sich in einer Parzelle liegt. Daher erfährt jedes Teilsystem S_h ($h = 1, 2, \dots, n-2$) durch die Abbildung (7) eine Gruppe zyklischer Verschiebungen $S_h^{(1)}, S_h^{(2)}, \dots, S_h^{(n)}$ und zwar so, dass kein Querschnitt des einen Teilsystems bei diesen Verschiebungen einen Querschnitt eines anderen Teilsystemes schneidet. Infolgedessen drücken sich die Periodizitätsmoduln eines Integrales 1. Gattung in den $\pi = \frac{n-1}{2}$ Schnittpaaren eines Teilsystems $S_h^{(v+1)}$ allein durch die Periodizitätsmoduln der vorhergehenden Lage desselben Teilsystems, also durch die Periodizitätsmoduln desselben Integrals an den Schnitten von $S_h^{(v)}$ aus, d. h. die Matrix \mathfrak{C} [Gl. (9)] zerfällt in $n-2$ Teilmatrizen \mathfrak{C}_h ($h = 1, 2, \dots, n-2$) nach dem Schema

$$(12) \quad \mathfrak{C} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathfrak{C}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{C}_{n-2} \end{array} \right\}.$$

Bezeichnet nun \mathfrak{E}_h die zu \mathfrak{C}_h gehörige Einheitsmatrix, so bilden also

$$\mathfrak{C}_h, \mathfrak{E}_h, \mathfrak{C}_h^2, \dots, \mathfrak{C}_h^{n-1}, \quad (h = 1, 2, \dots, n-2)$$

bei multiplikativer Zusammensetzung die »irreduziblen Bestandteile« der Gruppe (10), die wir durch die spezielle Anlage des Querschnittsystems »hervorgehoben« haben.

§ 2. Die Riemann'sche Fläche und die Integrale 1. Gattung für den Fall $n=5$.

7. Wir betrachten nunmehr den speziellen Fall $n=5$. Unsere Grundgleichung (1) § 1 nimmt dann die Form

$$(1) \quad s^5 = f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)(z - \alpha_5)$$

an. Zu s gehört eine fünfblättrige RIEMANN'sche Fläche mit den fünf Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und α_5 , von denen wir wieder voraussetzen, dass sie endlich und voneinander verschieden sind. Ist $[s]$ die eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[5]{f(z)}$, so ordnen wir dem ν ten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) der RIEMANN'schen Fläche den Wert

$$(2) \quad s_\nu = \rho^\nu [s]$$

zu, wo

$$(3) \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

ist. Die Verzweigungslinien lassen wir von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ausgehend nach einem Punkte Ω konvergieren, der kein Verzweigungspunkt ist (vergl. Fig. 1); dann permutieren sich die fünf Zweige s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 von s , wenn man bei positiver Umlenkung eines Verzweigungspunktes die zugehörige Verzweigungslinie überschreitet, nach dem Zyklus

$$(4) \quad C = (1, 2, 3, 4, 5).$$

Das Geschlecht dieser RIEMANN'schen Fläche ist nach Gl. (6) § 1

$$p = 6.$$

Demnach gehören zu der durch die Gl. (1) erzeugten Funktionenklasse sechs linear unabhängige ABEL'sche Integrale 1. Gattung. Als solche kann man wählen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \int \frac{dz}{s^2}; \\ V_1 = \int \frac{z dz}{s^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3}; \\ W_1 = \int \frac{z^2 dz}{s^4}, \quad W_2 = \int \frac{z dz}{s^4}, \quad W_3 = \int \frac{dz}{s^4}. \end{array} \right.$$

Diese Integrale wollen wir »Fundamentalintegrale« nennen, und zwar U ein Integral 1. Art, V_1 und V_2 Integrale 2. Art und W_1, W_2 und W_3 Integrale 3. Art.

8. Um diese sechs Integrale auf der RIEMANN'schen Fläche eindeutig zu machen, ist ein Querschnittsystem S von sechs Paar kanonischen Querschnitten erforderlich. Fig. 5 (siehe Anhang) veranschaulicht die von uns benutzte kanonische Zerschneidung, die nach den im § 1 entwickelten allgemeinen Prinzipien ausgeführt ist, und zwar ist die durch Fig. 3 b dargestellte Lage der Parzellen benutzt. Im Interesse der Zeichnung ist angenommen, dass die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ auf einer Geraden liegen; liegen sie nicht auf einer Geraden, so werden die Schnitte entsprechend verzerrt (vergl. Fig. 14, Anhang).

Das Schnittsystem S zerfällt in drei Teilsysteme,

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ bestehend aus den Schnittpaaren } a_1, b_1 \text{ und } a_4, b_4, \\ S_2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_2, b_2 \quad \text{»} \quad a_5, b_5, \\ S_3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_3, b_3 \quad \text{»} \quad a_6, b_6. \end{array}$$

Die ersten drei Schnitte eines jeden Teilsystemes hat man sich kongruent übereinander herlaufend zu denken, also:

$$\begin{array}{l} a_1 \cong b_1 \cong a_4, \\ a_2 \cong b_2 \cong a_5, \\ a_3 \cong b_3 \cong a_6. \end{array}$$

Ebenso könnte man sich auch die Teile des vierten Schnittes eines jeden Teilsystems, die in Fig. 5 nebeneinander gezeichnet sind, kongruent übereinander herlaufend denken, woraus jedoch keine weiteren Schlüsse gezogen werden. S_2 ist eine Wiederholung von S_1 , die durch die Benutzung der in Fig. 3 b dargestellten Lage der Parzellen möglich wurde; S_3 ist nach demselben Prinzip angelegt wie S_1 und S_2 . Die Pfeile an den Schnitten sind so gewählt, dass man bei einer positiven Umlaufung der Fläche T' , wie wir nach RIEMANN die RIEMANN'sche Fläche nach Ausführung der Zerschneidung nennen wollen, die linken Ufer der Schnitte, die wir als die positiven bezeichnen, in der Richtung der Pfeile, und die rechten Ufer der Schnitte, die wir als die negativen bezeichnen, in der entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen hat. Wenn man also über einen a -Schnitt in der Richtung des Pfeils integriert, so erhält man den positiven Periodizitätsmodul an dem zugehörigen b -Schnitt, und wenn man über einen b -Schnitt in der Richtung des Pfeils integriert, so erhält man den negativen Periodizitätsmodul an dem zugehörigen a -Schnitt.¹

Wie bereits bemerkt, sind die Schnitte jedes der Paare

$$a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$$

¹ C. NEUMANN, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Aufl. Leipzig, 1884, S. 175, § 10.

aneinander kongruent. Man kann die Zerschneidung auch so einrichten, dass die Schnitte jedes der übrigen Paare

$$a_4, b_4; a_5, b_5; a_6, b_6$$

ebenfalls einander kongruent sind, d. h. man könnte die Fläche so zerschneiden, dass die Schnitte jedes Paares a_μ, b_μ , ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) kongruent zueinander verlaufen; wir brauchen nur die Schnitte a_4, a_5 und a_6 , bezw. kongruent zu den Schnitten b_4, b_5 und b_6 zu machen. Vergl. Fig. 5 a und 5 b, von denen

• FIGUR 5a •

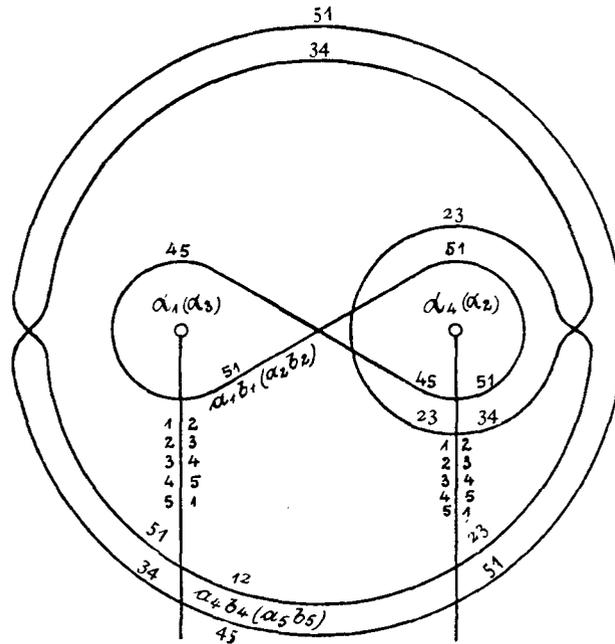


Fig. 5 a die Teilsysteme S_1 und S_2 , Fig. 5 b das Teilsystem S_3 darstellt, das übrigens auch der Form nach mit S_1 und S_2 übereinstimmend angelegt werden könnte. (In Fig. 5 natürlich auch.) Dabei sind zur Vereinfachung der Figuren die Schnitte jedes Paares, da sie ohnehin kongruent sind, durch eine Kurve wiedergegeben. Von den beigefügten Zahlen gibt die erste das Blatt an, in dem der betreffende Schnitt a , die zweite das Blatt, in dem der Schnitt b verläuft. Eine einzige Angabe dieser Art hätte übrigens genügt. Sämtliche Schnitte können in der mannigfachsten Weise stetig deformiert werden, ohne dass die Resultate unserer Untersuchung eine Änderung erleiden.

§ 3. Die Periodizitätsmoduln.

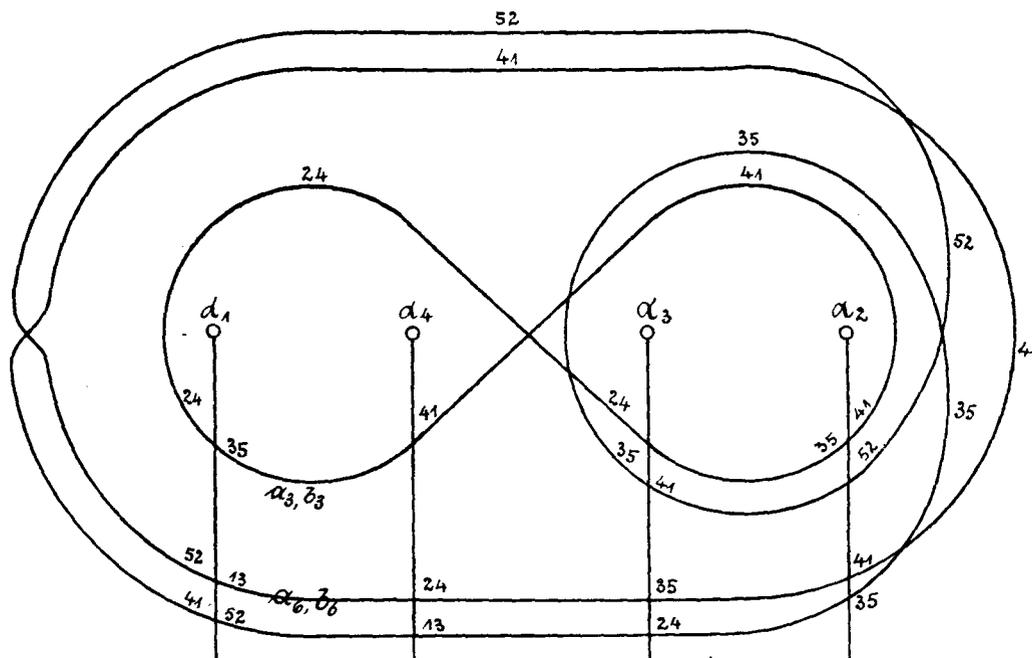
9. Die Periodizitätsmoduln der sechs Fundamental-Integrale I. Gattung U, V_1, V_2, W_1, W_2 und W_3 an den zwölf Schnitten a_μ und b_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) seien:

I

	a_μ	b_μ
$\overset{+}{U} - \overset{-}{U}$	$A_{1\mu}$	$B_{1\mu}$
$\overset{+}{V}_1 - \overset{-}{V}_1$	$A_{2\mu}$	$B_{2\mu}$
$\overset{+}{V}_2 - \overset{-}{V}_2$	$A_{3\mu}$	$B_{3\mu}$
$\overset{+}{W}_1 - \overset{-}{W}_1$	$A_{4\mu}$	$B_{4\mu}$
$\overset{+}{W}_2 - \overset{-}{W}_2$	$A_{5\mu}$	$B_{5\mu}$
$\overset{+}{W}_3 - \overset{-}{W}_3$	$A_{6\mu}$	$B_{6\mu}$

Diese 72 Periodizitätsmoduln lassen sich nach den im § 1 gemachten Bemerkungen allein infolge der besonderen Anlage des Querschnittsystems auf 18 reduzieren.

• FIGUR 5b •



Es verhält sich nämlich der Wert von s in einem Punkte P der RIEMANN'schen Fläche zu dem Wert von s in dem im ν ten zyklisch folgenden Blatte kongruent zu P liegenden Punkte $P^{(\nu)}$ wie $1 : \varrho^\nu$. Mithin verhält sich der Wert des Differentials eines Integrals der r ten Art in P zu dem Wert desselben Differentials in $P^{(\nu)}$ wie

$$(1) \quad \left(\frac{\varrho^\nu}{1}\right)^{r+1} = \varrho^{\nu(r+1)} : 1.$$

Der Wert dieses Verhältnisses ändert sich nicht, wenn P und $P^{(\nu)}$ kongruent übereinander liegen bleibend irgendwelche Wege beschreiben, die nicht durch die Verzweigungspunkte gehen. Nun verlaufen aber die Schnitte b_λ ($\lambda = 1, 2$) bzw. b_3 kongruent und gleichgerichtet mit a_λ bzw. a_6 , und zwar im zyklisch folgenden Blatte, und b_3 kongruent und gleichgerichtet mit a_3 , und zwar im zweiten auf a_3 zyklisch folgenden Blatte (vergl. Fig. 5). Also ergibt sich für ein Integral der r ten Art ($\lambda = 1, 2; \mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$\frac{\int_{b_\lambda} a_\lambda}{\int_{b_\lambda} b_\lambda} = -\frac{B_{\mu\lambda}}{A_{\mu\lambda}} = \varrho^{r+1}, \quad \frac{\int_{b_3} a_6}{\int_{b_3} b_3} = -\frac{B_{\mu 6}}{A_{\mu 3}} = \varrho^{r+1}$$

und

$$\frac{\int_{b_3} a_3}{\int_{b_3} b_3} = -\frac{B_{\mu 3}}{A_{\mu 3}} = \varrho^{2(r+1)}.$$

Hieraus folgen die Gleichungen: ($\lambda = 1, 2$)

$$(2) \quad \begin{cases} B_{1\lambda} = -\varrho^3 A_{1\lambda}; \\ B_{2\lambda} = -\varrho^3 A_{2\lambda}, \quad B_{3\lambda} = -\varrho^3 A_{3\lambda}; \\ B_{4\lambda} = -\varrho^4 A_{4\lambda}, \quad B_{5\lambda} = -\varrho^4 A_{5\lambda}, \quad B_{6\lambda} = -\varrho^4 A_{6\lambda}. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} B_{16} = -\varrho^3 A_{13}; \\ B_{26} = -\varrho^3 A_{23}, \quad B_{36} = -\varrho^3 A_{33}; \\ B_{46} = -\varrho^4 A_{43}, \quad B_{56} = -\varrho^4 A_{53}, \quad B_{66} = -\varrho^4 A_{63}. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} B_{13} = -\varrho^4 A_{13}; \\ B_{23} = -\varrho A_{23}, \quad B_{33} = -\varrho A_{33}. \\ B_{43} = -\varrho^3 A_{43}, \quad B_{53} = -\varrho^3 A_{53}, \quad B_{63} = -\varrho^3 A_{63}. \end{cases}$$

10. Weitere Gleichungen zwischen den Periodizitätsmoduln erhalten wir, wenn wir auf die RIEMANN'sche Fläche die Abbildung (7), § 1, anwenden. Dadurch entsteht auch zu jedem der RIEMANN'schen Schnitte, zu dem im Schnittsystem S (Fig. 5) kein kongruent mit ihm verlaufender vorhanden ist, ein immer im zyklisch folgenden Blatt verlaufender kongruenter Schnitt. Dieser kongruente Schnitt wird im allgemeinen an mehreren Stellen auf Schnitte des Systems S stossen und zwar nach § 1 immer nur auf Schnitte desselben Teilsystems. Verfolgt man nun jedes Mal, wo man auf einen der RIEMANN'schen Schnitte stösst, diesen, jedoch ohne ihn zu überschreiten, bis zum Schnittpunkt mit dem zu ihm gehörenden anderen RIEMANN'schen Schnitt, und verfolgt man dann diesen, wiederum ohne ihn zu überschreiten, u. s. f., so gelangt man schliesslich an den Punkt, der dem Punkte gegenüberliegt, in dem man zuerst auf einen der RIEMANN'schen Schnitte des Systems S stiess; setzt man nun den ursprünglichen Weg fort, u. s. w., dann erhält man schliesslich einen geschlossenen Weg, der ganz in der Fläche T' verläuft. Das Integral über diesen Weg ist also null.

