PROBLÈMES DANS LA THÉORIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

PAR

W. J TRJITZINSKY

à Urbana, Ill., E. U. A.

Table des matières

1. Introduction

Nous développons dans l'ouvrage actuel quelques problèmes dans la théorie des systèmes dynamiques; dans la majeure partie notre point de vue est topologique. Pourtant dans la section 13 nous présentons, dans des hypothèses métriques, certains résultats ergodiques, sans supposition de l'existence d'une mesure invariante.

Nous tirons parti des méthodes topologiques, que M. Denjoy avait introduites, avec tant de succès, dans l'analyse mathématique; *nous renvoyons à son livre* (D) [1].

Nous supposons que l'espace D de mouvement est situé dans l'espace euclidien U_r (à r dimensions). On considère un *groupe continu de transformations* $F(M, t)$ $(=M')$, M, M' représentant des points dans D et t étant un paramètre continu, $-\infty < t < +\infty$:

$$F(M, 0) = M, \quad F(F(M, \tau), t) = F(M, t+\tau);$$

ou bien on considère un *groupe discret de transformations*

$$F(M, n) = M^{[n]} \qquad (n \text{ entier}).$$

Dans les sections 3–10 D est invariant par $F(M,t)$; dans section 13 D est invariant par $F(M,t)$, sauf à mention contraire. Dans les sections 11, 12 on suppose seulement que D est invariant par $F^{[1]}=F(M,1)$ (et $F^{[-1]}=F(M,-1)$), c'est-à-dire, par les transformations d'un groupe discret.

D est fermé (dans U_r), *possiblement non-borné* [«fermé (dans U_r) à distance finie» selon la locution dans (D; p. 89)], sauf à mention contraire, *dans les sections* 4–12. Dans la section 13 D peut être non-fermé dans U_r et non-borné.

Dans tous les cas $F(M,t)$ $[F(M,n)=M^{[n]}]$, pour t fixe [pour n entier fixe], varie continûment avec le point M dans D. Dans tous les développements, où interviennent les 'ensemble-trajectoires' (voir Définition 4.1 et le texte à la suite de cette définition), *le long desquelles on a un mouvement d'un 'ensemble-mobile' $G(M,t)$ $(\ni M)$, nous supposons que $F(M,t)$ varie continûment avec (M,t),* c'est-à-dire que

$$M_j \to M',\ t_j \to t' \text{ entraîne } F(M_j,t_j) \to F(M',t').$$

Dans les sections 3, 4 $P, \subset D$, est parfait (dans U_r). On introduit stabilité $(\ast; E(M,\lambda))$ (où $(\ast)$ est $(+)$, ou $(-)$, ou $(+,-)$), selon Définition 2.6. Ce genre de stabilité devient celle de Poisson pour $\lambda=0$. Moyennant ces espèces de stabilité on définit les variétés de stabilité (3.4 a), (3.4 b), (3.4 c) [(3.7 a), (3.7 b)], pour lesquelles on a les résultats (3.5) [(3.8)]; dans ceux-ci on constate que, si sur P on a la stabilité du genre considéré, il s'ensuit que cette stabilité a lieu dans un sens d'uniformité, soit sur P, soit sur toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe d'un ensemble fermé et non-dense sur P.

Dans la section 4 nous introduisons les ensemble-trajectoires $G(M,t)$

$$(-\infty < t < +\infty),$$

$G(M,t)$ étant l'ensemble-mobile au temps t, et nous considérons les ensembles limités $L(M)$, $L_f(M)$, $L_c(M)$. On note ques les conditions (4.5 a)–(4.5 f), sur P, équivalent à (4.5 $\bar{\text{a}}$)–(4.5 $\bar{\text{f}}$), sur P, les équivalences [(4.5 d)$\leftrightarrow$(4.5 $\bar{\text{d}}$)], [(4.5 f)–(4.5 $\bar{\text{f}}$)] étant établies dans la section 5. On envisage la *stabilité spécialement à $E(M)$* [$E(M)$ fermé, variant continûment avec M sur P, $\subset D$, parfait; $E(M) \subset G(M,0)$] selon Définition 4.19, ainsi que la *stabilité au sens fort* (Définition 4.20) *relativement à $E(M)$*. On considère aussi la *stabilité relativement à $E(M)$* $(\subset G(M,0))$ d'après Définition 4.25, ainsi que la *stabilité complète relativement à $E(M)$*. L'alternative de stabilité d'une espèce considérée s'appelle l'instabilité de la même espèce. Dans (4.21), (4.22) on suppose que sur P il y a stabilité (ou instabilité) d'un certain genre $(\ast)$; on conclut qu'il existe alors un ensemble $K, \subset P$, (pouvant être vide), fermé et non-dense sur P, tel que la stabilité $(*)$ (ou l'instabilité $(*)$) est uniforme d'un sens ou d'un autre sur toute portion $\bar{\omega}$ de P disjointe de K. En outre, dans (4.24), (4.26) on constate que stabilité d'un genre $(*)$ sur P entraîne que la stabilité de ce genre ait lieu quasi-uniformément sur P.

Les exemples 5.4, 5.5 montrent la nécessité de la considération spéciale du cas d'inclusion $L^+(M) \supset E(M)$. Dans (5.8) on introduit les décompositions de type $-(\delta)$; moyennant telles décompositions on formule (Théorème 5.9) les conditions nécessaires et suffisantes pour que $L^+(M) \supset E(M)$. Ceci se rattache à la stabilité relativement à $E(M)$. Dans Théorème 5.13 on suppose que les ensemble-trajectoires $G(M, t)$ sont stables $(+)$ relativement à $E(M)$ $(\subset G(M, 0))$ sur P; on conclut que pour tout $\delta > 0$ $E(M)$ possède une décomposition de type $-(\delta)$, telle que la stabilité, relativement à chaque composant, est quasi-uniforme à δ près sur P.

Dans Théorème 6.5 on montre que si $G(M, t)$ est stable $(+)$ complètement pour M sur un ensemble partout dense dans D, il en résulte qu'il existe un résiduel sur lequel la même sorte de stabilité a lieu; selon Théorème 6.10, dans les conditions de Théorème 6.5 et de Remarque 6.12, il existe un résiduel R' tel que, pour M sur R', $G(M, t)$ a stabilité $(-)$ (vers les t infinis négatifs) par rapport à $G(M, 0)$ [(6.6)–(6.6b)]. Théorème 6.16 présente un résultat, analogue à Théorème 6.5, pour le cas de stabilité $(+)$ (Définition 6.4). Dans Théorème 7.15 nous supposons que $G(M, t)$ est stable $(+)$ sur un ensemble M_n partout dense dans D; si $d(G(M_n, t))$ (diamètre de $(\ldots)$) $\to 0$ pour $t \to +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe un résiduel, en tout point M duquel $G(M, t)$ est stable $(+)$ ainsi que stable $(-)$, spécialement à $G(M, 0)$ (Définition 4.19).

Dans Remarque 7.17 nous indiquons le lien entre les théorèmes 6.5, 6.10, 6.16, 7.15 et les résultats (4.12), (4.15), (4.21), (4.22), (4.24), (4.26) et Théorème 5.13.

La section 8 se rattache à la stabilité de Liapounoff (Définition 8.3); selon Théorème 8.6, si le mouvement est stable $(t_0, +\infty; L)$ relativement à chaque trajectoire ponctuelle $C(M_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, les M_n étant partout denses dans D, il s'ensuit que sur un résiduel le mouvement est faiblement Liapounoff-stable (au sens de (8.6a)).

Soit $E(H)$ la réunion des ensembles $G(M, 0)$, M décrivant l'ensemble H. A la manière de M. Denjoy (D; p. 152 sq.) nous définissons une classe (C) d'ensembles fermés qui contiennent des ensembles parfaits (9.3; 1°, 2°, 3°). La classe (C_0) (9.4) consiste des ensembles parfaits P, tels que $E(P) \in (C)$. Dans (9.7) $E \in (C)$ et $W(E)$ est l'ensemble pour lequel on a (9.7a); alors $W(E)$ est partout dense sur le noyau parfait $N(E)$ de E. Selon Théorème 9.8, si P et toutes les portions de $P \in (C_0)$, alors l'ensemble $E^*(P)$ (comme spécifié dans ce théorème) est partout dense sur P.

$(\bar{C})$ (9.12) est une modification de la classe (C); $(\bar{C}_0)$ (9.13) est une modification correspondante de (C_0); d'après (9.14), si $E \in (\bar{C})$, $W(E)$ sera un résiduel de $N(E)$.

Dans la section 10 nous introduisons la définition fondamentale (10.1) d'une classe (C^*). Moyennant cette définition nous fondons notre raisonnement sur la pénétration dans tel ensemble donné d'avance, dans le cas d'ensemble-trajectoires. Selon Théorème 10.2, si $P \in (C^*)$, les ensembles $W_1^*(P)$, $W_2^*(P)$, définis dans ce théorème, seront partout denses sur P; un résultat analogue, sans condition (10.1 c, 1°), se trouve dans Théorème 10.4. Définition 10.5 présente une modification $(\bar{C}^*)$ de (C); d'après Théorème 10.6, si $P \in (\bar{C}^*)$, les ensembles $W_1^*(P)$, $W_2^*(P)$, $W_{1,-}^*(P)$, définis dans (10.2), (10.4), seront des résiduels de P.

Dans Définition 11.1 il s'agit des récurrences (I^+), (II^+), qui se rattachent aux ensembles H, $E(H)$ (H relativement ouvert); les notions des points errants (I^+), (II^+) sont introduites dans (11.2, 2a); selon (11.5, 6) l'ensemble $W(\mathrm{I}^*)$ de points errants (I^*) dans R invariant est invariant et ouvert dans R. La stabilité-GP^+, au sens généralisé de Poisson, est présentée dans Définition 11.9. Théorème 11.12 constate que, $R(\subset D)$ étant invariant, compact (fermé dans U_r et borné) et $R_1(\mathrm{I}^+)$, étant l'ensemble de points non-errants (I^+) dans R, il résulte que tout mouvement $M^{[n]}$ errant (I^+) dans R reste seulement un temps fini hors de $R_1(\mathrm{I}^+;\varepsilon)$ (l'ensemble de points de R à distance moins de ε de $R_1(\mathrm{I}^+)$). Le centre (I^+) de mouvements (Définition 11.14), $R(\mathrm{I}^+)$, est non-vide si D est compact; ce centre $R(\mathrm{I}^*)$ contient le centre ordinaire, selon G. D. Birkhoff. $R(\mathrm{I}^+)$ contient les trajectoires $\{M^{[n]}\}$ stables-GP^+ (11.17); il y a récurrence (I^+) dans $R(\mathrm{I}^+)$, si $D \in (D^*)$ (11.18). Dans (11.19) on constate que l'ensemble $W_1^*(P)$ (défini à la manière de $W_1^*(\ldots)$ dans Theorème 10.2) est identique avec l'ensemble $GP^+(R)$ de points de R stables-GP^+ dans R. Selon Théorème 11.21, si D est compact, les points M stables-GP^+ sont partout denses dans le centre $R(\mathrm{I}^+)$ et, en effet (Théorème 11.23), ces points forment un résiduel de $R(\mathrm{I}^+)$.

Dans les sections 11, 12, en particulier, nous était utile un livre de V. V. Nemietsky et V. V. Stepanoff, ***désigné dans la suite par*** (NS) [2]. La section 12 se rattache aux considérations aléatoires et au centre (I^+) d'attraction; ce sont des développements du genre présenté par M. Hilmy [voir, par exemple, (NS; p. 393–395)]; les résultats principaux se trouvent dans Théorème 12.3, Théorème 12.7 [où il s'agit de centre (I^+) faible d'attraction de mouvement $G(M, j)$ (Définition 12.6)], (12.8).

Dans la section 13 nous procédons sous Hypothèse 13.1 métrique et nous admettons la condition métrique de M. Denjoy (D; p. 152, 153), soit dans la forme (13.3), soit dans la forme (13.3^c). Le résultat principal est Théorème 13.10 ergodique, où on ne suppose pas qu'une mesure invariante existe et où l'ensemble exceptionnel est au plus de mesure Borel-Lebesgue nulle. La preuve de ce théorème est partiellement modelée d'après celle, que M. Khintchine (*voir son article* (K) [3]) a donnée pour démontrer le théorème ergodique de G. D. Birkhoff [4].

Enfin remarquons que beaucoup de développements de notre ouvrage peuvent être formulés et établis dans divers espaces métriques.

2. Généralisations de la stabilité de Poisson

Dans la section actuelle D, situé dans un espace euclidien U_r, est l'espace d'un mouvement $F(M, t)$; D est invariant par $F(M, t)$; $F(M, t)$ pour tout t fixe varie continûment avec le point $M\ (\in D)$. Un ensemble 'parfait' voudra dire 'parfait dans U_r'. Designons par $C(M)$ la trajectoire passant par M.

(2.1) *La stabilité de Poisson* de la trajectoire $C(M)$ consiste en ce qu'il existe une suite positive $t_1, t_2, \ldots$ croissante vers $+\infty$, ou bien une suite negative décroissante vers $-\infty$, telle que $F(M, t_n) \to M$.

Dans (D; p. 96) on trouve l'énoncé; «si l'ensemble des points M, dont la trajectoire est stable pour les t infinis positifs, est partout dense sur D, l'ensemble des points de D, dont la trajectoire est stable à la fois vers les t infinis positifs et vers les t infinis négatifs, est un résiduel de D».

Disons qu'il y a *stabilité* $(+)$ (*ou bien* $(-)$) de Poisson selon qu'il existe une suite positive $(t_n) \to +\infty$ (ou bien une suite négative $(t_n) \to -\infty$), telle que $F(M, t_n) \to M$; s'il y a stabilité $(+)$, ainsi que stabilité $(-)$, nous dirons qu'il y a stabilité $(+, -)$.

L'alternative à la conclusion du théorème dans (D; p. 196) est que l'ensemble $S_{+,-}$ des points de D, dont la trajectoire est stable $(+, -)$ n'est pas un résiduel de D, c'est-à-dire que $D - S_{+,-}$ n'est pas *gerbé* (définitions dans (D; p. 137, 138)) sur D; donc $D - S_{+,-}$ est *inexhaustible* sur D; pour tout point M de $D - S_{+,-}$ la trajectoire n'est pas stable $(+)$, ou bien n'est pas stable $(-)$, le signe pouvant varier avec M sur $D - S_{+,-}$.

L'alternative à l'hypothèse dans le théorème dans (D; 196) est la suivante: l'ensemble des points M dont la trajectoire est stable $(+)$ n'est pas partout dense sur D.

Donc le théorème dans (D; p. 196) équivaut à l'énoncé suivant.

(2.2) *Si pour tout point d'un ensemble inexhaustible sur D la trajectoire n'est pas stable, au moins dans une direction, il existe un intervalle (à r-dimensions, ouvert) i, $\subset D$, pour chaque point duquel la trajectoire n'est pas stable* $(+)$.

Comme dans (D; p. 196), soit

$$d(M,t) = |F(M,t) - M| \tag{2.3}$$

la distance entre les points $F(M,t)$, M. Pour t fixe $d(M,t)$ est continu en M dans D. Soit P, $\subset D$, un ensemble parfait (dans U_r) et $h^+(M)$ l'ensemble des valeurs limites de $d(M,t)$ pour t tendant vers $+\infty$. Comme une conséquence du théorème générale topologique de M. Denjoy (D; p. 174, 175), on aboutit au résultat suivant.

(2.4) *Supposons qu'il y a dans P un ensemble de points M_n partout denses sur P et des valeurs t_n (de t) tendant vers $+\infty$ de sorte que, pour $n \to +\infty$*:

(2.4a) ou bien $\quad d(M_n, t_n) \to \lambda \quad$ (fini ou infini),

(2.4b) ou bien $\quad \overline{\lim}\, d(M_n, t_n) \leqq \lambda \quad$ (fini),

(2.4c) ou bien $\quad \underline{\lim}\, d(M_n, t_n) \geqq \lambda \quad$ (fini);

alors *dans les cas respectifs il existe un résiduel R de P tel que en tout point M de R*:

(2.4a′) ou bien $h^+(M)$ contient λ (c'est-à-dire, correspondant à M il existe une suite $t(j)$, $\to +\infty$ avec j, telle que $d(M, t(j)) \to \lambda$, quand $j \to +\infty$),

(2.4b′) ou bien $\quad \underline{\lim}_{t \to +\infty}\, d(M,t) \leqq \lambda,$

(2.4c′) ou bien $\quad \overline{\lim}_{t \to +\infty}\, d(M,t) \geqq \lambda.$

Puisque $d(M,t) \geqq 0$, nous prenons $\lambda \geqq 0$. En posant $M'_n = F(M_n, t_n)$, on obtient $M_n = F(M'_n, -t_n)$, donc $d(M_n, t_n) = d(M'_n, -t_n)$; si $P = D$ (donc D est parfait dans U_n), *la fermeture Q de l'ensemble $M'_1, M'_2, \ldots$ sera contenue dans P.* Tous les points isolés (s'il y en a) de Q sont parmi les M'_n $(n = 1, 2, \ldots)$; si de plus le noyau parfait $N(Q)$ de Q existe (n'est pas vide), en désignant par M'_{n_k} les M'_n qui se trouvent sur $N(Q)$, dans les cas respectifs (2.4a), (2.4b), (2.4c) on aura (pour $k \to +\infty$ et avec $n_k \to +\infty$):

(2.4A) ou bien $\quad d(M'_{n_k}, -t_{n_k}) \to \lambda \quad$ (fini ou infini),

(2.4B) ou bien $\quad \overline{\lim}\, d(M'_{n_k}, -t_{n_k}) \leqq \lambda \quad$ (fini),

(2.4C) ou bien $\quad \underline{\lim}\, d(M'_{n_k}, -t_{n_k}) \geqq \lambda \quad$ (fini).

Or, les M'_n étant partout denses sur Q, les M'_{n_k} sont partout denses sur $N(Q)$ parfait; soit $h^-(M)$ l'ensemble des valeurs limites de $d(M,t)$, quand M reste fixe et $t\to-\infty$; en tenant compte de (2.4)–(2.4 c') on conclut ainsi:

(2.5) Soit $P=D$ et envisageons les hypothèses (2.4)–(2.4 c); si on outre le noyau parfait $N(Q)$ de la fermeture de l'ensemble $M'_n=F(M_n,t_n)$ n'est pas vide, *dans les cas respectifs* (2.4 a), (2.4 b), (2.4 c) *il existe un résiduel R' de $N(Q)$, de sorte qu'en tout point M de R'*:

(2.5 A') ou bien $h^-(M)$ contient λ (c'est-à-dire, il existe une suite $t'(j)$, $\to-\infty$ avec $-j$, telle que $d(M,t'(j))\to\lambda$ pour $j\to-\infty$),

(2.5 B') ou bien $$\underline{\lim}_{t\to-\infty} d(M,t)\leqq\lambda,$$

(2.5 C') ou bien $$\overline{\lim}_{t\to-\infty} d(M,t)\geqq\lambda;$$

de plus, *dans les conditions de* (2.5) *il existe un résiduel R^* de $N(Q)$ tel que, dans les cas respectifs* (2.4 a), (2.4 b), (2.4 c), *en tout point M de R^* on aura:*

(2.5 A*) ou bien $h^+(M)$ contient λ et $h^-(M)$ contient λ [ainsi il existe des suites $t(j)$, $\to+\infty$, $t'(j)$, $\to-\infty$ (pour $j\to+\infty$), telles que $d(M,t(j))\to\lambda$, $d(M,t'(j))\to\lambda$],

(2.5 B*) ou bien $$\underline{\lim}_{t\to+\infty} d(M,t)\leqq\lambda \quad\text{et}\quad \underline{\lim}_{t\to-\infty} d(M,t)\leqq\lambda,$$

(2.5 C*) ou bien $$\overline{\lim}_{t\to+\infty} d(M,t)\geqq\lambda \quad\text{et}\quad \overline{\lim}_{t\to-\infty} d(M,t)\geqq\lambda.$$

On note que pour R^* on peut prendre $R'\cdot(RN(Q))$. En effet, R étant un résiduel de P, il s'ensuit que

$$R=P-\Sigma E_n,\quad RN(Q)=N(Q)-\Sigma E_n N(Q),$$

où E_n $(n=1,2,\ldots)$ est non-dense sur P; si ξ est un point de $N(Q)$, donc de P (puisque $N(Q)\subset P$), et si r est un segment (à r dimensions) contenant ξ à l'intérieur, on trouvera un segment r' dans r dépourvu de points de E_n (E_n étant non-dense sur P), donc dépourvu de points de $E_nN(Q)$; par là $E_nN(Q)$ est non-dense sur $N(Q)$, $\Sigma E_nN(Q)$ est une gerbe de $N(Q)$, $RN(Q)$ est un résiduel de $N(Q)$; R' étant un résiduel de $N(Q)$ et un produit de résiduels étant un résiduel, il en sera de même pour R^*.

Considérons l'énoncé (2.4–2.4 c'). Dans l'hypothèse (2.4 a), avec $\lambda=0$, on conclut qu'en tout point M de R on a $d(M,t(j)\to 0$ pour une suite $t(j)$, dépendant de M et tendant vers $+\infty$; mais *cela signifie la stabilité* (+) *de la trajectoire* $C(M)$. Vu que $d(M,t)$ est toujours non-negatif, le cas (2.4b), avec $\lambda=0$, ne présente rien de nouveau; pour la même raison l'hypothèse (2.4c), où $\lambda=0$, est dépourvue d'intérêt.

DÉFINITION 2.6. Soit $\lambda\geqq 0$ et soit $S(M,\lambda)$ la sphère fermée de centre M et de rayon λ; désignons par $E(M,\lambda)$ un ensemble sur la surface de $S(M,\lambda)$; nous dirons que *la trajectoire $C(M)$ d'un point donné M possède la stabilité* $(+; E(M,\lambda))$, si chaque point N de $E(M,\lambda))$, est un point d'accumulation de $F(M,t)$, quand $t\to+\infty$ [donc il existe une suite $t(j)$, dépendant de N, M et tendant vers $+\infty$, telle que $F(M,t(j)\to N$, cela étant pour tout $N\in E(M,\lambda)$]. On définit de la même façon *la stabilité* $(-; E(M,\lambda))$, qui est pour le cas de $t\to-\infty$; au cas qu'il y a les deux genres de stabilité, de la sorte indiquée, nous dirons que la trajectoire $C(M)$ du point M a la *stabilité* $(+,-; E(M,\lambda))$.

