ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER DARSTELLUNG EINES EINDEUTIGEN ZWEIGES EINER MONOGENEN FUNCTION DURCH HERRN MITTAG-LEFFLER, DER METHODE DER MITTELWERTE DES HERRN BOREL UND DER TRANSFORMATION DES HERRN LINDELÖF

VON

L. HANNI
in WIEN.

Es sei durch die Potenzreihe

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}, \tag{1}$$

die innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius convergiere, in einem gewissen Bereiche, der sich über den Convergenzkreis von (1) hinaus erstreckt, eine monogene Function $F(x)$ definiert. Nach den bekannten Theoremen[1] des Herrn MITTAG-LEFFLER lässt sich innerhalb des zu den Elementen

$$F(a)\,,\ F^{(1)}(a)\,,\ \ldots,\ F^{(\nu)}(a)\,,\ \ldots \tag{2}$$

gehörigen Hauptsternes A der Functionszweig $FA(x)$ auf verschiedene Arten durch Ausdrücke darstellen, in denen wie bei der Reihe (1) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ nur noch Constanten vorkommen, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Mit diesen Darstellungen von $FA(x)$ stehen nun die Darstellungen eines Functionszweiges, die man durch die Methode der Mittelwerte des Herrn BOREL und durch die Transformation des Herrn E. LINDELÖF erhält, in engem Zusammenhange, wie wir im Folgenden zeigen werden, indem wir diese drei Methoden mit einander vergleichen.

[1] Acta Mathem., Bd. 23, 24, 26.

I.

An erster Stelle untersuchen wir, in welcher Beziehung die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Zweiges von $F(x)$ zur Darstellung desselben durch Herrn MITTAG-LEFFLER steht. Dabei nehmen wir unter den verschiedenen Arten von Mittelwerten den sehr allgemeinen Fall, welchen Herr BOREL in seiner Preisschrift [1] angegeben hat. Ist

$$s_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} \frac{1}{\underline{|r}} F^{(r)}(a)(x-a)^r, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

so definiert hier Herr BOREL als Mittelwert der Partialsummen

$$s_0\,,\; s_1\,,\; \ldots,\; s_\nu\,,\; \ldots$$

den Ausdruck

$$m_1 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_n(t)s_n + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_n(t) + \ldots}, \tag{3}$$

wo die $c_\nu(t)$ Functionen von t sind, die folgenden Bedingungen genügen: [2]

1) Sie sollen für $t \geqq 0$ nicht negativ werden und es soll für diese Werte von t höchstens eine endliche Anzahl derselben verschwinden.
2) Es soll in (3) der Nenner $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ gleichmässig convergieren und $\lim\limits_{t=+\infty} \varphi(t) = +\infty$ sein.
3) Es soll für jeden beliebigen Wert von ν $\lim\limits_{t=+\infty} \frac{c_{\nu+1}(t)}{c_\nu(t)} = +\infty$ sein.

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16, (1899), p. 54.

[2] Wie man ausgehend vom Begriffe des arithmetischen Mittels von n Grössen zur Einführung dieser allgemeinen Art von Mittelwerten gelangt, führt Herr BOREL aus in den *Leçons sur les séries diverg.*, chap. III. Hier gibt er zugleich auch eine etwas einfachere Definition eines Mittelwertes, indem er $c_\nu(t) = c_\nu t^\nu$ setzt und ausserdem nur noch annimmt, dass die erste und zweite der oben angeführten Bedingungen erfüllt seien. Doch kann in diesem Falle im allgemeinen auch die dritte Bedingung erfüllt werden, indem man nämlich die Art des Grenzüberganges $\lim t = +\infty$ entsprechend wählt, so dass dann diese Art von Mittelwerten ebenfalls unter der im Texte definierten enthalten ist.

Der so definierte Ausdruck (3) hat nun die Eigenschaft, dass er für alle Werte von x innerhalb des Convergenzkreises von (1) gleichmässig zum Grenzwerte $F(x)$ convergiert, da in demselben für ein endliches r die Functionen $c_0(t)\,,\ c_1(t)\,,\ \ldots\,,\ c_r(t)$ wegen seines distributiven Charakters gleich Null gesetzt werden können, ohne seinen Grenzwert zu ändern und die Summen $s_\nu\,,\ s_{\nu+1}\,,\ \ldots$ für $\nu > r$ sich sämmtlich dem Grenzwerte s der Reihe (1) beliebig nähern. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass m_1 noch für Werte von x ausserhalb des Convergenzkreises von (1) convergiert und die Function $F(x)$ darstellt. Da für die Verwendung der Methode der Mittelwerte zur Darstellung eines Functionszweiges nur dieser Fall in Betracht kommt, so können wir über die Functionen $c_\nu(t)$ noch folgende Annahme machen:

4) Ist B ein einfach zusammenhängender Bereich, der ausser dem Einheitskreise wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, so sollen die $c_\nu(t)$ so beschaffen sein, dass der Mittelwert m_1' der Partialsummen der Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ in jedem beliebigen in B gelegenen Bereiche B' gleichmässig convergiert.

Unter dieser Voraussetzung ist dann m_1' in B eine analytische Function von x und es ist daher in diesem Bereiche $m_1' = \frac{1}{1-x}$. Da sich nun mittels des Cauchy'schen Integrals die Transformation der Reihe (1) auf die der geometrischen Reihe zurückführen lässt, so ist diese letzte Voraussetzung über die Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, dass auch ein einfach zusammenhängender Bereich E_1 existiert, der ausser dem Convergenzkreise von (1) wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, und in dem $m_1 = FE_1(x)$ ist.

Der so definierte Mittelwert m_1 ist somit eine Transformation der Potenzreihe (1) in einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereiche, wenn Functionen $c_\nu(t)$ existieren, die diesen Bedingungen genügen. Dass es wirklich solche Functionen gibt, zeigt der bekannte von Herrn Borel ausführlich behandelte Fall $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ (exponentielle Summation).

Auf den Mittelwert m_1 kann man wieder denselben Prozess anwenden wie auf die Reihe (1), indem man ihn als Grenzwert einer Reihe von Functionen ansieht, deren Partialsummen $\sigma_0\,,\ \sigma_1\,,\ \ldots\,,\ \sigma_\nu\,,\ \ldots$ so beschaffen sind, dass $\lim_{\nu=+\infty} \sigma_\nu = m_1$ ist. Um in einfacher Weise eine solche Reihe zu erhalten, lassen wir in (3) den Parameter t der Reihe nach die Werte $t = 0, 1, 2, \ldots$ durchlaufen und bilden die Ausdrücke

$$m_1(\nu) = \frac{c_0(\nu)s_0 + c_1(\nu)s_1 + \ldots + c_n(\nu)s_n + \ldots}{c_0(\nu) + c_1(\nu) + \ldots + c_n(\nu) + \ldots}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Den Grenzwert (3) kann man dann durch die Reihe

$$m_1(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [m_1(\nu + 1) - m_1(\nu)] \tag{4}$$

ersetzen, da diese Reihe zu demselben Grenzwert wie (3) convergiert und dasselbe Verhalten zeigt. Wenn nämlich (3) für alle Werte von x in jedem Bereiche E'_1 gleichmässig zum Grenzwerte $FE_1(x)$ convergiert, so convergiert daselbst auch die Reihe (4) gleichmässig zu diesem Grenzwerte und umgekehrt. Durch Einführung der Reihe (4) erhält man jetzt in derselben Weise wie Herr Borel[1] in dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ ist, als zweiten Mittelwert der Summen $s_0, s_1, \ldots, s_\nu, \ldots$ den Ausdruck

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots}.$$

Dieser Ausdruck zeigt wieder denselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Denn zwischen den σ_ν und den Partialsummen einer Potenzreihe besteht kein wesentlicher Unterschied, und auch der Convergenzbereich E_1 kann unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs seines Randes auf das Innere eines Kreises conform abgebildet werden. Es folgt daher auch in diesem Falle ebenso wie bei m_1 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4), dass ein einfach zusammenhängender Bereich E_2 existiert, der in seinem Innern den Bereich E_1 enthält und in dem $m_2 = FE_2(x)$ ist.