Ist α_x ($x = 4, 5$) der zu α_x immer im zyklisch folgenden Blatt verlaufende kongruente Schnitt, dann ist:

$$(5) \quad \int_{\alpha_x}^+ + \int_{b_{x-3}}^+ + \int_{\alpha_x}^- - \int_{b_x}^- = 0,$$

oder: ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$(5a) \quad \int_{\alpha_x}^- - A_{\mu, x-3} + B_{\mu x} + A_{\mu x} = 0.$$

Nun ist nach Gl. (1) für ein Integral r ter Art:

$$\frac{\int_{\alpha_x}^+}{\int_{\alpha_x}^-} = \varrho^{r+1}, \text{ also } \int_{\alpha_x}^+ = \varrho^{-(r+1)} B_{\mu x}.$$

Folglich ist:

$$(5b) \quad \varrho^{-(r+1)} B_{\mu x} - A_{\mu, x-3} + B_{\mu x} + A_{\mu x} = 0,$$

oder:

$$(6) \quad \begin{cases} A_{1, x-3} - A_{1x} - B_{1x}(1 + \varrho^3) = 0, & A_{4, x-3} - A_{4x} - B_{4x}(1 + \varrho) = 0, \\ A_{2, x-3} - A_{2x} - B_{2x}(1 + \varrho^2) = 0, & A_{5, x-3} - A_{5x} - B_{5x}(1 + \varrho) = 0, \\ A_{3, x-3} - A_{3x} - B_{3x}(1 + \varrho^2) = 0, & A_{6, x-3} - A_{6x} - B_{6x}(1 + \varrho) = 0. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich für einen zu b_x ($x = 4, 5$) im zyklisch folgenden Blatt kongruent verlaufenden Weg β_x :

$$(7) \quad \int_{\beta_x} + \int_{b_{x-3}} + \int_{a_x} = 0.$$

Also:

$$(7a) \quad \int_{\beta_x} - A_{\mu, x-3} + B_{\mu x} = 0.$$

Für ein Integral r ter Art ist aber:

$$\int_{\beta_x} = -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu x}.$$

Folglich:

$$(7b) \quad -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu x} - A_{\mu, x-3} + B_{\mu x} = 0,$$

oder:

$$(8) \quad \begin{cases} A_{1, x-3} + \varrho^3 A_{1x} - B_{1x} = 0, & A_{4, x-3} + \varrho A_{4x} - B_{4x} = 0, \\ A_{2, x-3} + \varrho^2 A_{2x} - B_{2x} = 0, & A_{5, x-3} + \varrho A_{5x} - B_{5x} = 0, \\ A_{3, x-3} + \varrho^2 A_{3x} - B_{3x} = 0, & A_{6, x-3} + \varrho A_{6x} - B_{6x} = 0. \end{cases}$$

Schliesslich sei β_6 der kongruent zu b_6 im zyklisch folgenden Blatt verlaufende Schnitt. Dann ist:

$$(9) \quad \int_{\beta_6} + \int_{a_3} + \int_{a_6} = 0.$$

Also:

$$(9a) \quad \int_{\beta_6} + B_{\mu 3} + B_{\mu 6} = 0.$$

Da nun für ein Integral r ter Art

$$\int_{\beta_6} = -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu 6}$$

ist, so ist:

$$(9b) \quad -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu 6} + B_{\mu 3} + B_{\mu 6} = 0,$$

oder:

$$(10) \quad \begin{cases} \varrho^3 A_{16} - B_{13} - B_{16} = 0, & \varrho A_{46} - B_{43} - B_{46} = 0, \\ \varrho^2 A_{26} - B_{23} - B_{26} = 0, & \varrho A_{56} - B_{53} - B_{56} = 0, \\ \varrho^2 A_{36} - B_{33} - B_{36} = 0, & \varrho A_{66} - B_{63} - B_{66} = 0. \end{cases}$$

II. Aus den Gl. (6) und (8) ergibt sich: ($x = 4, 5$)

$$(11) \quad \begin{cases} A_{1x} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{1, x-3}, & A_{4x} = -(\varrho + \varrho^4) A_{4, x-3}, \\ A_{2x} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{2, x-3}, & A_{5x} = -(\varrho + \varrho^4) A_{5, x-3}, \\ A_{3x} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{3, x-3}, & A_{6x} = -(\varrho + \varrho^4) A_{6, x-3}. \end{cases}$$

Aus den Gl. (3), (4) und (10) folgt:

$$(12) \quad \begin{cases} A_{16} = -(\varrho + \varrho^4) A_{13}, & A_{46} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{43}, \\ A_{26} = -(\varrho + \varrho^4) A_{23}, & A_{56} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{53}, \\ A_{36} = -(\varrho + \varrho^4) A_{33}, & A_{66} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{63}. \end{cases}$$

Die Gl. (6) und (11) ergeben: ($x = 4, 5$)

$$(13) \quad \begin{cases} B_{1x} = -\varrho A_{1, x-3}; \\ B_{2x} = -\varrho^4 A_{2, x-3}, \quad B_{3x} = -\varrho^4 A_{3, x-3}; \\ B_{4x} = -\varrho^2 A_{4, x-3}, \quad B_{5x} = -\varrho^2 A_{5, x-3}, \quad B_{6x} = -\varrho^2 A_{6, x-3}. \end{cases}$$

Folglich ergeben die Gleichungen (2), (3), (4), (11), (12) und (13) statt der Tabelle I folgendes Periodenschema:

II.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U} - \bar{U}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{11}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{12}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{13}$
$\overset{+}{V}_1 - \bar{V}_1$	A_{21}	A_{22}	A_{23}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{21}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{22}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{23}$
$\overset{+}{V}_2 - \bar{V}_2$	A_{31}	A_{32}	A_{33}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{31}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{32}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{33}$
$\overset{+}{W}_1 - \bar{W}_1$	A_{41}	A_{42}	A_{43}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{41}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{42}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{43}$
$\overset{+}{W}_2 - \bar{W}_2$	A_{51}	A_{52}	A_{53}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{51}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{52}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{53}$
$\overset{+}{W}_3 - \bar{W}_3$	A_{61}	A_{62}	A_{63}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{61}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{62}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{63}$

an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\bar{U} - \bar{U}$	$-\varrho^2 A_{11}$	$-\varrho^2 A_{12}$	$-\varrho^4 A_{13}$	$-\varrho A_{11}$	$-\varrho A_{12}$	$-\varrho^2 A_{13}$
$\bar{V}_1 - \bar{V}_1$	$-\varrho^3 A_{21}$	$-\varrho^3 A_{22}$	$-\varrho A_{23}$	$-\varrho^4 A_{21}$	$-\varrho^4 A_{22}$	$-\varrho^3 A_{23}$
$\bar{V}_2 - \bar{V}_2$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{32}$	$-\varrho A_{33}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^4 A_{32}$	$-\varrho^3 A_{33}$
$\bar{W}_1 - \bar{W}_1$	$-\varrho^4 A_{41}$	$-\varrho^4 A_{42}$	$-\varrho^3 A_{43}$	$-\varrho^2 A_{41}$	$-\varrho^2 A_{42}$	$-\varrho^4 A_{43}$
$\bar{W}_2 - \bar{W}_2$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{52}$	$-\varrho^3 A_{53}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^2 A_{52}$	$-\varrho^4 A_{53}$
$\bar{W}_3 - \bar{W}_3$	$-\varrho^4 A_{61}$	$-\varrho^4 A_{62}$	$-\varrho^3 A_{63}$	$-\varrho^2 A_{61}$	$-\varrho^2 A_{62}$	$-\varrho^4 A_{63}$

worin also nur noch die Periodizitätsmoduln der sechs Integrale 1. Gattung an den drei Schnitten a_1 , a_2 und a_3 vorkommen, die bezw. den Teilsystemen S_1 , S_2 und S_3 angehören.

§. 4. Die Normalintegrale 1. Gattung.

12. Die bisher abgeleiteten Periodenrelationen sind lediglich eine Folge der Abbildbarkeit der Riemann'schen Fläche auf sich. Es gibt aber noch eine Reihe weiterer Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale 1. Gattung, die nicht aus der speziellen Natur des vorliegenden algebraischen Gebildes, sondern aus dem allgemeinen Satze entspringen, dass, wenn I und I' zwei Integrale 1. Gattung sind; das über die ganze Berandung von T' erstreckte Integral $\int I dI'$ gleich null ist. Um in die Fülle der so erhaltenen Gleichungen Übersichtlichkeit zu bringen, bilden wir aus den Integralen gleicher Art lineare Verbindungen mit besonders einfachen Periodizitätsmoduln. Von diesen »halbnormierten Integralen« gehen wir dann zu den definitiv normierten über.

Die Untersuchung geht aus von dem bekannten Satze, dass die Determinante aus den Periodizitätsmoduln von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung an den a -Schnitten nicht null ist. Es ist also:

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{11} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{12} & -(\varrho + \varrho^4) A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{21} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{22} & -(\varrho + \varrho^4) A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & -(\varrho^3 + \varrho^3) A_{31} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{32} & -(\varrho + \varrho^4) A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & -(\varrho + \varrho^4) A_{41} & -(\varrho + \varrho^4) A_{42} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & -(\varrho + \varrho^4) A_{51} & -(\varrho + \varrho^4) A_{52} & -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & -(\varrho + \varrho^4) A_{61} & -(\varrho + \varrho^4) A_{62} & -(\varrho^3 + \varrho^3) A_{63} \end{vmatrix} \neq 0$$

Wir multiplizieren die 1. bzw. 2. Spalte mit $(\varrho + \varrho^4)$ und addieren sie bzw. zur 4. und 5. Spalte, die 3. Spalte multiplizieren wir mit $(\varrho^2 + \varrho^3)$ und addieren sie zur letzten Spalte. Dann ergibt sich:

$$(2) D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{11} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{12} & -(1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{21} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{22} & -(1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{31} & (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{32} & -(1 + 2\varrho + 2\varrho^4)A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

oder

$$(3) D = - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} \end{vmatrix} \cdot (1 + 2\varrho + 2\varrho^4)^3 \neq 0.$$

Folglich ist:

$$(4a) D' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{und} \quad 4b) D'' = \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} \end{vmatrix} \neq 0.$$

13. Bildet man also aus W_1, W_2 und W_3 drei lineare Funktionen W_1^*, W_2^* und W_3^* mit der Vorschrift, dass an:

$$\text{III. } \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \overline{W}_1^* - \overline{W}_1^* & 1 & 0 & 0 \\ \hline \overline{W}_2^* - \overline{W}_2^* & 0 & 1 & 0 \\ \hline \overline{W}_3^* - \overline{W}_3^* & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

sei, so haben die daraus entspringenden Gleichungen:

$$(5) \begin{cases} A_{41} W_1^* + A_{42} W_2^* + A_{43} W_3^* = W_1, \\ A_{51} W_1^* + A_{52} W_2^* + A_{53} W_3^* = W_2, \\ A_{61} W_1^* + A_{62} W_2^* + A_{63} W_3^* = W_3, \end{cases}$$

nach Gl. (4b) eine nicht verschwindende Auflösungsdeterminante D'' , und es ist daher:

$$(6) \quad \begin{cases} W_1^* = \frac{D''_{41} W_1 + D''_{51} W_2 + D''_{61} W_3}{D''}, \\ W_2^* = \frac{D''_{42} W_1 + D''_{52} W_2 + D''_{62} W_3}{D''}, \\ W_3^* = \frac{D''_{43} W_1 + D''_{53} W_2 + D''_{63} W_3}{D''}, \end{cases}$$

wo D''_{hk} die zu A_{hk} gehörende Unterdeterminante von D'' bedeutet.

Diese Ausdrücke W_1^* , W_2^* und W_3^* bilden die »Normalintegrale 3. Art«.

Um in ähnlicher Weise die Integrale der beiden anderen Arten zu normieren, bedenken wir, dass wegen $D' \neq 0$ (Gl. 4a) mindestens ein Element $A_{1\alpha}$ der ersten Zeile von D' mitsamt seiner Adjunkte $D'_{1\alpha}$ von null verschieden sein muss ($\alpha = 1, 2, 3$); dabei bedeutet $A_{1\alpha}$ den Periodizitätsmodul von U an a_α ; ist nun $\alpha = 1$ oder $= 2$, so können wir die Querschnitte a_1, a_2, a_3 uns so unnumeriert denken, dass jener nicht verschwindende Periodizitätsmodul gerade den Index $\alpha = 3$ erhält. Wir dürfen daher unbeschadet der Allgemeinheit die Annahmen:

$$(7) \quad A_{13} \neq 0, \quad D'_{13} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \neq 0$$

machen.