On observe que *la stabilité* $(+)$, *ou* $(-)$, *ou* $(+,-)$, *au sens de Poisson est le cas particulier de la stabilité* $(+; E(M,\lambda))$, *etc.; c'est le cas où* $\lambda=0$.

Quand l'espace D n'est pas borné, il se peut que $\lambda=+\infty$. Alors $E(M,\infty)$ peut être envisagé comme un ensemble de points à l'infini, les différents points de $E(M,\infty)$ pouvant être distingués l'un de l'autre par les différentes demi-droites issues de M, suivant lesquelles ces points sont approchés. Correspondant à $E(M,\infty)$ il y a un ensemble $E(M,1)$ dont les points sont les intersections de la surface de la sphère unité, $S(M,1)$, avec les demi-droites que nous venons de mentionner. Plus précisément, si la trajectoire $C(M)$ d'un point donné M a *la stabilité* $(+, E(M,\infty))$ et si $E(M,1)$ est l'ensemble correspondant *à* $E(M,\infty)$ sur la surface de $S(M,1)$, alors à tout point N de $E(M,1)$ il correspond une suite $t(j)$ (dépendant de M, N et tendant vers $+\infty$) de sorte que le point $F(M,t(j)$ tende vers l'infini, tandis que le point Q_j, où la demi-droite issue de M et passant par $F(M,t(j))$ coupe la surface de $S(M,1)$, tend vers N.

Considérons encore les résultats (2.4–2.4c′). Dans l'hypothèse (2.4a), où

$$0<\lambda\leqq+\infty,$$

il existe un résiduel R de P tel qu'en tout point M de R $d(M,t(j)\to\lambda$ pour une suite $t(j)\to+\infty$; si λ est fini, il existe un ensemble (non-vide $E(M,\lambda)$ sur la surface de $S(M,\lambda)$, qui est l'ensemble de points d'accumulation de $F(M,t)$ pour t tendant vers $+\infty$; dans ce cas donc $C(M)$ possède la *stabilité* $(+, E(M,\lambda))$. Dans l'hypothèse (2.4a), avec $\lambda=+\infty$, on a $d(M,t(j)\to+\infty$ pour une suite $t(j)\to+\infty$; alors les points Q_j d'intersection de la surface de $S(M,1)$ et des demi-droites, issues de M et qui passent par les $F(M,t(j))$ $(j=1,2,\ldots)$, ces points Q_j ont au moins un point d'accumulation N_0; donc dans ce cas la trajectoire $C(M)$ possède la *stabilité*

$(+, E(M, \infty))$, l'ensemble $E(M, 1)$, correspondant à $E(M, \infty)$, contenant au moins le point N_0.

Dans l'hypothèse (2.4 b) $(0 < \lambda < +\infty)$ *en tout point* M *d'un résiduel* R *de* P *on a* (2.4 b′)

$$0 \leqq \alpha = \alpha(M) = \varliminf_{t \to +\infty} d(M, t) \leqq \lambda;$$

d'après le raisonnement donné plus haut on observe que $C(M)$ $(M \in R)$ *possède la stabilité* $(+, E(M, \alpha))$ (pour un certain ensemble $E(M, \alpha)$ sur la surface de $S(M, \alpha)$; *si* $\alpha > 1$, *il s'ensuit qu'il n'y a pas de stabilité* $(+, E(M, \mu))$ *pour aucun ensemble* $E(M, \mu)$ *et pour aucun* μ, *tel que* $0 \leqq \mu < \alpha$.

Dans le cas (2.4 c), *avec* $0 < \lambda < +\infty$, pour tout M d'un résiduel R de P on a (2.4 c′):

$$\beta = \beta(M) = \varlimsup_{t \to +\infty} d(M, t) \geqq \lambda;$$

donc $C(M)$ possède la *stabilité* $(+, E(M, \beta))$ et $C(M)$ n'a pas de stabilité $(+, E(M, \nu))$ pour $\beta < \nu \leqq +\infty$ (au cas que $\beta < +\infty$).

En tenant compte de (2.5)–(2.5 C*) et des résultats dans le texte qui suit (2.5 C*), nous sommes menés à l'énoncé que voici.

(2.7). Envisageons les hypothèses (2.4)–(2.4 c), avec $P = D$; supposons que le noyau parfait $N(Q)$ de la fermeture Q de l'ensemble $M'_n = F(M_n, t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ n'est pas vide; désignons les ensembles $E(M, \lambda)$ (Définition 2.6), qui correspondent à $t \to +\infty$ et à $t \to -\infty$, par $E^+(M, \lambda)$ et par $E^-(M, \lambda)$, respectivement; *il existe un résiduel* R^* *de* $N(Q)$ *de sorte qu'en tout point* M *de* R^* *on a les conclusions suivantes:*

(2.7 a) dans le cas (2.4 a), avec $\lambda = 0$, la trajectoire $C(M)$ du point M est stable $(+, -)$; dans le cas (2.4 a), où $0 < \lambda \leqq +\infty$, $C(M)$ est stable $(+, E^+(M, \lambda))$, ainsi que $(-, E^-(M, \lambda))$;

(2.7 b) dans l'hypothèse (2.4 b) $(0 < \lambda < +\infty)$ il existe sur R^* deux fonctions

$$\alpha^+ = \alpha^+(M), \quad \alpha^- = \alpha^-(M) \quad (0 \leqq \alpha^+, \alpha^- \leqq \lambda)$$

de façon que $C(M)$ est simultanément

(2.7 b′) $\qquad$ stable $(+, E^+(M, \alpha^+))$, stable $(-, E^-(M, \alpha^-))$;

$C(M)$ n'est pas stable $(+, E^+(M, \mu))$ pour aucun ensemble $E^+(M, \mu)$ et pour aucun μ, tel que $0 \leqq \mu < \alpha^+$ (si $\alpha^+ > 0$); $C(M)$ n'est pas stable $(-, E^-(M, \mu))$ pour aucun $E^-(M, \mu)$ et aucun $0 \leqq \mu < \alpha^-$ (si $\alpha^- > 0$);

(2.7 c) dans le cas (2.4 c), avec $0<\lambda<+\infty$, il existe sur R^* deux fonctions

$$\beta^+=\beta^+(M), \quad \beta^-=\beta^-(M)\,(\beta^+, \beta^-\geqq\lambda)$$

de sorte que $C(M)$ est à la fois

(2.7 c') $\qquad$ stable $(+, E^+(M,\beta^+))$, stable $(-, E^-(M,\alpha^-))$;

il n'y a pas de stabilité $(+, E^+(M,\nu))$ pour $\beta^+<\nu\leqq+\infty$ (si $\beta^+<+\infty$); il n'y a pas de stabilité $(-, E^-(M,\nu))$ pour $\beta^-<\nu\leqq+\infty$ (si $\beta^-<+\infty$).

Si, par exemple, les ensembles $E^+(M,\lambda)$, $E^-(M,\lambda)$ dans (2.7 a) ont un point N en commun, on observe que N est à distance λ de M et que pour des suites $t^+(j), \to+\infty$, $t^-(j), \to-\infty$, on a

(2.8) $$F(M,t^+(j))\to N, \quad F(M,t^-(j))\to N.$$

3. Généralisations de la stabilité de Poisson (suite)

Selon le Corollaire (D; p. 176) on a l'énoncé suivant.

(3.1) λ étant une constante finie ou infinie, $\geqq 0$, soient:

(3.1 a) $H(P,\lambda)$ l'ensemble de points M de P où $h^+(M)$ (voir le texte qui précède (2.4)) contient λ fini;

(3.1 b) $H_1(P,\lambda)$ l'ensemble où $\quad \lambda\leqq \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, d(M,t)$;

(3.1 c) $H_2(P,\lambda)$ l'ensemble où $\quad \lambda\geqq \underline{\lim_{t\to+\infty}}\, d(M,t) \quad (\lambda<+\infty)$;

alors, si un de ces ensembles est partout dense sur P, c'est un résiduel de P.

On note que (3.1 a) équivaut à ce qu'il existe une suite t_j, dépendant de $M\,(\in H(P,\lambda))$ et tendant vers $+\infty$, telle que $d(M,t_j)\to\lambda$, c'est-à-dire (3.1 a) équivaut è l'énoncé:

(3.1 ā) $H(P,\lambda)$ est l'ensemble de points M, tels que $C(M)$ est stable $(+, E(M,\lambda))$ (avec $0\leqq\lambda<+\infty$).

D'autre part (3.1 b) équivaut à la constatation suivante:

(3.1 $\bar{\text{b}}$) $H(P,\lambda)$ est l'ensemble sur lequel est définie une fonction $\beta(M)$, $\geqq\lambda$ ($\geqq 0$), pouvant prendre la valeur $+\infty$, de sorte que pour tout point M sur cet ensemble la trajectoire $C(M)$ est stable $(+, E(M,\beta(M)))$ et n'est pas stable $(+, E(M,\nu))$ pour $\nu>\beta(M)$ (si $\beta(M)<+\infty$).

Pareillement (3.1 c) revient à l'énoncé:

(3.1 $\bar{c}$) $H_2(P, \lambda)$ ($\subset P$) est l'ensemble où est définie une fonction $0 \leqq \alpha(M) \leqq \lambda (< +\infty)$, de façon que pour tout M, $\in H_2(P, \lambda)$, $C(M)$ est stable $(+, E(M, \alpha(M)))$ et n'est pas stable $(+, E(M, \mu))$ pour $0 \leqq \mu < \alpha(M)$ (si $\alpha(M) > 0$).

L'équivalence de (3.1 a) et (3.1 $\bar{a}$) est assez evidente. Quant à (3.1 b) et (3.1 $\bar{b}$) on note que (3.1 b) entraîne (3.1 $\bar{b}$), comme une conséquence de la définition de la stabilité $(+, E(\ldots))$. D'autre part (3.1 $\bar{b}$) doit impliquer (3.1 b); en effet, au cas contraire il existe un point M_0 de $H_1(P, \lambda)$ ($H_1(P, \lambda)$ étant défini d'après (3.1 $\bar{b}$)), tel que

$$\lambda > \overline{\lim_{t \to +\infty}} \, d(M_0, t);$$

mais $\beta(M_0) \geqq \lambda$ et par conséquent $C(M_0)$ est stable $(+, E(M_0, \beta(M_0))$ et $C(M_0)$ n'est pas stable $(+, E(M, \nu))$ pour $\nu > \beta(M_0)$; on a $\beta(M_0) > \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \, d(M_0, t)$; d'autre part, il est évident qu'il n'y a pas de stabilité $(+, E(M_0, \nu))$ pour $\nu > \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \, d(M_0, t)$; on aboutit à une contradiction. Tout pareillement on montre l'équivalence de (3.1 c) et de (3.1 $\bar{c}$).

En vertu des considérations qui précèdent on conclut ainsi.

(3.2) *Soit* λ ($\geqq 0$) *une constante finie ou infinie; définissons les sous-ensembles*

$$H(P, \lambda), \; H_1(P, \lambda), \; H_2(P, \lambda)$$

de l'ensemble P, $\subset D$, *parfait* (*dans* U_r), *respectivement d'accord avec* (3.1 $\bar{a}$), (3.1 $\bar{b}$), (3.1 $\bar{c}$); *si un de ces trois ensembles est partout dense sur* P, *c'est un résiduel de* P.

On pourrait examiner, de la manière indiquée, la stabilité à la fois au sens $(+E, (\ldots))$ et au sens $(-, E(\ldots))$.

Considérons maintenant le théorème topologique inverse (D; p. 199), se rattachant aux relations fermées. En vertu de ce théorème on peut faire l'énoncé suivant.

(3.3) Soit P, $\subset D$, parfait (dans U_r); supposons que, λ ($\geqq 0$) étant une constante finie ou infinie, en tout point M de P on a:

(3.3 a) ou bien $\quad d(M, t) \to \lambda \quad$ (pour $t \to +\infty$),

(3.3 b) ou bien $\quad \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \, d(M, t) \leqq \lambda \quad (< +\infty)$,

(3.3 c) ou bien $\quad \underline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \, d(M, t) \geqq \lambda \quad$ (fini, positif);

il existe alors un ensemble $K(P, \varepsilon)$ (pouvant être vide), fermé et non-dense sur P, tel qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P, \varepsilon)$, il correspond $\eta = \eta(\omega, \varepsilon)$, > 0, fini, de sorte que *l'inégalité* $t \geqq \eta(\omega, \varepsilon)$ *entraîne pour tout* M *sur* $\bar{\omega}$

(3.3 ā) dans le cas (3.3 a):

$$|d(M,t)-\lambda|<\varepsilon \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad d(M,t)>\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{si } \lambda=+\infty),$$

(3.3 $\bar{\text{b}}$) dans le cas (3.3 b): $\quad d(M,t)<\lambda+\varepsilon,$

(3.3 c̄) dans le cas (3.3 c): $\quad d(M,t)>\lambda-\varepsilon,$

Nous allons interpréter les conditions (3.3 a)–(3.3 c) et les conclusions (3.3 ā)–(3.3 $\bar{\text{b}}$), en prenant le point de vue de stabilité de trajectoires.

On note que *les trois conditions* (3.3 a), (3.3 b), (3.3 c) *équivalent respectivement à ce qu'en tout point* M *de* P:

(3.4 a) ou bien $C(M)$ a la stabilité $(+, E(M,\lambda))$ et $C(M)$ n'a pas de stabilité $(+, E(M,\nu))$ pour $\nu \neq \lambda$ (ici $0 \leqq \lambda \leqq +\infty$);

(3.4 b) ou bien sur P il existe une fonction $\alpha(M)$, telle que $0 \leqq \alpha(M) \leqq \lambda$ (λ fini), de sorte que $C(M)$ est stable $(+, E(M, \alpha(M)))$ et $C(M)$ n'est pas stable $(+, E(M,\nu))$ pour $\nu > \alpha(M)$ (donc, en particulier, pour $\nu > \lambda$);

(3.4 c) ou bien sur P il existe une fonction $\beta(M)$, telle que $\beta(M) \geqq \lambda$ (fini, >0) de façon que $C(M)$ est stable $(+, E(M, \beta(M)))$ et que $C(M)$ n'est pas stable $(+, E(M,\nu))$ pour $\nu < \beta(M)$; donc, en particulier, $C(M)$ n'est pas stable $(+, E(M,\nu))$ pour $0 \leqq \nu < \lambda$.

Si $K(P,\varepsilon)$ est vide, les conclusions (3.4 a)–(3.4 c) auront lieu sur P. En employant de langage de stabilité, on conclut comme il suit.

(3.5) *Supposons que l'un (le même pour tout point) des trois genres de stabilité* (3.4 a), (3.4 b), (3.4 c) *a lieu sur* P, $\subset D$, *parfait (dans* U_n*). Alors, pour tout* $\varepsilon>0$, *dans* P *il existe un ensemble* $K(P,\varepsilon)$ *(possiblement vide), fermé et non-dense sur* P, *de sorte que dans les cas respectifs il y a sur toute portion* $\bar{\omega}$ *de* P, *disjointe* $K(P,\varepsilon)$, *la stabilité, de la sorte correspondante, «uniformément à* ε *près».*

Précisons la stabilité, des genres indiqués, 'uniformément à ε près'.

(3.5 a) *Quand il y a de stabilité sur* P *d'accord avec l'hypothèse* (3.4 a), on aura sur $\bar{\omega}$ une des inégalités dans (3.3 ā) (selon que λ soit fini ou infini) pour $t \geqq \eta(\omega,\varepsilon)$; si λ fini est positif et $\varepsilon \leqq \lambda$, le mobile $M' = F(M,t)$ reste pour M sur ω et pour $t \geqq \eta(\omega,\varepsilon)$ dans l'anneau ouvert sphérique

$$A(M;\, \lambda-\varepsilon,\, \lambda+\varepsilon) = \{\lambda-\varepsilon < |M'-M| < \lambda+\varepsilon\};$$

si $\lambda=0$, on aura M' dans la sphère ouverte $\{|M'-M|<\varepsilon\}$ pour M sur $\bar{\omega}$ et $t \geqq \eta(\omega,\varepsilon)$;

$$|M' - M| > \frac{1}{\varepsilon} \quad (M \in \bar{\omega},\ t \geqq \eta(\omega, \varepsilon)).$$

(3.5 b) *Considérons le cas de stabilité sur P selon* (3.4 b). Alors (en vertu de (3.3 $\bar{\text{b}}$)) le mobile $M' = F(M, t)$ reste dans la sphère ouverte $|M' - M| < \lambda + \varepsilon$ (si $M \in \bar{\omega}$ et $t \geqq \eta(\omega, \varepsilon)$).

(3.5 c) *Dans le cas de stabilité sur P d'accord avec* (3.4 c), d'après (3.3 $\bar{\text{c}}$) on voit que M' reste dans le domaine $\{|M' - M| > \lambda - \varepsilon\}$ (si $0 < \varepsilon \leqq \lambda$) pour M sur $\bar{\omega}$ et pour $t \geqq \eta(\omega, \varepsilon)$.

En tenant compte du théorème topologique inverse (D; p. 208) (relativement aux inégalités ouvertes) on conclut comme il suit.

(3.6) λ étant une constante, si pour tout M sur P on a

(3.6 a) soit $$\overline{\lim_{t \to +\infty}}\, d(M, t) < \lambda \quad (0 < \lambda \leqq +\infty),$$

(3.6 b) soit $$\underline{\lim_{t \to +\infty}}\, d(M, t) > \lambda \quad (0 \leqq \lambda < +\infty),$$

il s'ensuit qu'il existe un ensemble $K(P)$ (possiblement vide), $\subset P$, fermé et non-dense sur P, tel qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P)$, il correspond $\gamma(\bar{\omega}) > 0$, $\eta(\bar{\omega}) > 0$ de sorte que *l'inégalité $t > \eta(\bar{\omega})$ entraîne sur $\bar{\omega}$*, dans les cas respectifs

(3.6 $\bar{\text{a}}$) $$d(M, t) < \lambda - \gamma(\bar{\omega}) \quad (\text{si } 0 < \lambda < +\infty,\ \gamma(\bar{\omega}) \text{ étant inférieur à } \lambda),$$

$$d(M, t) < \frac{1}{\gamma(\bar{\omega})} \quad (\text{si } \lambda = +\infty),$$

(3.6 $\bar{\text{b}}$) $$d(M, t) > \lambda + \gamma(\bar{\omega}) \quad (0 \leqq \lambda < +\infty).$$

Les hypothèses (3.6 a), (3.6 b) équivalent respectivement aux constatations suivantes:

(3.7 a) il existe sur P une fonction $\beta(M)$, telle que $0 \leqq \beta(M) < \lambda$ $(0 < \lambda \leqq +\infty)$, de sorte que pour tout M sur P $C(M)$ est stable $(+, E(M, \beta(M)))$ et $C(M)$ n'est pas stable $(+, E(M, \nu))$ pour $\nu > \beta(M)$ (donc, en particulier, pour $\nu \geqq \lambda$); (3.7 b) il existe sur P une fonction $\alpha(M)$, telle que $\alpha(M) > \lambda$ $(0 \leqq \lambda < +\infty)$ et telle que pour tout M sur P $C(M)$ est stable $(+, E(M, \alpha(M)))$ et n'est pas stable $(+, E(M, \nu))$ pour $0 \leqq \nu < \lambda$ (si $\lambda > 0$).

Par suite de (3.6)–(3.7 b) on est mené à l'énoncé suivant.

(3.8) *Supposons que l'un et le même des deux genres de stabilité* (3.7 a), (3.7 b) *a lieu sur P.* Alors il existe un ensemble $K(P)$ (qui peut être vide), $\subset P$, fermé et non-dense sur P, de façon qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de P, il correspond $\gamma(\bar{\omega})>0$, $\eta(\bar{\omega})>0$, de sorte que *les inégalités* $+\infty>t>\eta(\bar{\omega})$ *entraînent que sur* $\bar{\omega}$, *dans les cas respectifs :*

(3.8 a) le mobile $M'=F(M,t)$ reste dans la sphère ouverte $\{|M'-M|<\lambda-\gamma(\bar{\omega})\}$, si $0<\lambda<+\infty$, et M' reste dans la sphère $\{|M'-M|<1/\gamma(\bar{\omega})\}$, si $\lambda=+\infty$;

(3.8 b) M' reste dans le domaine $\{|M'-M|>\lambda+\gamma(\bar{\omega})\}$, si $0\leqq\lambda<+\infty$.

On note que (3.8 a) *entraîne qu'il existe un ensemble* $e(\bar{\omega})$ (non-vide) de valeurs sur le segment $(0,\ \lambda-\gamma(\bar{\omega}))$, si $0<\lambda<+\infty$, et sur le segment $(0,\ 1/\gamma(\bar{\omega}))$, si $\lambda=+\infty$, *tel que pour* ν *sur* $e(\bar{\omega})$ *et* M *sur* $\bar{\omega}$ *la trajectoire* $C(M)$ *est stable* $(+, E(M,\nu))$ *dans un certain sens d'uniformité.* Il ne s'agit pas ici de l'uniformité de stabilité à ε près, $K(P)$ étant indépendant de ε. Dans le cas (3.8 b) $(0\leqq\lambda<+\infty)$ il y a un résultat analogue, $e(\bar{\omega})$ désignant un ensemble sur le segment $(\lambda+\gamma(\bar{\omega}),\ +\infty)$.

On peut obtenir des résultats semblables à ceux donnés plus haut, avec les stabilités aux sens $(+,\cdots)$, $(-,\cdots)$ ayant lieu à la fois pour les trajectoires de tous les points M considérés.

4. Stabilité d'ensemble-trajectoires

En essayant de faire des applications des résultats topologiques de M. Denjoy dans (D; p. 213–215) aux problèmes de stabilité, on note qu'il y a plusieurs façons pour réaliser cet objet. Dans (D; p. 213–215) il s'agit d'ensembles fermés (dans U_r) qui varient continûment avec un point M, qui se trouve sur un ensemble parfait P – au lieu d'envisager des fonctions continues de point M sur P.