Diese Methode, aus einem gegebenen Mittelwerte einen neuen abzuleiten, kann man beliebig fortsetzen und erhält so folgende Kette von Mittelwerten

---

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16 (1899), p. 53.

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l}
m_1 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_\nu(t)s_\nu + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
m_2 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
m_3 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_2(0) + c_1(t)m_2(1) + \ldots + c_\nu(t)m_2(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
m_n = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_{n-1}(0) + c_1(t)m_{n-1}(1) + \ldots + c_\nu(t)m_{n-1}(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

die eine Verallgemeinerung der von den Herrn HÖLDER[1] und CESÀRO[2] aufgestellten Kette ist. Jeder Mittelwert dieser Kette ist wieder von demselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Da man infolge dessen die Schlüsse, welche bei der Einführung von m_1 und m_2 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) gezogen wurden, auch auf jeden folgenden Mittelwert dieser Kette übertragen kann, so existiert eine Folge von einfach zusammenhängenden Bereichen $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass jeder Bereich E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ im Innern des folgenden Bereiches liegt und dass für alle Werte von x in demselben $m_\nu = FE_\nu(x)$ ist.

Wollen wir diese durch die Methode der Mittelwerte erhaltene Darstellung eines Functionszweiges mit den von Herrn MITTAG-LEFFLER gegebenen Darstellungen vergleichen, so haben wir zu untersuchen, ob sich ein beliebiger Mittelwert m_n der Kette (5) auf eine derselben zurückführen

[1] Mathem. Ann., Bd. 20, (1882), p. 535, ff.

[2] Bull. des sciences mathem., 1890, p. 114, ff.

lässt, und ob die eben gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ in dem ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptstern A convergiert.

Um zur Lösung dieser Aufgabe zu gelangen, stellen wir zunächst m_1 durch folgende Doppelreihe dar

$$m_1 = \left\{\begin{array}{l}
\frac{c_0(t)}{\varphi(t)} F(a) \\[2ex]
\frac{c_1(t)}{\varphi(t)} \{F(a) + F^{(1)}(a)(x-a)\} \\[2ex]
\frac{c_2(t)}{\varphi(t)} \left\{F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2\right\} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} \left\{F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu\right\} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

in der t grösser sein soll als eine beliebig grosse positive Zahl M. Diese Doppelreihe convergiert für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, und es ist dann ihr Grenzwert gleich m_1. Bezeichnet nämlich $S_r^{(s)}$ die Summe derjenigen Terme, welche den ersten s Zeilen und r Colonnen dieser Doppelreihe angehören, so besteht die Gleichung $m_1 = \lim\limits_{s=+\infty} \left(\lim\limits_{r=+\infty} S_r^{(s)}\right)$ nicht nur für $r = s$, sondern sie bleibt wegen des distributiven Charakters von m_1 auch noch giltig wenn r und s verschiedene und von einander unabhängige Werte annehmen. Daraus ergibt sich, dass $S_r^{(s)}$ auch zum Grenzwerte m_1 convergiert, wenn man r und s gleichzeitig und unabhängig von einander zum Grenzwerte $+\infty$ übergehen lässt; es besteht somit für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, die Gleichung $m_1 = \lim\limits_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$. Es kann aber der Convergenzbereich von $\lim\limits_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$ auch nicht grösser sein als der von m_1, da aus der Convergenz dieser Doppelreihe wieder die Convergenz von m_1 folgt. Aus der Convergenz von m_1 folgt ferner, dass auch die einzelnen Colonnen dieser Doppelreihe convergieren. Da dann nach einem zuerst von Herrn O. STOLZ aufgestellten Satze[1] auch die Reihe der Colonnensumme zu demselben Grenzwerte wie die Doppelreihe convergiert, so gilt für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, auch die Gleichung $m_1 = \lim_{r=+\infty} \left(\lim_{s=+\infty} S_r^{(s)}\right)$. Endlich kann der Convergenzbereich der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe nicht grösser sein als der Convergenzbereich von m_1; denn wegen des distributiven Charakters der Reihe der Colonnensummen ergibt sich in derselben Weise wie aus der Convergenz von m_1 wieder die Convergenz der Doppelreihe. Die Gleichung (3) geht somit durch diese Transformation über in die äquivalente Gleichung

$$
(6) \qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=\lambda_1}^{\infty} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdot \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}
$$

$$
= \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(1)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}
$$

wo $c_\lambda^{(1)}(t) = \sum_{\lambda_2=\lambda}^{\infty} \frac{c_{\lambda_1}(t)}{\varphi(t)}$ ist, und es ist auf diese Weise m_1 schon als *Grenzwert* eines Ausdruckes dargestellt, der von derselben Form ist wie der von Herrn MITTAG-LEFFLER in der I. note seiner Abhandlung für ein $g_n(x)$ aufgestellte Ausdruch $\sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$.

In derselben Weise kann man jetzt auch den als m_2 definierten Ausdruck transformieren. Berücksichtigt man, dass

$$
m_1(\nu) = c_0^{(1)}(\nu)F(a) + c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a) + c_2^{(1)}(\nu)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots
$$

ist, so erhält man für m_2 die unendliche Doppelreihe

[1] Mathem. Ann., Bd. 24, (1884), p. 159; über die weitere Ausführung der Theorie der unendlichen Doppelreihen vgl. man: PRINGSHEIM, Sitzungsber. der baier. Akad., math.-phys. Cl. 1897, p. 101 ff., Mathem. Ann., Bd. 53, (1900), p. 289 ff., LONDON, ebenda, p. 322 ff.

$$
(7)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\frac{c_0(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(0)F(a)+c_1^{(1)}(0)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(0)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots\right\}\\
\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(1)F(a)+c_1^{(1)}(1)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(1)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots\right\}\\
\frac{c_2(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(2)F(a)+c_1^{(1)}(2)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(2)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots\right\}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(\nu)F(a)+c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(\nu)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots\right\}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

falls $t > M$ ist. Durch dieselben Schlüsse wie bei der früheren Doppelreihe ergibt sich auch hier wieder aus der Convergenz von m_2 die Convergenz der Doppelreihe (7) und ebenso ist der Convergenzbereich von (7) gleich dem von m_2. Da ferner wegen der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 2) die einzelnen Colonnen von (7) sicher im Convergenzbereiche von m_2 convergieren, so besteht für alle Werte von x in diesem Bereiche wegen der Convergenz der Doppelreihe (7) auch die Gleichung

$$
(8)\qquad m_2 = \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)}c_{\lambda_1}^{(1)}(\lambda_2)\frac{1}{\underline{|\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}
$$

$$
= \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda^{(2)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}}F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}.
$$

Endlich kann der Convergenzbereich des Ausdruckes auf der rechten Seite der letzten Gleichung nicht grösser sein als der von m_2; denn aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen von (7) folgt wieder die Convergenz der Doppelreihe. Da somit m_2 durch den Ausdruck auf der rechten Seite von (8) ersetzt werden kann, so ist auch dieser Mittelwert durch einen Grenzwert dargestellt, der dieselbe Form hat wie der eben für m_1 erhaltene Grenzwert (6).