Sind jetzt V_1^* und V_2^* zwei lineare Verbindungen von V_1 und V_2 mit den Periodizitätsmoduln:

$$IV. \quad \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline \bar{V}_1^* - \bar{V}_1^+ & 1 & 0 \\ \hline \bar{V}_2^* - \bar{V}_2^+ & 0 & 1 \end{array}$$

so ist:

$$(8) \quad \begin{cases} A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^* = V_1, \\ A_{31} V_1^* + A_{32} V_2^* = V_2, \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf (7):

$$(9) \quad \begin{cases} V_1^* = \frac{A_{32} V_1 - A_{22} V_2}{D'_{13}}, \\ V_2^* = \frac{-A_{31} V_1 + A_{21} V_2}{D'_{13}}. \end{cases}$$

Dies sind die »Normalintegrale 2. Art«; ihre Periodizitätsmoduln an a_α setzen wir zur Abkürzung gleich ω_1 bzw. ω_2 , dann ist:

$$(10) \quad \begin{cases} \text{an } a_3: \quad \bar{V}_1^+ - \bar{V}_1^- = \frac{A_{32} A_{23} - A_{22} A_{33}}{D'_{13}} = \omega_1, \\ \text{an } a_3: \quad \bar{V}_2^+ - \bar{V}_2^- = \frac{-A_{31} A_{23} + A_{21} A_{33}}{D'_{13}} = \omega_2. \end{cases}$$

Als Normalintegral 1. Art wählen wir die nach (7) zulässige Bildung:

$$(11) \quad \frac{U}{A_{13}} = U^*,$$

und setzen (vorübergehend):

$$(12) \quad \frac{A_{11}}{A_{13}} = a_{11}, \quad \frac{A_{12}}{A_{13}} = a_{12}.$$

Die Gl. (6), (9) und (11) ergeben also jetzt zusammen mit der Tabelle II. und den Gl. (10) und (12) folgendes Periodenschema:

V.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\bar{U}^+ - \bar{U}^-$	a_{11}	a_{12}	I	$-(\varrho^2 + \varrho^3) a_{11}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) a_{12}$	$-(\varrho + \varrho^4)$
$\bar{V}_1^+ - \bar{V}_1^-$	I	0	ω_1	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	0	$-(\varrho + \varrho^4) \omega_1$
$\bar{V}_2^+ - \bar{V}_2^-$	0	I	ω_2	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	$-(\varrho + \varrho^4) \omega_2$
$\bar{W}_1^+ - \bar{W}_1^-$	I	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0	0
$\bar{W}_2^+ - \bar{W}_2^-$	0	I	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0
$\bar{W}_3^+ - \bar{W}_3^-$	0	0	I	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\bar{U}^+ - \bar{U}^-$	$-\varrho^2 a_{11}$	$-\varrho^3 a_{12}$	$-\varrho^4$	$-\varrho a_{11}$	$-\varrho a_{12}$	$-\varrho^2$
$\bar{V}_1^+ - \bar{V}_1^-$	$-\varrho^3$	0	$-\varrho \omega_1$	$-\varrho^4$	0	$-\varrho^3 \omega_1$
$\bar{V}_2^+ - \bar{V}_2^-$	0	$-\varrho^3$	$-\varrho \omega_2$	0	$-\varrho^4$	$-\varrho^3 \omega_2$
$\bar{W}_1^+ - \bar{W}_1^-$	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0	0
$\bar{W}_2^+ - \bar{W}_2^-$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\bar{W}_3^+ - \bar{W}_3^-$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

14. Auf diese »halbnormierte« Integrale 1. Gattung wenden wir jetzt den in Artikel 12. erwähnten Satz an, dass, wenn I und I' irgend zwei Integrale 1. Gattung sind, das Integral $\int_{T'} I dI'$ über den ganzen Rand der kanonisch zerschnittenen RIEMANN'schen Fläche T' genommen verschwindet. Nun ist aber:

$$\int_{T'} I dI' = \sum_{\mu} \begin{vmatrix} A_{\mu} & B_{\mu} \\ A'_{\mu} & B'_{\mu} \end{vmatrix},$$

wo A_{μ} bzw. A'_{μ} die Periodizitätsmoduln der Integrale I bzw. I' an dem Schnitte a_{μ} , und B_{μ} bzw. B'_{μ} die Periodizitätsmoduln der Integrale I bzw. I' an dem Schnitte b_{μ} bedeuten.

Wir haben also die Relation:

$$(13) \quad \sum_{\mu} \begin{vmatrix} A_{\mu} & B_{\mu} \\ A'_{\mu} & B'_{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir 1) $I = U^*$, $I' = V_1^*$ und 2) $I = U^*$, $I' = V_2^*$, so ergibt sich:

$$(14) \quad a_{11} = (\varrho + \varrho^4) \omega_1 \text{ und } a_{12} = (\varrho + \varrho^4) \omega_2.$$

Auf die übrigen Integrale angewandt ergibt Gl. (13) Identitäten.

Demnach nimmt das Periodenschema V endgültig die folgende Form an:

VI.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\bar{U}^+ - \bar{U}^*$	$(\varrho + \varrho^4) \omega_1$	$(\varrho + \varrho^4) \omega_2$	1	ω_1	ω_2	$-(\varrho + \varrho^4)$
$\bar{V}_1^+ - \bar{V}_1^*$	1	0	ω_1	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	0	$-(\varrho + \varrho^4) \omega_1$
$\bar{V}_2^+ - \bar{V}_2^*$	0	1	ω_2	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	$-(\varrho + \varrho^4) \omega_2$
$\bar{W}_1^+ - \bar{W}_1^*$	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0	0
$\bar{W}_2^+ - \bar{W}_2^*$	0	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0
$\bar{W}_3^+ - \bar{W}_3^*$	0	0	1	0	0	$-(\varrho^3 + \varrho^3)$
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\bar{U}^+ - \bar{U}^*$	$-(\varrho + \varrho^3) \omega_1$	$-(\varrho + \varrho^3) \omega_2$	$-\varrho^4$	$-(1 + \varrho^2) \omega_1$	$-(1 + \varrho^2) \omega_2$	$-\varrho^2$
$\bar{V}_1^+ - \bar{V}_1^*$	$-\varrho^3$	0	$-\varrho \omega_1$	$-\varrho^4$	0	$-\varrho^3 \omega_1$
$\bar{V}_2^+ - \bar{V}_2^*$	0	$-\varrho^3$	$-\varrho \omega_2$	0	$-\varrho^4$	$-\varrho^3 \omega_2$
$\bar{W}_1^+ - \bar{W}_1^*$	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0	0
$\bar{W}_2^+ - \bar{W}_2^*$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\bar{W}_3^+ - \bar{W}_3^*$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

In dieser Tabelle sehen wir die anfänglich 72 Periodizitätsmoduln der sechs Integrale 1. Gattung auf zwei absolute Moduln ω_1 und ω_2 zurückgeführt, die, falls zwischen den Verzweigungspunkten keine besonderen Relationen bestehen, voneinander unabhängig sind.

15. Auch von den halbnormierten Integralen ist die Determinante der Periodizitätsmoduln an den a -Schnitten nicht null; also:

$$\begin{vmatrix} (\varrho + \varrho^4)\omega_1 & (\varrho + \varrho^4)\omega_2 & 1 & \omega_1 & \omega_2 & -(\varrho + \varrho^4) \\ 1 & 0 & \omega_1 & -(\varrho^2 + \varrho^3) & 0 & -(\varrho + \varrho^4)\omega_1 \\ 0 & 1 & \omega_2 & 0 & -(\varrho^2 + \varrho^3) & -(\varrho + \varrho^4)\omega_2 \\ 1 & 0 & 0 & -(\varrho + \varrho^4) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -(\varrho + \varrho^4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(\varrho^2 + \varrho^3) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir multiplizieren die 1., bezw. 2. Spalte mit $(\varrho^2 + \varrho^3)$ und addieren sie zur 4. bezw. 5. Spalte; die 3. Spalte multiplizieren wir mit $(\varrho + \varrho^4)$ und addieren sie zur letzten Spalte. Dann ist:

$$\begin{vmatrix} (\varrho + \varrho^4)\omega_1 & (\varrho + \varrho^4)\omega_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 + 2\varrho^2 + 2\varrho^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 + 2\varrho^2 + 2\varrho^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(1 + 2\varrho^2 + 2\varrho^3) \end{vmatrix} \neq 0,$$

woraus jetzt folgt, dass die Unterdeterminante:

$$(15) \quad \Omega = \begin{vmatrix} (\varrho + \varrho^4)\omega_1 & (\varrho + \varrho^4)\omega_2 & 1 \\ 1 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 1 & \omega_2 \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist; also ist:

$$(16) \quad \Omega = 1 - (\varrho + \varrho^4)(\omega_1^2 + \omega_2^2) \neq 0.$$

Auf diese Ungleichheit gestützt, lassen sich jetzt die definitiven Normalintegrale 1. Gattung leicht konstruieren. Wir bilden zunächst aus U^* , V_1^* und V_2^* drei lineare Funktionen T_1 , T_2 und T_3 , mit den Periodizitätsmoduln:

VII.

an:	a_1	a_2	a_3
$\overset{+}{T}_1 - \bar{T}_1$	1	0	0
$\overset{+}{T}_2 - \bar{T}_2$	0	1	0
$\overset{+}{T}_3 - \bar{T}_3$	0	0	1

Dann ist:

$$(17) \quad \begin{cases} (\varrho + \varrho^4)\omega_1 T_1 + (\varrho + \varrho^4)\omega_2 T_2 + T_3 = U^*, \\ T_1 + \omega_1 T_3 = V_1^*, \\ T_2 + \omega_2 T_3 = V_2^*; \end{cases}$$

mithin:

$$(18) \quad \begin{cases} T_1 = \frac{-\omega_1 U^* + (1 - (\varrho + \varrho^4)\omega_2^2) V_1^* + (\varrho + \varrho^4)\omega_1 \omega_2 V_2^*}{\Omega} \\ T_2 = \frac{-\omega_2 U^* + (\varrho + \varrho^4)\omega_1 \omega_2 V_1^* + (1 - (\varrho + \varrho^4)\omega_1^2) V_2^*}{\Omega} \\ T_3 = \frac{U^* - (\varrho + \varrho^4)\omega_1 V_1^* - (\varrho + \varrho^4)\omega_2 V_2^*}{\Omega}. \end{cases}$$

Demnach ergibt sich jetzt folgendes Periodenschema:

VIII.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{T}_1 - \bar{T}_1$	1	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	0	0
$\overset{+}{T}_2 - \bar{T}_2$	0	1	0	0	$-(\varrho^3 + \varrho^3)$	0
$\overset{+}{T}_3 - \bar{T}_3$	0	0	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$
$\overset{+}{W}_1^* - \bar{W}_1^*$	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0	0
$\overset{+}{W}_2^* - \bar{W}_2^*$	0	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0
$\overset{+}{W}_3^* - \bar{W}_3^*$	0	0	1	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$

an :	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{T}_1 - \bar{T}_1$	$(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_1^2}{\Omega} - \varrho^3$	$(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_1 \omega_2}{\Omega}$	$-(\varrho - \varrho^4) \frac{\omega_1}{\Omega}$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_1^2}{\Omega} - \varrho^4$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_1 \omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_1}{\Omega}$
$\overset{+}{T}_2 - \bar{T}_2$	$(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_1 \omega_2}{\Omega}$	$(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_2^2}{\Omega} - \varrho^3$	$-(\varrho - \varrho^4) \frac{\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_1 \omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_2^2}{\Omega} - \varrho^4$	$(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_2}{\Omega}$
$\overset{+}{T}_3 - \bar{T}_3$	$-(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_1}{\Omega}$	$-(1 + 2\varrho + 2\varrho^3) \frac{\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho - \varrho^4) \frac{1}{\Omega} - \varrho$	$-(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_1}{\Omega}$	$-(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{\omega_2}{\Omega}$	$-(\varrho^2 - \varrho^3) \frac{1}{\Omega} - \varrho^3$
$\overset{+}{W}_1^* - \bar{W}_1^*$	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0	0
$\overset{+}{W}_2^* - \bar{W}_2^*$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\overset{+}{W}_3^* - \bar{W}_3^*$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

16. Aus diesen sechs Integralen erhalten wir die Normalintegrale 1. Gattung, wenn wir aus T_1 und W_1^* , T_2 und W_2^* , bzw. T_3 und W_3^* je zwei lineare Funktionen u_1 und u_4 , u_2 und u_5 , bzw. u_3 und u_6 bilden, denen wir die Periodizitätsmoduln vorschreiben:

IX. an $a_\nu: u_\mu^+ - u_\mu^- = \delta_{\mu\nu}$, ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$),

wo $\delta_{\mu\nu}$ das KRONECKER'sche Symbol ist, das für $u = \nu$ den Wert 1, für $u \neq \nu$ den Wert null hat.¹ Dann ist:

$$(19) \quad \begin{cases} u_1 - (\varrho^2 + \varrho^3) u_4 = T_1, & u_1 - (\varrho + \varrho^4) u_4 = W_1^*, \\ u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3) u_5 = T_2, & u_2 - (\varrho + \varrho^4) u_5 = W_2^*, \\ u_3 - (\varrho + \varrho^4) u_6 = T_3, & u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3) u_6 = W_3^*; \end{cases}$$

und die definitiven Normalintegrale sind endlich:

$$(20) \quad \begin{cases} u_1 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_1 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_1^*, \\ u_2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_2^*, \\ u_3 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_3 + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_3^*, \end{cases}$$

¹ Die RIEMANN'schen Normalintegrale 1. Gattung sind also $\pi i u_\mu$.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_4 = -\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_1 - W_1^*), \\ u_5 = -\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_2 - W_2^*), \\ u_6 = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_3 - W_3^*). \end{array} \right.$$

Setzen wir symbolisch

$$(21) \quad a\varrho + b\varrho^2 + c\varrho^3 + d\varrho^4 = (a\ b\ c\ d)$$

und allgemein:

$$(22) \quad -x = \bar{x},$$

so gehört zu den Normalintegralen (20) das auf Seite 27 folgende Periodenschema X.

Bezeichnet man:

$$\text{an } b_\nu: u_{\mu}^+ - u_{\mu}^- = a_{\mu\nu},$$

so ist die bekannte Relation

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$$

in Tabelle X identisch erfüllt.

§ 5. Die Thetafunktion.