$F(M,t)$ désignant encore la position du point-mobile au temps t sur la trajectoire $C(M)\,(M=F(M,0))$, *$F(M,t)$ variant continûment avec le point M $(\in D)$ et $D\,(\subset U_r)$ étant l'espace invariant par $F(M,t)$, fermé dans U_r possiblement non-borné, introduisons*

DÉFINITION 4.1. Soit $\mathfrak{M}=G(M,0)$, $\subset D$, fermé dans U_r et borné; $G(M,0)$ est défini pour tout point M dans D et $G(M,0)$ contient M; posons

$$G(M,t)=F(\mathfrak{M},t)=G(F(M,t),0) \tag{4.1 a}$$

$(-\infty<t<+\infty)$ et supposons que

$$G(M,0) \text{ varie continûment avec } M \text{ dans } D. \tag{4.1 b}$$

REMARQUE 4.1′. Si l'on considère un groupe discret de transformations $F(M,n)$, où n est entier, et si D, fermé (dans U_r) à distance finie, est invariant par les transformations de ce groupe, on pourrait assujettir $G(M, 0)$ aux conditions de Définition 4.1, en y remplaçant t par $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

On note que $G(M, t)$ contient le point $F(M, t)$; de plus (4.1 b) entraîne que, *pour t fixe, $G(M, t)$* (fermé dans U_r) *varie continûment avec le point M.* En effet, si $M \to M'$ ($\in D$), on aura $F(M, t) \to F(M', t)$; donc, en laissant $A \sim A'$ (où A' est invariable) signifier que l'écart mutuel [(4.4)] de A et de A' tend vers zéro, on obtient

$$G(M, t) = G(F(M, t), 0) \sim G(F(M', t), 0) = G(M', t), \qquad \text{d'où } G(M, t) \sim G(M', t).$$

Pour M fixe et t variant, *l'ensemble-mobile* $G(M, t)$ décrit le tube $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M, 0)$), $F(\mathfrak{M}, t)$ $(-\infty < t < +\infty)$, que nous appellerons son *ensemble-trajectoire.*

Les conditions de Définition 4.1 sont réalisées quand $G(M, 0) = M$ pour tout $M \in D$. *On peut donner des exemples où Définition* 4.1 *est réalisée sans que l'ensemble $G(M, 0)$ soit nécessairement réduit au point M pour tout M dans l'espace D considéré.* Nous laissons de côté le problème de conditions nécessaires et suffisantes pour que les conditions de Définition 4.1 puissent être satisfaites, sans que $G(M, 0) = M$ partout dans D.

En tant que la transformation ponctuelle $F(M, t)$ satisfasse à la propriété du groupe, on aura

$$G(M, t+\tau) = G(F(M, t), \tau) \tag{4.2}$$

pour toutes les valeurs réelles t, τ.

Soit $L^+(M)$ [$L^-(M)$] *l'ensemble de points d'accumulations de $G(M, t)$ pour $t \to +\infty$* [pour $t \to -\infty$], c'est-à-dire de l'ensemble-mobile au temps t. Définissons $L_f^+(M)$ [$L_f^-(M)$] comme *l'ensemble de points d'accumulation au sens fort de $G(M, t)$ pour $t \to +\infty$* [pour $t \to -\infty$], cela signifiant que $L_f^+(M)$ [$L_f^-(M)$] est l'ensemble de points N à chacun desquels on peut faire correspondre sur $G(M, t)$, pour tout $t \geqq t_0$ [pour tout $t \leqq t_0$], un point $N(t)$, tel que

$$N(t) \to N \qquad \text{quand } t \to +\infty \ [\text{quand } t \to -\infty].$$

$L^+(M)$ est l'ensemble de points N à chacun desquels une suite de valeurs t,

$$t_1 < t_2 < \cdots \to +\infty,$$

et de points correspondants $N_j, \in G(M, t_j)$, $(j = 1, 2, \ldots)$ existent, de sorte que $N_j \to N$ pour $j \to \infty$.

Si H est un sous-ensemble de $L^+(M)$ tel qu'il existe une suite $t_j, \to +\infty$, *indépendante de N*, tel qu'à tout point N de H il correspond sur $G(M, t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ un point N_j, de sorte que $N_j \to N$ (pour $j \to \infty$); dans ce cas nous désignerons H par

$L_c^+(M)$ et nous l'appellerons '*un ensemble d'accumulation complet*' de $G(M,t)$ pour $t \to +\infty$. Un ensemble composé d'un seul point de $L^+(M)$ est un ensemble $L_c^+(M)$. Dans la section 5 nous donnerons un exemple d'un sous-ensemble, composé de deux points de $L^+(M)$, qui n'est pas un ensemble $L_c^+(M)$ (si l'on suppose de $G(M,t)$ seulement que cet ensemble soit fermé et qu'il varie continûment avec le point M).

Dans tous les cas on a

$$L_f^+(M) \subset L_c^+(M) \subset L^+(M). \tag{4.3}$$

Les ensembles d'accumulation des espèces $L_f^+(M)$, $L_c^+(M)$ n'étaient pas considérés dans (D).

Soit $E(M)$, $\subset D$, *un ensemble fermé (dans U_r) variant continûment avec M sur P, $\subset D$, parfait* (dans U_r). Introduisons les fonctions

(4.4) $\delta(M,t) =$ distance de $G(M,t)$ et de $E(M)$, $= |G(M,t) - E(M)|$;

$h_1(M,t) =$ l'écart de $G(M,t)$ à $E(M)$; $h_2(M,t) =$ l'écart de $E(M)$ à $G(M,t)$;

$h(M,t) =$ l'écart mutuel de $G(M,t)$ et de $E(M)$.

Selon (D; p. 92) on peut considérer l'écart d'un ensemble A à un ensemble B de la manière suivante:

$$\text{écart } (A,B) = \max.\ (N \in A)\, \delta(N,B), \tag{4.4a}$$

où $\delta(N,B)$ est la distance du point N à l'ensemble B; $h(M,t)$ est le plus grand de $h_1(M,t)$ et de $h_2(M,t)$.

Dire que l'ensemble $G(M,t)$ varie continûment avec le point M revient à ce que l'écart mutuel de $G(M,t)$ et de $G(M,t)$, l'écart mutuel $(G(M,t), G(M_1,t))$, tend vers zéro quand $M_1 \to M$.

De la manière dont M. Denjoy l'a fait dans (D; p. 214), envisageons les diverses hypothèses suivantes.

Les Hypothèses 4.5. *Pour tous les M sur P, $\subset D$, parfait* (dans U_r) *on a:*

$$L^+(M)\,E(M) = 0 \quad \text{(vide)}; \tag{4.5a}$$

$$L^+(M)\,E(M) \neq 0 \quad \text{(non-vide)}; \tag{4.5b}$$

$$L^+(M) \subset E(M); \tag{4.5c}$$

$$L_f^+(M) \supset E(M); \tag{4.5d}$$

(4.5e) le cas où (4.5c) et (4.5d) ont lieu simultanément;

$$L_c^+(M) \supset E(M). \tag{4.5f}$$

Moyennant les fonctions (4.4) ces hypothèses sont correspondamment équivalentes aux conditions (pour $t \to +\infty$ et pour M sur P):

$$(4.5\,\bar{a}) \qquad \underline{\lim}\ \delta(M,t) > 0;$$

$$(4.5\,\bar{b}) \qquad \underline{\lim}\ \delta(M,t) = 0;$$

$$(4.5\,\bar{c}) \qquad \lim h_1(M,t) = 0;$$

$$(4.5\,\bar{d}) \qquad \lim h_2(M,t) = 0;$$

$$(4.5\,\bar{e}) \qquad \lim h(M,t) = 0;$$

$$(4.5\,\bar{f}) \qquad \underline{\lim}\ h_2(M,t) = 0.$$

Dans la section 5 nous établirons les équivalences

$$(4.5\,d) \leftrightarrow (4.5\,\bar{d}) \quad \text{et} \quad (4.5\,f) \leftrightarrow (4.5\,\bar{f});$$

en outre nous y considérons aussi le cas général où $L^+(M) \supset E(M)$.

DÉFINITION 4.6. Soient $O_1(M, \varepsilon)$ et $O_2(M, t, \varepsilon)$ respectivement les ensembles de points distants de $E(M)$ et de $G(M,t)$ $[= F(\mathfrak{M}, t)]$ de moins de ε.

De la même manière dont certaines conclusions étaient établies dans (D; p. 214, 215), comme des conséquences des hypothèses $1^\circ - 5^\circ$ (D; p. 214), nous sommes menés aux résultats suivants.

(4.7 a). Dans l'hypothèse (4.5 a) il existe un ensemble $K(P)$, $\subset P$, fermé et non-dense sur P de sorte qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P)$, deux nombres $\eta(\bar{\omega})$ (fini), $\gamma(\bar{\omega})$ (positif) correspondent, tels que l'inégalité $t > \eta(\bar{\omega})$ entraîne

$$\delta(M,t) = |G(M,t) - E(M)| > \gamma(\bar{\omega}) \qquad \text{pour } M \text{ sur } \bar{\omega};$$

$K(P)$ peut être vide.

Dans les hypothèses (4.5 c), (4.5 d), (4.5 e) il y un ensemble $K(P, \varepsilon)$ (vide ou non), $\subset P$, fermé et non dense sur P, de sorte qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P, \varepsilon)$, *il correspond un* $\eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$ *fini, tel que pour*

$$t > \eta(\bar{\omega}, \varepsilon) \ \textit{et pour}\ M \in \bar{\omega}$$

on a respectivement:

(4.7 c) *dans l'hypothèse* (4.5 c), $h_1(M,t) < \varepsilon$, c'est-à-dire l'ensemble $O_1(M, \varepsilon)$ (Définition 4.6) contient l'ensemble $G(M,t)$;

(4.7 d) *dans l'hypothèse* (4.5 d), $h_2(M,t) < \varepsilon$, donc l'ensemble $O_2(M,t,\varepsilon)$ contient l'ensemble $E(M)$;

(4.7 e) *dans l'hypothèse* (4.5 e) on a simultanément les conclusions de (4.7 c) et de (4.7 d):

$$O_1(M, \varepsilon) \supset G(M, t), \quad O_2(M, t, \varepsilon) \supset E(M).$$

Pour établir un lien entre les résultats (4.5–4.7 e) et les notions de stabilité considérons d'abord le cas où

(4.8) $$G(M, 0)\,[=\mathfrak{M}\ (4.1\,\mathrm{a})] = M = E(M);$$

l'ensemble-mobile au temps $t=0$ sera le point $M = G(M,0) = F(M,0)$; l'ensemble-mobile au temps t sera le point $M' = G(M,t) = F(M,t)$; l'ensemble-trajectoire de M $(=\mathfrak{M})$ sera la trajectoire $C(M)$ au sens ordinaire; les ensembles $L^+(M)$, $L^-(M)$, $L_f^+(M)$, $L_f^-(M)$, introduits plus haut, seront les ensembles de points d'accumulation de $F(M,t)$ pour $t\to+\infty$ et pour $t\to-\infty$, respectivement, soit au sens ordinaire, soit au sens fort; en nous rappelant les notions de *stabilité de Poisson* (de la trajectoire $C(M)$), c'est-à-dire de stabilité $(+)$, ou bien $(-)$, ou bien $(+, -)$ (voir le texte au commencement de la section 2), nous observons que *la stabilité* $(+)$, par exemple, pour une trajectoire $C(M)$ aura lieu quand pour le point M considéré on a

(4.8 f) $$L^+(M) \ni M \quad (\text{alors } M \text{ est un ensemble } L_c^+(M));$$

ceci veut dire, quand M est un point d'accumulation de $M' = F(M,t)$ pour $t\to+\infty$; (4.8 f) est précisement la condition (4.5 f), qui équivaut à l'hypothèse (4.5 $\bar{\mathrm{f}}$):

(4.8 $\bar{\mathrm{f}}$) $$\underline{\lim}_{t\to+\infty}\, h_2(M,t) = 0;$$

ici $h_2(M,t)$ est l'écart (4.4) du point $M' = F(M,t)$, autrement dit $h_2(M,t)$ est la distance $\delta(M,t) = |M - M'|$. Il est évident que dans le cas (4.8) l'hypothèse (4.8 f) (e.g. (4.8 $\bar{\mathrm{f}}$)) équivaut à l'hypothèse (4.5 b) (e.g. à (4.5 $\bar{\mathrm{b}}$)). Dans la suite *les cas* (4.5 b), (4.5 f) *seront examinés en s'appuyant sur le théorème de M. Denjoy dans* (D; p. 215).

Encore dans le cas (4.8) considérons l'hypothèse (4.5 $\bar{\mathrm{d}}$), c'est-à-dire ($h_2(M,t)$ étant $\delta(M,t)$):

(4.8 $\bar{\mathrm{d}}$) $$\lim_{t\to+\infty} |M - F(M,t)| = 0.$$

Or, au moins dans le cas où $F(M',t)$ possède dans D la propriété de continuité:

(4.9) $$M_n \to M',\ t_n \to t' \text{ entraîne } F(M_n, t_n) \to F(M, t'),$$

dans cette hypothèse de continuité *la relation* (4.8 $\bar{\mathrm{d}}$) *entraîne que* M *soit un point d'équilibre*; c'est-à-dire, que $F(M,t) = M$ pour tous les t. En effet on sait (Nemietsky et Stepanoff (NS; p. 351)) que, si $F(Q,t)\to M$ (pour $t\to+\infty$) pour un point Q, alors M sera un point d'équilibre. *Si* $G(M,0)=M=E(M)$ *sur* P, *la condition* $L_f^+(M)\ni M$ (*e.g.* 4.5 d) *implique que* P *consiste de points d'équilibre.*

L'hypothèse (4.5 c) dans le cas (4.8), à présent considéré, signifie que $L^+(M)=M$ sur P; ceci équivaut à la condition $L_f^+(M)=M$; nous venons d'indiquer que dans ce cas P est formé de points d'équilibre, L'hypothèse (4.5 e) au cas (4.8), est la réunion des hypothèses (4.5 c) et (4.5 d)

$$L^+(M)=M=L_f^+(M) \qquad (\text{sur } P);$$

ce cas donc ne présente rien de nouveau.

Envisageons maintenant l'hypothèse (4.5 a):

(4.10) l'ensemble $L^+(M)$ et le point M sont disjoints dès que M est sur P, c'est-à-dire, tout point d'accumulation de $M'=F(M,t)$, pour $t\to+\infty$, est distinct de M, pour tout M sur P; *cela veut dire que chaque trajectoire* $C(M)$ (M sur P) *n'est pas stable* $(+)$ *au sens de Poisson*—nous dirons $C(M)$ est '*instable* $(+)$' (au sens de Poisson).

DÉFINITION 4.11. Dans le cas d'un point-mobile M, $C(M)$ étant la trajectoire de $M'=F(M,t)$ $[F(M,0)=M;\ -\infty<t<+\infty]$, on dira que *l'instabilité* $(+)$ $[(-)]$ *est uniforme sur un ensemble* H, si des nombres γ (positif) et η (fini) existent tels que

$$|F(M,t)-M|>\gamma \text{ pour } t>\eta \qquad [t<\eta] \tag{4.11'}$$

pour tout M sur H; c'est-à-dire, si la distance de point M (sur H) à la partie de $C(M)$, pour laquelle $t>\eta$ $[t<\eta]$, reste supérieure à γ positif.

Dans le cas (4.5 a) (avec (4.8)) on a (4.10) et, selon l'énoncé (4.7 a), il existe un $K(P)$, $\subset P$, fermé et non-dense sur P, tel qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P)$, deux nombres $\eta(\bar{\omega})$ (fini) et $\gamma(\bar{\omega})$ (positif) correspondent, de sorte que l'inégalité $t>\eta(\bar{\omega})$ entraîne

$$|F(M,t)-M|>\gamma(\bar{\omega}) \qquad \text{partout sur } \bar{\omega}.$$

En tenant compte de Définition 4.11 on aboutit à la constatation suivante.

(4.12). *Si chaque trajectoire* $C(M)$ *pour* M *sur un ensemble* P, $\subset D$, *parfait* (*dans* U_r) *est instable* $(+)$ *(au sens de Poisson), un sous-ensemble* $K(P)$ *de* P, *fermé et non-dense sur* P, *existe tel que l'instabilité* $(+)$ *est uniforme sur toute portion* $\bar{\omega}$ *de* P, *disjointe de* $K(P)$.

Revenons aux ensemble-mobiles et les ensemble-trajectoires (Définition 4.1); considérons le cas où $E(M)=M$ sur P. L'hypothèse (4.5a) signifie que le point M est étranger à $L^+(M)$ pour M sur P:

(4.13a) $$\underline{\lim}_{t\to+\infty} \delta(M,t)>0. \quad \text{où} \quad \delta(M,t)=|M-G(M,t)|.$$

La condition (4.5b) équivaut à $M\in L^+(M)$ pour M sur P:

(4.13b) $$\underline{\lim}_{t\to+\infty} \delta(M,t)=0 \qquad (\textit{sur } P).$$

Si (4.5c) a lieu sur P, on aura $L^+(M)=M$ et

(4.13c) $h_1(M,t)\to 0$ sur P, où $h_1=$l'écart de $G(M,t)$ à M, donc $h_1=$le maximum des distances des points de $G(M,t)$ et de M; dans ce cas $G(M,t)\to M$, donc il y aura une trajectoire ponctuelle tendant vers M pour $t\to\infty$; par là (NS; p. 351) M *sera un point d'équilibre*, cela étant pour tout point M de P. L'hypothèse (4.5d) équivaut à $M\in L_f^+(M)$ (pour M sur P), donc à

(4.13d) $$\lim h_2(M,t)=0, \quad \text{où } h_2=\text{l'écart de } M \text{ à } G(M,t), \ =\delta(M,t).$$

La condition (4.5e) signifie que $L^+(M)=M=L_f^+(M)$ et cela ne représente rien de nouveau. Maintenant examinons les cas (4.13a), (4.13d) (avec $E(M)=M$).

Définition 4.14. On dira que l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M}=G(M,0)$ (et $\mathfrak{M}'=G(M,t)=F(\mathfrak{M},t)$), *est stable* $(+)$ *spécialement au point* M (qui se trouve sur $\mathfrak{M}$), s'il existe un suite t_n, $\to+\infty$, et des points $N_n\in G(M,t_n)$ $(n=1,2,\ldots)$, de sorte que $|N_n-M|\to 0$, c'est-à-dire, si M est un point d'accumulation des ensembles $G(M,t)$ pour $t\to+\infty: M\in L^+(M)$. Il y a une définition analogue où l'on remplace $(+)$ par $(-)$ ou bien par $(+,-)$. Quand il n'y a pas de stabilité $(+)$ de la trajectoire $C(\mathfrak{M})=C(G(M,0))$ spécialement au point M, nous dirons que $C(\mathfrak{M})$ est *instable* $(+)$ *spécialement à* M—c'est le cas où M est étranger à $L^+(M)$; on définit aussi d'une manière analogue *l'instabilité* $(-)$ *et l'instabilité* $(+,-)$ *d'une ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$, *spécialement au point* M. Si l'ensemble $H\subset D$ et s'il existe des nombres, $\gamma=\gamma(H)$ positif et $\eta=\eta(H)$ fini, de sorte que

(4.14′) $\delta(M,t)=|M-G(M,t)|>\gamma$ pour tout M sur H et pour tout $t>\eta$, nous dirons que *l'instabilité* $(+)$ *des ensemble-trajectoires* $C(\mathfrak{M})$ [où $\mathfrak{M}=G(M,0)$] *spécialement au point* M *est uniforme sur* H (pour M sur H).

Le cas (4.13a) (avec $E(M)=M$) équivaut à l'instabilité $(+)$ spécialement à M sur P; selon (4.7a) on conclut qu'il existe un ensemble $K(P)$ et qu'à toute portion

$\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P)$, des nombres $\gamma(\bar{\omega})$, $\eta(\bar{\omega})$ correspondent, comme on l'a indiqué dans le texte de (4.7a); en vertu de Définition 4.14 on conclut comme il suit.

(4.15). *Si chaque ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$ (où $\mathfrak{M}=G(M,t)$) *pour* M *sur* P, $\subset D$, *parfait* (dans U_r) *est instable* $(+)$, *spécialement au point* M, *il existe un ensemble* $K(P)$, $\subset P$, *fermé et non-dense sur* P, *tel que l'instabilité* $(+)$ *des ensemble-trajectoires* $C(\mathfrak{M})$, *spécialement au point* M *est uniforme sur toute portion* $\bar{\omega}$ *de* P, *disjointe de* $K(P)$.

Dans le cas (4.13d) (avec $E(M)=M$) on a

(4.16) $$|M-G(M,t)|\to 0 \quad (M \text{ sur } P) \text{ pour } t\to+\infty.$$

Nous laissons ce cas de côté (probablement (4.16) entraîne que les points M sur P soient des points d'équilibre).

CAS 4.18. L'ensemble $E(M)$, introduit à la suite de (4.3), est contenu dans $\mathfrak{M}=G(M,0)$.

DÉFINITION 4.19. Considérons le cas (4.18). Si pour un point M on a

$$L^+(M)\,E(M)=0 \quad (\text{donc } \underline{\lim}\ \delta(M,t)>0, \text{ pour } t\to+\infty, \text{ où } \delta(M,t)=|G(M,t)-E(M)|),$$

nous dirons que *l'ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}=G(M,0)$) *est instable* $(+)$ *spécialement à* $E(M)$; alors il existe un $\delta>0$ et un t_0 fini, de sorte $|G(M,t)-E(M)|>\delta$ pour $t\geqq t_0$. L'alternative de l'instabilité $(+)$ spécialement à $E(M)$ s'appellera *stabilité* $(+)$ *de* $C(\mathfrak{M})$, *spécialement à* $E(M)$; c'est le cas où

$$\underline{\lim}\ |G(M,t)-E(M)|=0 \qquad (\text{pour } t\to\infty);$$

c'est-à-dire, le cas où il existe une suite de valeurs t_j, $\to+\infty$ (pour $j\to+\infty$), telle que $|G(M,t_j)-E(M)|\to 0$ [il existe alors une suite de points N_j, $\in G(M_j,t_j)$ $(j=1,2,\ldots)$, $\to E(M)$]. Il y a des définitions analogues avec $(-)$, ou bien avec $(+,-)$ au lieu de $(+)$.