Mit Hilfe der für m_2 erhaltenen Reihe (8) kann man nun auch m_3 in derselben Weise wie m_1 transformieren und so beliebig fortfahren. Hat man nämlich einen Mittelwert m_{n-1} durch den Grenzwert

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n-1)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

dargestellt, so hat man, um auch m_n durch einen Grenzwert von derselben Form darzustellen, nur in der Doppelreihe (7) die $c_\lambda^{(1)}(\mu)$ $\left(\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots\Big)$ durch $c_\lambda^{(n-1)}(\mu)$ zu ersetzen. Dadurch erhält man wieder eine unendliche Doppelreihe von derselben Form wie (7) und es ergibt sich durch Wiederholung der früheren Schlüsse, dass ihr Grenzwert m_n dem Grenzwert der Reihe ihrer Colonnensummen gleich ist und ihr Convergenzbereich mit dem von m_n identisch ist. Durch diese successive Umformung der Mittelwerte der Kette (5) erhält man somit ebenso wie für m_1 und m_2 auch für jeden folgenden Mittelwert eine Darstellung von der Form

$$(9) \qquad m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda.$$

Vertauscht man nun in dem Ausdrucke auf der rechten Seite von (9) das Summenzeichen und das lim-Zeichen mit einander und setzt man $\lim\limits_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t) = c_\lambda^{(n)}$, so geht derselbe in die unendliche Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

über, deren Glieder von derselben Form sind wie die der Polynome $g_n(x)$. Diese Vertauschung des Summenzeichens und des lim-Zeichens ist wirklich gestattet, da dadurch weder der Grenzwert noch der Convergenzbereich von (9) geändert wird. Es bleibt nämlich der zweifache Grenzwert (9), da in demselben t und λ von einander unabhängig sind, unverändert, wenn man t und λ unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt und somit convergiert auch der Ausdruck

$$(10) \qquad \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

für alle Werte von x, für welche (9) convergiert, zum Grenzwerte m_n.

Wegen der Convergenz von $\lim\limits_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$ ergibt sich daraus schon, dass für alle Werte von x im Geltungsbereiche von m_n die Gleichung besteht

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lim_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda = \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

und daher

$$m_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda \tag{11}$$

ist. Da ebenso umgekehrt aus der Convergenz der Reihe auf der rechten Seite von (11) die Convergenz von (10) und aus der Convergenz von (10) wieder die des Ausdruckes (9) folgt, so kann der Convergenzbereich der Reihe (11) auch nicht grösser sein als der von m_n und es darf somit die Gleichung (9) durch die Gleichung (11) ersetzt werden.

Nachdem so durch die Verwandlung in eine unendliche Doppelreihe ein Mittelwert m_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ der Kette (5) in die Reihe (11) transformiert worden ist, kann man die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Functionszweiges $FE_n(x)$ jetzt unmittelbar auf dieselbe Form bringen, welche die von Herrn Mittag-Leffler in der I. note seiner Abhandlung durch den Grenzwert eines Polynoms $g_n(x)$ erhaltene Darstellung eines Functionszweiges $FX(x)$ hat. Setzt man nämlich

$$f_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu_n} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda,$$

so kann man in derselben Weise wie Herr Mittag-Leffler in dieser note Zahlen N_n von solcher Beschaffenheit bestimmen, dass für alle Werte von x im Bereiche E_n aus der Gleichung (11) die Ungleichung folgt

$$|FE_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \nu_n > N_n. \qquad {\scriptstyle (n=1,2,3,\ldots)}$$

Diese Ausdrücke $f_n(x)$, auf welche jetzt die Mittelwerte (5) zurückgeführt sind, unterscheiden sich von den Polynomen $g_n(x)$ nur noch durch die Form der von den Elementen (2), von x und von a unabhängigen Constanten $c_\lambda^{(n)}$. Doch ist dieser Unterschied zwischen den $f_n(x)$ und $g_n(x)$

insofern nicht mehr ein wesentlicher, als auch die $f_n(x)$ durch die in der I. note der Abhandlung des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebene Methode erhalten werden können. Wie Herr MITTAG-LEFFLER bemerkt,[1] lassen sich nämlich durch diese Methode ausser den $g_n(x)$ noch beliebig viele andere Polynome angeben, welche denselben Bedingungen wie die $g_n(x)$ genügen und sich von diesen wie die $f_n(x)$ nur durch die Form der Constanten $c_\lambda^{(n)}$ unterscheiden. Es ist somit die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges nicht nur von derselben äusseren Form wie die durch die $g_n(x)$ des Herrn MITTAG-LEFFLER, sondern man kann sogar zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch durch die in der I. note verwendete Methode des Herrn MITTAG-LEFFLER gelangen.

Die Methode der Mittelwerte steht ferner auch in enger Beziehung zu der in der II. note des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebenen Darstellung eines Functionszweiges. Die als Mittelwerte definierten Ausdrücke (5) kann man nämlich auch durch n-fach unendliche Reihen darstellen, welche analoge Eigenschaften besitzen wie die von Herrn MITTAG-LEFFLER in dieser note zur Darstellung eines Functionszweiges $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$ verwendeten n-fach unendlichen Reihen. Zu dieser Darstellung der Ausdrücke (5) gelangt man, wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite von (9) in der Form schreibt

$$m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_n}(\lambda_{n-1})}{\varphi(\lambda_{n-1})} \cdot \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}.$$

Da man auch hier das lim-Zeichen unter die Summenzeichen setzen kann, so erhält man für m_n die $n+1$-fach unendliche Reihe

$$(12) \qquad m_n = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

wo

$$c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}$$

ist. Diese $n+1$-fach unendlichen Reihen sind nun schon denen des Herrn MITTAG-LEFFLER analog. Denn zunächst haben die Reihen (12) gleich den

[1] Acta mathem., Bd. 23, p. 60.

genannten die Eigenschaft, dass für alle Werte von x, für welche m_n gleichmässig convergiert, auch die einzelnen Reihen

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

gleichmässig convergieren, so dass nach der Definition des Herrn Mittag-Leffler[1] für diese Werte von x auch die einem Mittelwerte m_n entsprechende $n+1$-fach unendliche Reihe (12) gleichmässig convergiert. Während ferner eine Reihe (12) bei dieser Art der Summation für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_n convergiert, kann man sie ebenso wie die n-fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's auch in solcher Weise summieren, dass sie nur innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) convergiert. Sodann treten in den $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ in derselben Weise wie bei den Reihen des Herrn Mittag-Leffler nur noch Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ auf, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Endlich enthält zufolge der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) der Convergenzbereich einer $n+1$-fach unendlichen Reihe den Convergenzbereich der dem vorhergehenden Mittelwerte m_{n-1} entsprechenden n-fach unendlichen Reihe als Theilbereich. Somit unterscheiden sich die $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) von denen des Herrn Mittag-Leffler nur dadurch, dass die Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ von den in den letzteren Reihen auftretenden Constanten $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ verschieden sind und infolge dessen auch die Convergenzbereiche der Reihen (12) nicht dieselben Eigenschaften besitzen wie die von Herrn Mittag-Leffler in der II. note definierten

[1] Acta mathem., Bd. 24, p. 189.

Bereiche $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Da sich aber auch durch die Methode der II. note ausser den dort von Herrn MITTAG-LEFFLER eingeführten n-fach unendlichen Reihen noch beliebig viele andere Arten von n-fach unendlichen Reihen angeben lassen, die sich von denen MITTAG-LEFFLER's wie die Reihen (12) nur durch die Form der darin auftretenden Constanten unterscheiden, so ist die zwischen den n-fach unendlichen Reihen (12) und denen MITTAG-LEFFLER's bestehende Analogie schon dazu hinreichend, dass die Reihen (12) auch durch die Methode der II. note erhalten werden können. Daraus folgt, dass man zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch dadurch gelangen kann, dass man von den Eigenschaften der n-fach unendlichen Reihen ausgeht.

Dieses durch die Transformation der Ausdrücke (5) erhaltene Resultat, dass man zu den Mittelwerten (5) auch durch die von Herrn MITTAG-LEFFLER in der I und II note seiner Abhandlung angegebenen elementaren Methoden gelangen kann, bietet einerseits eine Ergänzung zum § 2 der IV note dieser Abhandlung, wo Herr MITTAG-LEFFLER zu Herrn BOREL's limite généralisée der Folge $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ kommt, indem er vom CAUCHY'schen Integral ausgeht. Andererseits ist dasselbe von besonderer Bedeutung für die weitere Ausbildung der Theorie der Mittelwerte. Es ergibt sich nämlich durch diese Zurückführung der Mittelwerte auf Polynome von der Form $\sum_{\nu=0}^{n_\mu} c_\nu^{(\mu)} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$ und auf n-fach unendliche Reihen von demselben Typus wie die des Herrn MITTAG-LEFFLER die Eigenschaft der Mittelwerte, dass sie ausserhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) die Function $F(x)$ darstellen können, als eine Folge davon, dass diese viel allgemeineren Ausdrücke dieselbe Eigenschaft besitzen, und findet so darin gewissermassen ihre Erklärung. Zugleich bietet sich dadurch, dass man die Mittelwerte als speciellen Fall dieser allgemeineren Ausdrücke auffasst, auch die Möglichkeit, die Methode der Mittelwerte zu vervollkommnen.