17. Die zu unseren Normalintegralen gehörende Thetafunktion lautet:

$$\mathcal{J}(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}^{-\infty, +\infty} e^{\pi i f_6 + 2\pi i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6)}$$

worin f_6 die quadratische Form der sechs Summationsbuchstaben bedeutet, deren Koeffizienten die Periodizitätsmoduln der Normalintegrale an den b -Schnitten sind. (Tabelle X.) Also:

$$(1) \quad f_6 = \sum_{\mu=1}^6 \sum_{\mu'=1}^6 a_{\mu\mu'} m_{\mu} m_{\mu'}$$

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$+ u_1 - u_1$	I	0	0	0	0	0
$+ u_2 - u_2$	0	I	0	0	0	0
$+ u_3 - u_3$	0	0	I	0	0	0
$+ u_4 - u_4$	0	0	0	I	0	0
$+ u_5 - u_5$	0	0	0	0	I	0
$+ u_6 - u_6$	0	0	0	0	0	I
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$+ u_1 - u_1$	$\frac{I}{5}(3443)\frac{\omega_1^2}{\Omega} + \frac{I}{5}(122\bar{1})$	$\frac{I}{5}(3433)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1^2}{\Omega} - \frac{I}{5}(2413)$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}$
$+ u_2 - u_2$	$\frac{I}{5}(3443)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(3443)\frac{\omega_2^2}{\Omega} + \frac{I}{5}(122\bar{1})$	$-\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \frac{I}{5}(2413)$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}$
$+ u_3 - u_3$	$-\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(3\bar{1}13)\frac{I}{\Omega} - \frac{I}{5}(2\bar{1}12)$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{I}{\Omega} - \frac{I}{5}(1234)$
$+ u_4 - u_4$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1^2}{\Omega} - \frac{I}{5}(2413)$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1^2}{\Omega} + \frac{I}{5}(4321)$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1}{\Omega}$
$+ u_5 - u_5$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \frac{I}{5}(2413)$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1^2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_2^2}{\Omega} + \frac{I}{5}(4321)$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_2}{\Omega}$
$+ u_6 - u_6$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(133\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{I}{5}(122\bar{1})\frac{I}{\Omega} - \frac{I}{5}(1234)$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{I}{5}(2\bar{1}12)\frac{I}{\Omega} + \frac{I}{5}(2413)$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{1}{5} (3\bar{4}4\bar{3}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} \omega_1 - \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1}{\Omega} m_3 - \frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_1 \right\} m_1 \\
&+ \left\{ \frac{1}{5} (3\bar{4}4\bar{3}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} \omega_2 - \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_2}{\Omega} m_3 - \frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_2 \right\} m_2 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} + \frac{1}{5} (3\bar{1}\bar{1}\bar{3}) \frac{1}{\Omega} m_3 - \frac{1}{5} (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \right\} m_3 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} \omega_1 - \frac{1}{5} (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) \frac{\omega_1}{\Omega} m_3 + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_1 \right\} m_4 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} \omega_2 - \frac{1}{5} (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) \frac{\omega_2}{\Omega} m_3 + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_2 \right\} m_5 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{\Omega} - \frac{1}{5} (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) \frac{1}{\Omega} m_3 + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \right\} m_6 \\
&\quad + \frac{1}{5} \left\{ (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) m_1^2 - 2(2\bar{4}\bar{1}\bar{3}) m_1 m_4 + (4\bar{3}\bar{2}\bar{1}) m_4^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{5} \left\{ (1\bar{2}\bar{2}\bar{1}) m_2^2 - 2(2\bar{4}\bar{1}\bar{3}) m_2 m_5 + (4\bar{3}\bar{2}\bar{1}) m_5^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1\bar{2}\bar{3}\bar{4}) m_3 m_6 - (2\bar{4}\bar{1}\bar{3}) m_6^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Beachtet man, dass

$$\begin{aligned}
(2) \quad &(3\bar{4}4\bar{3}) \cdot (0\bar{1}\bar{1}\bar{0}) = (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}), \\
&(3\bar{4}4\bar{3}) \cdot (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 = (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}), \\
&(2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \cdot (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 = (3\bar{4}4\bar{3}) \cdot (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^4 = (3\bar{1}\bar{1}\bar{3}), \\
&(1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \cdot (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 = -(1\bar{2}\bar{2}\bar{1})
\end{aligned}$$

ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(3) \quad &f_6 = \\
&\left\{ \frac{1}{5} (3\bar{4}4\bar{3}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} \omega_1 - \frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_1 \right\} m_1 \\
&+ \left\{ \frac{1}{5} (3\bar{4}4\bar{3}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} \omega_2 - \frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_2 \right\} m_2 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (3\bar{4}4\bar{3}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 + \frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 \right\} m_3 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} \omega_1 + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_1 \right\} m_4 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} \omega_2 + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \omega_2 \right\} m_5 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{5} (1\bar{3}\bar{3}\bar{1}) \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0\bar{1}\bar{1}\bar{0})^2 m_3}{\Omega} + \frac{1}{5} (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) \frac{\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6}{\Omega} \right\} m_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_1^2 - 2(2413) m_1 m_4 + (4321) m_4^2 \right\} \\
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_2^2 - 2(2413) m_2 m_5 + (4321) m_5^2 \right\} \\
& - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1234) m_3 m_6 - (2413) m_6^2 \right\} \\
= & \frac{(3\bar{4}\bar{4}\bar{3})}{5\Omega} (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0110)^2 m_3)^2 - \frac{(3\bar{4}\bar{4}\bar{3})}{5\Omega} 2 (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0110)^2 m_3) \cdot \\
& \cdot (0110) (\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6) + \frac{(3\bar{4}\bar{4}\bar{3})}{5\Omega} (0110)^2 (\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6)^2 \\
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_1^2 - 2(2413) m_1 m_4 + (4321) m_4^2 \right\} \\
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_2^2 - 2(2413) m_2 m_5 + (4321) m_5^2 \right\} \\
& - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1234) m_3 m_6 - (2413) m_6^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Demnach ist die quadratische Form im Exponenten des allgemeinen Gliedes der Thetafunktion:

$$\begin{aligned}
(4) \quad f_6 = & \frac{(3\bar{4}\bar{4}\bar{3})}{5\Omega} \left\{ \omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0110)^2 m_3 - (0110) (\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6) \right\}^2 \\
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_1^2 - 2(2413) m_1 m_4 + (4321) m_4^2 \right\} \\
& + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_2^2 - 2(2413) m_2 m_5 + (4321) m_5^2 \right\} \\
& - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1234) m_3 m_6 - (2413) m_6^2 \right\},
\end{aligned}$$

wo

$$\Omega = 1 - (\varrho + \varrho^4)(\omega_1^2 + \omega_2^2) \neq 0$$

ist. Die Thetafunktion ist daher im höchsten Grade spezialisiert; sie hängt nur von zwei Moduln ab.

Zweiter Teil.

Algebraische Reduktion der Integrale 1. Gattung im Falle $I_{18} = 0$.

§ 6. Einführung des Spezialfalles $I_{18} = 0$.

18. Die Thetafunktion unseres algebraischen Gebildes hat eine so spezielle Gestalt, dass sie ohne Zweifel durch geschickte Umformungen in einfachere Gebilde übergeführt oder wenigstens durch einfachere Gebilde ersetzt werden kann. Jedoch fehlt uns zur Zeit jeder Weg zu diesem Ziele. Dagegen ist es leicht, in dem Spezialfalle zu einem einfachen Resultate zu gelangen, *der durch das Verschwinden der Invariante 18ten Grades der Funktion $f(z)$ [Gl. (1) § 2] charakterisiert ist.*¹ Nach CLEBSCH² bilden in diesem Falle vier der Nullpunkte von f eine Involution, von der der fünfte Nullpunkt von f ein Ordnungspunkt ist; oder anders ausgedrückt: jene vier Punkte bilden zwei Paare, α_1, α_3 und α_2, α_4 , während andererseits zu dem fünften Punkte α_5 eindeutig ein sechster Punkt β existiert, so dass sowohl α_1 und α_3 als auch α_2 und α_4 durch α_5 und β harmonisch getrennt werden.

Macht man über die Koeffizienten von f keinerlei Annahmen, so werden die fünf Punkte α_i im allgemeinen komplex sein. Zwei einander harmonisch trennende Paare komplexer Punkte liegen immer so auf einem Kreise κ in der komplexen Zahlenebene, dass die Verbindungslinie der Punkte eines dieser Paare durch den Schnittpunkt der Tangenten des Kreises in den Punkten des andern Paares geht, und zwar ist diese Beziehung wechselseitig.

Im allgemeinen liegen also die Punkte

1. α_1 und α_3 sowie α_5 und β auf einem Kreise κ und die Gerade $\alpha_1 \alpha_3$ geht durch den Schnittpunkt S der Tangenten von κ in α_5 und β ,

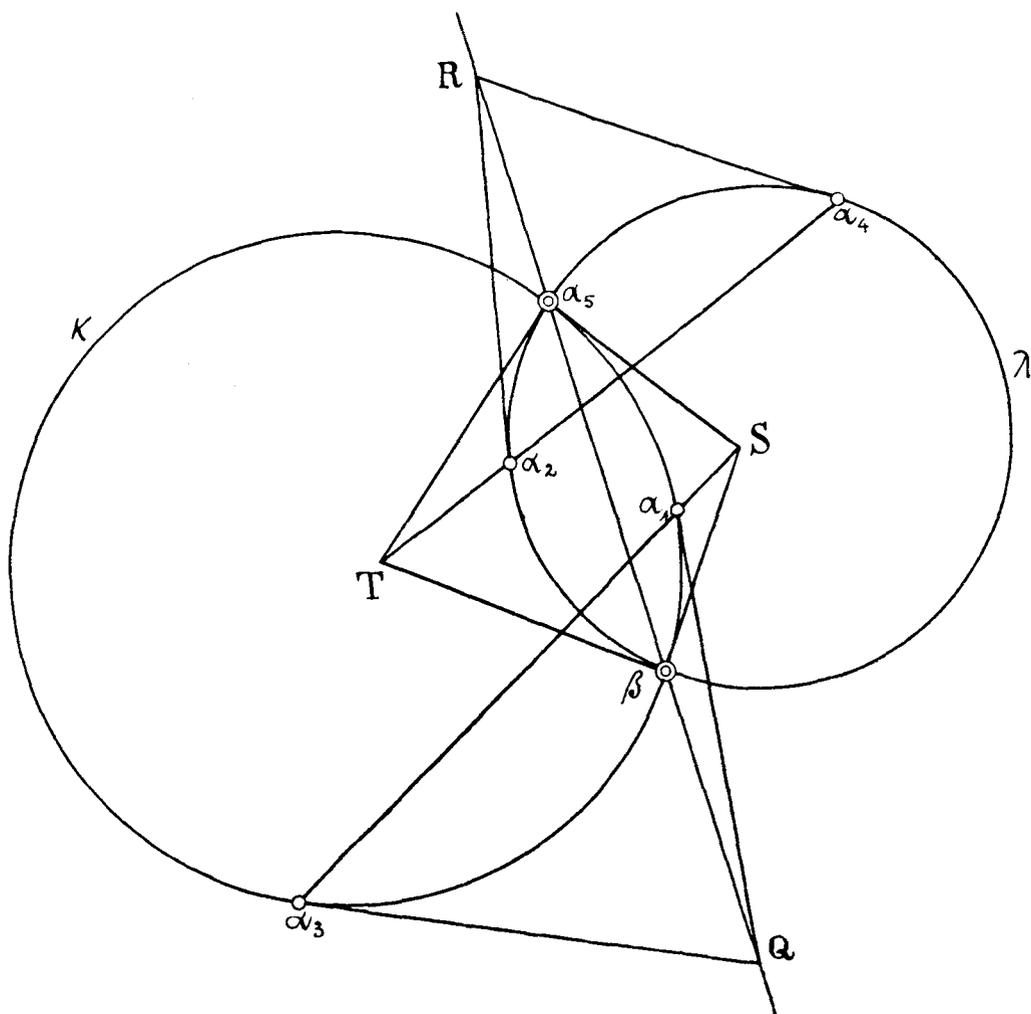
2. α_2 und α_4 sowie α_5 und β auf einem Kreise λ und die Gerade $\alpha_2 \alpha_4$ geht durch den Schnittpunkt T der Tangenten von λ in α_5 und β (vergl. Fig. 6).

¹ Dabei darf keine Covariante von f verschwinden.

² A. CLEBSCH, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, § 94.

Die Gerade $\alpha_5 \beta$ geht durch den Schnittpunkt Q der Tangenten von κ in α_1 und α_3 und durch den Schnittpunkt R der Tangenten von λ in α_2 und α_4 . Die Kreise κ und λ können in gerade Linien degenerieren, was u. a. immer eintritt, wenn die Nullpunkte von f reell sind (siehe Fig. 7). In diesem Falle prägt sich

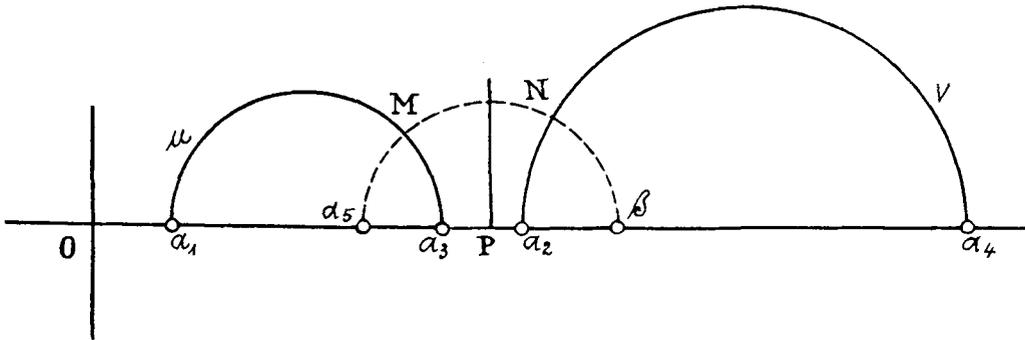
· FIGUR · 6 ·



die Lage der Punkte α_5 und β der Anschauung am klarsten ein, wenn man über $\alpha_1 \alpha_3$ und $\alpha_2 \alpha_4$ je einen Halbkreis μ bzw. ν beschreibt; dann werden nämlich α_5 und β die Nullkreise des durch μ und ν bestimmten hyperbolischen Kreis-

büschels; um α_5 und β zu finden, legt man vom Schnittpunkt P der Potenzlinie mit der Zentralen an μ und ν die Tangenten $PM = PN$ und konstruiert den Kreis um P mit dem Radius PM . Dieser Kreis geht dann durch α_5 und β .