REMARQUE 4.19′. En tenant compte de cette Définition, on voit que l'hypothèse (4.5a) équivaut à *l'instabilité* $(+)$ des ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}=G(M,0)$), *spécialement à* $E(M)$ pour M sur P, tandis que l'hypothèse (4.5b) revient à ce qu'il y a *stabilité* $(+)$ *spécialement à* $E(M)$ *pour* M *sur* P.

DÉFINITION 4.20. Soit $E(M)\subset G(M,0)$. Si pour un point M on a

$$E(M)\subset L_f^+(M) \quad (\text{donc } \lim_{t\to+\infty} h_2(M,t)=0, \text{ où } h_2 \text{ est l'écart de } E(M) \text{ à } G(M,t)),$$

on dira que l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ correspondante est *stable* $(+)$ *au sens fort relativement à* $E(M)$.

L'espèce de stabilité que nous venons d'indiquer revient à ce que, si Q est un point quelconque de $E(M)$, il existe sur $G(M, t)$ un point $N(t)$, tel que $N(t) \to Q$ pour $t \to +\infty$.

Remarque 4.20'. L'hypothèse (4.5d), dans le cas (4.18), revient à ce qu'il y a de stabilité $(+)$ au sens fort, relativement à l'ensemble $E(M)$, pour M sur P.

En tenant compte des Définitions 4.19, 4.20 et des Remarques 4.19'; 4.20', en vertu de (4.7a) et de (4.7d) on obtient, respectivement, les résultats suivants.

(4.21) Soit $E(M) \subset G(M, 0)$ sur P et supposons que les ensemble-trajectoires

$$C(\mathfrak{M}) \quad (\mathfrak{M} = G(M, 0))$$

sont *instables* $(+)$, *spécialement à* $E(M)$ pour tout M sur P. Il existe alors un ensemble $K(P)$, $\subset P$, fermé et non-dense sur P, tel que *l'instabilité* $(+)$, *spécialement à* $E(M)$, *est uniforme sur toute portion* $\bar{\omega}$ *de* P, *disjointe de* $K(P)$ – c'est-à-dire, que pour toute telle portion $\bar{\omega}$ des nombres $\eta(\bar{\omega})$ (fini) et $\gamma(\bar{\omega})$ (positif) existent de sorte que

$$|G(M, t) - E(M)| > \gamma(\bar{\omega}) \quad (\text{pour } M \text{ sur } \bar{\omega} \text{ et pour } t > \eta(\bar{\omega})). \tag{4.21'}$$

(4.22) Encore dans le cas 4.18, supposons que pour M sur P l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} = G(M, 0))$ *est stable* $(+)$ *au sens fort, relativement à* $E(M)$. Alors il existe un ensemble $K(P, \varepsilon)$ (qui peut être vide), $\subset P$, fermé et non-dense sur P, tel que *la stabilité* $(+)$ *au sens fort, relativement à* $E(M)$, *est uniforme à* ε *près* pour M sur toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P, \varepsilon)$ – c'est-à-dire, que pour chaque telle portion $\bar{\omega}$ il existe un $\eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$ fini, de sorte que

$$h_2(M, t) \; [= \text{l'écart de } E(M) \text{ à } G(M, t)] < \varepsilon \quad \text{pour } M \text{ sur } \bar{\omega} \text{ et pour } t > \eta(\bar{\omega}, \varepsilon), \tag{4.22'}$$

ou, encore, que l'ensemble $O_2(M, t, \varepsilon)$ (de points distants de $G(M, t)$ de moins de ε) contient $E(M)$ (M sur $\bar{\omega}$, $t > \eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$).

Définition 4.23. Soit $E(M) \subset G(M, 0)$ (M sur P) d'accord avec Cas 4.18. Si pour M sur P les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} = G(M, 0))$ sont stables $(+)$, spécialement à $E(M)$, on dira que *la stabilité* $(+)$, spécialement à $E(M)$, *est quasi-uniforme pour* M *sur* P pourvu que, étant donne $\varepsilon > 0$ et N fini, un nombre fini de valeurs de t supérieures à N existe:

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_r, \tag{4.23'}$$

de sorte que pour tout M sur P on a

$$(4.23'')\qquad |G(M,\tau)-E(M)|\ \ (=\delta(M,\tau))<\varepsilon,\quad \text{où } \tau=t_{k(M)},$$

$k(M)$ étant un entier (généralement variant avec M) parmi les entiers $1, 2, \dots r$.

En tenant compte du théorème de M. Denjoy, qui se trouve dans (D, p. 215), en y posant

$$X=M,\quad T=t,\quad f(X,T)=\delta(M,t),\quad e=\{t_0\leqq t<+\infty\},$$

$T_0=+\infty$, $\lambda=0$, nous déduisons que l'hypothèse (4.5 b) (c'est-à-dire (4.5 $\bar{\text{b}}$)):

$$\underline{\lim}\ \delta(M,t)=0\quad (\text{pour } t\to+\infty),$$

sur P, entraîne que, étant donné un ε et un N fini, des nombres $t_1, t_2, \dots t_r$ (r fini), supérieurs à N existent de façon que $\delta(M, t_{k(M)})<\varepsilon$ sur P, où $k(M)$ est parmi les entiers $1, \dots r$. En nous rappelant la définition de la stabilité $(+)$, relativement $E(M)$ (Définition 4.19), nous concluons ainsi:

(4.24) *Dans le cas* 4.18 ($E(M)\subset G(M,0)$ *pour* M *sur* P), *si les* $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}=G(M,0)$) *sont stables* $(+)$, *spécialement à* $E(M)$ *pour* M *sur* P, *il s'ensuit que la stabilité* $(+)$, *spécialement à* $E(M)$ *est quasi-uniforme sur* P.

DÉFINITION 4.25. Nous disons que l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}=G(M,0)$), pour un point donné M, est *stable* $(+)$, *relativement à* $E(M)$ ($\subset G(M,0)$), s'il existe une suite t_j, $\to+\infty$ avec j, de sorte qu'à tout point Q de $E(M)$ des points

$$(4.25')\qquad N_j, \in G(M,t_j),\qquad j=1,2,\dots,$$

correspondent, tels que $N_j\to Q$ quand $j\to\infty$; en général la suite $\{t_j\}$ peut tenir à la position du point M et de Q sur $E(M)$; dans le cas où on peut choisir les t_j dans (4.25') indépendant de Q sur $E(M)$, on dira que l'ensemble-trajectoire est *stable* $(+)$, *complètement relativement à* $E(M)$.

On vérifie tout de suite que *la stabilité* $(+)$, *complète relativement à* $E(M)$, *équivaut à* $E(M)\subset L_c^+(M)$ – *donc à l'égalité* $\underline{\lim}\ h_2(M,t)=0$; *la stabilité* $(+)$, *relativement à* $E(M)$ *équivaut à la relation* $E(M)\subset \overline{L^+(M)}$ (voir la section 5).

On remarque que la stabilité $(+)$, complète relativement à $E(M)$, est intermédiaire entre la stabilité $(+)$ au sens fort relativement à $E(M)$ et la stabilité $(+)$ relativement à $E(M)$; en effet cette espèce de stabilité inclut celle-là, est incluse dans celle-ci.

Considérons pour un moment le cas où $E(M)=M$; alors la stabilité $(+)$, complète relativement à M, revient à ce que $M\in L^+(M)$, c'est-à-dire au cas (4.5 $\bar{\text{b}}$):

$$\underline{\lim}\ \delta(M,t)=0\quad (h_2(M,t)=|M-G(M,t)|=\delta(M,t));$$

donc, *si* $E(M)=M$, *la stabilité* $(+)$, *complète relativement à* M, *équivaut à la stabilité* $(+)$, *spécialement à* M (Définition (4.19).

En vertu du théorème de M. Denjoy (D; p. 215), en y posant $X=M$, $T=t$, $f(X,T)=h_2(M,t)$, $e=\{t_0\leqq t<+\infty\}$, $T_0=+\infty$, $\lambda=0$ et en tenant compte de Définition 4.25, on conclut comme il suit.

(4.26) *Soit* $E(M)\subset G(M,0)$ *pour* M *sur* P. *Si les ensemble-trajectoires*

$$C(\mathfrak{M})\ (\mathfrak{M}=G(M,0))$$

sont stables $(+)$, *complètement relativement à* $E(M)$ *pour* M *sur* P, *cette espèce de stabilité est quasi-uniforme sur* P; c'est-à-dire, si ε positif et N fini sont donnés, un nombre fini de valeurs $t_1, t_2, \dots t_r$, supérieures à N existent, de sorte que

$$h_2(M, t_{k(M)})<\varepsilon \quad \text{pour } M \text{ sur } P, \tag{4.26'}$$

où $t_{k(M)}$ est parmi les t_j $(j=1,\dots r)$.

Remarquons enfin que les développements de la section actuelle peuvent être étendus au cas où D (invariant par $F(M,t)$) est non-fermé dans U_r; alors les désignations 'fermé', 'parfait', 'point d'accumulation' devraient être entendues dans D.

5. Stabilité d'ensemble-trajectoires (suite)

Les relations (4.5a)–(4.5f) *équivalent respectivement aux relations* (4.5$\bar{\text{a}}$)–(4.5$\bar{\text{f}}$) *dans les seules conditions que* $G(M,t)$ (*contenant* M), $\subset D$, *et* $E(M)$, $\subset D$, *soient fermés* (*dans* U_r) *et varient continûment avec* $M\in D$. *Les développements de la section actuelle, antérieurs à* (5.11), *sont dans les conditions relativement à* $G(M,t)$, $E(M)$ *que nous venons d'indiquer* ($G(M,t)$ ne sera pas d'accord avec Définition 4.1).

Établissons d'abord l'énoncé suivant.

(5.1) *Les conditions* (4.5d), (4.5$\bar{\text{d}}$) *sont équivalentes.*

En effet soit (pour le point M considéré)

$$L_f^+(M)\supset E(M). \tag{1°}$$

Si (4.5$\bar{\text{d}}$) ne s'ensuit pas pour M, une suite t_j, $\to+\infty$, et un $\alpha>0$ existent, tels

$$h_2(M,t_j)\geqq\alpha \qquad (j=1,2,\dots);$$

d'où sur $E(M)$ il y a un point $Q(j)$ tel que

$$|Q(j)-G(M,t_j)|\geqq\alpha.$$

NOTATION 5.2. Dans la suite $S^0(A, \varrho)$ $[S(A, \varrho)]$ sera la sphère ouverte [fermée] de centre A et de rayon ϱ,

$$|P-A|<\varrho \qquad [|P-A|\leqq\varrho].$$

Pour une suite j_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$, $\to+\infty$, on a $Q(j_\nu)\to Q^*\in E(M)$; $S^0(Q(j_\nu), \alpha)$ est dépourvu de points de $G(M, t_{j_\nu})$; le voisinage $S^0(Q^*, \alpha/2)$ est contenu dans $S^0(Q(j_\nu), \alpha)$, dès que $|Q-Q(j_\nu)|<\alpha/2$, donc pour $\nu>\nu(\alpha)$; par conséquent $S^0(Q^*, \alpha/2)$ est dépourvu de points des $G(M, t_{j_\nu})$ $(\nu\geqq\nu_0)$; $t_{j_\nu}\to\infty$; par là Q^* n'est pas un point d'accumulation au sens fort des $G(M, t)$ (pour $t\to+\infty$) et, donc, Q^* ne peut être sur $L_f^+(M)$; c'est une contradiction à (1°) (puisque $Q^*\in E(M)$); *on conclut que* (4.5d) *entraîne* (4.5$\bar{\text{d}}$).

Réciproquement supposons que

$$\lim h_2(M, t)=0 \qquad (t\to+\infty). \tag{2°}$$

Soit Q un point particulier de $E(M)$; $G(M, t)$ étant fermé (dans U_r), un point N_t existe sur $G(M, t)$ tel que $|Q-G(M, t)|=|Q-N_t|$; selon la définition de $h_2(M, t)=$ l'écart $(E(M), G(M, t))$ et en vertu de (2°), on a

$$|Q-N_t|\leqq h_2(M, t), \to 0 \quad \text{pour } t\to+\infty;$$

donc $Q\in L_f^+(M)$, c'est-à-dire $E(M)\subset L_f^+(M)$; (5.1) *est vérifié.*

(5.3) *Les conditions* (4.5f), (4.5$\bar{\text{f}}$) *sont équivalentes.*

Supposons qu'il existe un ensemble $L_c^+(M)$ (définition dans le texte qui précède (4.4)) tel que

$$L_c^+(M)\supset E(M). \tag{3°}$$

Il existe une suite t_j, $\to+\infty$, telle que, si Q^* est un point de $L_c^+(M)$, des points N_j, $\in G(M, t_j)$, existent, de sorte que $N_j\to Q^*$; *on peut prendre les t_j les mêmes pour tous les Q^* sur $L_c^+(M)$.* Si (4.5$\bar{\text{f}}$) ne s'ensuivait pas à cause de (3°), c'est-à-dire, si $\underline{\lim}\, h_2(M, t)>0$, on pourrait trouver un $\alpha>0$ tel que

$$h_2(M, t)\geqq\alpha \quad \text{pour tout } t\geqq t(\alpha);$$

donc sur $E(M)$ il y a un point $Q(t)$ de sorte que

$$|Q(t)-G(M, t)|\geqq\alpha \qquad (t\geqq(\alpha)).$$

Pour une suite partielle $\{t_{j_\nu}\}$ de $\{t_j\}$ on a $Q(t_{j_\nu})\to Q^*$, où Q^* est un point sur $E(M)$. Dès que la sphère $S^0(Q(t_{j_\nu}), \alpha)=s_\nu$ a son centre $Q(t_{j_\nu})$ dans $S^0(Q^*, \alpha/2)$, c'est-à-dire pour $\nu>\nu(\alpha)$ ($\nu(\alpha)$ suffisamment grand), il en découle que $S^0(Q^*, \alpha/2)\subset s_\nu$; s_ν est dépourvu de points des $G(M, t_{j_\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$; par là *le voisinage* $S^0(Q^*, \alpha/2)$ *de* Q^* *ne contient pas de points des ensembles* $G(M, t_{j_\nu})$ $(\nu \geqq \nu(\alpha))$; or Q^*, étant sur $E(M)$, est sur $L_c^+(M)$ et d'après le texte suivant (3°) on trouve des points $N_j, \in G(M, t_j)$ (les t_j sont indépendants de Q^*), tels que $N_j \to Q^*$; en particulier, $N_{j_\nu} \to Q^*$; c'est contraire à la constatation en italiques, donnée plus haut; conséquemment (4.5f) *implique* (4.5$\bar{\text{f}}$).

Posons maintenant que

$$\underline{\lim}\, h_2(M, t) = 0.$$

Pour une suite $t_j, \to +\infty$, on a

$$h_2(M, t_j) \to 0.$$

Soit Q un point particulier, mais quelconque, sur $E(M)$; on note que

$$|Q - G(M, t_j)| \leqq h_2(M, t_j), \to 0 \quad \text{pour } j \to +\infty;$$

les $G(M, t_j)$ étant fermés (dans U_r), des points $N(t_j), \in G(M, t_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, existent de sorte que $|Q - G(M, t_j)| = |Q - N(t_j)|$; d'où

$$|Q - N(t_j)| \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

et l'on voit que $Q\,(\in E(M))$ est un point d'accumulation des ensembles $G(M, t)$ moyennant une suite de valeurs t,

$$t_1, t_2, \cdots \to +\infty;$$

la suite $\{t_j\}$ ne dépend pas du choix de Q sur $E(M)$. Par suite $E(M)$ est contenu dans un ensemble $L_c^+(M)$; autrement dit (4.5$\bar{\text{f}}$) entraîne (4.5f) et *la constatation* (5.3) *est vérifiée.*

Exemple 5.4. Soit dans le plan complexe $G(M, t)$ le segment linéaire

$$r\, e^{it} \quad (i = \sqrt{-1}), \quad \text{où } 1 - \delta \leqq r \leqq 1 + \delta \qquad (0 < \delta < 1); \tag{5.4a}$$

soit $E(M)$ les deux points $1, -1$.

Dans cet exemple:

(1°) $L^+(M) =$ l'anneau $1 - \delta \leqq r \leqq 1 + \delta$;

(2°) $L^+(M) \supset E(M)$;

(3°) aucun ensemble $L_c^+(M)$ contenant $E(M)$ n'existe;

(4°) $h_2(M, t) =$ l'écart $(E(M), G(M, t)) \geqq \sqrt{2 - 2\delta + \delta^2} = \nu(\delta) > 1.$

Les énoncés (1°), (2°) sont évidents; (4°) s'établit en remarquant que le minimum de $h_2(M, t)$ a lieu pour $t = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2, \ldots$ et que ce minimum vaut $\nu(\delta)$; (3°) est une conséquence de (4°) et de (5.3) (c'est-à-dire, (4°) signifie que $\underline{\lim}\ h_2 > 0$, (4.5$\bar{\mathrm{f}}$) n'a pas lieu, donc (4.5f) doit être en défaut). Pourtant on peut vérifier (3°) directement; en effet, soit t_j une suite, $\to +\infty$, telle que $G(M, t_j)$ contient un point N_j, $\to 1$; pour $j \geqq j_0$, où j_0 est suffisamment grand, les segments $G(M, t_j)$ sont situés à droite de l'axe d'imaginaires, donc à distance supérieure à $\nu(\delta)$ (>0) de (-1): d'où on voit qu'il n'existe pas une suite t_j, indépendante des points de $E(M)$, de façon que sur $G(M, t_j)$ se trouvent des points Q_j, N_j $(j = 1, 2, \ldots)$ tels qu'à la fois: $Q_j \to -1$ et $N_j \to 1$; (3°) s'ensuit. Si l'on veut, on peut modifier la définition de $G(M, t)$ pour $-2\pi < t < 2\pi$ de sorte que $G(M, 0)$ contienne $E(M)$ (par exemple, $G(M, 0)$ soit le segment $(-1, +1)$); dans ce cas les caractères (1°), (2°), (3°) sont maintenus, tandis que (4°) a lieu pour $|t| \geqq 2\pi$ et l'on a encore $\underline{\lim}\ h_2(M, t) > 0$, quand $t \to +\infty$, ou bien quand $t \to -\infty$.

Exemple 5.5. Soit l'espace considéré le plan complexe et désignons par $S[z, \varrho]$ le contour du cercle de centre z et de rayon ϱ; soit s_n une suite de nombres supérieurs à 1, tels que $2 = s_0 > s_1 > s_2 > \cdots, \to 1$. Définissons une courbe simple, continue C comme il suit:

(5.5a) de $2i$ à $-s_0$ C est le petit arc de $S[0, 2]$ joignant $2i$ et $-s_0$;

(5.5b) de s_{2m} à $-s_{2m}$ (de $-s_{2m-1}$ à s_{2m-1}) C est l'arc de $S[0, s_{2m}]$ (de $S[0, s_{2m-1}]$) au-dessus de l'axe réel, $m = 1, 2, \ldots$;

(5.5c) de $-s_{2m}$ à $-s_{2m+1}$ (de s_{2m+1} à s_{2m+2}) C est l'arc de

$$S\left[\frac{-s_{2m} - s_{2m+1}}{2},\ \frac{s_{2m} - s_{2m+1}}{2}\right] \quad \left(\text{de } S\left[\frac{s_{2m+1} + s_{2m+2}}{2},\ \frac{s_{2m+1} - s_{2m+2}}{2}\right]\right) \quad \text{au-dessous}$$

de l'axe réel, $m = 0, 1, \ldots$. Soit $z(t)$ un point sur C pour $t \geqq 0$, t valant la longeur de l'arc de C, joignant $2i$ et $z(t)$. Pour le point $M = z(0)$, considéré, *soit l'ensemble* $G(M, t) = G(z(0), t)$ le segment sur la normale à C au point $z(t)$ de longeur $l(t)$ et ayant son centre au point $z(t)$. En choisissant convenablement $l(t)$, >0, comme une fonction tendant continûment vers zéro (pour t croissant indéfiniment à partir de $t = 0$), les conditions suivantes sont satisfaites à la fois:

(5.1°) les ensembles $G(M, t_1)$, $G(M, t_2)$ sont disjoints, dès que $0 \leqq t_1 < t_2 < +\infty$;

(5.2°) $L^+(M)$ est l'arc circulaire de points $e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

(5.3°) $L^+(M)$ est disjoint de $G(M, t)$ pour $0 \leqq t < +\infty$.

(5.4°) si $E(M)$ est un sous-ensemble quelconque de $L^+(M)$, composé de deux points distincts, aucun $L_c^+(M)$ contenant $E(M)$ n'existe;

(5.5°) en posant $h_2(M,t) =$ l'écart $(E(M), G(M,t))$, $E(M)$ étant un ensemble dont il s'agit dans (5.4°), on aura $\underline{\lim}\ h_2(M,t) > 0$ $(t \to +\infty)$.

Examinons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes, où intervient l'écart de $E(M)$ (ou de certains sous-ensembles de $E(M)$) à $G(M,t)$, pour qu'on ait $L^+(M) \supset E(M)$. En général, si H est un ensemble quelconque, qui peut dépendre de M, écrivons

(5.6) $$h_{2,H}(M,t) = \text{l'écart } (H,\ G(M,t)).$$

(5.7) Si H est un ensemble fermé (dans U_r) et δ est un nombre positif, il existe un nombre fini $k(\delta)$ de points $Q_j(=Q_j(\delta))$ $(j=1,\ldots,k(\delta))$ sur H, tels que

$$H \subset \sum_1^{k(\delta)} S(Q_j,\delta) \quad \text{(notation (5.2))}.$$

En effet, la famille d'ensembles $\{S(Q,\delta)\}$, où Q décrit H, couvre H fermé; d'où, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, la conclusion dans (5.7).

(5.8) Si H est fermé (dans U_r) et δ est positif, il existe une décomposition, *dite du type-*(δ):

$$H = \sum_{j=1}^{k(\delta)} H_j \quad (k(\delta) \text{ fini}),$$

où les H_j sont disjoints et $H_j \subset S(Q_j\,\delta)$, les $Q_j(=Q_j(\delta))$ étant certains points sur H; on peut disposer qu'un H_i particulier soit fermé.