Dass eine Vervollkommnung dieser Methode wirklich wünschenswert ist, findet man schon, wenn man untersucht, ob die im Anfange gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsternes A convergiere. Dabei ergibt sich nämlich, dass die Methode der Mittelwerte nicht denselben Grad von Allgemeinheit besitzt wie die Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER. Denn daraus, dass der einem Mittelwerte m_ν entsprechende Bereich E_ν den Bereich $E_{\nu-1}$ in seinem Innern enthält und die für m_n gefundene Reihe (11) von derselben Form ist wie die Polynome $g_n(x)$, welche die Eigenschaft haben, dass $\lim\limits_{n=+\infty} g_n(x)$ innerhalb A convergiert, folgt noch nicht, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterns A convergiert. Um dies zu zeigen, hat man nur in (5)

$$c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \quad \text{und} \quad F(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

zu setzen. Man erhält dann für $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Werte

$$m_1 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu) = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(x-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(x-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_3 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(e^{e^{x-1}-1}-1)}}{1-x}\right]$$

. . . .

. . . .

. . . .

Setzt man $x = \xi + \eta i$, so sind die Convergenzbereiche $E_1, E_2, E_3, \ldots$ dieser Mittelwerte bestimmt durch die Ungleichungen

$$\xi < 1$$

$$e^{\xi-1} \cos \eta < 1$$

$$e^{e^{\xi-1}\cos\eta-1} \cos(\sin\eta) < 1$$

. . . .

. . . .

. . . .

Zufolge der ersten Ungleichung ist der Convergenzbereich von m_1 jener Theil der Ebene, welcher links von der im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse gezogenen Normalen liegt. Die zweite Ungleichung ist zunächst wieder erfüllt für $\xi < 1$. Sie ist ferner erfüllt für alle Werte von x, für welche $\cos\eta$ negativ ist, also für

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \eta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Diese Werte von x liegen in Streifen von der Breite π, welche parallel zur reellen Achse in Zwischenräumen S_k von der Breite π ins Unendliche verlaufen. Endlich ist die zweite Ungleichung noch erfüllt für solche Werte von x, für welche $\xi \geqq 1$ ist und $\cos\eta$ zwar positiv, aber genügend klein ist. Diese Werte von x liegen in den Zwischenräumen S_k auf der äusseren Seite der Curven $e^{\xi-1}\cos\eta = 1$, welche die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale in den Punkten

$$\beta = 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

berühren und die Grenzgeraden der Zwischenräume S_k zu Asymptoten haben. Ebenso wie in der zweiten Ungleichung lässt sich auch in den folgenden Ungleichungen die linke Seite in zwei Factoren zerlegen, von denen der erste für alle Werte von x, für welche die vorhergehende Ungleichung erfüllt ist, kleiner ist als Eins, während der andere ein Cosinus ist. In diesen Ungleichungen zeigt somit der erste Factor dasselbe Verhalten wie $e^{\xi-1}$ in der zweiten Ungleichung; dagegen unterscheidet sich in denselben der aus dem Cosinus bestehende Factor von dem in der zweiten Ungleichung auftretenden analogen Factor $\cos\eta$ dadurch, dass er nicht mehr negativ werden kann. Infolge dessen bleibt unter den eben gemachten Annahmen durch die Bildung der Mittelwerte $m_3, m_4, \ldots, m_n$, die Vergrösserung des Convergenzbereiches darauf beschränkt, dass in jedem Zwischenraume S_k an Stelle der Grenzcurve des Bereiches E_ν $(\nu > 2)$ eine andere Grenzcurve tritt, die zwar innerhalb des von der Grenzcurve des vorhergehenden Bereiches eingeschlossenen Gebietes liegt, aber zugleich die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale im Punkte $\eta = 2k\pi$ berührt und sich in ihrem weiteren Verlaufe wieder den beiden Grenzgeraden von S_k nähert. Da der zu den Elementen $1, \underline{|2}, \underline{|3}, \ldots, \underline{|n}, \ldots$ gehörige Hauptstern A aus der ganzen Ebene mit Ausschluss des Theiles $(+1, +\infty)$ der reellen Achse besteht, so convergiert daher der Grenzwert

$\lim\limits_{n=+\infty} m_n$, den man durch fortgesetzte Anwendung dieser Art von Mittelbildung auf die Partialsummen der geometrischen Reihe erhält, nur in einem Theilbereiche des zu diesen Elementen gehörigen Hauptsterns. Wie dieses einfache Beispiel zeigt, sind also die im Anfange dieses Paragraphen über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahmen noch nicht dazu hinreichend, dass man durch Anwendung der Mittelbildung auf die Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ der Reihe (1) zu einem Ausdrucke gelangt, der im ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterne A convergiert.

II.

Ebenso wie die Methode der Mittelwerte steht auch die Transformation des Herrn Lindelöf[1] mit den Methoden des Herrn Mittag-Leffler dadurch in enger Beziehung, dass man zu der Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$, die man durch diese Transformation erhält, auch von dem Gesichtspunkte aus gelangen kann, von welchem Herr Mittag-Leffler in der II note seiner Abhandlung ausgeht. Bevor wir jedoch dies nachweisen, wollen wir das zu diesem Beweise Nothwendige aus der Arbeit des Herrn Lindelöf hier anführen.

Wie Herr Mittag-Leffler setzt auch Herr Lindelöf voraus, dass die Function $F(x)$ durch die Reihe (1) und deren analytische Fortsetzung definiert sei. Um diese durch die Elemente (2) bestimmte Function in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T, innerhalb dessen sie überall regulär ist, durch einen expliciten Ausdruck darzustellen, verwendet er die conforme Abbildung. Nach dem Dirichlet'schen Princip existiert nämlich unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs des Randes von T eine analytische Function $t = \varphi(x)$, durch welche der Bereich T conform auf den Kreis $|t| \leqq 1$ abgebildet wird. Diese Function $\varphi(x)$ ist dann im Innern von T regulär, und ebenso ist auch die umgekehrte Function $x = \psi(t)$ regulär im Innern des Kreises $|t| < 1$. Ordnet man dem Punkte $x = a$ den Punkt $t = 0$ zu, so erhält man daher in der Umgebung des Punktes $t = 0$ für $x - a$ eine Reihe von der Form

$$x - a = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots. \tag{13}$$

[1] Acta soc. scient. Fennicae, tom. 24.

Indem nun Herr LINDELÖF diesen für $x - a$ erhaltenen Ausdruck in die Reihe (1) einsetzt und dann die auf diese Weise sich ergebende Reihe nach Potenzen von t ordnet, erhält er für $F(x)$ eine Reihe von der Form

$$F(x) = \beta_0 + \beta_1\varphi(x) + \beta_2[\varphi(x)]^2 + \beta_3[\varphi(x)]^3 + \ldots, \tag{14}$$

die innerhalb des Bereiches T convergiert. Da nun der zu den Elementen (2) gehörige Hauptstern A ein Bereich T ist, so kann man, falls der Bereich A conform auf einen Kreis abgebildet werden kann, durch diese Transformation auch eine Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$ erhalten.