·FIGUR·7·

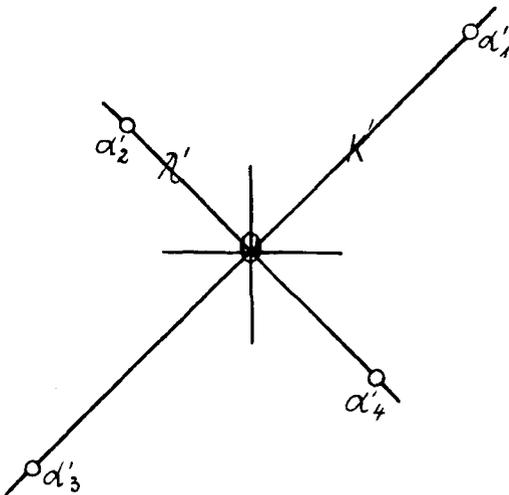


19. Wendet man auf die komplexe z -Ebene die Abbildung

$$(1) \quad \zeta = \frac{z - \alpha_5}{z - \beta}$$

an, so entsprechen

·FIGUR·8·



den Punkten α_5 und β der z -Ebene die Punkte 0 und ∞ der ζ -Ebene.

Da sich die Substitution (1), wie jede Substitution 1. Ordnung, durch Parallelverschiebung, Ähnlichkeit und Inversion erreichen lässt, so gehen durch die Abbildung (1) alle Kreise der z -Ebene — einschliesslich der Geraden als extremer Fälle — wieder in Kreise über. Speziell entsprechen den Kreisen κ und λ der z -Ebene zwei Kreise κ' und λ' der ζ -Ebene, die durch die Punkte 0 und ∞ gehen, d. h. zwei gerade Linien durch den Nullpunkt der ζ -Ebene; jede dieser Geraden geht noch durch den unendlich fernen Punkt der Zahlenebene.

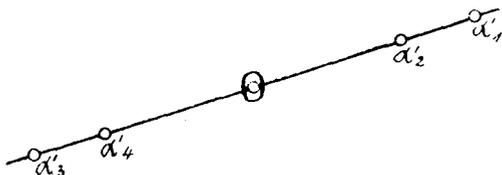
Die Bildpunkte α'_1, α'_3 von α_1 und α_3 liegen daher auf z' äquidistant vom Nullpunkt O , ebenso die Bildpunkte α'_2 und α'_4 auf z' . (Vergl. Fig. 8.)

Durch die Substitution

$$\zeta = \frac{z - \alpha_3}{z - \beta}$$

geht also das System der Nullpunkte von f über in die Eckpunkte und den Mittelpunkt eines Parallelogramms, das auch in eine Gerade ausarten kann (s. Fig. 9),

· FIGUR 9 ·



wobei aber immer α'_1 und α'_3 sowie α'_2 und α'_4 je von O gleichen Abstand haben. (Dies gilt z. B. auch, wenn die Punkte α und folglich auch die Punkte α' reell sind.)

Da also stets

$$(2) \quad \alpha'_1 = -\alpha'_3; \alpha'_2 = -\alpha'_4; \alpha'_5 = -\alpha'_5 = 0$$

ist, so tritt an Stelle von $f(z)$ eine Funktion

$$(3) \quad \varphi(\zeta) = \zeta(\zeta - \alpha'_1)(\zeta + \alpha'_1)(\zeta - \alpha'_2)(\zeta + \alpha'_2),$$

also von der Form:

$$(4) \quad \varphi(\zeta) = \zeta(a_0 \zeta^4 + 2a_1 \zeta^2 + a_2).$$

Durch die Substitution (1) tritt jetzt an die Stelle der Irrationalität $s = \sqrt[5]{f(z)}$ die andere $\sigma = \sqrt[5]{\varphi(\zeta)}$, die wir der weiteren Untersuchung zu Grunde legen wollen, indem wir jedoch wieder zu den alten Bezeichnungen zurückkehren. Mit anderen Worten:

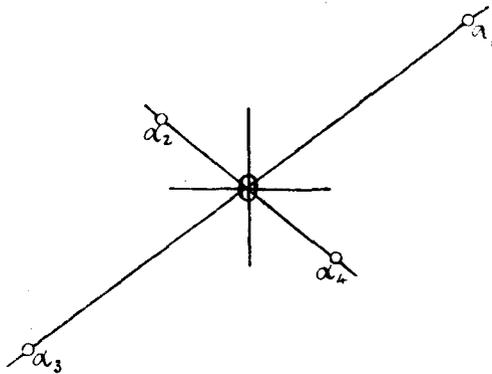
Wir nehmen jetzt an, vier Nullpunkte von $f(z)$ hätten von vornherein die Eckpunkte eines Parallelogramms gebildet, — den Grenzfall der Fig. 9 eingeschlossen —, dessen Mittelpunkt zugleich Nullpunkt der z -Ebene und fünfter Nullpunkt von $f(z)$ ist.

Dann hat $f(z)$ die Form:

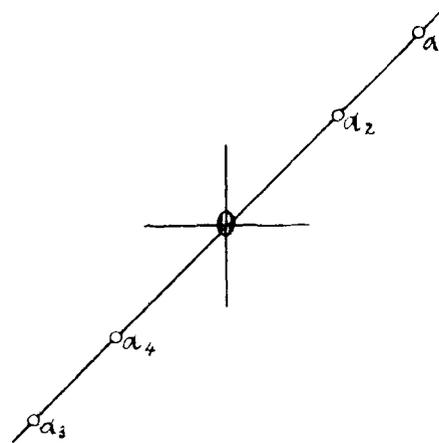
$$(5) \quad f(z) = z(a_0 z^4 + 2a_1 z^2 + a_2) = s^5,$$

und die Nullpunkte haben die in Fig. 10a. bzw. 10b. (Grenzfall) angegebene

• FIGUR 10a. •



• FIGUR 10b. •



Lage. Die Invariante 18ten Grades ist identisch null.

§ 7. Nachweis zweier Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p=2$.

20. Die folgenden Betrachtungen lassen sich am bequemsten durch homogene Variablen darstellen. Wir setzen daher

$$(1) \quad z = \frac{z_1}{z_2} \text{ also: } dz = \frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{z_2^2} = \frac{(z dz)}{z_2^2},$$

und

$$(2) \quad f(z) = \frac{f(z_1, z_2)}{z_2^5}, \quad s = \frac{s(z_1, z_2)}{z_2},$$

wo nach Gl. (5) § 6

$$(3) \quad s(z_1, z_2)^5 = f(z_1, z_2) = z_1(a_0 z_1^4 + 2a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)$$

ist. Unsere Fundamentalintegrale 1. Gattung (Gl. (5) § 2), denen also jetzt Gl. (5) § 6 zu Grunde liegt, werden durch die Substitution (1) übergeführt in:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} U &= \int \frac{dz}{s^2} = - \int \frac{(zdz)}{s(z_1, z_2)^2}; \\ V_1 &= \int \frac{zdz}{s^3} = - \int \frac{z_1(zdz)}{s(z_1, z_2)^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3} = - \int \frac{z_2(zdz)}{s(z_1, z_2)^3}; \\ W_1 &= \int \frac{z^2 dz}{s^4} = - \int \frac{z_1^2(zdz)}{s(z_1, z_2)^4}, \quad W_2 = \int \frac{zdz}{s^4} = - \int \frac{z_1 z_2(zdz)}{s(z_1, z_2)^4}, \quad W_3 = \int \frac{dz}{s^4} = - \int \frac{z_2^2(zdz)}{s(z_1, z_2)^4}. \end{aligned} \right.$$

Vermöge der Substitution

$$(5) \quad z_1 = V\sqrt{z'_1}, \quad z_2 = V\sqrt{z'_2}, \quad (z' = \frac{z'_1}{z'_2})$$

wird:

$$dz_1 = \frac{1}{2} \frac{dz'_1}{\sqrt{z'_1}}, \quad dz_2 = \frac{1}{2} \frac{dz'_2}{\sqrt{z'_2}};$$

also:

$$(6) \quad (zdz) = \frac{1}{2} \frac{(z'dz')}{\sqrt{z'_1 z'_2}},$$

und es geht W_2 über in:

$$(7) \quad W_2 = - \frac{1}{2} \int \frac{(z'dz')}{r(z'_1, z'_2)},$$

wo:

$$(8) \quad r(z'_1, z'_2)^5 = z'^2 (a_0 z'^2 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2)^4$$

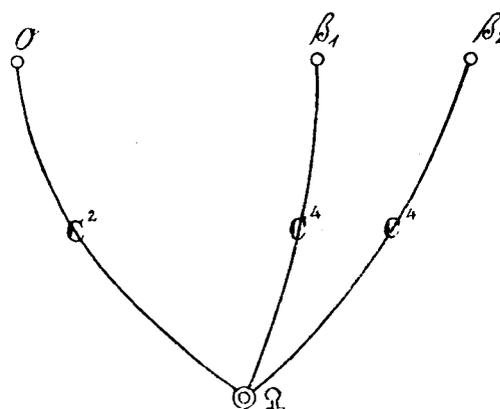
ist.

Es steht also im Nenner des Integranden von W_2 wiederum eine fünfte Wurzel und zwar aus einer binären Form 10. Grades, die aber nur drei voneinander verschiedene Nullpunkte besitzt. Der 1. Nullpunkt ist der Punkt $z' = 0$, die beiden anderen seien

$$z' = \beta_1 \quad \text{und} \quad z' = \beta_2.$$

Die zu r gehörende RIEMANN'sche Fläche hat demnach fünf Blätter, aber nur drei Verzweigungspunkte, 0 , β_1 und β_2 , und drei Verzweigungslinien, die wir wieder von den Verzweigungspunkten nach einem beliebigen Punkte Ω konvergieren lassen,

FIGUR 11.



der kein Verzweigungspunkt ist. Dem ν ten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) ordnen wir den Wert

$$r_\nu = \varrho^\nu [\tau]$$

zu, wo $[\tau]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[6]{z_1'^2(a_0 z_1'^2 + 2a_1 z_1' z_2' + a_2 z_2'^2)}$ bedeutet. Überschreitet man bei positiver Umkreisung des Punktes o die Verzweigungslinie $o\Omega$, so permutieren sich die fünf Zweige r_ν von τ nach dem Zyklus C^2 , überschreitet man dagegen in demselben Sinne die Verzweigungslinien $\beta_1\Omega$ und $\beta_2\Omega$, so permutieren sich die fünf Zweige r_ν von τ nach dem Zyklus C^4 , wo

$$C = (1, 2, 3, 4, 5)$$

ist. Das Geschlecht dieser RIEMANN'schen Fläche ist nach Formel (6) § 1

$$p = 2.$$

Demnach ist W_2 ein Abel'sches Integral 1. Gattung des durch die Gl. (8) erzeugten Körpers vom Geschlecht $p = 2$, und es muss daher zu dieser neuen Funktionenklasse noch ein von W_2 linear unabhängiges ABEL'sches Integral 1. Gattung existieren.

21. Dieses Integral erhalten wir, wenn wir auch auf V_2 (Gl. (4)) die Substitution (5) anwenden. Dann wird

$$(9) \quad V_2 = -\frac{1}{2e} \int \frac{(z' dz')}{\sqrt[6]{z_1'^4(a_0 z_1'^2 + 2a_1 z_1' z_2' + a_2 z_2'^2)^3}}$$

Es scheint also im Nenner eine neue binäre Form 10. Grades unter der 5. Wurzel aufzutreten, die aber auch nur drei voneinander verschiedene Nullpunkte besitzt. Nun folgt aber aus Gl. (8)

$$(10) \quad \tau(z_1, z_2)^2 = (a_0 z_1'^2 + 2a_1 z_1' z_2' + a_2 z_2'^2) \sqrt[5]{z_1'^4(a_0 z_1'^2 + 2a_1 z_1' z_2' + a_2 z_2'^2)^3}.$$

Folglich ist:

$$(11) \quad V_2 = -\frac{1}{2e} \int \frac{(a_0 z_1'^2 + 2a_1 z_1' z_2' + a_2 z_2'^2)(z' dz')}{\tau(z_1, z_2)^2}.$$

Die Integrale V_2 und W_2 gehören also derselben Funktionenklasse vom Geschlecht $p = 2$ an und sind linear unabhängig voneinander. Wir haben demnach zwei Integrale 1. Gattung des durch die Gl. (5) § 6 erzeugten Körpers vom Geschlecht 6 reduziert auf Integrale 1. Gattung des durch die Gl. (8) erzeugten Körpers vom Geschlecht 2.

§ 8. **Reduktion der Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2$ auf hyperelliptische.**

22. *Nach einem Satze der Funktionentheorie müssen sich Integrale vom Geschlecht 2 auf hyperelliptische Integrale dieses Geschlechts zurückführen lassen. Wir wollen dies jetzt mit unsern Integralen V_2 und W_2 tun.*

Als hyperelliptische Integrale 1. Gattung vom Geschlecht 2 kann man wählen:

$$(1) \quad v = \int \frac{d\zeta}{Z}, \text{ und } w = \int \frac{\zeta d\zeta}{Z},$$

wo

$$(2) \quad Z = V\sqrt{\varphi(\zeta)},$$

und $\varphi(\zeta)$ eine ganze rationale Funktion 6. Grades von ζ ist. Sind V_2 und W_2 in v und w transformierbar, so darf man ansetzen:

$$(3) \quad \frac{dW_2}{dV_2} = \zeta \text{ und } \frac{d\zeta}{dV_2} = Z,$$

denn nach Gl. (1) ist:

$$(4) \quad \frac{dw}{dv} = \zeta \text{ und } \frac{d\zeta}{dv} = Z.$$

Nach Gl. (4) § 7 ist also:

$$(5) \quad \zeta = \frac{z_1}{s(z_1, z_2)}.$$

Folglich ist:

$$(6) \quad d\zeta = \frac{s(z_1, z_2)dz_1 - z_1 ds(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^2}.$$

Nun ist nach dem EULER'schen Satz über homogene Funktionen:

$$(7) \quad s(z_1, z_2) = \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_2,$$

und es ist:

$$(8) \quad ds(z_1, z_2) = \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2.$$

Aus den Gl. (6), (7) und (8) ergibt sich:

$$d\zeta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_2 & z_1 \\ \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2 & dz_1 \end{vmatrix}}{s(z_1, z_2)^3}.$$

oder:

$$d\zeta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_2 & z_1 \\ \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2 & dz_1 \end{vmatrix}}{s(z_1, z_2)^3}.$$

Also ist:

$$(9) \quad d\zeta = - \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} \frac{(z dz)}{s(z_1, z_2)^3}.$$

Hierin müssen wir noch $\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2}$ bestimmen. Aus Gl. (3) § 7 folgt:

$$(10) \quad 5 s(z_1, z_2)^4 \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

Wir setzen (vorübergehend):

$$(11) \quad \frac{1}{5} \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} = f_2(z_1, z_2).$$

Dann ist aus Gl. (10)

$$(12) \quad \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{f_2(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^4}.$$

Diesen Wert in (9) eingesetzt, ergibt:

$$(13) \quad d\zeta = - \frac{f_2(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^6} \cdot (z dz).$$

Nun ist: (Gl. (4) § 7)

$$dV_2 = - \frac{z_2 (z dz)}{s(z_1, z_2)^3}.$$

Also nach Gl. (3)

$$(14) \quad Z = \frac{f_2(z_1, z_2)}{z_2 s(z_1, z_2)^3}.$$

Gl. (11) und Gl. (3) § 7 ergeben:

$$(15) \quad f_2(z_1, z_2) = \frac{4}{5} z_1 z_2 (a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2).$$

In Gl. (14) eingesetzt erhält man:

$$(16) \quad Z = \frac{4 z_1 (a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2)}{5 s(z_1, z_2)^2},$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (5):

$$(17) \quad Z = \frac{4}{5} \zeta \left(a_1 \zeta^2 + a_2 \frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2} \right).$$

Aus dieser Gl ist noch $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ zu eliminieren. Nach $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ aufgelöst ergibt Gl. (17):

$$(18) \quad \frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2} = \frac{5 Z}{4 a_2 \zeta} - \frac{a_1}{a_2} \zeta^2.$$

Nach Gl. (3) § 7 ist nun:

$$(19) \quad I = \frac{z_1 (a_0 z_1^4 + 2 a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)}{s(z_1, z_2)^5},$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (5)

$$(20) \quad I = \zeta \left(a_0 \zeta^4 + 2 a_1 \zeta^2 \frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2} + a_2 \frac{z_2^4}{s(z_1, z_2)^4} \right).$$

Setzen wir in diese Gl. den Wert von $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ aus Gl. (18) ein, so ergibt sich:

$$(21) \quad I = \zeta \left[\left(a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} \right) \zeta^4 + \frac{25 Z}{16 a_2 \zeta^3} \right].$$

Aus dieser Gleichung folgt schliesslich:

$$(22) \quad Z = \frac{4}{5} V \zeta [a_2 + (a_1^2 - a_0 a_2) \zeta^6].$$

Unsere Integrale V_2 und W_2 nehmen also die Gestalt:

$$(23) \quad V_2 = \int \frac{d\zeta}{Z}, \quad W_2 = \int \frac{\zeta d\zeta}{Z}$$

an, wo Z durch Gl. (22) gegeben ist.