En tenant compte de (5.7), si l'on veut par exemple que H_1 soit fermé, on peut réaliser une décomposition du type-(δ) en posant

(5.8 a) $$H_1 = H\,S(Q_1,\delta), \quad H_2 = H\,S(Q_2,d) - H_1, \quad H_3 = H\,S(Q_3,\delta) - H_1 - H_2, \ldots.$$

Dans la suite *on pourra invariablement utiliser des décompositions du type-*(δ), *construites d'accord avec le texte au commencement de la section 7.*

THÉORÈME 5.9. *Pour qu'un ensemble $E(M)$ fermé (dans U_r) soit contenu dans l'ensemble $L^+(M)$ de points d'accumulation de $G(M,t)$ (pour $t \to +\infty$) il faut et il suffit que $E(M)$ ait une décomposition du type-*(δ) *pour tout* $\delta > 0$:

(5.9 a) $$E(M) = \sum_{j=1}^{k(\delta)} E_{j,\delta}(M),$$

de la sorte que (avec la notation (5.6))

$$\underline{\lim}\, h_{2,\,E_{j,\delta}(M)}(M,t) \leqq \delta \qquad (j=1,\ldots,k(\delta);\ t\to+\infty). \tag{5.9 b}$$

Supposons d'abord que

$$L^+(M) \supset E(M); \tag{5.10}$$

ceci revient à ce que

$$\underline{\lim}\ \delta_Q(M,t)=0, \quad \text{où } \delta_Q(M,t)=|Q-G(M,t)| \tag{1°}$$

pour tout $Q\in E(M)$. Soit pour le présent Q un point particulier sur $E(M)$. Sur $G(M,t)$ il y a un point $N(t)$, tel que $\delta_Q(M,t)=|N(t)-Q|$. Sur $S(Q,\delta)$ se trouve un point $R(t,\delta)$, tel que

$$h_{2,\,S(Q,\delta)}(M,t)=\text{l'écart }(S(Q,\delta),\,G(M,t))=|R(t,\delta)-G(M,t)|;$$

pour tout point $N,\in G(M,t)$, on a

$$|N-R(t,\delta)|\geqq|R(t,\delta)-G(M,t)|;$$

c'est vrai en particulier pour $N(t)$, donc

$$\begin{aligned} h_{2,\,S(Q,\delta)}(M,t) &\leqq |N(t)-R(t,\delta)| \leqq |N(t)-Q|+|Q-R(t,\delta)| \\ &\leqq \delta_Q(M,t)+\delta \qquad (\text{puisque } |Q-R(t,\delta)|\leqq\delta). \end{aligned} \tag{2°}$$

D'après (1°) il existe une suite (t_j), pouvant dépendre de Q et tendant vers $+\infty$, telle que $\delta_Q(M,t_j)\to 0$. En posant $t=t_j$ dans (2°), on conclut que

$$\overline{\lim_{j}}\ h_{2,\,S(Q,\delta)}(M,t_j)\leqq\delta, \quad \text{donc } \underline{\lim_{t}}\ h_{2,\,S(Q,\delta)}(M,t)\leqq\delta;$$

de là

$$\underline{\lim_{j}}\ h_{2,H}(M,t)\leqq\delta, \quad \text{dès que } H\subset S(Q,\delta) \text{ et pour tout } Q\in E(M). \tag{3°}$$

Soit (5.9 a) une décomposition quelconque du type-(δ) de $E(M)$; on a $E_{j,\delta}(M)\subset S(Q_j,\delta)$, où les Q_j ($j=1,\ldots,k(\delta)$) sont certains points sur $E(M)$; en vertu de (3°), en y posant

$$H=E_{j,\delta}(M), \quad Q=Q_j, \qquad j=1,\ldots,k(\delta),$$

on obtient la condition (5.9 b).

Réciproquement *supposons que pour tout* $\delta>0$ $E(M)$ *a une décomposition* (5.9 a) *du type*-(δ), *telle que* (5.9 b) *a lieu.* S'il ne résulte pas que $L^+(M)\supset E(M)$, un point Q_0 sur $E(M)$ existe, tel que

$$|Q_0-L^+(M)|=\tau>0. \tag{1_0}$$

Si $0 < \varrho < \tau$, le voisinage $S(Q_0, \varrho)$ de Q_0 ne contient pas de points des $G(M, t), t \geqq t(\varrho)$. Prenons $0 < \delta < \varrho/3$; soit (5.9 a) $E(M) = \sum_j E_{j,\delta}$ une décomposition du type-(δ), correspondant à cette valeur de δ, pour laquelle on a (5.9 b):

$$(2_0) \qquad 0 \leqq \lambda_j = \underline{\lim}\ h_{2, E_{j,\delta}}(M, t) \leqq \delta \qquad (j = 1, \ldots, k(\delta)).$$

D'accord avec la remarque, faite à propos de (5.8 a), nous disposons de la sorte qu'à la fois:

$$(3_0) \qquad E_{1,\delta}, \subset S(Q_1, \delta), \text{ contient } Q_0, E_{1,\delta} \text{ est fermé,}$$

Q_1 étant un point sur $E(M)$. On a $S(Q_1, \delta) \subset S^0(Q_0, \varrho)$; en effet, $|Q_0 - Q_1| \leqq \delta\ (< \varrho)$ et la distance entre les surfaces de $S(Q_1, \delta)$, $S(Q_0, \varrho)$ vaut au moins $\varrho - 2\delta$, $> \varrho/3$. Or l'écart qui intervient dans (2_0) est le maximum, pour $N \in E_{1,\delta}$, de $|N - G(M, t)|$; il vaut $|N_t - G(M, t)|$, où N_t *est un point sur* $E_{1,\delta}$ *fermé;* enfin on voit que

$$(4_0) \qquad h_{2, E_{1,\delta}}(M, t) = |N_t - S_t| \text{ pour certains points } N_t, \in E_{1,\delta},\ S_t \in G(M, t).$$

Selon (2_0) une suite de valeurs t, $\to +\infty$, existe pour laquelle $h_{2, E_{1,\delta}}(\cdots) \to \lambda_1$; en choisissant convenablement une suite partielle $\{t_j\}$ de cette suite, on peut disposer, qu'en même temps

$$(5_0) \qquad N_{t_j} \to N^* (\in E_{1,\delta}), \quad S_{t_j} \to S^* (\in L^+(M)), \quad |N_{t_j} - S_{t_j}| \to |N^* - S^*| = \lambda_1,$$

où $0 \leqq \lambda_1 \leqq \delta$. Or Q_0, N^* sont sur le sous-ensemble $E_{1,\delta}$ de $S(Q_1, \delta)$ [(3_0), (5_0)]; donc $|Q_0 - N^*|$ vaut au plus le diamètre de $S(Q_1, \delta)$:

$$|Q_0 - N^*| \leqq 2\delta;$$

d'autre part, d'après (5_0), (2_0).

$$|N^* - S^*| \leqq \delta;$$

par là on conclut que

$$|Q_0 - S^*| \leqq |Q_0 - N^*| + |N^* - S^*| \leqq 3\delta < \varrho,$$

c'est-à-dire, que le point S^* sur $L^+(M)$ se trouve dans le voisinage $S^0(Q_0, \varrho)$ de Q_0; il y a contradiction; donc *l'hypothèse en italiques, qui précède* (1_0), *entraîne que* $L^+(M) \supset E(M)$. *Théorème* 5.9 *est établi.*

Dans les énoncés (5.1), (5.3) *et Théorème* 5.9 *on n'exige pas qu'il s'agisse d'un mouvement d'un ensemble-mobile* $G(M, t)$ *sur son ensemble-trajectoire, d'accord avec Définition* 4.1.

Considérons maintenant du point de vue de stabilité *le cas général, ou* $G(M, t)$

est un ensemble-mobile [le long de son ensemble-trajectoire $C(G(M, 0)]$, *Définition* 4.1 *étant satisfaite, de sorte que*

$$L^+(M) \supset E(M) \quad (\text{pour } M \text{ sur } P), \tag{5.11}$$

$E(M)$ *étant un sous-ensemble fermé de* $G(M, 0)$, *variant continûment avec* M *sur* P. Selon Définition 4.25 la condition (5.11) veut dire: les ensemble-trajectoires

$$C(\mathfrak{M}) \ (\mathfrak{M} = G(M, 0))$$

sont stables $(+)$, relativement $E(M)$, pour tout M sur P. D'après Théorème 5.9 $E(M)$ a une décomposition (5.9a) du type-(δ) pour laquelle (5.9b) a lieu, cela étant pour tout $\delta > 0$ et pour tout M sur P.

DÉFINITION 5.12. Supposons que $E' = E'(M)$ est un sous-ensemble de $E(M)$ $(\subset G(M, 0))$ pour M sur P et que les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} = G(M, 0))$ sont stables $(+)$, relativement à $E(M)$, pour M sur P; si δ est un nombre positif, nous dirons que *la stabilité* $(+)$, *relativement à* $E'(M)$ *est quasi-uniforme à* δ *près, pour* M *sur* P, pourvu que, $\varepsilon > 0$ et N fini étant donnés, un nombre fini $r = r(\varepsilon, N)$ de valeurs $t_1, \dots t_r$,

$$N < t_1 < t_2 < \cdots < t_r$$

existe, de sorte que

$$h_{2, E'}(M, t_{k(M)} \ [= \text{l'écart } (E', G(M, t_{k(M)}))] < \delta + \varepsilon \tag{5.12'}$$

pour M sur P, $t_{k(M)}$ étant parmi les $t_j (j = 1, \dots r)$.

On note que la stabilité $(+)$ quasi-uniforme, dont il s'agit dans (4.26), est dans le sens de quasi-uniformité à zéro près, relativement $E(M)$.

En revenant à l'hypothèse (5.11) et en tenant compte du théorème topologique de M. Denjoy (D; p. 215, 216), dans le cas «d'une plus petite limite bornée supérieurement», en y posant

$$X = M, \quad T = t, \quad f(X, T) = h_{2, E_{j,\delta}(M)}(M, t), \quad e = \{t_0 \leqq t < +\infty\},$$
$$T_0 = +\infty, \quad \lambda = \delta \quad (\text{cf. } (5.9\text{b})),$$

on conclut ainsi (en faisant en sorte que $h \dots (\cdots)$ soit continu en M):

si $\varepsilon > 0$, N fini sont donnés, $t_1, \dots t_r$ (r fini) supérieurs à N existent, de façon que

$$h_{2, E_{j,\delta}(M)}(M, \tau) < \delta + \varepsilon \quad (M \text{ sur } P), \ \tau = \tau(M) \text{ étant parmi les } t_j.$$

En raison de Définition 5.12 (5.12′) et de Théorème 5.9 on déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 5.13. *Supposons que les ensemble-trajectoires* $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M}=G(M,0))$ *sont stables* $(+)$, *relativement à* $E(M)$, $\subset G(M,0)$, *pour* M *sur* P. *Alors pour tout* $\delta>0$ *il existe une décomposition*

$$E(M)=\sum_{j=1}^{k(\delta)} E_{j,\delta}(M) \quad \text{du type-}(\delta) \ (\text{définition } 5.8), \tag{5.9 a}$$

de sorte que la stabilité $(+)$, *relativement à* $E_{j,\delta}(M)$, *soit quasi-uniforme à* δ *près pour* M *sur* P *et pour* $j=1,\ldots k(\delta)$.

6. Stabilité sur des ensembles partout denses et sur des résiduels

En tant que $F(Q,t)$, pour t fixe, varie continûment avec le point Q dans D, la transformation ponctuelle $F(Q,t)$ établit une *correspondance bicontinue et biunivoque* entre les points de $G(M,0)$ et de $G(M,t)$ $(t\neq 0)$,

$$Q'=F(Q,t) \qquad (Q \text{ sur } G(M,0),\ Q' \text{ sur } G(M,t)).$$

(6.1) *Si le mouvement d'ensemble-mobile* $G(M,t)$ *est stable* $(+)$, *relativement à un ensemble* $G(M,t_0)$, *le mouvement sera stable* $(+)$ *relativement à tout ensemble* $G(M,t)$ *(*M *étant fixe).*

Sans perte de généralité on peut poser $t_0=0$. Donc selon l'hypothèse on a

$$G(M,0)\subset L^+(M), \tag{1°}$$

où $L^+(M)$ est l'ensemble d'accumulation des ensembles $G(M,t)$ pour $t\to+\infty$. Soit $t\neq 0$ une valeur fixe et soit Q un point quelconque sur $G(M,t)$. A Q sur $G(M,t)$ correspond le point $Q_0=F(Q,t)$. En raison de (1°) il existe une suite t_j $(j=1,2,\ldots)$, $\to+\infty$, et des points N_j, $\in G(M,t_j)$, de sorte que $N_j\to Q_0$. Puisque $F(N,t)$ varie continûment avec N, il découle que

$$\lim_j F(N_j,t)=F(\lim N_j,t)=F(Q_0,t)=Q.$$

Or $F(N_j,t)$ est un point sur $G(M,t_j+t)$. On voit que, pour la suite t_j+t, $\to+\infty$ (avec j), il y a des points $N'_j\,(=F(N_j,t))$, $\in G(M,t_j+t)$, tendant vers le point Q. Cela signifie que Q appartient à $L^+(M)$ et que $G(M,t)\subset L^+(M)$. Selon définition le mouvement est stable $(+)$, relativement à $G(M,t)$; *l'énoncé* (6.1) *est établi.*

Pour le cas d'un mouvement de point-mobile le résultat (6.1) est connu [voir (D; p. 196) et (D; p. 152)]. Le corollaire suivant découle.

(6.2) *Si le mouvement d'ensemble-mobile* $G(M,t)$ *est stable* $(+)$, *complètement (Définition* 4.25) *relativement à un ensemble* $G(M,t_0)$, *le mouvement sera stable* $(+)$, *complètement relativement à tout ensemble* $G(M,t)$ *(pour le* M *considéré).*

En effet, reprenons la démonstration de (6.1); posons encore $t_0 = 0$; les t_j peuvent être choisis indépendamment de $Q_0 (= F(Q, -t))$ sur $G(M, 0)$ donc de Q sur $G(M, t)$; alors la suite $t_j + t$, $\to +\infty$, pour laquelle il y a des points

$$N'_j, \in G(M, t_j + t), \to Q \qquad (t \text{ fixe}),$$

sera indépendante de Q sur $G(M, t)$; d'où $G(M, t)$ est contenu dans un ensemble $L_c^+(M)$ (définition dans le texte à la suite de (4.2)); $L_c^+(M)$ peut possiblement tenir à t; *d'où la conclusion dans* (6.2).

Reprenons encore la démonstration de (6.1) dans le cas de stabilité $(+)$ au sens fort relativement à $G(M, t_0)$ (Définition 4.20). En prenant $t_0 = 0$ nous supposons que $G(M, 0) \subset L_f^+(M)$, où $L_f^+(M)$ est défini d'accord avec le texte qui suit (4.2). Pour $t, \neq 0$, fixe soit Q un point sur $G(M, t)$; $Q_0 = F(Q, -t) \in G(M, 0)$; pour tout τ on peut trouver un point $N_\tau \in G(M, \tau)$, tel que $N_\tau \to Q_0$ pour $\tau \to +\infty$; d'après la continuité de $F(N, t)$ on a

$$F(N_\tau, t) \to F(Q_0, t) = Q \quad \text{pour} \quad \tau \to +\infty;$$

$F(N_\tau, t) \in G(M, \tau + t)$; donc Q, qui est un point sur $G(M, t)$, appartient à $L_f^+(M)$ ($L_f^+(M)$ est indépendant de t). Par suite on conclut ainsi.

(6.3) *Si le mouvement de $G(M, t)$ est stable $(+)$, au sens fort relativement à un ensemble particulier $G(M, t_0)$, ce mouvement sera stable $(+)$, au sens fort relativement à tout ensemble $G(M, t)$* (cela étant pour le M considéré).

DÉFINITION 6.4. Un mouvement d'ensemble-mobile $G(M, t)$, ou simplement l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} = G(M, 0))$, sera dit ou bien (1°) *stable* $(+)$, ou bien (2°) *stable* $(+)$ *complètement*, ou bien (3°) *stable* $(+)$ *au sens fort*, dans les trois cas respectifs, où les espèces de stabilité indiquées ont lieu relativement à un $G(M, t_0)$ pour une valeur particulière t_0 de t.

En vertu de (6.1), (6.2), 6.3) dire qu'une ensemble-trajectoire est stable selon Définition 6.4 équivaut à ce que la stabilité, du genre indiqué, a lieu relativement à $G(M, t)$ pour toute valeur de t.

THÉORÈME 6.5. *Si les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M} = G(M, 0)$, sont stables $(+)$ complètement pour tout point M appartenant à un ensemble partout dense dans D, il s'ensuit qu'il existe un résiduel R de D pour tout point M duquel l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M} = G(M, 0))$, est stable $(+)$ complètement.*

Ce résultat est du genre du thèoréme de M. Denjoy dans (D; p. 196). Soit M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ des points partout denses dans D de sorte que toute ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M}_n)$, où $\mathfrak{M}_n = G(M_n, 0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, soit stable $(+)$ complètement. Posons

$$(1°) \qquad h_2(M, t) = \text{l'écart } ((G(M, 0), G(M, t)).$$

Puisque pour tout t fini l'ensemble fermé $G(M, t)$ varie continûment avec le point M, l'écart $h_2(M, t)$ est une fonction continue de M. D'accord avec la remarque qui suit Définition 4.25 (où l'on pose $E(M) = G(M, 0)$) on a

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} h_2(M_n, t) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il existe une suite $t_{n,j}$, $\to +\infty$ avec j, telle que

$$h_2(M_n, t_{n,j}) \to 0 \quad \text{pour} \quad j \to +\infty.$$

Par là on trouve des entiers $j(n)$ de façon que

$$(2°) \qquad h_2(M_n, t_{n,j(n)}) < \frac{1}{n}, \quad t_{n,j(n)} > n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Vu la continuité de $h_2(M, t)$, un $\varrho_n > 0$ existe tel que

$$(3°) \qquad h_2(M, t_{n,j(n)}) = \text{l'écart } (G(M, 0), G(M, t_{n,j(n)})) < \frac{2}{n} \quad \text{pour} \quad M \subset S^0(M_n, \varrho_n)$$

$$n = 1, 2, \ldots \text{ (Notation 5.2).}$$

Selon le théorème topologique dans (D; p. 139) il existe un résiduel R de D, tout point duquel appartient à une infinité des sphères $S^0(M_n, \varrho_n)$; donc, si M est un point sur R, une suite $n_k(M)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\to +\infty$, existe de sorte que

$$M \in S^0(M_n, \varrho_n) \quad \text{pour} \quad n = n_1(M), n_2(M), \ldots$$

et que

$$h_2(M, t_{n,j(n)}) < \frac{2}{n} \quad \text{pour} \quad n = n_k(M) \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

par là et puisque $t_{n,j(n)} > n$ et que $n = n_k(M) \to +\infty$ avec k, on obtient

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} h_2(M, t) = 0 \qquad \text{pour tout } M \in R.$$

Par suite un ensemble d'accumulation complet $L_c^+(M)$ existe, tel que $G(M, 0) \subset L_c^+(M)$, ce qui signifie que l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M} = G(M, 0)$, est stable $(+)$ complètement pour tout point du résiduel R; *le théorème est établi.*

En écrivant dans (2°) $\mathfrak{M}_n = G(M_n, 0)$, on aura $G(M_n, t_{n,j(n)}) = F(\mathfrak{M}_n, t_{n,j(n)}) = \mathfrak{M}_n'$ et $\mathfrak{M}_n = F(\mathfrak{M}_n', -t_{n,j(n)})$; donc

$$(4°) \qquad \text{l'écart } (\mathfrak{M}_n, F(\mathfrak{M}_n, t_{n,j(n)})) = \text{l'écart } (F(\mathfrak{M}_n', -t_{n,j(n)}), \mathfrak{M}_n') < \frac{1}{n}.$$

En tenant compte de l'identité $G(F(M,t),0)=G(M,t)$ et en posant

(5°) $$\tau_n = t_{n,j(n)}\,(>n), \quad M'_n = F(M_n, \tau_n),$$

on déduit que (4.2)

$$\mathfrak{M}'_n = G(M_n, \tau_n) = G(F(M_n, \tau_n), 0) = G(M'_n, 0), \quad F(\mathfrak{M}'_n, -\tau_n) = G(M'_n, -\tau_n)$$

et (2°) que $\tau_n \to +\infty$ avec n; d'après (4°)

(6°) $$h_1(M'_n, -\tau_n) = \text{l'écart}\,(G(M'_n, -\tau_n), G(M'_n, 0)) < \frac{1}{n}.$$

Pour un t fixe $h_1(M', t)$ varie continûment avec le point M' (dans D); donc il existe un $\varrho'_n > 0$, tel qu'en raison de (6°)

(7°) $$h_1(M', -\tau_n) < \frac{2}{n} \quad (n=1, 2, \ldots) \text{ pour } M' \in S^0(M'_n, \varrho'_n).$$

Si les M'_n $(n=1, 2, \ldots)$ *étaient partout denses dans* D, on pourrait trouver un résiduel R' de D, tout point M' duquel appartient à une infinité de sphères $S^0(M'_n, \varrho'_n)$; alors selon (7°) on aurait

$$h_1(M', -\tau_{n_\nu}) < \frac{2}{n_\nu} \quad (\nu=1, 2, \ldots), \text{ pour tout } M' \in R',$$

où n_ν est une suite, $\to +\infty$ avec ν, qui dépend de M'; puisque (2°) $\tau_{n_\nu}\,(>n_\nu) \to +\infty$ avec ν, cela voudrait dire que

(8°) $$\varliminf_{t \to -\infty} h_1(M, t) = 0 \quad \text{pour} \quad M \in R'.$$

Ici la notation $h_1(\ldots)$ est d'accord avec (4.4), si l'on y pose $E(M) = G(M, 0)$. Quelle est la signification, du point de vue de la stabilité, d'une relation limite telle que (8°)?