Der oben angegebene Zusammenhang der Transformation des Herrn LINDELÖF mit den Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER ergibt sich nun daraus, dass man zur Einführung dieser Transformation auch gelangen kann, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht. Diese können nämlich noch convergieren, ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne convergiert; ferner können ausser der Doppelreihe z. B. auch die einzelnen Colonnen convergieren, während die Zeilen divergieren. Indem sich aus diesen Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen die Möglichkeit ergibt, eine Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu verwandeln, in der die einzelnen Zeilen z. B. nur innerhalb des Convergenzkreises der gegebenen Potenzreihe, die Colonnen aber und die Doppelreihe selbst ausserdem noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb dieses Convergenzkreises convergieren, erscheint die Vervandlung einer Potenzreihe in eine solche unendliche Doppelreihe als ein geeignetes Mittel, um jene in einen Ausdruck mit grösserem Geltungsbereich zu transformieren. Unter den vielen möglichen Arten, eine Potenzreihe (1) in eine Doppelreihe mit grösserem Convergenzbereiche zu verwandeln, ist die sehr naheliegend, eine solche Doppelreihe dadurch herzustellen, dass man x als Function einer neuen Veränderlichen darstellt. Denn setzt man wie vorhin $x = \psi(t)$, so dass wieder für genügend kleine Werte von t die Gleichung (13) besteht, so geht die Reihe (1) in die Doppelreihe über

$$\begin{array}{llll}
F(a) + F^{(1)}(a)\alpha_1 t + & F^{(1)}(a)\alpha_2 t^2 + & F^{(1)}(a)\alpha_3 t^3 + \ldots \\
& \frac{1}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)\alpha_1^2 t^2 + & \frac{1}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)\, 2\alpha_1\alpha_2 t^3 + \ldots \\
& & \frac{1}{|\underline{3}} F^{(3)}(a)\alpha_1^3 t^3 + \ldots \\
& & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

welche schon den Bedingungen genügt, unter denen man durch die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu einem Ausdrucke mit grösserem Geltungsbereiche gelangt. Da nämlich die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe mit der Reihe auf der rechten Seite von (14) identisch ist, so convergieren ihre Colonnen und die Reihe ihrer Colonnensummen innerhalb des Bereiches T, während dies bei den Zeilen und bei der Reihe der Zeilensummen nicht mehr der Fall ist. Ausserdem folgt nach einem Satze des Herrn Stolz[1] aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe, dass auch die Doppelreihe innerhalb T convergiert. Somit kann man zur Gleichung (14) auch gelangen, indem man davon ausgeht, dass eine unendliche Doppelreihe und die Reihe ihrer Colonnensummen noch convergieren können, ohne dass ihre Zeilen convergieren. Da die Doppelreihen dieser Art ein specieller Fall der n-fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's sind, so ist dadurch zugleich nachgewiesen, dass man die durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges auch durch dasselbe Princip erhält, von dem Herr Mittag-Leffler in der II note seiner Abhandlung ausgeht.

III.

Schon zufolge der bisher erhaltenen Resultate stehen auch die durch die Methode der Mittelwerte und durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges dadurch zu einander in Beziehung, dass man zu denselben durch Anwendung desselben Princips gelangen kann. Ebenso wie die Transformation des Herrn Lindelöf kann man nämlich auch den Mittelwert der Partialsummen s_0, s_1, s_2, ... und allgemein den Mittelwert der Ausdrücke $m_\nu(\mu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots$) einführen, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht; denn auch die Doppelreihen (6) und (8) und die der letzteren analogen Doppelreihen, welche den Mittelwerten m_3, m_4, ... entsprechen, haben die Eigenschaft, dass sie und die Reihen ihrer Colonnensummen noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe ihrer Zeilensummen convergieren. Man

[1] Mathem. Annalen, Bd. 24, (1884), p. 169.

kann aber die durch die Methode der Mittelwerte und die durch die Methode des Herrn LINDELÖF sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges nicht nur durch Anwendung desselben Princips erhalten, sondern man kann zur Gleichung (14) in dem Falle, wo $x - a = \frac{t}{1+t}$ und daher $t = \frac{x-a}{1-(x-a)}$ ist (EULER'sche Formel), und zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots$ sogar durch denselben Prozess gelangen. Dieser Prozess besteht in der successiven Anwendung der Identität

$$(15) \quad \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \varphi(\nu)\Delta\psi(\nu) = \varphi(\alpha+n\delta)\psi(\alpha+n\delta) - \varphi(\alpha)\psi(\alpha) - \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \psi(\nu+\delta)\Delta\varphi(\nu),$$

welche Herr MARKOFF als die Formel der partiellen Summation bezeichnet.[1] Doch schreiben wir im Folgenden die Potenzreihe (1) immer in der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, da sonst einige Ausdrücke wegen der darin auftretenden Differenzen ziemlich schwerfällig würden.

Um die EULER'sche Formel durch successive Anwendung der Identität (15) zu erhalten, hat man in derselben $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\psi(\nu) = \frac{z^\nu}{z-1}$ und daher $\Delta\psi(\nu) = z^\nu$ zu setzen.

Es ergibt sich dann aus derselben die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \varphi(\nu) = \frac{z}{1-z}\varphi(1) - \frac{z^n}{1-z}\varphi(n) + \frac{z}{1-z}\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta\varphi(\nu).$$

Wendet man nun diese Identität auf die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta a_\nu, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^{m-1} a_\nu$$

---

[1] *Differenzenrechnung*, übers. v. FRIESENDORFF u. PRÜMM, 1896, p. 101. — Über diese Beziehung der Methode der Mittelwerte zur EULER'schen Formel und die daraus sich ergebende Verwandlung der Mittelwerte (5) in n-fach unendliche Reihen MITTAG-LEFFLER's vergleiche man auch die Aufsätze des Verfassers: *Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes*, Monatshefte f. Math. u. Phys., XII, 1901; *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Leffler's n-fach unendliche Reihen*, ebenda, XIV, 1903.

an, indem man der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich a_ν, Δa_ν, ..., $\Delta^{m-1} a_\nu$ setzt, so erhält man ein System von m Gleichungen, aus dem sich ergibt[1]

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^{\nu-1} a_1 + \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^m a_\nu - \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^\nu a_n$$

$$= P + Q + R.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung convergiert nun, wenn m und n genügend gross genommen werden, für alle Werte von x, für welche die Reihe

$$(17)\qquad F(x) = a_0 + a_1\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta a_1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^n + \ldots$$

convergiert, und nur für diese Werte von x und sein Grenzwert ist gleich dem Grenzwerte dieser Reihe. Um dies zu zeigen, stellen wir die rechte Seite von (16) durch folgende Doppelreihe dar

---

[1] Markoff, ebenda, p. 180 u. 102. — In derselben Weise wie bei dem im Texte behandelten Falle kann man auch in dem etwas allgemeineren Falle, wo $z = \dfrac{at}{1+t}$ und daher $t = \dfrac{z}{a-z}$ ist, falls a eine positive reelle Grösse bezeichnet, durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zur Gleichung (14) gelangen. Durch diese Substitution erhält man nämlich für $F(x)$ die Darstellung

$$F(x) = a_0 + a_1 a \frac{z}{a-z} + \Delta_a a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^2 + \Delta_a^2 a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^3 + \ldots$$

wo

$$\Delta_a^\nu a_1 = a^{\nu+1} a_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} a^\nu a_\nu + \binom{\nu}{2} a^{\nu-1} a_{\nu-1} - \ldots + (-1)^\nu a a_1$$

ist. Man hat daher, um zu dieser Darstellung durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zu gelangen, nur zu beachten, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu a^\nu \left(\frac{z}{a}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu z'^\nu \text{ ist.}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad P+Q+R= \\
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_1+z^2\Delta a_2+\ldots+z^n\Delta a_n\right]-\frac{z^n a_n}{1-z} \\
&\qquad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_2+z^2\Delta a_3+\ldots+z^n\Delta a_{n+1}\right]-\frac{z^{n+1}\Delta a_n}{(1-z)^2} \\
&\qquad\qquad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_3+z^2\Delta a_4+\ldots+z^n\Delta a_{n+2}\right]-\frac{z^{n+2}\Delta^2 a_n}{(1-z)^3} \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_m\left(\frac{z}{1-z}\right)^m+\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_m+z^2\Delta a_{m+1}+\ldots+z^n\Delta a_{n+m-1}\right]-\frac{z^{n+m-1}\Delta^{m-1}a_n}{(1-z)^{n+m}}.
\end{aligned}
\right.
\tag{18}
$$

Lässt man in dieser Doppelreihe m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so ist sie äquivalent der dem Ausdrucke P entsprechenden Doppelreihe