23. Die Umformung von f (Gl. (1) § 2) in die Gestalt $f(z_1, z_2) = z_1 (a_0 z_1^4 + 2 a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)$ lässt sich mittels der Methoden der Invariantentheorie,

insbesondere durch das Verfahren der typischen Darstellung¹ erreichen; auch die Überführung von V_2 und W_2 in hyperelliptische Integrale gelingt auf diese Weise, jedoch durch ausserordentlich komplizierte Formeln, auf deren Mitteilung wir verzichten wollen.

Wegen der Reduzierbarkeit von V_2 und W_2 müssen nach Sätzen von Picard und Poincaré² sich auch die übrigen vier Integrale 1. Gattung reduzieren lassen, und zwar auf Integrale vom Geschlecht $p = 4$. Die Lösung dieses Problems mit den im KRAZER'schen Buch über die Thetafunktionen³ angegebenen transcendenten Hilfsmitteln ist z. Z. praktisch nicht ausführbar. Eine rein algebraische Lösung wollte ebenfalls nicht glücken. Wir müssen uns daher vorbehalten, auf diese Aufgabe später einmal zurückzukommen.

¹ A. CLEBSCH, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, 7.—9. Abschnitt.

² A. KRAZER, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 499 Satz XII.

³ l. c. Kapitel XI.

Dritter Teil.

Reduktion der Thetafunktion im Falle $I_{18} = 0$.

§ 9. Die Riemann'sche Fläche im Falle $I_{18} = 0$.

24. Im Falle $I_{18} = 0$ darf, wie wir im § 6 gezeigt haben, unsere Grundgleichung (1) § 2 in der Form

$$(1) \quad s^5 = f(z) = z(a_0 z^4 + 2a_1 z^2 + a_2)$$

angenommen werden. Die zu s gehörige RIEMANN'sche Fläche ist fünfblättrig und besitzt fünf Verzweigungspunkte. Dem ν ten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) ordnen wir, wie im § 2, den Wert

$$(2) \quad s_\nu = q^\nu [s]$$

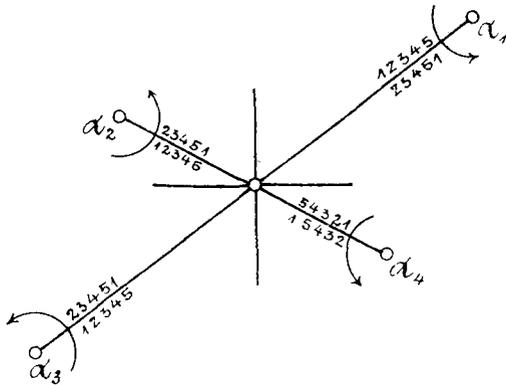
zu, wenn $[s]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte $\sqrt[5]{f(z)}$ und

$$(3) \quad q = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

ist. Die fünf Verzweigungspunkte entsprechen den fünf Nullpunkten von $f(z)$ und haben daher eine spezielle Lage (vgl. § 6). Nämlich der eine Verzweigungspunkt ist der Punkt $z = 0$, und von den übrigen vier liegen je zwei, α_1, α_3 und α_2, α_4 , symmetrisch zu dem Punkt $z = 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 bilden die Eckpunkte eines Parallelogrammes, dessen Mittelpunkt der Punkt $z = 0$ ist (Fig. 12). Als Verzweigungslinien wählen wir die Diagonalen dieses Parallelogrammes, wobei dann zu beachten ist, dass die Blätter der RIEMANN'schen Fläche nicht längs einer ganzen Diagonale in gleicher Weise zusammenhängen. Es permutieren sich vielmehr, wenn man bei positiver Umkreisung eines Verzweigungspunktes die zwischen diesem Punkte und dem Punkte $z = 0$ liegende Hälfte der Diagonale überschreitet, die fünf Zweige s_ν von s nach dem Zyklus

$$C = (1, 2, 3, 4, 5).$$

• FIGUR • 12 •



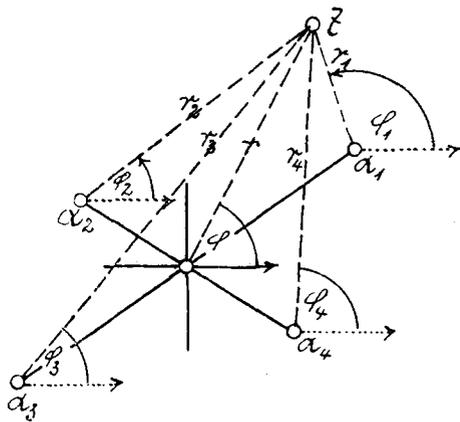
Infolgedessen hängt, wenn man die beiden Hälften einer Diagonale in derselben Richtung, z. B. in der Richtung, in der man schreibt, überschreitet, das ν te Blatt längs der einen Hälfte der Diagonale mit dem zyklisch folgenden, längs der andern Hälfte aber mit dem zyklisch vorhergehenden zusammen. Im Punkte $z = 0$ hängen die fünf Blätter in komplizierter Weise zusammen, jedenfalls aber gelangt man, wie man sich leicht an Fig. 12 überzeugen kann, nach fünf positiven Umdrehungen des Punktes $z = 0$ wieder in das Blatt, von dem man ausging.

25. Wir betrachten nun die Werte s bzw. \bar{s} von s in zwei in bezug auf den Punkt $z = 0$ symmetrischen Punkten z bzw. \bar{z} . Es sei:

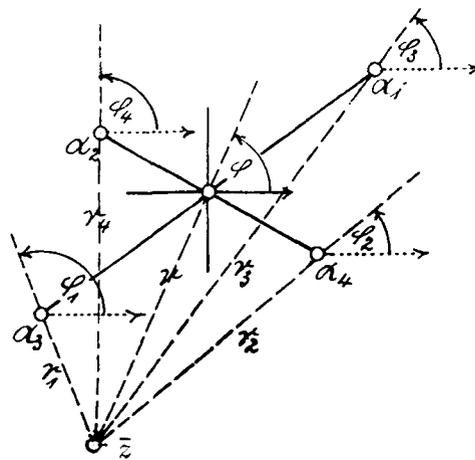
(4)
$$z_0 = r,$$

$$z_{\alpha_\lambda} = r_\lambda. (\lambda = 1, 2, 3, 4).$$

• FIGUR • 13 a •



• FIGUR • 13 b •



Die Winkel zwischen der positiven Richtung der Hauptachse und den Geraden r bzw. r_λ bezeichnen wir mit φ bzw. φ_λ .

Dann ist (vergl. Fig. 13 a und 13 b):

$$s = (r r_1 r_2 r_3 r_4)^{\frac{1}{5}} e^{i \frac{\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{5}}$$

$$\bar{s} = (r r_1 r_2 r_3 r_4)^{\frac{1}{5}} e^{i \frac{(\varphi + \pi) + (\varphi_1 + \pi) + (\varphi_2 + \pi) + (\varphi_3 + \pi) + (\varphi_4 + \pi)}{5}}$$

$$= s e^{\pi i} = -s.$$

Es ist also

(5)
$$\bar{s} = -s.$$

Die Werte von s in zwei in bezug auf den Punkt $z = 0$ symmetrischen Punkten unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen.

Im vorliegenden Falle besitzt also die RIEMANN'sche Fläche ausser der früher benutzten Transformation in sich [vergl. Gl. (7) § 1]:

(I)
$$z' = z, \quad s' = \rho s$$

noch eine zweite:

(II)
$$\bar{z} = -z, \quad \bar{s} = -s,$$

die jedem ihrer Punkte P in demselben Blatte den bezüglich $z = 0$ zentrisch symmetrischen Punkt \bar{P} zuordnet.

Wie wir nun früher bei der Anlage des Querschnittsystems die besondere Natur der Abbildung I ausgenutzt haben, indem wir drei Schnitte eines jeden Teilsystems zueinander kongruent annahmen, (vergl. Artikel 8 und Fig. 5, Anhang) wollen wir jetzt ausserdem noch nach Möglichkeit dafür sorgen, dass durch die Abbildung II das ganze Querschnittsystem in sich selbst übergeht. Dieser Gedanke lässt sich wenigstens so weit verwirklichen, dass

die Schnitte des Teilsystems S_1 , nämlich a_1, b_1, a_4, b_4

zu den Schnitten des Teilsystems S_2 , nämlich a_2, b_2, a_3, b_3

in bezug auf den Punkt $z = 0$ zentrisch symmetrisch liegen (vergl. Fig. 14, Anhang); ausserdem ist in Fig. 14 zu dem Schnitt b_3 des Teilsystems S_3 ein in bezug auf den Punkt $z = 0$ zentrisch symmetrischer Weg \bar{b}_3 gelegt, der zu weiteren Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln Anlass gibt. Im übrigen ist Fig. 14 nach demselben Prinzip angelegt wie Fig. 5, nur sind die einzelnen Schnitte in Fig. 14 im Vergleich zu denen von Fig. 5 verzerrt, da in Fig. 14 die Verzweigungspunkte nicht in einer Geraden liegen (vergl. Artikel 8). *Es bleiben daher alle bisher gefundenen Modulrelationen auch in unserem Spezialfall richtig.*

§ 10. Die speziellen Periodenrelationen im Falle $I_{13} = 0$.

26. Die Abbildung

$$(1) \quad \bar{z} = -z, \quad \bar{s} = -s$$

unserer RIEMANN'schen Fläche auf sich selbst hat für die Integrale 1. Gattung

$$(2) \quad \begin{cases} U = \int \frac{dz}{s^3}; \\ V_1 = \int \frac{z dz}{s^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3}; \\ W_1 = \int \frac{z^2 dz}{s^4}, \quad W_2 = \int \frac{z dz}{s^4}, \quad W_3 = \int \frac{dz}{s^4} \end{cases}$$

die Folge:

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{U} = -U; \\ \bar{V}_1 = -V_1, \quad \bar{V}_2 = +V_2; \\ \bar{W}_1 = -W_1, \quad \bar{W}_2 = +W_2, \quad \bar{W}_3 = -W_3, \end{cases}$$

wenn jedesmal auch der Integrationsweg mit transformiert wird. Infolgedessen ergeben sich für die Periodizitätsmoduln die Relationen:

$$(4) \quad \begin{cases} A_{12} = -A_{11}; \\ A_{22} = -A_{21}, \quad A_{32} = +A_{31}; \\ A_{42} = -A_{41}, \quad A_{52} = +A_{51}, \quad A_{62} = -A_{61}. \end{cases}$$

Folglich erhalten wir aus der Tabelle II und den Gl. (4) folgendes Periodenschema:

XI.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U} - \bar{U}$	A_{11}	$-A_{11}$	A_{13}	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{11} + (\varrho^2 + \varrho^3)A_{11}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{13}$	
$\overset{+}{V}_1 - \bar{V}_1$	A_{21}	$-A_{21}$	A_{23}	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{21} + (\varrho^2 + \varrho^3)A_{21}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{23}$	
$\overset{+}{V}_2 - \bar{V}_2$	A_{31}	$+A_{31}$	A_{33}	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{31} - (\varrho^2 + \varrho^3)A_{31}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{33}$	
$\overset{+}{W}_1 - \bar{W}_1$	A_{41}	$-A_{41}$	A_{43}	$-(\varrho + \varrho^4)A_{41} + (\varrho + \varrho^4)A_{41}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{43}$	
$\overset{+}{W}_2 - \bar{W}_2$	A_{51}	$+A_{51}$	A_{53}	$-(\varrho + \varrho^4)A_{51} - (\varrho + \varrho^4)A_{51}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{53}$	
$\overset{+}{W}_3 - \bar{W}_3$	A_{61}	$-A_{61}$	A_{63}	$-(\varrho + \varrho^4)A_{61} + (\varrho + \varrho^4)A_{61}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{63}$	

an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\bar{U} - \bar{U}$	$-\varrho^2 A_{11}$	$+\varrho^2 A_{11}$	$-\varrho^4 A_{13}$	$-\varrho A_{11}$	$+\varrho A_{11}$	$-\varrho^2 A_{13}$
$\bar{V}_1 - \bar{V}_1$	$-\varrho^3 A_{21}$	$+\varrho^3 A_{21}$	$-\varrho A_{23}$	$-\varrho^4 A_{21}$	$+\varrho^4 A_{21}$	$-\varrho^3 A_{23}$
$\bar{V}_2 - \bar{V}_2$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho A_{33}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{33}$
$\bar{W}_1 - \bar{W}_1$	$-\varrho^4 A_{41}$	$+\varrho^4 A_{41}$	$-\varrho^3 A_{43}$	$-\varrho^2 A_{41}$	$+\varrho^2 A_{41}$	$-\varrho^4 A_{43}$
$\bar{W}_2 - \bar{W}_2$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^3 A_{53}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{53}$
$\bar{W}_3 - \bar{W}_3$	$-\varrho^4 A_{61}$	$+\varrho^4 A_{61}$	$-\varrho^3 A_{63}$	$-\varrho^2 A_{61}$	$+\varrho^2 A_{61}$	$-\varrho^4 A_{63}$