(6.6) Le genre de *stabilité* $(-)$ *par rapport à* $G(M, t_0)$, qui correspond à la relation limite

(6.6 a) $$\varliminf_{t \to -\infty} h_1(M, t_0; t) = 0, \quad \text{où} \quad h_1(M, t_0; t) = \text{l'écart}\,(G(M, t), G(M, t_0)),$$

revient à ce qu'il existe une suite t_j $(j=1, 2, \ldots)$, $\to -\infty$ et pouvant tenir à M et à t_0, de sorte que

(6.6 b) $$L^-\{G(M, t_j)\} \subset G(M, t_0),$$

où $L^-\{G(M, t_j)\}$ est l'ensemble de points d'accumulation, pour $j \to \infty$, des ensembles $G(M, t_j)$. Soit N_j un point, pris au hasard, sur $G(M, t_j)$; *la stabilité* $(-)$ *par rapport* *à* $G(M, t_0)$ *équivaut à ce qu'il existe une suite* t_j, $\to -\infty$, *de sorte que tout point d'accumulation de tout ensemble* $\{N_1, N_2, \ldots\}$ (correspondant à cette suite) *est contenu dans* $G(M, t_0)$.

Remarque 6.7. La stabilité du genre, que nous venons d'indiquer, entraîne l'inclusion

(6.7 a) $$L^- \{F(N, t_j)\} \subset G(M, t_0) \quad \text{pour tout point } N \text{ sur } G(M, 0).$$

En effet, supposons que (6.6 b) a lieu. Si (6.7 a) ne s'ensuit pas, il existe un point N_0 sur $G(M, 0)$ et un point T de $L^- \{F(N_0, t_j)\}$ disjoint de $G(M, t_0)$; pour une suite j_ν, $\to +\infty$ avec ν, on a $F(N_0, t_{j_\nu}) \to T$; en prenant $0 < 2\varepsilon < |T - G(M, t_0)|$ et en notant que les $G(M, t_j)$ se trouvent dans l'ensemble $O_1(M, t_0, \varepsilon)$ de points distants de $G(M, t_0)$ de moins de ε, dès que $h_1(M, t_0; t_j) < \varepsilon$ — donc pour $j \geqq j(\varepsilon)$, on voit que le voisinage $S^0(T, \varepsilon)$ de T est dépourvu de points des ensembles $G(M, t_{j_\nu})$ pour $j_\nu \geqq j(\varepsilon)$; mais le point $F(N_0, t_{j_\nu})$ est sur $G(M, t_{j_\nu})$; on a aboutit à une contradiction; d'où (6.7 a).

Revenons aux développements (1°)–(8°), qui se rattachent à Théorème 6.5. Nous avons noté que, *si les* $M'_n = F(M_n, \tau_n)$ $(\tau_n = t_{n, j(n)})$ *sont partout denses dans* D, *il existe un résiduel* R' de D tel que (8°) a lieu, c'est-à-dire que (avec la notation dans (6.6 a)):

(9°) $$\varliminf_{t \to -\infty} h_1(M, 0; t) = 0, \quad \text{où} \quad h_1(\ldots) = \text{l'écart}\,(G(M, t),\, G(M, 0))$$

pour M sur R'. En raison de (4.2)

(6.8) $$G(M, t) = G(F(M, t_0), t - t_0).$$

Selon (6.8) on obtient

(6.9) $$h_1(M, t_0; t) = \text{l'écart}\,(G(M, t), G(M, t_0)) = \text{l'écart}\,(G(F(M, t_0), t - t_0), G(F(M, t_0), 0)) = h_1(F(M, t_0), 0; t - t_0).$$

D'après (9°), $t_j = t_j(M)$, tendant vers $-\infty$ et possiblement dépendant de M sur R', existe tel que $h_1(M, 0; t_j) \to 0$; donc, *si le point* $F(M, t_0)$ *aussi appartient à* R', en vertu de (6.9) il résulte que

$$h_1(F(M, t_0), 0; t'_j) \to 0,$$

pour une suite $t'_j \to -\infty$, et que (6.9)

$$h_1(M, t_0; t'_j + t_0) \to 0, \quad \varliminf_{t \to -\infty} h_1(M, t_0; t) = 0 \qquad ((6.6\,\text{a})).$$

On peut maintenant faire l'énoncé suivant.

THÉORÈME 6.10. *Posons-nous dans les hypothèses de Théorème 6.5. Ainsi il existe un ensemble dénombrable* $\{M_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *partout dense dans* D, *de sorte que pour tout* M_n *l'ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M}_n)$, *où* $\mathfrak{M}_n = G(M_n, 0)$, *est stable* $(+)$ *complètement. Les* $\tau_n = t_{n,j(n)}$ $[>n;\ n=1,2,\ldots]$ *étant des nombres introduits dans* (2°), *supposons que*

(6.10 a) *les* $M'_n = F(M_n, \tau_n)$ *sont partout denses dans* D.

Il existe alors on résiduel R' *de* D *en tout point* M *duquel l'ensemble-trajectoire est stable* $(-)$ *par rapport à* $G(M,0)$ [au sens que $\lim\limits_{\overline{t\to-\infty}}$ l'écart $(G(M,t), G(M,0))=0$; voir (6.6), (6.6 a), (6.6 b) avec $t_0=0$]; *de plus, pour* M *fixe sur* R' *l'ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$, *où* $\mathfrak{M}=G(M,0)$, *sera stable* $(-)$ *par rapport à l'ensemble* $G(M,t_0)$ *pour tout* t_0, *pour lequel le point* $F(M,t_0)$ *lui aussi appartient à* R'.

REMARQUE 6.11. Pour tout M sur le résiduel RR' de D il y a à la fois la stabilité pour les t infinis positifs au sens complet, d'accord avec Théorème 6.5, et la stabilité pour les t infinis négatifs au sens que nous venons d'indiquer.

REMARQUE 6.12. Pour que l'hypothèse (6.10 a) soit satisfaite, pour un choix de $j(n)$, il suffit que le long toute ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M}_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ l'ensemble-mobile au temps t, $G(M_n,t)$, ait son diamètre $d(M_n,t)$ tendant vers zéro pour $t\to+\infty$. Pour démontrer cet énoncé prenons les $j(n)$, $\to+\infty$ avec n, de sorte que (2°) à la suite de Théorème 6.5 ait lieu, ainsi que les inégalités $d(M_n,\tau_n)<1/n$ (avec $\tau_n = t_{n,j(n)}$). $M_n, \in G(M_n,0)$, est à distance ne surpassant pas $h_2(M_n,\tau_n)$ $(<1/n)$; il existe donc un point $Q_n, \in G(M_n,\tau_n)$, de façon que

$$|Q_n - M_n| < \frac{1}{n};$$

Q_n et $M'_n\,(=F(M_n,\tau_n))$ tous les deux étant sur $G(M_n,\tau_n)$, on aura

$$|M'_n - Q_n| \leqq d(M_n,\tau_n) < \frac{1}{n};$$

par conséquent

$$|M'_n - M_n| \leqq |M'_n - Q_n| + |Q_n - M_n| < \frac{2}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Puisque $\lim |M'_n - M_n| = 0$ et que les M_n sont partout denses dans D, il résulte que les M'_n le sont.

Supposons maintenant que les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M}_n)$, où $\mathfrak{M}_n = G(M_n,t)$, $(n=1,2,\ldots)$ sont *stables* $(+)$ (Définition 6.4), les M_n étant partout denses dans D;

donc il y a stabilité $(+)$, relativement à $G(M_n, t_0)$ pour tout t_0. Selon définition la stabilité $(+)$ pour un M_n équivaut à l'inclusion

$$(\mathrm{a}_1) \qquad G(M_n, 0) \subset L^+(M_n).$$

Selon Théorème 5.9 ceci revient à ce que *pour tout* $\delta > 0$ *l'ensemble* $G(M_n, 0)$ *a une décomposition du type*-(δ) (cf. (5.8)):

$$(\mathrm{a}_2) \qquad G(M_n, 0) = \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} G_{j,\delta}(M_n),$$

de sorte que

$$(\mathrm{a}_3) \qquad \varliminf_{t \to +\infty} h_2(G_{j,\delta}(M_n); t) \leqq \delta \qquad (j = 1, \ldots, k_n(\delta) \text{ fini}),$$

où

$$(\mathrm{a}_4) \qquad h_2(G_{j,\delta}(M_n); t) = \text{l'écart } (G_{j,\delta}(M_n), G(M_n, t));$$

dans (a_2) les $G_{j,\delta}(M_n)$ $(\delta, n$ fixes) sont disjoints;

$$G_{j,\delta}(M_n) \subset S(Q_{n,j}, \delta), \quad Q_{n,j} = Q_{n,j}(\delta) \in G(M_n, 0).$$

En raison de (a_3) il existe une suite $t_{n,i} = t_{n,i}(j, \delta), \to +\infty$ avec i, et un nombre $\gamma(n, j, \delta)$ $(\geqq 0)$, de sorte que

$$h_2(G_{j,\delta}(M_n); t_{n,i}) \to \gamma(n, j, \delta), \leqq \delta, \quad \text{pour } i \to +\infty.$$

On peut trouver un entier $i(n) = i(n, j, \delta)$ de sorte que

$$(6.13) \qquad h_2(G_{j,\delta}(M_n); \tau_n) < \delta + \frac{1}{n}, \quad \tau_n = \tau_n(j, \delta) = t_{n,i(n)} > n;$$

$$j = 1, 2, \ldots, k_n(\delta); \quad n = 1, 2, \ldots$$

On trouve un résiduel $R(\delta)$ de D de façon que, si $M \in R(\delta)$, on a

$$M \in S^0(M_n, \varrho_n) \quad \text{pour} \quad n = n_\nu = n_\nu(M, \delta), \to +\infty \text{ avec } \nu;$$

par suite les inégalités (a_5) ont lieu, pour $M \in R(\delta)$ et pour $n = n_1, n_2, \ldots$; nous choisissons les $n_\nu(M, \delta)$ suffisamment grands afin que

$$(6.14) \qquad h_2(G^{n_\nu}_{j,\delta}(M);\ \tau_{n_\nu}(j, \delta)) < 2\delta \quad \text{pour} \quad M \in R(\delta) \qquad (j = 1, \ldots, k_{n_\nu}(\delta));$$

selon (6.13) on a

$$(6.14\,\text{a}) \qquad \tau_{n_\nu}(j, \delta)\ (> n_\nu) \to +\infty \text{ avec } \nu \qquad (j \leqq k_{n_\nu}(\delta));$$

on note que (6.14) *a lieu pour* $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ *pour* M *sur le résiduel*

$$(6.14\,\text{b}) \qquad R = R(1)\, R(\tfrac{1}{2})\, R(\tfrac{1}{3}) \ldots,$$

qui est indépendant de j *et de* δ.

Nous allons démontrer que

$$(6.15) \qquad C(\mathfrak{M})\ (\mathfrak{M} = G(M, 0)) \text{ est stable } (+) \text{ pour tout } M \in R \quad (6.14\,\text{b}),$$

c'est-à-dire, que $G(M, 0) \subset L^+(M)$ sur R.

En effet, au cas contraire il existe un point M sur R et un point Q_0 sur $G(M, 0)$, de sorte que

$$(\text{b}_1) \qquad |Q_0 - L^+(M)| = \tau > 0.$$

En prenant $0 < \varrho < \tau$, on note que *le voisinage* $S(Q_0, \varrho)$ *de* Q_0 *ne contient pas de points des ensembles* $G(M, t)$ *pour* $t \geqq t(\varrho)$ (assez grand). Posons $\delta = 1/s$, où s est un entier tel que $0 < 1/s < \varrho/4$. Soit

$$(\text{b}_2) \qquad G(M, 0) = \sum_{j=1}^{k} G^{n_\nu}_{j,\delta}(M) \qquad [k = k_{n_\nu}(\delta),\ n_\nu = n_\nu(M, \delta)]$$

une décomposition du type-(δ) d'accord avec (a_6); on a

$$(\text{b}_3) \qquad Q_0 \in G^{n_\nu}_{j',\delta}(M), \text{ où } j' = j(M, \nu, \delta)\ (\leqq k_{n_\nu}(\delta)),$$

cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots$; on observe que

$$(\text{b}_3{}') \quad G^{n_\nu}_{j',\delta}(M) \subset S(Q(\nu, \delta), \delta), \text{ le centre } Q(\nu, \delta) = Q(M, \nu, \delta) \text{ étant sur } G(M, 0),$$

et que

$$S(Q(\nu, \delta), \delta) \subset S^0(Q_0, \varrho), \quad |Q_0 - Q(\nu, \delta)| \leqq \delta = \frac{1}{s}\left(< \frac{\varrho}{4}\right).$$

D'après (6.14)–(6.14 b)

(b$_4$) $$h(\nu,\delta)=h_2(G^{n_\nu}_{j',\delta}(M);\ \tau_{n_\nu}(j',\delta))<2\,\delta \qquad \left[j'=j(M,\nu,\delta),\ \delta=\frac{1}{s},\ \nu=1,2,\ldots\right].$$

Or $h(\nu,\delta)=$ l'écart $(G^{n_\nu}_{j',\delta}(M),\ G(M,\tau_{n_\nu}(j',\delta)))$ est le maximum pour $N\in G^{n_\nu}_{j',\delta}(M)$ de la distance $|N-G(M,\tau_{n_\nu}(j',\delta))|$; il se peut que ce maximum ne soit pas atteint, puisque $G^{n_\nu}_{j',\delta}(M)$ n'est pas nécessairement fermé. Étant donné un $\varepsilon_\nu>0$, il existe un point $N'=N'(M,\nu,\delta)\in G^{n_\nu}_{j',\delta}(M)$, de sorte que

$$h(\nu,\delta)-\varepsilon_\nu<|N'-G(M,\tau_{n_\nu}(j',\delta))|\leqq h(\nu,\delta).$$

Sur $G(M,\ldots)$ fermé il se trouve un point $S'=S'(M,\nu,\delta),\ \in G(M,\ldots)$, tel que $|N'-G(M,\ldots)|=|N'-S'|$; donc

(b$_5$) $$h(\nu,\delta)-\varepsilon_\nu<|N'-S'|\leqq h(\nu,\delta) \qquad [N'\in G^{n_\nu}_{j',\delta}(M),\ S'\in G(M,\tau_{n_\nu}(j',\delta))].$$

On observe [(b$_3$), (6.14 a)] que

(b$_6$) $$\tau_{n_\nu}(j',\delta)=\tau(M,\nu,\delta)\ (>n_\nu(M,\delta))\to+\infty \text{ avec } \nu.$$

Choisissons les $\varepsilon_\nu\to 0$ pour $\nu\to+\infty$. Soit $\nu_1,\nu_2,\ldots$ une suite infinie d'entiers positifs, $\to+\infty$, choisie de telle manière qu'à la fois les quatre limites

$$\lim_i h(\nu_i,\delta)=h_0,\ \lim_i N'(M,\nu_i,\delta)=N'(M,\delta),\ \lim_i S'(M,\nu_i,\delta)=S'(M,\delta),\ \lim_i Q(\nu_i,\delta)=Q'$$

(cf. (b$_3'$)) existent. Selon (b$_4$), (b$_5$) on aura

(b$_7$) $$|N'(M,\delta)-S'(M,\delta)|=h_0\leqq 2\,\delta.$$

Rappelons-nous que

$$Q(\nu,\delta)\in G(M,0),\quad N'(M,\nu,\delta)\in G^{n_\nu}_{j',\delta}(M)\subset G(M,0),$$
$$G^{n_\nu}_{j',\delta}(M)\subset S(Q(\nu,\delta),\delta)\ (\subset S^0(Q_0,\varrho)),\quad |Q_0-Q(\nu,\delta)|\leqq\delta;$$

donc

(b$_8$) $$Q'\in G(M,0),\ \ N'(M,\delta)\in G(M,0),\ \ N'(M,\delta)\in S(Q',\delta)\ (\subset S(Q_0,\varrho)),\ \ |Q_0-Q'|\leqq\delta.$$

D'autre part $S'(M,\nu_i,\delta)\in G(M,\tau(M,\nu_i,\delta))$ (b$_6$) et $\tau(M,\nu_i,\delta)$ tendant vers $+\infty$ avec i, on voit que

(b$_9$) $$\text{le point } S'(M,\delta)\in L^+(M),$$

$L^+(M)$ étant l'ensemble de points d'accumulation des ensembles $G(M,t)$, pour $t\to+\infty$. Or selon (b$_8$) les points $N'(M,\delta)$, Q_0 se trouvent dans la région sphérique $S(Q',\delta)$; d'où

$$|Q_0-N'(M,\delta)|\leqq 2\,\delta,$$

et en vertu de (b_7) on obtient

$$|Q_0 - S'(M,\delta)| \leqq |Q_0 - N'(M,\delta)| + |N'(M,\delta) - S'(M,\delta)| \leqq 4\,\delta = \frac{4}{s} < \varrho\,;$$

c'est-à-dire, le point $S'(M,\delta)$ de $L^+(M)$ (b_9) se trouve dans le domaine sphérique $S^0(Q_0,\varrho)$; c'est une contradiction à (b_1) (où $\tau > \varrho$). Nous avons établi (6.15), ce qui nous permet de faire l'énoncé suivant.

THÉORÈME 6.16. *Si les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M,0)$) sont stables* (+) *(Définition 6.4) pour M sur un ensemble partout dense dans D, il en résultera qu'il existe un residuel R de D, tel que l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M,0)$) sera stable* (+) *pour tout point M de ce résiduel.*

7. Stabilité sur des ensembles partout denses et sur des résiduels (suite)

Démontrons maintenant la possibilité des décompositions du type-(δ) avec le caractére de continuité spécifié à la suite de 6.13. Soit M' un point particulier et soit $G(\delta/4)$ l'ensemble de points à distance $\leqq \delta/4$ de $G(M',0)$. Considérons la famille $\{S(Q,\delta/2)\}$ de toutes les sphères (fermées) dont les centres Q sont sur $G(M,'0)$ ($\delta > 0$ étant fixe); selon le lemme de Borel-Lebesgue il y a un nombre $k'(\delta)$ fini de ces sphères, $S(Q_j',\delta/2)$ ($j = 1, \dots k_n(\delta)$), de sorte que

$$(1°) \qquad \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} S\left(Q_i', \frac{\delta}{2}\right) \supset G(M',0), \quad Q_j' \in G(M',0).$$

Si Q^0 est un point quelconque sur $G(\delta/4) - G(M'0)$, il se trouve un point N sur $G(M',0)$, tel que $|Q^0 - G(M',0)| = |Q^0 - N|$; on a $|Q^0 - N| \leqq \delta/4$; N appartient à une sphère $S(Q_j',\delta/2)$, donc $|Q_j' - N| \leq \delta/2$; conséquemment $|Q_j' - Q^0| \leqq |Q_j' - N| + |N - Q^0| \leqq \frac{3}{4}\delta$, c'est-à-dire $Q^0 \in S(Q_j', \frac{3}{4}\delta)$; d'où

$$(2°) \qquad \sum_{j=1}^{k'(\delta)} S(Q_j', \tfrac{3}{4}\delta) \supset G\left(\frac{\delta}{4}\right).$$

Nous réalisons une décomposition de $G(M',0)$ du type-(δ):

$$(3°) \qquad G(M',0) = \sum_{j=1}^{k'(\delta)} G_{j,\delta}(M'),$$

en posant

$$(4°) \qquad G_{1,\delta}(M') = S(Q_1',\delta)\,G(M',0), \quad G_{2,\delta}(M') = S(Q_2',\delta)\,G(M',0) - G_{1,\delta}(M'),$$
$$G_{3,\delta}(M') = S(Q_3',\delta)\,G(M',0) - G_{1,\delta}(M') - G_{2,\delta}(M'), \dots$$

Considérons l'ensemble $G(M, 0)$ et soit M variable dans un voisinage de M'

$$[M \in G(M, 0),\ M' \in G(M', 0)];$$

selon l'hypothese (4.1 b)

(5°) $\qquad h(M, M') =$ l'écart mutuel $(G(M, 0), G(M', 0)) \to 0$, quand $M \to M'$.

Choisissons Q_j sur $G(M, 0)$ à la distance minimum de Q'_j. Il s'ensuit alors que

(6°) $$|Q_j - Q'_j| \to 0 \text{ avec } |M - M'| \qquad (j = 1, \ldots, k'_n(\delta));$$

en effet, au cas contraire il existe un $j = j_1$ et une suite de points M, tendant vers M', pour laquelle $Q_{j_1} \to Q''_{j_1} \neq Q'_{j_1}$, où Q''_{j_1} est un point sur $G(M', 0)$; il y aurait une suite infinie de points $M, \to M'$, pour lesquels les ensembles $G(M, 0)$ n'ont pas de points dans un voisinage du point Q'_{j_1}, qui appartient à $G(M', 0)$; ce serait contraire à (5°). En tenant compte de (5°), (6°), on trouve un $\nu(\delta)$ positif (qui peut dépendre de M'), tel que

(7°) $$h(M, M') \leqq \nu(\delta) \text{ entraîne } Q_j \in S\left(Q'_j, \frac{\delta}{4}\right),$$

$$j = 1, \ldots, k'(\delta), \quad G(M, 0) \subset G\left(\frac{\delta}{4}\right).$$

Il découle que $S(Q_j, \delta) \supset S(Q'_j, \frac{3}{4}\delta)$; donc en vertu de (2°)

(8°) $$\sum_{j=1}^{k'(\delta)} S(Q_j, \delta) \supset G\left(\frac{\delta}{4}\right) \supset G(M, 0) \quad \text{pour} \quad h(M, M') \leqq \nu(\delta),$$

les Q_j étant certains points sur $G(M, 0)$. Ceci permet d'effecteur une décomposition de $G(M, 0)$ du type-(δ), tout à fait à la manière de celle de $G(M', 0)$ [(3°), (4°)]:

(9°) $$G(M, 0) = \sum_{j=1}^{k'(\delta)} G'_{j,\delta}(M),$$

(10°) $$G'_{1,\delta}(M) = S(Q_1, \delta)\, G(M, 0), \quad G'_{2,\delta}(M) = S(Q_2, \delta)\, G(M, 0) - G'_{1,\delta}(M),$$

$$G'_{3,\delta}(M) = S(Q_3, \delta)\, G(M, 0) - G'_{1,\delta}(M) - G'_{2,\delta}(M), \ldots,$$

pourvu que $h(M, M') \leqq \nu(\delta)$ (7°); ici les points $Q_j, \in G(M, 0)$ peuvent tenir à M — les Q_j sont choisis comme on l'a indiqué à la suite de (5°).