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{\nu-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad a_\mu\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu+\ldots+\binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
\right.
\tag{19}
$$

die nach dem Früheren für alle Werte von x, für welche die Reihe (17) convergiert, zu demselben Grenzwert wie diese Reihe convergiert. Denn zunächst ergibt sich, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von (19) der dem Ausdruck Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null convergiert. Für diese Werte von x ist nämlich

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{m+\nu} \Delta^{m+\nu-1} a_1 \right| < \varepsilon,$$

falls $m > g_1$, $n > g_2$ ist. Verwandelt man dieses Restglied in die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_1 \left[\frac{z}{1-z} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + (-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right] \\ \qquad\quad \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_2 \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + \binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right] \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad \left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu \Delta^\mu a_\mu \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu + \ldots + \binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right] \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

so sieht man, dass der Grenzwert dieser Doppelreihe auch gleich ist dem Grenzwerte $\lim\limits_{m,n=\infty} Q$. Daher ist für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert $\lim\limits_{m,n=\infty} Q = 0$, und es convergiert somit für diese Werte von x auch der dem Ausdrucke Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null. Ferner convergiert bei genügend grossem n der Ausdruck R für alle Werte von x innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe (17) zum Grenzwerte Null; denn derselbe entsteht durch Anwendung der Euler'schen Transformation auf das Restglied

$$z^{n-1}(a_n z + a_{n+1} z^2 + \ldots).$$

Es convergiert daher für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert, auch die Doppelreihe (18) zu demselben Grenzwerte wie (19). Endlich folgt umgekehrt aus der Convergenz der Doppelreihe (18) auch die Convergenz von (19), da dann der den Termen Q und R entsprechende Theil der Doppelreihe (19) als Restglied derselben zum Grenzwert Null convergiert. Es ist somit die durch Anwendung der partiellen Summation entstehende Doppelreihe (18) der durch Substitution sich ergebenden Doppelreihe (19) äquivalent, und man kann daher die EULER'sche Formel auch durch Anwendung der partiellen Summation erhalten.

Um in analoger Weise mittels der Formel der partiellen Summation auch zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ zu gelangen, führen wir Functionen $\gamma_r(t)$ ein, von denen wir vorläufig nur voraussetzen, dass für jedes beliebige ganzzahlige positive r, — $\lim r = +\infty$ nicht ausgeschlossen —, $\lim\limits_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r}$ gleichmässig zum Grenzwert Null convergiere. Zufolge dieser Voraussetzung ist dann

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r} = 1$$

und es convergiert die Reihe $\lim\limits_{t=+\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu a_\nu z^\nu$ gleichmässig zum Grenzwerte $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Setzt man nun in (15)

$$\alpha = 1, \qquad \delta = 1, \qquad \psi(\nu) = -\frac{\gamma_r(t)}{r}\left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^{\nu-1}$$

und daher

$$\Delta\psi(\nu) = \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu,$$

so folgt daraus die Gleichung

$$\text{(20)} \qquad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \varphi(\nu) =$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\frac{\gamma_r(t)}{r}\{\varphi(1)-\varphi(n)\} + \frac{\gamma_r(t)}{r} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \Delta\varphi(\nu)\right].$$

Um nun zunächst zum Mittelwerte m_1 zu gelangen, wenden wir diese Formeln auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^\nu a_\nu z^\nu, \quad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^\nu \Delta(a_\nu z^\nu), \ \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$a_\nu z^\nu\,,\quad \Delta(a_\nu z^\nu)\,,\quad \ldots,\quad \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem sich, wenn wir die Producte

$$\gamma_1(t)\,,\ \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\,,\ \ldots,\ \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\ldots\gamma_m(t)$$

der Kürze wegen mit $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bezeichnen, die Gleichung ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu =$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\lfloor\underline{\nu}}\Delta^{\nu-1}(a_1 z)+\frac{k_m}{\lfloor\underline{m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu\Delta^m(a_\nu z^\nu)-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\lfloor\underline{\nu}}\Delta^{\nu-1}(a_n z^n)\right].$$

Drückt man in dieser Gleichung die Differenzen $\Delta^{\nu-1}(a_{\mu+1}z^{\mu+1})$ durch die Differenzen $\Delta^\nu s_\mu$ der Partialsummen der Potenzreihe (1) aus und bezeichnet k_0 eine Funktion von t von der Beschaffenheit, dass

$$\lim_{t=+\infty} k_0 = 1$$

ist, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = \tag{21}$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{m}\frac{k_\nu}{\lfloor\underline{\nu}}\Delta^\nu s_0+\frac{k_m}{\lfloor\underline{m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu\Delta^{m+1}s_{\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\lfloor\underline{\nu}}\Delta^\nu s_{n-1}\right]$$

$$= H + I + K,$$

von der man zum Mittelwerte m_1 in analoger Weise gelangt wie von der Gleichung (16) zur Euler'schen Formel. Man erhält nämlich für den Ausdruck H, indem man m zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, die Doppelreihe

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} s_0\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \cdots\cdots + (-1)^\nu \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \cdots\right] \\ \qquad s_1\left[k_1 - k_2 + \cdots\cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \cdots\right] \\ \qquad\quad \frac{s_2}{\underline{|2}}\left[k_2 - \cdots\cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \cdots\right] \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \frac{s_\mu}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \cdots + (-1)^{\nu-\mu} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \cdots\right] \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

in der die Reihe der Zeilensummen für genügend grosse Werte von t schon den Mittelwert m_1 darstellt, falls

$$\frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - k_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \cdots\right] = \frac{c_m(t)}{\varphi(t)} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

ist.

Bevor wir zum Nachweis übergehen, dass sich der Ausdruck auf der rechten Seite von (21), wenn m und n genügend gross genommen werden, auf die Doppelreihe (22) zurückführen lässt, haben wir daher noch zu untersuchen, ob man einen Mittelwert m_1 durch eine solche Doppelreihe darstellen kann.[1] Damit dies der Fall ist, muss vor allem für $\lim t = +\infty$ das Gleichungssystem bestehen

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{k_n}{\underline{|n}} \cdots = p_0 \\ \qquad k_1 - k_2 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{k_n}{\underline{|(n-1)}} \cdots = p_1 \\ \qquad \frac{1}{\underline{|2}}\left[k_2 - \cdots\cdots + (-1)^{n-2} \frac{k_n}{\underline{|(n-2)}} \cdots\right] = p_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - \cdots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \cdots\right] = p_m \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

---

[1] In dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ ist, sieht man unmittelbar, dass dies zutrifft; denn man hat dann nur in m_1 für e^{-t} die Reihe $1 - t + \frac{t^2}{\underline{|2}} \cdots$ einzusetzen.

wo der Kürze wegen $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} = p_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gesetzt ist. Denkt man sich die Ausdrücke auf beiden Seiten dieses Gleichungssystems nach Potenzen von t entwickelt, so ist dasselbe identisch erfüllt, wenn die Coefficienten jeder Potenz von t auf beiden Seiten desselben einander gleich sind und die Reihen auf der linken Seite für $\lim t = +\infty$ gleichmässig convergieren. Um Functionen k_r zu finden, welche diesem Gleichungssystem genügen, stellen wir daher die k_r durch Potenzreihen mit unbestimmten Coefficienten dar und bestimmen dann dieselben dadurch, dass wir die Coefficienten von t^ν ($\nu = \ldots, 1, 2, 3, \ldots$) auf beiden Seiten von (23) einander gleich setzen. Setzt man demnach

$$k_r = \sum_{(\nu)} k_r^{(\nu)} t^\nu \qquad {\scriptstyle (r=0,1,2,\ldots)} \tag{24}$$

und entwickelt man auch die Functionen p_s nach Potenzen von t, so dass

$$p_s = \sum_{(\nu)} \pi_s^{(\nu)} t^\nu \qquad {\scriptstyle (s=0,1,2,\ldots)} \tag{25}$$

ist, so erhält man auf diese Weise zur Bestimmung der Functionen k_r Gleichungssysteme von der Form

$$\left\{\begin{array}{l}
k_0^{(\nu)} - k_1^{(\nu)} + \frac{k_2^{(\nu)}}{\underline{|2}} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|n}} \ldots = \pi_0^{(\nu)} \\
\qquad k_1^{(\nu)} - k_2^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-1)}} \ldots = \pi_1^{(\nu)} \\
\qquad \frac{1}{\underline{|2}}\left[k_2^{(\nu)} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-2)}} \ldots\right] = \pi_2^{(\nu)} \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m^{(\nu)} - \ldots + (-1)^{n-m} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-m)}} \ldots\right] = \pi_m^{(\nu)} \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{26}$$