27. Ist nun \bar{b}_3 der zu b_3 in bezug auf den Punkt $z=0$ symmetrische Weg (vergl. Fig. 14), und bezeichnen wir den Wert der sechs Integrale (2) genommen über \bar{b}_3 mit

$$\bar{A}_{\mu,3}, (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

während der Wert der sechs Integrale (2) genommen über b_3 gleich

$$-A_{\mu,3}, (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ist, so ergeben sich analog den Gl. (4) die Relationen:

$$(5) \quad \begin{cases} A_{13} = +\bar{A}_{13}; \\ A_{23} = +\bar{A}_{23}, A_{33} = -\bar{A}_{33}; \\ A_{43} = +\bar{A}_{43}, A_{53} = -\bar{A}_{53}, A_{63} = +\bar{A}_{63}. \end{cases}$$

Andererseits ist aber, wenn man in der in Artikel 10 beschriebenen Weise über \bar{b}_3 integriert:

$$(6) \quad \int_{\bar{b}_3} + \int_{b_3} = 0,$$

oder:

$$(7) \quad \begin{cases} A_{13} = +\bar{A}_{13}; \\ A_{23} = +\bar{A}_{23}, A_{33} = +\bar{A}_{33}; \\ A_{43} = +\bar{A}_{43}, A_{53} = +\bar{A}_{53}, A_{63} = +\bar{A}_{63}. \end{cases}$$

Aus den Gl. (5) und (7) folgt:

$$(8) \quad A_{33} = A_{53} = 0.$$

Der damit erreichte Stand der Untersuchung wird durch nachstehende Tabelle XII veranschaulicht:

XII.

an :	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\dagger \bar{U} - \bar{U}$	A_{11}	$-A_{11}$	A_{13}	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{11}$	$+(\varrho^2 + \varrho^3)A_{11}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{13}$
$\dagger \bar{V}_1 - \bar{V}_1$	A_{21}	$-A_{21}$	A_{23}	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{21}$	$+(\varrho^2 + \varrho^3)A_{21}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{23}$
$\dagger \bar{V}_2 - \bar{V}_2$	A_{31}	$+A_{31}$	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{31}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{31}$	0
$\dagger \bar{W}_1 - \bar{W}_1$	A_{41}	$-A_{41}$	A_{43}	$-(\varrho + \varrho^4)A_{41}$	$+(\varrho + \varrho^4)A_{41}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{43}$
$\dagger \bar{W}_2 - \bar{W}_2$	A_{51}	$+A_{51}$	0	$-(\varrho + \varrho^4)A_{51}$	$-(\varrho + \varrho^4)A_{51}$	0
$\dagger \bar{W}_3 - \bar{W}_3$	A_{61}	$-A_{61}$	A_{63}	$-(\varrho + \varrho^4)A_{61}$	$+(\varrho + \varrho^4)A_{61}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3)A_{63}$
an :	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\dagger \bar{U} - \bar{U}$	$-\varrho^2 A_{11}$	$+\varrho^2 A_{11}$	$-\varrho^4 A_{13}$	$-\varrho A_{11}$	$+\varrho A_{11}$	$-\varrho^2 A_{13}$
$\dagger \bar{V}_1 - \bar{V}_1$	$-\varrho^3 A_{21}$	$+\varrho^3 A_{21}$	$-\varrho A_{23}$	$-\varrho^4 A_{21}$	$+\varrho^4 A_{21}$	$-\varrho^3 A_{23}$
$\dagger \bar{V}_2 - \bar{V}_2$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{31}$	0	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^4 A_{31}$	0
$\dagger \bar{W}_1 - \bar{W}_1$	$-\varrho^4 A_{41}$	$+\varrho^4 A_{41}$	$-\varrho^3 A_{43}$	$-\varrho^2 A_{41}$	$+\varrho^2 A_{41}$	$-\varrho^4 A_{43}$
$\dagger \bar{W}_2 - \bar{W}_2$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{51}$	0	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^2 A_{51}$	0
$\dagger \bar{W}_3 - \bar{W}_3$	$-\varrho^4 A_{61}$	$+\varrho^4 A_{61}$	$-\varrho^3 A_{63}$	$-\varrho^2 A_{61}$	$+\varrho^2 A_{61}$	$-\varrho^4 A_{63}$

28. Diese Tabelle enthält noch nicht die aus Gl. (13) § 4 folgenden Relationen. Um diese in übersichtlicher Form zu erhalten, gehen wir zu den »halbnormierten« Integralen 1. Gattung U^* , V_1^* , V_2^* , W_1^* , W_2^* und W_3^* des § 4 (siehe § 4 Gl. (11), (9) und (6)) über. Nach Gl. (7) § 4 braucht man dazu die Tatsache, dass

$$A_{13} \neq \text{ und } D'_{13} \neq 0$$

ist. Nach Tabelle XII ist aber:

$$D'_{13} = 2 A_{21} A_{31},$$

und die Gl. (10) § 4 ergeben daher mit Rücksicht auf Gl. (4) und (8):

$$\omega_1 = \frac{A_{31} A_{23}}{2 A_{21} A_{31}} = \frac{A_{23}}{2 A_{21}},$$

$$\omega_2 = -\frac{A_{31} A_{23}}{2 A_{21} A_{31}} = -\frac{A_{23}}{2 A_{21}},$$

also

$$\omega_1 = -\omega_2.$$

Wir bezeichnen

$$(9) \quad \omega_1 = -\omega_2 = \frac{A_{23}}{2 A_{21}} = \omega.$$

Nach Gl. (16) § 4 ist dann

$$(10) \quad \Omega = 1 - 2(\varrho + \varrho^4)\omega^2 \neq 0.$$

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat:

Auf unserer zentrisch symmetrischen Riemann'schen Fläche hängen die Periodizitätsmoduln der sechs Normalintegrale 1. Gattung und mit ihnen die Thetafunktion von nur einem Modul ab.

Die Tabelle der Periodizitätsmoduln der Normalintegrale des Falles $I_{16} = 0$ geht aus Tabelle X durch Eintragung des Wertes $\omega = \omega_1 = -\omega_2$ hervor.

29. Infolge der Relation

$$\omega_1 = -\omega_2 = \omega$$

gestaltet sich der Zusammenhang zwischen den Normalintegralen $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ und den Fundamentalintegralen $U, V_1, V_2, W_1, W_2, W_3$ (Gl. (2)) sehr einfach. Nach Gl. (19) und (17) § 4 ist zunächst mit Rücksicht auf Gl. (9):

$$(11) \quad \begin{cases} U^* = (\varrho + \varrho^4)\omega(u_1 - u_2) + \omega(u_4 - u_5) + u_3 - (\varrho + \varrho^4)u_6; \\ V_1^* = u_1 - (\varrho^2 + \varrho^3)u_4 + \omega(u_3 - (\varrho + \varrho^4)u_6), \\ V_2^* = u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3)u_5 - \omega(u_3 - (\varrho + \varrho^4)u_6); \\ W_1^* = u_1 - (\varrho + \varrho^4)u_4, \\ W_2^* = u_2 - (\varrho + \varrho^4)u_5, \\ W_3^* = u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3)u_6; \end{cases}$$

und endlich nach § 4 Gl. (11), (8), (5) mit Berücksichtigung der Gl. (4) und (8):

$$(I_2) \begin{cases} U = A_{13} U^* & = A_{13} \{ (\varrho + \varrho^4) \omega(u_1 - u_2) + \omega(u_4 - u_5) + u_3 - (\varrho + \varrho^4) u_6 \} \\ V_1 = A_{21} (V_1^* - V_2^*) & = A_{21} \{ u_1 - u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3) (u_4 - u_5) + 2\omega(u_3 - (\varrho + \varrho^4) u_6) \} \\ V_2 = A_{31} (V_1^* + V_2^*) & = A_{31} \{ u_1 + u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3) (u_4 + u_5) \} \\ W_1 = A_{41} (W_1^* - W_2^*) + A_{43} W_3^* & = A_{41} \{ u_1 - u_2 - (\varrho + \varrho^4) (u_4 - u_5) \} + A_{43} \{ u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3) u_6 \} \\ W_2 = A_{51} (W_1^* + W_2^*) & = A_{51} \{ u_1 + u_2 - (\varrho + \varrho^4) (u_4 + u_5) \} \\ W_3 = A_{61} (W_1^* - W_2^*) + A_{63} W_3^* & = A_{61} \{ u_1 - u_2 - (\varrho + \varrho^4) (u_4 - u_5) \} + A_{63} \{ u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3) u_6 \}. \end{cases}$$

§ II. Zerfällung der Thetafunktion.

30. Nach Artikel 3 muss die in Artikel 17 angegebene Thetafunktion

$$(I) \quad \mathcal{H}(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) = \sum e^{\pi i f_6 + 2\pi i (m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6)}$$

($m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ von $-\infty$ bis $+\infty$), worin

$$(2) \quad f_6 = \frac{(344\bar{3})}{5\Omega} \left\{ \omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 - (0110)^2 m_3 - (0110) (\omega_1 m_4 + \omega_2 m_5 + m_6) \right\}^2 \\ + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_1^2 - 2(2413) m_1 m_4 + (4321) m_4^2 \right\} \\ + \frac{1}{5} \left\{ (12\bar{2}\bar{1}) m_2^2 - 2(2413) m_2 m_5 + (4321) m_5^2 \right\} \\ - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1234) m_3 m_6 - (2413) m_6^2 \right\}$$

und

$$\Omega = 1 - (\varrho + \varrho^4) (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

ist, für $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ zerfällbar sein in Faktoren vom Geschlecht $p=2$ und $p=4$. Infolge der Relation $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ nimmt f_6 folgende einfache Gestalt an:

$$(3) \quad f_6 = \frac{(344\bar{3})}{5\Omega} \left\{ \omega(m_1 - m_2) - (0110)^2 m_3 - (0110) (\omega(m_4 - m_5) + m_6) \right\}^2 \\ + \frac{1}{5} (12\bar{2}\bar{1}) (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{5} (4321) (m_4^2 + m_5^2) - \frac{2}{5} (2413) (m_1 m_4 + m_2 m_5) \\ - \frac{1}{5} \left\{ (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}) m_3^2 + 2(1234) m_3 m_6 - (2413) m_6^2 \right\},$$

die es statt einer systematischen Untersuchung über die Methodik des Zerfallens nahelegt, folgenden Ansatz zu versuchen:

$$(4) \quad \begin{cases} m_1 + m_2 = \nu_1, & m_1 - m_2 = \mu_1, & m_3 = \mu_2, \\ m_4 + m_5 = \nu_2, & m_4 - m_5 = \mu_3, & m_6 = \mu_4. \end{cases}$$

Dann ist:

$$(5) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{\nu_1 + \mu_1}{2}, & m_3 = \mu_2, & m_4 = \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}, \\ m_2 = \frac{\nu_1 - \mu_1}{2}, & m_6 = \mu_4, & m_5 = \frac{\nu_2 - \mu_3}{2}. \end{cases}$$

Also:

$$(6) \quad \begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 &= \frac{\nu_1^2 + \mu_1^2}{2}, & m_4^2 + m_5^2 &= \frac{\nu_2^2 + \mu_3^2}{2}, \\ m_1 m_4 + m_2 m_5 &= \frac{\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_3}{2}. \end{aligned}$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} f_6(m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | m_5 | m_6) &= \\ &= \frac{(3\bar{4}4\bar{3})}{5\Omega} \left\{ \omega \mu_1 - (\text{oIIo})^2 \mu_2 - (\text{oIIo}) (\omega \mu_3 + \mu_4) \right\}^2 \\ &+ \frac{\text{I}}{\text{IO}} (\text{I2}\bar{2}\bar{\text{I}}) (\nu_1^2 + \mu_1^2) + \frac{\text{I}}{\text{IO}} (432\text{I}) (\nu_2^2 + \mu_3^2) - \frac{\text{I}}{5} (24\text{I3}) (\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_3) \\ &- \frac{\text{I}}{5} \left\{ (2\bar{\text{I}}\text{I}\bar{2}) \mu_2^2 + 2 (\text{I234}) \mu_2 \mu_4 - (24\text{I3}) \mu_4^2 \right\}. \end{aligned}$$

wo sofort auffällt, dass kein μ mit einem ν multipliziert auftritt. Daher zerfällt $f_6(m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | m_5 | m_6)$ in die Summe zweier quadratischer Formen $f_4(\mu_1 | \mu_2 | \mu_3 | \mu_4)$ und $f_2(\nu_1 | \nu_2)$, also:

$$(7) \quad f_6(m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | m_5 | m_6) = f_4(\mu_1 | \mu_2 | \mu_3 | \mu_4) + f_2(\nu_1 | \nu_2),$$

wo

$$(8) \quad \begin{aligned} f_4(\mu_1 | \mu_2 | \mu_3 | \mu_4) &= \frac{(3\bar{4}4\bar{3})}{5\Omega} \left\{ \omega \mu_1 - (\text{oIIo})^2 \mu_2 - (\text{oIIo}) (\omega \mu_3 + \mu_4) \right\}^2 \\ &+ \frac{\text{I}}{\text{IO}} \left\{ (\text{I2}\bar{2}\bar{\text{I}}) \mu_1^2 - 2 (24\text{I3}) \mu_1 \mu_3 + (432\text{I}) \mu_3^2 \right\} \\ &- \frac{\text{I}}{5} \left\{ (2\bar{\text{I}}\text{I}\bar{2}) \mu_2^2 + 2 (\text{I234}) \mu_2 \mu_4 - (24\text{I3}) \mu_4^2 \right\}, \end{aligned}$$

und

$$(9) \quad f_2(\nu_1 | \nu_2) = \frac{\text{I}}{\text{IO}} \left\{ (\text{I2}\bar{2}\bar{\text{I}}) \nu_1^2 - 2 (24\text{I3}) \nu_1 \nu_2 + (432\text{I}) \nu_2^2 \right\}$$

ist.