Si $A(M')$, $B(M)$ sont des ensembles, M' est un point fixe et $h(M, M')$ est l'écart mutuel de ces deux ensembles, *nous écrirons*

(7.1) $$B(M) \sim A(M')$$

pour dénoter que $h(M, M') \to 0$ *avec* $|M - M'|$.

D'après (6°) $S(Q_j, \delta) \sim S(Q'_j, \delta)$ $(j = 1, 2, \ldots, k'(\delta))$; (5°) signifie que $G(M, 0) \sim G(M', 0)$. En comparaissant les deux décompositions [(9°), (10°)], [(3°), (4°)], on obtient d'abord $G'_{1,\delta}(M) \sim G_{1,\delta}(M')$; puis, tour à tour:

$$S(Q_2, \delta) \sim S(Q'_2, \delta), \quad S(Q_2, \delta)\, G(M, 0) \sim S(Q'_2, \delta)\, G(M', 0),$$

$$G'_{2,\delta}(M) = S(Q_2, \delta)\, G(M, 0) - G'_{1,\delta}(M) \sim S(Q'_2, \delta)\, G(M', 0) - G_{1,\delta}(M') = G_{2,\delta}(M');$$

tout pareillement on obtient $G'_{3,\delta}(M) \sim G_{3,\delta}(M')$ et ainsi de suite; on établit

$$G'_{j,\delta}(M) \sim G_{j,\delta}(M'), \quad j = 1, 2, \ldots, k'(\delta). \tag{7.2}$$

Nous avons donc vérifié la possibilité de la réalisation de (6.a$_6$). En utilisant la notation plus détaillée:

$$G_{j,\delta}(M_n) = G_{j,\delta}(M_n, 0), \quad G^n_{j,\delta}(M) = G^n_{j,\delta}(M, 0), \tag{7.3}$$

nous envisageons les deux décompositions du type-(δ) (6.a$_2$), (6.a$_6$) des ensembles $G(M_n, 0)$, $G(M, 0)$. D'accord avec (3°), (4°), où l'on pose

$$M' = M_n, \quad k'(\delta) = k_n(\delta), \quad Q'_j = Q^n_{n,j},$$

on effectue la décomposition (6.a$_2$) ainsi:

$$G(M_n, 0) = \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} G_{j,\delta}(M_n, 0), \quad \text{où} \quad G_{1,\delta}(M_n, 0) = S(Q^n_{n,1}, \delta)\, G(M_n, 0), \tag{1_0}$$

$$G_{2,\delta}(M_n, 0) = S(Q^n_{n,2}, \delta)\, G(M_n, 0) - G_{1,\delta}(M_n, 0),$$

$$G_{3,\delta}(M_n, 0) = S(Q^n_{n,3}, \delta)\, G(M_n, 0) - G_{1,\delta}(M_n, 0) - G_{2,\delta}(M_n, 0); \ldots;$$

ici les $Q^n_{n,j} = Q^n_{n,j}(\delta) \in G(M_n, 0)$; d'autre part selon (9°), (10°), où $k'(\delta) = k_n(\delta)$, $Q_j = Q_{n,j}$, nous effectuons la décomposition (6.a$_6$) comme il suit:

$$G(M, 0) = \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} G^n_{j,\delta}(M, 0), \quad \text{où} \quad G^n_{1,\delta}(M, 0) = S(Q_{n,1}, \delta)\, G(M, 0), \tag{2_0}$$

$$G^n_{2,\delta}(M, 0) = S(Q_{n,2}, \delta)\, G(M, 0) - G^n_{1,\delta}(M, 0),$$

$$G^n_{3,\delta}(M, 0) = S(Q_{n,3}, \delta)\, G(M, 0) - G^n_{1,\delta}(M, 0) - G^n_{2,\delta}(M, 0), \ldots,$$

$$Q_{n,j} = Q_{n,j}(\delta) \in G(M, 0), \quad \text{pour} \quad |M - M_n| \leqq \tau^*_n(\delta);$$

ici $\tau^*_n(\delta)$ positif est choisi suffisamment petit afin que

$$h(M, M_n) = \text{l'écart mutuel } (G(M, 0), G(M_n, 0)) \leqq \nu_n(\delta) \ (>0), \tag{3_0}$$

$\nu_n(\delta)$ étant si petit que (d'accord avec (5°), (7°))

$$(4_0) \qquad Q_{n,j} \in S\left(Q^n_{n,j}, \frac{\delta}{4}\right), \quad G(M, 0) \subset G_n\left(\frac{\delta}{4}\right), \qquad j = 1, \ldots, k_n(\delta),$$

$G_n(\delta/4)$ désignant l'ensemble de points distants $\leqq \delta/4$ de $G(M_n, 0)$.

NOTATION 7.4. Nous écrivons (pour M assez proche de M_n)

$$(7.4\,\mathrm{a}) \qquad h_1^{j,\delta,n}(M, t_0; t) = \text{l'écart}\,(G^n_{j,\delta}(M, t), G(M, t_0)),$$

$$(7.4\,\mathrm{b}) \qquad h_1^{j,\delta}(M_n, t_0; t) = \text{l'écart}\,(G_{j,\delta}(M_n, t), G(M_n, t_0)),$$

où

$$(7.4\,\mathrm{c}) \qquad G^n_{j,\delta}(M, t) = F(G^n_{j,\delta}(M, 0), t), \quad G_{j,\delta}(M_n, t) = F(G_{j,\delta}(M_n, 0), t).$$

La transformation ponctuelle $F(Q, t)$ établit une correspondance bicontinue et biunivoque entre les points de $G(M, t)$ et de $G(M, 0)$; donc [(2_0), (7.4 c)] la formule

$$(5_0) \qquad G(M, t) = \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} G^n_{j,\delta}(M, t)$$

représente une décomposition de $G(M, t)$, les $G^n_{j,\delta}(M, t)$, $j = 1, \ldots, k_n(\delta)$, étant disjoints; tout pareillement [(1_0), (7.4 c)] on a la décomposition

$$(6_0) \qquad G(M_n, t) = \sum_{j=1}^{k_n(\delta)} G_{j,\delta}(M_n, t).$$

En rappelant la définition (5.8) des décompositions du type-(δ), on observe que, tandis que les décompositions (2_0), (1_0) de $G(M, 0)$ et de $G(M_n, 0)$ sont du type-(δ) (avec l'intervention de certaines sphères de rayon δ), les décompositions (5_0), (6_0) sont d'un genre que nous appellerons *type*-$(\delta(n, t))$; de plus, en construisant les $G^n_{j,\delta}(M, t)$, $G_{j,\delta}(M_n, t)$ on n'emploie pas directement des sphères, mais plutôt les transformations des sphères, qui interviennent dans (1_0), (2_0):

$$(7_0) \quad S(Q_{n,i}, t; \delta) = F(S(Q_{n,i}, \delta), t), \quad S(Q^n_{n,i}, t; \delta) = F(S(Q^n_{n,i}, \delta), t) \qquad (i = 1, \ldots, k_n(\delta))$$

[ici $F(H, t)$ signifie l'ensemble de points $F(N, t)$, quand le point N parcourt l'ensemble donné H]; les ensembles (7_0) ne sont pas en général des sphères, mais ce sont topologiquement des sphères; le point $F(Q_{n,i}, t)$, qui correspond au centre $Q_{n,i}$ de $S(Q_{n,i}, \delta)$, est dans l'intérieur de $S(Q_{n,i}, t; \delta)$; on fait une remarque analogue relativement $F(Q^n_{n,i}, t)$. En tenant compte de (1_0), (2_0), (7_0) on obtient

(8_0) $G^n_{1,\delta}(M,t)=S(Q_{n,1},t;\delta)\,G(M,t),\quad G^n_{2,\delta}(M,t)=S(Q_{n,2},t;\delta)\,G(M,t)-G^n_{1,\delta}(M,t),$

$$G^n_{3,\delta}(M,t)=S(Q_{n,3},t;\delta)\,G(M,t)-G^n_{1,\delta}(M,t)-G^n_{2,\delta}(M,t),\ \ldots;$$

$G_{1,\delta}(M_n,t)=S(Q^n_{n,1},t;\delta)\,G(M_n,t),\quad G_{2,\delta}(M_n,t)=S(Q^n_{n,2},t;\delta)\,G(M_n,t)-G_{1,\delta}(M_n,t),\ \ldots;$

on suppose ici que $|M-M_n|\leqq\tau^*_n(\delta)$ *d'accord avec* (3_0), (4_0);

$$(9_0)\qquad G^n_{j,\delta}(M,t)\subset S(Q_{n,j},t;\delta),\quad G_{j,\delta}(M_n,t)\subset S(Q^n_{n,j},t;\delta).$$

DEFINITION 7.5. Soit $\bar D_0$ un sous-ensemble quelconque, fermé et borné, de D; à $\bar D_0$ il correspond un module de continuité $\mu(u,t)$ [>0, défini pour $0<u\leqq u_0$ et pour t fini, $\mu\to 0$ avec u] de la transformation $F(Q,t)$, de sorte que

$$(7.5\,\mathrm{a})\qquad |F(Q'',t)-F(Q',t)|\leqq\mu(|Q''-Q'|,t)\ \text{ pour } Q',Q'' \text{ sur } \bar D_0$$

(on a $|Q''-Q'|\leqq\mu(|Q''-Q'|,0)$).

Soit M sur un sous-ensemble quelconque $\bar D$, fermé, borné, de D; alors il existe un autre sous-ensemble $\bar D_0$ fermé de D, tel que $\bar D_1\subset\bar D_0$ et que (7.5 a) *ait lieu pour*

$$(7.5\,\mathrm{b})\qquad Q'',Q' \text{ sur } G(M,0) \text{ et } M \text{ sur } \bar D_1.$$

[$G(M,0)\subset\bar D_0$ pour $M\in\bar D_1$]. En raison de (5_0), (6_0), (8_0), (9_0) et vu que

$$F(Q_{n,j},t)\in G(M,t),\quad F(Q^n_{n,j},t)\in G(M_n,t),$$

on déduit

$$S(Q_{n,j},t;\delta)\subset S(F(Q_{n,j},t),\delta(n,t)),\quad S(Q^n_{n,j},t;\delta)\subset S(F(Q^n_{n,j},t),\delta(n,t)),$$

où on peut prendre

$$(7.6)\qquad \delta(n,t)=\mu(\delta,t)\qquad(\text{si } M\in\bar D_1,\ M_n\in\bar D_1)$$

et on est mené au résultat suivant.

(7.7) *Pour $M, M_n\in\bar D_1$* (Définition 7.5) *les décompositions* (5_0), (6_0) *de* $G(M,t)$, $G(M_n,t)$ *sont du type-$\mu(\delta,t)$ (définition* (5.8)), *pourvu que* $|M-M_n|\leqq\tau^*_n(\delta)$ (*cf.* (3_0), (4_0))*; pour tout t fini* $\lim\limits_{\delta\to 0}\mu(\delta,t)=0$.

Revenons maintenant aux conditions de Théorème 6.16. Introduisons

HYPOTHÈSE 7.8. $d(G(M_n,t))$ désignant le diamètre de $G(M_n,t)$, on a

$$(7.8\,\mathrm{a})\qquad \lim_{t\to+\infty} d(G(M_n,t))=0\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Dans la suite nous prendrons $\delta=1/n$ et choisirons

$$(\mathrm{a}_1)\qquad j=j(n)\left(\leqq k_n(\delta)=k_n\left(\frac{1}{n}\right)=k_n\right)$$

de sorte que (avec la notation (7.3))

$$(\mathrm{a}_2) \qquad M_n \in G_{j,\,1/n}(M_n, 0).$$

La possibilité d'un tel choix de j découle de ce que $M_n \in G(M_n, 0)$, tandis que (1_0) $G(M_n, 0) = \sum_i G_{i,\,1/n}(M_n, 0)$ $(i = 1, \ldots, k_n)$. En tenant compte de l'hypothèse (7.8) et de (6.13) (avec $\delta = 1/n$, $j = j(n)$ (a_1)), nous choisissons une suite d'entiers

$$i = i(n) \left(= i\left(n, j, \frac{1}{n}\right)\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

tels que $[6.\mathrm{a}_4)$, (7.4 b)]

$$(\mathrm{a}_3) \qquad h_2(G_{j,\,1/n}(M_n, 0); \tau_n) = \text{l'écart}\,(G_{j,\,1/n}(M_n, 0),\ G(M_n, \tau_n))$$
$$= h_1^{j,\,1/n}(M_n, \tau_n; 0) < \frac{2}{n}, \quad \tau_n = t_{n,\,i(n)} > n, \quad d(G(M_n, \tau_n)) < \frac{1}{n}\cdot$$

pour $n = 1, 2, \ldots$. Selon $(6.\mathrm{a}_5)$, (7.4 a)

$$(\mathrm{a}_4) \qquad \text{l'écart}\,(G^n_{j,\,1/n}(M, 0),\ G(M, \tau_n)) = h_1^{j,\,1/n,\,n}(M, \tau_n; 0) < \frac{3}{n}$$

pour $M \in S^0(M_n, \varrho_n)$, où $\varrho_n = \varrho_n(1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$; ici ϱ_n positif est choisi suffisamment petit et certainement ne surpassant pas $\tau_n^*(1/n)$ (voir (3_0), (4_0)). Vu (a_3), (6.8), on observe que

$$(\mathrm{a}_5) \quad \text{l'écart}\,(G_{j,\,1/n}(M'_n, -\tau_n),\ G(M'_n, 0)) = h_1^{j,\,1/n}(M'_n, 0; -\tau_n) < \frac{2}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où

$$(\mathrm{a}_6) \qquad M'_n = F(M_n, \tau_n).$$

Tout pareillement en raison de (a_4), (7.4 a)

$$(7.9) \qquad \text{l'écart}\,(G^n_{j,\,1/n}(M', -\tau_n),\ G(M', 0)) = h_1^{j,\,1/n,\,n}(M', 0; -\tau_n) < \frac{3}{n}$$

pour $M' = F(M, \tau_n) \in F(S^0(M_n, \varrho_n), \tau_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ donc, en tenant compte de la notation (7_0), on voit que (7.9) a lieu pour

$$(\mathrm{a}_7) \qquad M' \in S^0(M_n, \tau_n; \varrho_n) \quad [S^0(\cdots) = \text{l'intérieur de } S(\cdots)];$$

on observe que le point M'_n (a_6), qui correspond à M_n, est contenu dans le domaine (ouvert, connexe) $S^0(M_n, \tau_n; \varrho_n)$; il existe un ϱ'_n *positif* de sorte que la sphère $S(M'_n, \varrho'_n)$ soit contenue dans $S^0(M_n, \tau_n; \varrho_n)$; *d'où* (7.9) *a lieu pour*

$$(7.9\,\mathrm{a}) \qquad M' \in S^0(M'_n, \varrho'_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or on peut établir le résultat suivant.

(7.10) *Les* M_n *étant partout denses dans* D, *dans l'hypothèse* (7.8) *l'ensemble* $M'_1, M'_2, \ldots$ [(a$_6$), (a$_3$)] *jouit de la même propriété.*

En effet, notons d'abord que

$$h_1^{j,1/n}(M_n, \tau_n; 0) \ (\mathrm{a}_3) = \max. |Q - G(M_n, \tau_n)| \quad \text{pour } Q \in G_{j,1/n}(M_n, 0),$$

où $j = j(n)$ (a$_1$); M_n (a$_2$) étant sur $G_{j,1/n}(M_n, 0)$, selon (a$_3$) on obtient

$$|M_n - G(M_n, \tau_n)| \leqq h^{j,1/n}(\cdots) < \frac{2}{n};$$

sur $G(M_n, \tau_n)$ un point N' existe de sorte que le premier membre est $|M_n - N'|$; donc $|M_n - N'| < 2/n$; d'autre part les points N', $M'_n = F(M_n, \tau_n)$ (a$_6$) tous les deux étant sur $G(M_n, \tau_n)$, on voit que

$$|N' - M'_n| \leqq d(G(M_n, \tau_n)) < \frac{1}{n} \qquad (\mathrm{a}_3);$$

donc en vertu de l'inégalité triangulaire:

$$|M_n - M'_n| \leqq |M_n - N'| + |N' - M'_n| < \frac{3}{n};$$

la conclusion dans (7.10) *s'ensuit.*

En tenant compte de (7.9), (7.9 a) et du fait que les M'_n sont partout denses dans D, selon le théorème dans (D; p. 139) on conclut qu'il existe un *résiduel* R', $\subset D$, tout point M duquel appartient a une suite infinie de sphères ouvertes:

$$M \in S^0(M'_{n_\nu}, \varrho'_{n_\nu}), \qquad n_\nu = n_\nu(M), \ \nu = 1, 2, \ldots,$$

où $n_\nu \to \infty$ avec ν; *de plus*

(7.11) $$\text{l'écart } (G^n_{j,1/n}(M, -\tau_n), G(M, 0)) < \frac{3}{n} \qquad (j = j(n) \ (\mathrm{a}_1))$$

pour $n = n_1, n_2, \ldots$ *et pour* M *sur ce résiduel* R'. En nous rappelant (2$_0$), (5$_0$), (8$_0$), avec $n = n_\nu$, $\delta = 1/n$, $t = -\tau_{n_\nu}$, nous observons que l'ensemble $G^{n_\nu}_{j,1/n}(M, -\tau_n)$ figurant dans (7.11) est un composant dans la décomposition

(7.11 a) $$G(M, -\tau_{n_\nu}) = \sum_{i=1}^{k'} G^{n_\nu}_{i,1/n_\nu}(M, -\tau_{n_\nu}) \qquad (k' = k_{n_\nu},\ M \in R');$$

selon (7.7) cette décomposition est du type $-\mu(1/n, -\tau_n)$, où $n = n_\nu$; si dans (7.11 a) on suppose que M appartient à une partie bornée de R', le module de continuité $\mu(\cdots)$ (Définition 7.5), qui intervient dans (7.11 a) correspondra à une certaine portion bornée de D, d'accord avec (7.5)–(7.7). Nous allons établir le résultat

(7.12) *Dans l'hypothèse* 7.8 *et si les* M_n *sont partout denses dans* D, *on aura*

(7.12 a) $$L^-(M)\,G(M,0) \neq 0 \text{ pour tout } M \text{ sur } R',$$

où R' *est le résiduel introduit à propos de* (7.11).

Écrivons $H(\nu)$ pour $G^n_{j(n),1/n}(M, -\tau_n)$, où $n=n_\nu$; l'écart

$$h_1^n\,[=h_1^{j,1/n,n}(M,0;\,-\tau_n)] \qquad (n=n_\nu)$$

au premier membre dans (7.11) est le maximum de $|Q-G(M,0)|$ pour Q sur $H(\nu)$. En prenant un point (quelconque) Q_ν sur $H(\nu)$ on peut trouver un point Q'_ν sur $G(M,0)$ tel que $|Q_\nu - G(M,0)| = |Q_\nu - Q'_\nu|$; vu (7.11)

$$|Q_\nu - Q'_\nu| \leqq h_1^{n_\nu} < \frac{3}{n_\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Une suite ν_s $(s=1,2,\ldots)$, $\to +\infty$, existe pour laquelle Q'_{ν_s} converge vers un point Q' sur $G(M,0)$; on obtient

$$|Q'-Q_{\nu_s}| \leqq |Q'-Q'_{\nu_s}| + |Q'_{\nu_s} - Q_{\nu_s}| < |Q'-Q'_{\nu_s}| + \frac{3}{n_\nu} \qquad [\nu=\nu_s;\; s=1,2,\ldots];$$

par là, $Q_{\nu_s} \to Q'$ quand $s\to\infty$. Or Q_{ν_s} est sur $H(\nu_s)$, c'est-à-dire sur

$$G^n_{j(n),1/n}(M.\,-\tau_n),\ \subset G(M,\,-\tau_n),\ \text{où } n=n_\nu \text{ et } \nu=\nu_s;$$

d'autre part (a_3), τ_{n_ν}, $> n_\nu$ $(\nu=\nu_s)$, $\to +\infty$ pour $s\to\infty$; conséquemment Q' sur $G(M,0)$ est un point d'accumulation pour les t infinis négatifs des ensembles $G(M,t)$ (si M quelconque fixe est sur R'); *d'où la conclusion* (7.12 a).

Remarque 7.13. Selon Définition 4.19 la relation (7.12 a) peut être exprimée en disant que, pour $M\in R'$, *l'ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$ $(\mathfrak{M}=G(M,0))$ *est stable* $(-)$, *spécialement à* $G(M,0)$.

(7.14) *Dans l'hypothèse* 7.8 *et les* M_n *étant partout denses dans* D, *on aura*

(7.14 a) $$L^-(M)\,G(M,t_0) \neq 0,$$

dès que le point $F(M,t_0)$ *est sur le résiduel* R'.

Pour établir ceci notons d'abord que dans (7.11) $j=j(n)$, τ_n sont indépendants du point M, $\in R'$, dont il s'agit dans cette formule; d'autre part les valeurs n_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ de n peuvent tenir à M. En posant $M_0=F(M,t_0)$ et en supposant que $F(M,t_0)\in R'$, nous envisageons (7.11) pour M_0:

$$\text{l'écart } (G^n_{j(n),1/n}(M_0,-\tau_n),\ G(M_0,0)) < \frac{3}{n},$$

où $n = n_\nu(M_0)$ et

$$G^n_{j(n),\,1/n}(M_0,\ -\tau_n) \subset G(M_0,\ -\tau_n);$$

en raison de (6.8) ces formules équivalent à

$$\text{(b}_1\text{)} \qquad \text{l'écart } (G^n_{j(n),\,1/n}(F(M,t_0),\ -\tau_n),\ G(M,t_0)) < \frac{3}{n},$$

avec $n = n_\nu(M_0) = n_\nu(F(M,t_0))$ et

$$\text{(b}_2\text{)} \qquad G^n_{j(n),\,1/n}(F(M,t_0),\ -\tau_n) \subset G(M,\ t_0 - \tau_n).$$

Moyennant un raisonnement du genre employé pour démontrer (7.12), (7.12a), à partir de (b_1) et de (b_2) il résulte que $G(M, t_0)$ contient au moins un point Q, qui est un point d'accumulation des ensembles $G(M, t_0 - \tau_n)$ (en effet des ensembles au premier membre de (b_2)) pour $t_0 - \tau_n = t_0 - \tau_{n_\nu} \to -\infty$; *d'où la conclusion* (7.14a).