Da nun die $c_\nu(t)$ und infolge dessen auch die $\pi_s^{(\nu)}$ als bekannt vorausgesetzt sind, so stellt (26) ein unendliches lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten $k_r^{(\nu)}$ dar. Wegen der Beschaffenheit seiner Determinante gehört dasselbe zur Classe derjenigen unendlichen Gleichungssysteme, von denen CAZZANIGA am Schlusse seiner Arbeit *Sui determinanti d'ordine infinito*[1] bewiesen hat, dass sie immer ein und nur ein endliches Lösungssystem $k_r^{(\nu)}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzen, das zugleich so beschaffen ist, dass die Reihen auf der linken Seite von (26) absolut convergieren. Durch die Gleichungssysteme (26) lassen sich somit für alle in Betracht kommenden Werte von r und ν die $k_r^{(\nu)}$ und daher auch die k_r aus den gegebenen $\pi_s^{(\nu)}$ bestimmen.

Nachdem so für die k_r Reihen gefunden sind, welche formal dem Gleichungssystem (23) genügen, haben wir noch nachzuweisen, dass sowohl diese Reihen als auch die Reihen

$$(27) \qquad \frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s - k_{s+1} \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right], \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

für $\lim t = +\infty$ gleichmässig convergieren. Zu diesem Zwecke bilden wir die Doppelreihe

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_1)} - k_{s+1}^{(\nu_1)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_1)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_1} \\
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_2)} - k_{s+1}^{(\nu_2)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_2)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_\mu)} - k_{s+1}^{(\nu_\mu)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_\mu)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_\mu} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

indem wir ν dieselben Werte durchlaufen lassen wie in der Reihe (25), so dass wir als Reihe ihrer Zeilensummen die Reihe (25) erhalten. Nach dem eben verwendeten Satze von CAZZANIGA convergieren in dieser Doppelreihe die Zeilen absolut; ebenso convergiert nach den über die $c_\nu(t)$ ge-

[1] Ann. di matem., ser. II, t. 26, (1897), p. 216.

machten Annahmen für $\lim t = +\infty$ die Reihe ihrer Zeilensummen absolut. Daher convergieren für $\lim t = +\infty$ auch die Colonnen und die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe absolut und es ist der Grenzwert der letzteren Reihe gleich dem Grenzwerte der Reihe der Zeilensummen. Somit sind für $\lim t = +\infty$ die aus den Lösungen der Gleichungssysteme (26) für die k_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ sich ergebenden Reihen absolut convergent und die Reihen (27) gleichmässig convergent und es genügen die zuerst genannten Reihen wirklich dem Gleichungssysteme (23).

Dazu, dass sich ein Mittelwert m_1 durch eine Doppelreihe darstellen lässt, welche man in derselben Weise wie die Doppelreihe (22) durch Anwendung der partiellen Summation erhalten kann, ist aber ausserdem noch nothwendig, dass die dem Gleichungssystem (23) genügenden Functionen k_r für $\lim t = +\infty$ dasselbe Verhalten zeigen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r, d. h. für $\lim t = +\infty$ muss $k_0 = 1$ sein und die Quotienten $\dfrac{k_r}{rk_{r-1}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ müssen zum Grenzwert $+\infty$ convergieren. Dies ist auch in der That der Fall. Denn zunächst ergibt sich leicht, dass man aus den Gleichungssystemen (26) für k_0 immer eine Reihe von solcher Beschaffenheit erhalten kann, dass $\lim\limits_{t=+\infty} k_0 = 1$ ist, da sowohl der Grenzwert als auch der Convergenzbereich von m_1 unabhängig davon ist, welche Werte eine endliche Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$ annimmt. Ist die aus (26) für k_0 sich ergebende Reihe nicht schon von vornherein von dieser Beschaffenheit, so kann man daher die Abänderung der endlichen Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$, welche nothwendig ist, um dies zu erreichen, ausführen, ohne dass dadurch der Grenzwert oder der Convergenzbereich von m_1 geändert wird. Um auch zu zeigen, dass in den Reihen (27) die Quotienten $\dfrac{k_r}{rk_{r-1}}$ für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwert $+\infty$ convergieren, gehen wir von der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Voraussetzung 3) aus, vermöge welcher

$$(28) \qquad \lim_{t=+\infty} \frac{c_r(t)}{c_{r-1}(t)} = \lim_{t=+\infty} \frac{p_r}{p_{r-1}} = +\infty \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

ist. Da nun die Reihen (27) die Eigenschaft haben, dass die r^{te} $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ aus der $r - 1^{\text{ten}}$ dadurch entsteht, dass man die Glieder der letzteren der Reihe nach mit

$$\frac{k_r}{rk_{r-1}}, \frac{k_{r+1}}{rk_r}, \ldots, \frac{k_{r+s}}{rk_{r+s-1}}, \ldots$$

multipliciert, so müssen diese Quotienten zufolge (28) von einem bestimmten $r+s^{\text{ten}}$ an zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Setzt man wie früher

$$\frac{k_r}{k_{r-1}} = \gamma_r(t)$$

und bezeichnen m und n zwei verschiedene positive ganze Zahlen, so ist daher für $m < r < n$

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r} = +\infty,$$

während dies für $r = 1, 2, \ldots, m$ und $r = n, n+1, \ldots, n+\nu_r, \ldots$, wo n beliebig gross sein kann, noch nachgewiesen werden muss. Um den letzteren Fall zu erledigen, setzen wir $n + \nu_r = n'$. Es ist dann für genügend grosse Werte von n

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'-\nu_r} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'\left(1-\frac{\nu_r}{n'}\right)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'} = +\infty.$$

Was den ersten Fall betrifft, folgt zwar aus der Beziehung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{p_1}{p_0} = +\infty,$$

dass die Ausdrücke

$$\frac{\gamma_{\nu_1}(t)}{\nu_1}, \frac{\gamma_{\nu_1+1}(t)}{\nu_1+1}, \ldots$$

für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Doch kann man über das Verhalten der noch übrigen endlichen Anzahl von Ausdrücken

$$(29) \qquad \gamma_1(t), \frac{\gamma_2(t)}{2}, \ldots, \frac{\gamma_{\nu_1-1}(t)}{\nu_1-1}$$

aus dem Verhalten des Grenzwertes $\lim\limits_{t=+\infty} \frac{p_1}{p_0}$ allerdings nichts schliessen. Es können jedoch die $c_\nu(t)$ schon von vornherein so beschaffen sein, dass auch diese letzteren Ausdrücke für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Im andern Falle ist wieder eine entsprechende Abänderung einer endlichen Anzahl von Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, um aus den Gleichungssystemen (26) für $k_0, k_1, \ldots, k_{s_1}$ Reihen von solcher Beschaffenheit zu erhalten, dass die Quotienten (29) für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Es ist daher allgemein für $r = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$$\lim_{t=+\infty} \frac{k_r}{r k_{r-1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r} = +\infty$$

und es genügen somit die aus den Gleichungen (26) und (24) für die k_r sich ergebenden Reihen denselben Bedingungen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r.