31. Führt man in der Linearform

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6$$

des Exponenten der Thetafunktion (Gl. (1)) die Substitution (5) aus, so gruppieren sich die $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ zu folgenden Verbindungen:

$$(10) \quad \begin{cases} u_1 - u_2 = 2u'_1, & u_3 = u'_2, & u_4 - u_5 = 2u'_3, \\ u_1 + u_2 = 2u''_1, & u_6 = u'_4, & u_4 + u_5 = 2u''_2, \end{cases}$$

und es wird:

$$(11) \quad \begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6 = \\ (u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 + u_4 u'_4) + (\nu_1 u''_1 + \nu_2 u''_2). \end{cases}$$

Daher ist:

$$(12) \quad \mathcal{J}(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) = \sum e^{\pi i f_4(\mu_1 | \mu_2 | \mu_3 | \mu_4) + 2\pi i(\mu_1 u'_1 + \mu_2 u'_2 + \mu_3 u'_3 + \mu_4 u'_4)} \cdot e^{\pi i f_2(\nu_1 | \nu_2) + 2\pi i(\nu_1 u''_1 + \nu_2 u''_2)},$$

und wir dürfen jetzt hoffen, die sechsfach unendliche Reihe so zu zerfallen, dass der eine Bestandteil nur nach den μ , der andere nur nach den ν summiert wird. Nun waren andererseits V_2 und W_2 ursprünglich die Integrale, die sich auf das Geschlecht $p=2$ reduzieren liessen; von ihnen wird auch die Thetafunktion vom Geschlecht $p=2$ abhängen. Soll unsere Hoffnung berechtigt sein, so müssen also u''_1, u''_2 lineare Funktionen von V_2 und W_2 sein. In der Tat ist nach Gl. (10) und Gl. (12) § 10:

$$(13) \quad \begin{cases} U = A_{13} \{(\varrho + \varrho^4) \omega 2u'_1 + 2\omega u'_3 + u'_2 - (\varrho + \varrho^4) u'_4\}; \\ V_1 = A_{21} \{2u'_1 - (\varrho^2 + \varrho^3) 2u'_3 + 2\omega(u'_2 - (\varrho + \varrho^4) u'_4)\}, \\ V_2 = A_{31} \{2u''_1 - (\varrho^2 + \varrho^3) 2u''_2\}; \\ W_1 = A_{41} \{2u'_1 - (\varrho + \varrho^4) 2u'_3\} + A_{43} \{u'_2 - (\varrho^2 + \varrho^3) u'_4\}, \\ W_2 = A_{51} \{2u''_1 - (\varrho + \varrho^4) 2u''_2\}, \\ W_3 = A_{61} \{2u'_1 - (\varrho + \varrho^4) 2u'_3\} + A_{63} \{u'_2 - (\varrho^2 + \varrho^3) u'_4\}. \end{cases}$$

32. Jetzt ist noch die Frage zu entscheiden, wie über die μ und ν summiert werden muss. Aus den Gl. (4) folgt:

I. ($i=1, 4$)

a) Sind m_i und m_{i+1} gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade, so sind ν_1 und μ_1 bzw. ν_2 und μ_3 gleichzeitig gerade.

b) Sind m_i und m_{i+1} ungleichartig, so sind ν_1 und μ_1 bzw. ν_2 und μ_2 gleichzeitig ungerade.

2. Zwei verschiedene Wertepaare m_i und m_{i+1} ergeben stets zwei verschiedene Wertepaare ν_1, μ_1 bzw. ν_2, μ_2 .

Folglich hat man über die ν_1, ν_2 und $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ so zu summieren, dass

1. ν_1 und μ_1 stets gleichartig sind.
2. $\nu_2 \gg \mu_3 \gg \mu_4$
3. $\mu_2 \gg \mu_4$ dagegen alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Summiert man also erst über die geraden Werte von ν_1 und μ_1 :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 2n_1, \\ \mu_1 &= 2m'_1, \end{aligned}$$

und dann über alle ungeraden Werte von ν_1 bzw. μ_1 :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 2n_1 + 1, \\ \mu_1 &= 2m'_1 + 1, \end{aligned}$$

so zerfällt die Thetafunktion (12) in zwei Summanden. Jeder Summand zerfällt für sich nochmals in zwei Summanden, wenn wir zuerst über alle geraden Werte von ν_2 und μ_3 :

$$\begin{aligned} \nu_2 &= 2n_2, \\ \mu_3 &= 2m_3, \end{aligned}$$

und dann über alle ungeraden Werte von ν_2 und μ_3 :

$$\begin{aligned} \nu_2 &= 2n_2 + 1, \\ \mu_3 &= 2m'_3 + 1, \end{aligned}$$

summieren. Setzen wir noch der Analogie wegen

$$\begin{aligned} \mu_2 &= m'_2, \\ \mu_4 &= m'_4, \end{aligned}$$

und lassen schliesslich, da keine Verwechslung mehr möglich ist, an den m' die Striche weg, so erhalten wir folgendes Schlussresultat:

$$(14) \quad \mathcal{J}(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) = \theta_1 \mathcal{J}_1 + \theta_2 \mathcal{J}_2 + \theta_3 \mathcal{J}_3 + \theta_4 \mathcal{J}_4,$$

wo

$$(I4a) \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 | m_2 | 2m_3 | m_4) + 2\pi i(2m_1 u'_1 + m_2 u'_2 + 2m_3 u'_3 + m_4 u'_4)} \\ \theta_2 = \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 | m_2 | 2m_3 + 1 | m_4) + 2\pi i(2m_1 u'_1 + m_2 u'_2 + (2m_3 + 1)u'_3 + m_4 u'_4)} \\ \theta_3 = \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 + 1 | m_2 | 2m_3 | m_4) + 2\pi i((2m_1 + 1)u'_1 + m_2 u'_2 + 2m_3 u'_3 + m_4 u'_4)} \\ \theta_4 = \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 + 1 | m_2 | 2m_3 + 1 | m_4) + 2\pi i((2m_1 + 1)u'_1 + m_2 u'_2 + (2m_3 + 1)u'_3 + m_4 u'_4)} \end{array} \right.$$

und

$$(I4b) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_1 = \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 | 2n_2) + 2\pi i(2n_1 u''_1 + 2n_2 u''_2)} \\ \mathcal{G}_2 = \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 | 2n_2 + 1) + 2\pi i(2n_1 u''_1 + (2n_2 + 1)u''_2)} \\ \mathcal{G}_3 = \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 + 1 | 2n_2) + 2\pi i((2n_1 + 1)u''_1 + 2n_2 u''_2)} \\ \mathcal{G}_4 = \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 + 1 | 2n_2 + 1) + 2\pi i((2n_1 + 1)u''_1 + (2n_2 + 1)u''_2)}, \end{array} \right.$$

wo jede dieser Summationen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist.

§ 12. Schlussergebnis.

33. Durch die Gl. (I4) des § 11 ist das Reduktionsproblem im wesentlichen gelöst. Auf die weitere Ausarbeitung dieser Gleichung durch Einführung von Charakteristiken und Anwendung der Multiplikationsformeln¹ können wir hier nicht eingehen. Doch sei hervorgehoben, dass die Thetafunktionen vom Geschlecht $p=2$, auf die wir gestossen sind, lauter numerisch bestimmte Moduln haben; sie lassen sich durch eine Transformation von irrationaler Ordnung weiter zerlegen, worauf wir jedoch auch nicht eingehen wollen. Die Thetafunktionen vom Geschlecht $p=4$, die bei der Zerfällung der allgemeinen Thetafunktion aufgetreten sind, hängen von einem einzigen Modul ω ab.

34. Es bleibt nur noch übrig, für die Verbindungen der Normalintegrale, die in den Thetafunktionen von den Geschlechtern $p=2$ und $p=4$ auftreten, die Periodizitätsmoduln anzugeben. Mit Rücksicht auf Gl. (9) § 10 und Gl. (10) § 11 ergeben sich aus Tabelle X die Tabellen XIII und XIV:

¹ KRAZER, Lehrbuch der Thetafunktionen, Kapitel V, § 10.

XIII.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$+u'_1 - \bar{u}'_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$+u'_2 - \bar{u}'_2$	0	0	1	0	0	0
$+u'_3 - \bar{u}'_3$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$+u'_4 - \bar{u}'_4$	0	0	0	0	0	1
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$+u'_1 - \bar{u}'_1$	$\frac{1}{5}(3443)\frac{\omega^2}{\Omega} + \frac{1}{10}(1221)$	$-\frac{1}{5}(3443)\frac{\omega^2}{\Omega} - \frac{1}{10}(1221)$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega^2}{\Omega} - \frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega^2}{\Omega} + \frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega}{\Omega}$
$+u'_2 - \bar{u}'_2$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$+\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(3113)\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(2112)$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega}{\Omega}$	$+\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(1234)$
$+u'_3 - \bar{u}'_3$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega^2}{\Omega} - \frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega^2}{\Omega} + \frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega^2}{\Omega} + \frac{1}{10}(4321)$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega^2}{\Omega} - \frac{1}{10}(4321)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$
$+u'_4 - \bar{u}'_4$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(1234)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{5}(2413)$

und:

XIV.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$+u''_1 - \bar{u}''_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$+u''_2 - \bar{u}''_2$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$+u''_1 - \bar{u}''_1$	$\frac{1}{10}(1221)$	$\frac{1}{10}(1221)$	0	$-\frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{10}(2413)$	0
$+u''_2 - \bar{u}''_2$	$\frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{10}(2413)$	0	$\frac{1}{10}(4321)$	$\frac{1}{10}(4321)$	0

Es hängen also tatsächlich, wie Artikel 33 es verlangt, die Periodizitätsmoduln der Integrale u'_1 , u'_2 , u'_3 und u'_4 von einem einzigen Modul ω ab, der sich aber aus den Periodizitätsmoduln der Integrale u''_1 und u''_2 heraushebt.

Damit wollen wir unsere Untersuchungen abschliessen.

Nachtrag:

Die Arbeit über den auf Pag. 1 erwähnten Fall $n=3$ ist inzwischen erschienen, nämlich:

K. SAUER, Zur Funktionentheorie auf dem algebraischen Gebilde $s = \sqrt[3]{f_{3n}(z)}$.

Strassburger Dissertation, Leipzig 1906.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Teil.

Theorie des allgemeinen Falles ($I_{18} \not\equiv 0$).

- § 1. Ein allgemeines Zerschneidungsprinzip Riemann'scher Flächen mit linearer Transformation in sich.
- § 2. Die Riemann'sche Fläche und die Integrale 1. Gattung für den Fall $n = 5$.
- § 3. Die Periodizitätsmoduln.
- § 4. Die Normalintegrale 1. Gattung.
- § 5. Die Thetafunktion.

2. Teil.

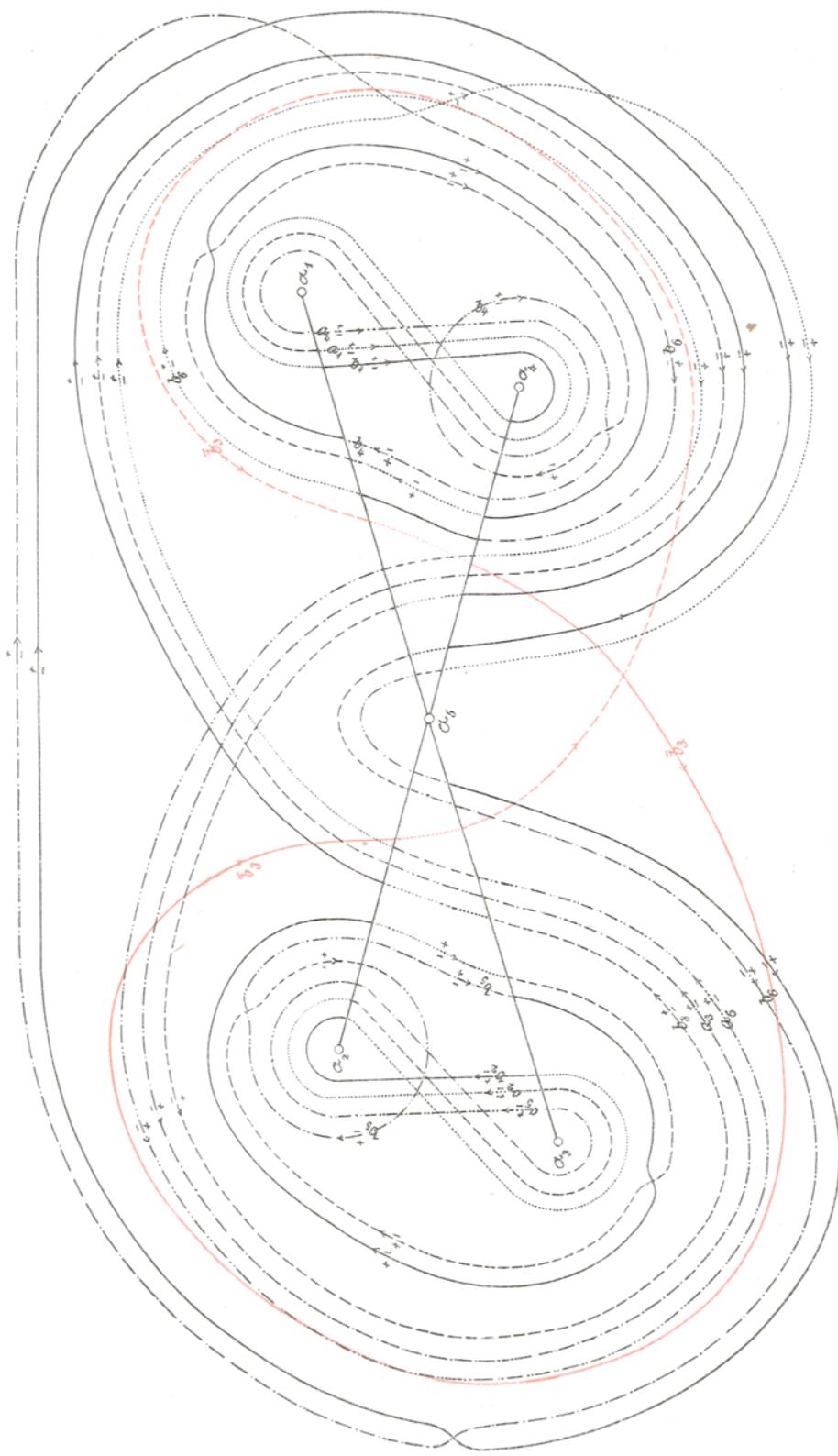
Algebraische Reduktion der Integrale 1. Gattung im Falle $I_{18} = 0$.

- § 6. Einführung des Spezialfalles $I_{18} = 0$.
- § 7. Nachweis zweier Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2$.
- § 8. Reduktion der Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2$ auf hyperelliptische.

3. Teil.

Reduktion der Thetafunktion im Falle $I_{18} = 0$.

- § 9. Die Riemann'sche Fläche im Falle $I_{18} = 0$.
 - § 10. Die speziellen Periodenrelationen im Falle $I_{18} = 0$.
 - § 11. Zerfallung der Thetafunktion.
 - § 12. Schlussergebnis.
-



Figur 14.

Blatt