Führt man nun in m_1 für die Functionen $\frac{c_s(t)}{\varphi(t)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ die Reihen (27) ein, so geht m_1 schon in die Reihe der Zeilensummen einer Doppelreihe (22) über. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_1 auch die diesem Mittelwerte entsprechende Doppelreihe zum Grenzwerte m_1 convergiert, da aus denselben Gründen wie bei den früheren Doppelreihen auch bei einer Doppelreihe (22) aus der Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen die Convergenz der Doppelreihe folgt. Es kann aber der Convergenzbereich einer einem Mittelwert m_1 entsprechenden Doppelreihe (22) auch nicht grösser sein als der von m_1. Da nämlich für $\lim t = +\infty$ die Zeilen einer solchen Doppelreihe (22) convergieren, so folgt aus der Convergenz der Doppelreihe die Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen und somit die Convergenz von m_1.

Nachdem nachgewiesen ist, dass man einen Mittelwert m_1 immer durch eine Doppelreihe (22) ersetzen kann, so ergibt sich jetzt leicht, dass man von einer Potenzreihe (1) zum Mittelwerte m_1 durch Anwendung der Formel der partiellen Summation gelangen kann. Denn der durch Anwendung dieser Formel erhaltene Ausdruck auf der rechten Seite von (21) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, und nur für diese Werte und es ist dann sein Grenzwert gleich dem Grenzwerte der Doppelreihe (22). Um dies zu zeigen, verwandeln wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (21) in die Doppelreihe

$$
(30)\left\{\begin{aligned}
& s_0\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} + \dots + (-1)^m \frac{k_m}{\underline{|m}}\right] + (-1)^m \frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_0 + \dots + \Delta s_{n-1}] \\
& \qquad\qquad - s_{n-1}\left[-k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \frac{k_3}{\underline{|3}} + \dots + (-1)^m \frac{k_m}{\underline{|m}}\right] \\
& s_1\left[k_1 - k_2 + \dots + (-1)^{m-1} \frac{k_m}{\underline{|(m-1)}}\right] + \binom{-2}{m-1} \frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_1 + \dots + \Delta s_n] \\
& \qquad\qquad - s_n\left[k_1 - k_2 + \frac{k_3}{\underline{|2}} - \dots + (-)^{m-1} \frac{k_m}{\underline{|(m-1)}}\right] \\
& \frac{s_2}{\underline{|2}}\left[k_2 - \dots + (-1)^{m-2} \frac{k_m}{\underline{|(m-2)}}\right] + \binom{-3}{m-2} \frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_2 + \dots + \Delta s_{n+1}] \\
& \qquad\qquad - \frac{s_{n+1}}{\underline{|2}}\left[0 + k_2 - k_3 + \dots + (-1)^{m-2} \frac{k_m}{\underline{|(m-2)}}\right] \\
& \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& s_m \frac{k_m}{\underline{|m}} + \frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_m + \dots + \Delta s_{n+m}] - \frac{s_{n+m-1}}{\underline{|m}}[0 + 0 + 0 + \dots + k_m]
\end{aligned}\right.
$$

und lassen m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen. Der aus dem Ausdrucke H entstandene Theil dieser Doppelreihe geht dann in die Doppelreihe (22) über, während die den Termen I und K entsprechenden Theile derselben den Charakter von Restgliedern besitzen und somit im Convergenzbereiche von (30) zum Grenzwerte Null convergieren. Es convergiert daher für alle Werte von t und x, welche dem Convergenzbereiche der Doppelreihe (30) angehören, auch die Doppelreihe (22), und es ist der Grenzwert der Doppelreihe (30) gleich dem Grenzwerte von (22). Setzt man umgekehrt voraus, dass die Doppelreihe (22) convergiert, so folgt daraus, dass in demselben Bereiche auch die Doppelreihe (30) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt. Zunächst ergibt sich nämlich, dass dann der aus dem Terme K entstandene Theil von (30) zum Grenzwert Null convergiert; denn man erhält diesen Theil der Doppelreihe (30) aus dem Restgliede $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu$ der Potenzreihe (1) auf dieselbe Weise wie die Doppelreihe (22) aus (1). Es convergiert aber auch der dem Ausdrucke I entsprechende Theil der Doppelreihe (30) für alle Werte von t und x im Convergenzbereiche von (22) zum Grenzwerte Null. Man erhält nämlich, indem man die Reihe der Zeilensummen dieses Theiles der Doppelreihe (30) bildet, für I den Ausdruck

$$I = \frac{k_m}{\underline{|m}} (\Delta^m s_n - \Delta^m s_0).$$

Lässt man in diesem Ausdrucke m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so stellt derselbe die Differenz der Restglieder von zwei convergenten Doppelreihen dar, und es ist daher $\lim\limits_{m,n=\infty} I = 0$. Da somit für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, auch das Restglied der Doppelreihe (30) zum Grenzwerte Null convergiert, so sind diese beiden Doppelreihen einander äquivalent. Daraus folgt unmittelbar, dass man den Mittelwert m_1 der Partialsummen der Potenzreihe (1) in analoger Weise wie die Euler'sche Formel durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) erhalten kann.

Um jetzt auch von dem Mittelwerte m_1 zum Mittelwerte m_2 durch Anwendung der partiellen Summation zu gelangen, stellen wir m_1 durch die Reihe (4) dar und wenden dann die Formel (20) auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^{\nu} \Delta m_1(\nu-1)\,,\ \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^{\nu} \Delta^2 m_1(\nu-1)\,,\ \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^{\nu} \Delta^m m_1(\nu-1)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$\Delta m_1(\nu-1)\,,\ \Delta^2 m_1(\nu-1)\,,\ \ldots,\ \Delta^m m_1(\nu-1)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem die Gleichung folgt

$$m_1(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \Delta m_1(\nu-1) =$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(0) + \frac{k_m}{\underline{|m}} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right) \Delta^{m+1} m_1(\nu-1) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(n-1) \right].$$

In derselben Weise wie früher ergibt sich wieder, dass für $\lim m = +\infty$,

$\lim n = +\infty$ der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die Doppelreihe

$$
\begin{array}{l}
m_1(0)\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \ldots\right] \\
\qquad m_1(1)\left[k_1 - k_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad \frac{m_1(2)}{\underline{|2}}\left[k_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{m_1(\mu)}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \ldots + (-1)^{\nu-\mu} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

ersetzt werden kann. Setzt man in dieser Doppelreihe für die k_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ wieder die aus den Gleichungen (26) und (24) sich ergebenden Werte ein, so convergiert sie in demselben Bereiche wie m_2 und es ist ihr Grenzwert gleich m_2. In derselben Weise, wie sich der Ausdruck m_1 in den Ausdruck m_2 transformieren lässt, kann man durch Anwendung der partiellen Summation jetzt auch von m_2 zu m_3 übergehen und so beliebig fortfahren. Wir erhalten somit als Resultat dieser Untersuchung, dass man von der Potenzreihe (1) zu den Mittelwerten der Kette (5) auch gelangt, indem man ebenso wie oben bei der Einführung der EULER'schen Formel davon ausgeht, dass man durch die Verwandlung einer Reihe in eine unendliche Doppelreihe einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereich erhalten kann, und dann solche Doppelreihen mittels der Formel der partiellen Summation herstellt.

Diese Art der Einführung der Mittelwerte (5) hat aber nicht nur die Eigenschaft, dass man dadurch diese Mittelwerte auf demselben Wege wie die EULER'sche Formel erhält, ohne dass es dabei nothwendig ist, den Begriff des Mittelwertes einzuführen, sondern es lassen sich die unendlichen Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) und die Mittelwerte (5) erhält, auch leicht in die

Doppelreihen verwandeln, durch welche diese Mittelwerte im Paragraph 1 dargestellt wurden. Um dies zu erreichen, hat man nämlich in den Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation erhält, nur für

$$\frac{1}{\underline{|\nu}}\left(k_\nu - k_{\nu+1} + \frac{k_{\nu+2}}{\underline{|2}} - \dots\right), \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

wieder die Ausdrücke $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}$ einzusetzen und dagegen die Ausdrücke s_ν, $m_1(\nu)$, $m_2(\nu)$, ... in der Form von Reihen anzuschreiben. Es erscheint daher auch die Anwendung der Formel der partiellen Summation als eine Methode, wenn auch eine sehr specielle, um eine Potenzreihe (1) in einen Ausdruck von der Form (11) oder (12) zu verwandeln.