En tenant compte de (7.12) et (7.14) nous résumons ainsi.

Théorème 7.15. *Supposons que les ensemble-trajectoires* $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M, 0)$) *sont stables* $(+)$ (*Définition* 6.4) *sur l'ensemble* $M_1, M_2, \ldots$ *partout dense dans* D*; alors sur un certain résiduel* R *de* D *on aura la conclusion de Théorème* 6.16. *Supposons de plus que le diamètre* $d(G(M_n, t))$ *de* $G(M_n, t)$ *tend vers zéro pour* $t \to +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Alors il existe un résiduel* R' *de* D (*voir le texte à propos de* (7.11)) *de sorte que, pour* M *sur* R', *l'ensemble-trajectoire* $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M, 0)$) *est stable* $(-)$, *spécialement à* $G(M, 0)$ (*Définition* 4.19, *aussi* (7.12a)); *en outre* $C(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M} = G(M, 0)$) *sera stable* $(-)$, *spécialement à toute position* $G(M, t_0)$ *de l'ensemble-mobile, pour laquelle le point* $F(M, t_0)$ *lui aussi est sur* R' (*cela signifie* (7.14a)).

Remarque 7.16. Dans les hypothèses indiquées, pour M sur le résiduel RR', il y a à la fois la stabilité des espèces specifiées pour les t infinis positifs et negatifs.

Remarque 7.17. Les conclusions dans les théorèmes 6.5, 6.10, 6.16, 7.15 constatent que pour le point M sur un résiduel de D l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M} = G(M, 0)$ (ou dans des cas particuliers — simplement la «trajectoire d'un point-mobile»), est stable $(+)$ ou $(-)$ dans un des plusieurs sens. Or un résiduel contient toujours des ensembles parfaits (de U_r) [M. Denjoy (D; p. 143)]. D'autre part dans (4.12), (4.15), (4.21), (4.22), (4.24), (4.26) et Théorème 5.13 nous avons établi certains réultats (de caractère topologique) quand la trajectoire d'un point-mobile M, ou l'ensemble-trajectoire d'un ensemble-mobile $G(M, 0)$, jouit de propriété de stabilité d'une des plusieurs espèces considérées, pour M sur un ensemble parfait P. Conséquemment on peut lier les théorèmes 6.5, 6.10, 6.16, 7.15 avec les résultats que nous venons d'indiquer.

8. Stabilité de Liapounoff

Comme nous l'avons fait dans les sections antérieures, nous supposons que $F(M, t)$ [spécifiant la position du point-mobile au temps $t\,(F(M, 0) = M)$ sur la trajectoire $C(M)$] varie continûment avec le point $M, \in D$, pour tout t.

HYPOTHÈSE 8.1. *Soit $\bar{D}_0$ un sous-ensemble quelconque fermé borné de M; supposons que la continuité de $F(M, t)$, comme fonction de M sur $\bar{D}_0$ est uniforme par rapport à t sur tout segment fini $\alpha \leqq t \leqq \beta$.*

La condition qui intervient dans cette hypothèse n'est pas très étroite; un tel mouvement ponctuel peut être facilement réalisé moyennant certains systèmes différentiels d'espèces assez générales.

Correspondant à un $\bar{D}_0$ $(\subset D)$ il existe un module de continuité $\mu(u, t)$ (Définition 7.5), $\mu(u, t) > 0$ pour $0 < u \leqq u_0$ tel que

$$\lim_{u \to 0} \mu(u, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \text{ fini,}$$

de sorte que

$$|F(M'', t) - F(M', t)| \leqq \mu(|M'' - M'|, t) \tag{8.2}$$

pour M', M'' sur $\bar{D}_0$ et pour tous les t; *dans l'hypothèse* (8.1) *à tout segment* $[\alpha, \beta]$ *fini il correspond un module de continuité $\mu(u; \alpha, \beta)$, indépendent de t, positif et tendant vers zéro avec u (> 0), de sorte que*

$$|F(M'', t) - F(M', t)| \leqq \mu(|M'' - M'|;\, \alpha, \beta) = \mu(|M'' - M'|;\, \beta, \alpha) \tag{8.2 a}$$

pour M', M sur $\bar{D}_0$ et pour $\alpha \leqq t \leqq \beta$.

On peut toujours supposer que $\mu(u, t)$, $\mu(u; \alpha, \beta)$ *sont non-croissants pour u (> 0) décroissant.*

DÉFINITION 8.3. Étant donnée une trajectoire ponctuelle particulière $C(M^0)$, nous dirons que *le mouvement est stable* $(t_0, +\infty; L)$ *relativement à* $C(M^0)$, si

$$\eta(M^0, M; t_0) \to 0, \text{ quand } M \to M^0, \tag{8.3 a}$$

où

$$\eta(M^0, M; t_0) = \max.\,(t \geqq t_0)\,|F(M, t) - F(M^0, t)|; \tag{8.3 b}$$

pareillement on définit la stabilité $(t_0, -\infty; L)$ relativement à un $C(M^0)$.

On observe que

$$\eta(M^0, M; t_0) \leqq \max.\,(t \geqq t_0)\,\mu(|M - M^0|, t); \tag{8.3 c}$$

ici $\mu(\cdots)$ *correspond à un $\bar{D}_0$, contenant un voisinage de M_0, où se trouve M.* Aussi, pour $t_0 \leqq t < +\infty$,

(1°) $|F(M,t)-F(M^0,t)| \leqq \eta(M^0,M;t_0) \leqq \eta_{M^0}(|M-M^0|;t_0)$
$$= \max.\,(|N-M^0| \leqq |M-M^0|)\,\eta(M^0,N;t_0);$$

on voit que (8.3 a) *équivaut à ce que* $\eta_{M^0}(\delta;t_0)\to 0$, *quand* $\delta\,(>0)\to 0$. Dans l'hypothèse (8.1) supposons que

(2°) $$|F(M,t_0)-F(M^0,t_0)| < \varepsilon$$

et que le mouvement est stable $(t_0, +\infty; L)$ relativement à $C(M^0)$; alors selon (8.2 a), où (α,β) est le segment d'extrémités $0, -t_0$ et $M''=F(M,t_0)$, $M'=F(M^0,t_0)$, $t=-t_0$, on obtient

(3°) $$|M-M^0| \leqq \mu(|M''-M'|;0,-t_0) \leqq \mu(\varepsilon;0,-t_0).$$

Écrivons

(4°) $$\delta(\varepsilon)=\delta(\varepsilon,t_0)=\eta_{M^0}(\mu(\varepsilon;0,-t_0);t_0);$$

on observe que $\delta(\varepsilon)>0$ pour $\varepsilon\to 0$ et que $\delta(\varepsilon)\to 0$ avec ε.

En raison de (1°)–(3°) on conclut ainsi:

(8.4) Soient M^0, t_0 fixes; *dans l'hypothèse* 8.1, *si le mouvement est stable* $(t_0, +\infty; L)$ *relativement à la trajectoire* $C(M^0)$, *il s'ensuit que pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe un* $\delta(\varepsilon)>0$, *indépendant de* t *et* $\to 0$ *avec* ε, *de sorte que*

(8.4 a) $$|F(M,t_0)-F(M^0,t_0)|<\varepsilon \ \textit{ entraîne}$$
$$|F(M,t)-F(M^0,t)| \leqq \delta(\varepsilon) \quad \textit{pour} \quad t_0 \leqq t < +\infty;$$

$\delta(\varepsilon)$ (4°) *est indépendant de* M, t, *mais peut tenir à* M^0; $\delta(\varepsilon)\ (>0)\to 0$ *avec* ε. On peut établir la réciproque.

En vertu de (8.4), (8.4 a), dans l'hypothèse 8.1, la stabilité d'un mouvement au sens $(t_0, +\infty; L)$, relativement à une trajectoire particulière $C(M^0)$, revient à *la stabilité au sens de M. Liapounoff*, relativement à la même trajectoire (sur $(t_0, +\infty)$).

(8.5) *Dans l'hypothèse* 8.1, *si pour un* t_0 *particulier le mouvement est stable* $(t_0, +\infty; L)$ *relativement à* $C(M^0)$, *il en sera le même au sens* $(t_1, +\infty; L)$ *pour tout* t_1 *fini*.

En effet, si $t_1>t_0$ la conclusion dans (8.5) est une conséquence immédiate de Définition 8.3. En outre, si $t_1<t_0$, on obtient (1°) ainsi que (8.2 a):

$$|F(M,t)-F(M^0,t)| \leqq \mu(|M-M^0|;t_1,t_0) \quad \text{pour} \quad t_1 \leqq t \leqq t_0;$$

soit $\mu_1(u)$ une fonction qui décroit vers zéro avec u (>0), telle que

$$\mu_1(u) \geqq \eta_{M^0}(u; t_0), \quad \mu_1(u) \geqq \mu(u; t_1, t_0);$$

on a

$$|F(M, t) - F(M^0, t)| \leqq \mu_1(|M - M^0|) \qquad (t_1 \leqq t < +\infty);$$

$\mu_1(u)$ étant indépendant de t, la conclusion dans (8.5) s'ensuit.

THÉORÈME 8.6. *Dans l'hypothèse* 8.1, *les* M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *étant partout denses dans* D, *si le mouvement est stable* $(t_0, +\infty; L)$ *relativement à chaque trajectoire* $C(M_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *il s'ensuit qu'il existe un résiduel* R *de* D *de sorte que, pour tout point* M *de* R:

la trajectoire $C(M)$ *est la 'limite' d'une suite de* $C(M_{n_\nu})$, *où* $n = n_\nu(M) \to \infty$ *avec* ν, *au sens uniforme par rapport au point mobile au temps* t, *pour* $\tau \leqq t < +\infty$, τ *étant arbitraire — cela voulant dire que pour le point* M $(\in R)$, *considéré, on a*

(8.6 a) $$|F(M, t) - F(M_{n_\nu}, t)| \to 0 \quad \text{pour } \nu \to \infty$$

uniformément par rapport à t *pour* $\tau \leqq t < +\infty$.

En effet selon l'hypothèse il existe une fonction $\mu_n(u)$ positive et $\to 0$ avec u (>0), telle que

$$|F(M, t) - F(M_n, t)| \leqq \mu_n(|M - M_n|) \quad \text{pour } -n \leqq t < +\infty \text{ et } n = 1, 2, \ldots;$$

les seconds membres ici étant indépendants de t, il en résulte que

$$|F(M,t) - F(M_n, t)| \leqq \frac{1}{n} \qquad (-n \leqq t < +\infty),$$

dès que $M \in S^0(M_n, \varrho_n)$, où $M \in S^0(M_n, \varrho_n)$, les ϱ_n positifs et suffisamment petits étant indépendants de t. Vu (D; p. 139), il existe un résiduel R, $\subset D$, de D, tout point duquel appartient à une infinité de sphères $S^0(M_n, \varrho_n)$; ainsi pour M sur R on aura

$$M \in S^0(M_{n_\nu}, \varrho_{n_\nu}), \quad |F(M, t) - F(M_{n_\nu}, t)| \leqq \frac{1}{n_\nu} \quad (-n_\nu \leqq t < +\infty; \ \nu = 1, 2, \ldots),$$

où $n_\nu = n_\nu(M)$ tend vers $+\infty$ avec ν; *le théorème est établi.*

REMARQUE 8.7. La conclusion incorporée dans Théorème 8.6 représente ce que, peut-être, on pourrait exprimer en disant que *le mouvement est stable* $(+; L)$, *au sens faible*, relativement à la trajectoire $C(M)$; ou bien, que *le mouvement est faiblement Liapounoff-stable*, pour $t \to +\infty$, relativement à $C(M)$; $C(M)$, pour le point M considéré, est 'limite' au sens de (8.6 a) d'une suite de trajectoires, relativement à chacune desquelles le mouvement est stable au sens ordinaire de Liapounoff (pour $t \to +\infty$).

(8.8) *La stabilité* $(+; L)$, *au sens faible, est impliquée par la stabilité* $(\tau, +\infty; L)$ (dans l'hypothèse 8.1).

En effet, supposons que le mouvement est stable $(\tau, +\infty; L)$ relativement une trajectoire $C(M^0)$ donnée; donc

$$(\mathrm{a}_1) \qquad |F(M, \tau) - F(M^0, \tau)| < \varepsilon \text{ entraîne}$$
$$|F(M, t) - F(M^0, t)| \leqq \delta(\varepsilon) \qquad (t \geqq \tau;\ \delta(\varepsilon), >0, \to 0, \text{ avec } \varepsilon)$$

ici on peut prendre $\delta(\varepsilon)$ non croissant pour $\varepsilon > 0$ décroissant. Pour τ fixe, M^0 est limite d'une suite de points M', $\neq M^0$, tels que $|F(M', \tau) - F(M^0, \tau)| \to 0$. Considérons un $M' \neq M^0$, particulier, suffisamment proche de M^0 de sorte que

$$(\mathrm{a}_2) \qquad |F(M', \tau) - F(M^0, \tau)| < \varepsilon;$$

alors selon (a_1)

$$(\mathrm{a}_3) \qquad |F(M', t) - F(M^0, t)| \leqq \delta(\varepsilon) \quad (t \geqq \tau).$$

Soit M variable tel que

$$(\mathrm{a}_4) \qquad |F(M, \tau) - F(M', \tau)| < \varepsilon;$$

alors $[(\mathrm{a}_4), (\mathrm{a}_3)]$

$$(\mathrm{a}_5) \quad |F(M, \tau) - F(M^0, \tau)| \leqq |F(M, \tau) - F(M', \tau)| + |F(M', \tau) - F(M^0, \tau)| < \varepsilon + \delta(\varepsilon);$$

vu (a_5), il resulte (a_1) que

$$(\mathrm{a}_6) \qquad |F(M, t) - F(M^0, t)| \leqq \delta_1(\varepsilon) = \delta(\varepsilon + \delta(\varepsilon)) \quad (\to 0 \text{ avec } \varepsilon)$$

pour $\tau \leqq t < +\infty$; de plus $[(\mathrm{a}_6), (\mathrm{a}_3)]$

$$(\mathrm{a}_7) \quad |F(M, t) - F(M', t)| \leqq |F(M, t) - F(M^0, t)|$$
$$+ |F(M^0, t) - F(M', t)| \leqq \delta_1(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \quad (\to 0 \text{ avec } \varepsilon)$$

pour $\tau \leqq t < +\infty$. Puisque (a_4) entraîne (a_7), le mouvement est stable $(\tau, +\infty; L)$ relativement à $C(M')$, pour tous les M' infiniment voisins de M^0; quand $M' \to M^0$ on peut choisir ε $(>0) \to 0$; la constatation en italiques que nous venons de faire, ainsi que (a_3), signifient que le mouvement est stable $(+; L)$, au sens faible, relativement à $C(M^0)$; *l'énoncé* (8.8) *est verifié.*

Dans les conditions du théorème soit E_s l'ensemble de points $M, \in D$, tels que le mouvement est stable $(+; L)$, au sens faible relativement à M. L'ensemble $E_i = D - E_s$ consiste des points M' *d'instabilité faible* $(+, L)$; cet espèce d'instabilité est simplement l'alternative de la stabilité que nous venons de mentionner. Si M' est un point de E_i et si les M'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) constituent une suite de points, qui convergent vers M', le mouvement étant stable ($\tau, +\infty; L$) relativement à chacun de ces M'_ν — alors il s'ensuit que la 'convergence' des trajectoires $C(M'_\nu)$ vers $C(M)$ est non-uniforme par rapport à t, pour $\tau \leqq t < +\infty$; c'est-à-dire que l'uniformité de convergence, par rapport à t ($\tau \leqq t < +\infty$), est en défaut.

(8.9) Dans l'hypothèse (8.1) et sans hypothèse relativement aux M_n ($n = 1, 2, \ldots$), *si l'ensemble d'instabilité* E_i *est inexhaustible* (n'est pas gerbé), $E_s = D - D_i$ ne sera pas un résiduel — dans ce cas, d'après le théorème, *les* M_n *ne seront pas partout denses dans* D.

9. Pénétration dans tel ensemble donné d'avance

Comme dans les sections 4–8, soit D fermé dans U_r, possiblement non borné. La correspondance *biunivoque* et *bicontinue* $Q' = F(Q, t)$, pour t fini fixe, entre les points Q, Q' dans D, constitue une transformation ponctuelle laissant D invariant. Posons en particulier

$$(9.1) \qquad F^{[1]}(Q) = F(Q) = F(Q, 1) = Q^{[1]}, \quad F^{[-1]}(Q) = F(Q, -1) = Q^{[-1]}, \quad F^{[0]}(Q) = Q,$$

Si E est un ensemble quelconque dans D, nous employons la même notation; $F(E) = F^{[1]}(E)$ est l'ensemble de points $F^{[1]}(Q)$ obtenu en laissant le point Q décrire E, $F^{[0]}(E) = E$, $F^{[n]}(E) = F^{[1]}F^{[n-1]}(E) = F^{[-1]}F^{[n+1]}(E)$ (n entier) est l'ensemble de points $F(Q, n)$ obtenu quand le point Q parcourt E.

DÉFINITION 9.2. $G(M, t)$ (Définition 4.1) désignant un mouvement d'un ensemble-mobile sur les ensemble-trajectoires $C(\mathfrak{M})$ (où $\mathfrak{M} = G(M, 0)$), défini pour tout M sur D, *nous écrivons* $E(P)$ *pour désigner la réunion d'ensembles* $G(M, 0)$, *obtenue en laissant le point* M *parcourir l'ensemble donné* P ($\subset D$).

La définition suivante d'une classe (C) d'ensembles E est à peu près celle que M. Denjoy à donnée dans (D; p. 152 sq.) pour fonder le raisonnement de Poincaré sur la rentrée des trajectoires stables (ponctuelles) dans tel ensemble donné d'avance:

(9.3) *Tout ensemble* E *de* (C) *est fermé (borné) et contient des ensembles parfaits; de plus, si* $E \in (C)$:

(1°) toute portion de E, contenant un ensemble parfait, appartient à (C);

(2°) les transformés $F^{[1]}(E)$, $F^{[-1]}(E)$ sont dans (C);

(3°) à E donné il correspond un entier $N = N(E)$, de sorte que toute suite contenant au moins N transformés de E, en contient deux ayant en commun un ensemble $H \in (C)$.

Dans la définition dans (D; p. 152) d'une classe (C) les ensembles de (C) sont toujours parfaits (dans U_r).

(9.4) *La classe* (C_0) est définie par rapport à un mouvement $G(M, t)$ d'une ensemble-trajectoire; ce sont les ensembles parfaits (bornés) $P, \subset D$, pour chacun desquels l'ensemble $E(P)$ (Définition 9.2) est dans la classe (C) (9.3).

(9.5) *L'ensemble $E(P)$ est fermé et contient des ensembles parfaits.*

Afin de démontrer (9.5), notons d'abord que (P étant parfait)

$$(1_0) \qquad E(P) = \sum_{M \in P} G(M, 0);$$

$G(M, 0)$ contient M, donc $E(P) \supset P$. Soit Q_j $(j = 1, 2, \ldots)$ une suite de points, $Q_j \in E(P)$, qui converge vers un point Q. Vu (1_0) à tout Q_j il correspond un M_j, tel que

$$(2_0) \qquad Q_j \in G(M_j, 0), \quad M_j \in P.$$

Pour une suite d'entiers $j_1, j_2, \ldots$ les M_{j_ν} convergent vers un point, soit M^*; M^* sera sur P parfait; de plus (1_0)

$$(3_0) \qquad E(P) \supset G(M^*, 0).$$

Selon hypothèse $G(M, 0)$ varie continûment avec M, conséquemment

$$(4_0) \qquad h_\nu = \text{l'écart mutuel } G(M^*, 0), G(M_{j_\nu}, 0)) \to 0 \qquad (\text{pour } \nu \to \infty).$$

Supposons, s'il est possible, que Q n'est pas sur $G(M^*, 0)$ fermé; alors

$$\delta = |Q - G(M^*, 0)| > 0.$$

un entier ν_0 existerait tel que

$$|Q_{j_\nu} - G(M^*, 0)| > \frac{\delta}{2} \qquad (\nu \geqq \nu_0);$$

h_ν étant le plus grand des deux écarts

$$\text{l'écart } (G(M^*, 0), G(M_{j_\nu}, 0)), \quad \text{l'écart } (G(M_{j_\nu}, 0), G(M^*, 0)) = \eta_\nu$$

et Q_{j_ν} (2_0) étant sur $G(M_{j_\nu}, 0)$, on aurait

$$h_\nu \geqq \eta_\nu \geqq |Q_{j_\nu} - G(M^*, 0)| > \frac{\delta}{2} \quad \text{pour } \nu \geqq \nu_0;$$

ceci est contraire à (4_0). Donc Q est sur $G(M^*, 0)$ et (3_0) on voit que Q se trouve sur $E(P)$. D'où $E(P)$ est fermé; (9.5) *est etabli.*

En examinant la démonstration du théorème dans (D; p. 153), que M. Denjoy a donnée dans (D; p. 154, 155), on observe que ce raisonnement s'applique quand on modifie la définition des classes (C), comme nous l'avons fait dans (9.3). Afin de s'en apercevoir il faut seulement remplacer les ensembles parfaits, qui interviennent dans la démonstration, par certains ensembles fermés, chacun contenant un ensemble parfait; aussi on fait emploi de la remarque suivante.

(9.6) *Si $E \in (C)$, d'accord avec* (9.3), *ou plus généralement si E est fermé (borné) et contient un ensemble parfait, on peut trouver une portion de E de diamètre si petit que l'on veut et aussi contenant un ensemble parfait; si $E \in (C)$, cette portion appartiendra à (C) (selon* (9.3, 1°)).

Voici le théorème (D; p. 153) pour notre classe (C).

(9.7) *Soit $E\,(\subset D)$ un ensemble quelconque de la classe (C)* [9.3, 1°, 2°, 3°]; *soit $W(E)$ l'ensemble de points Q sur E, tels qu'à chacun Q de $W(E)$ une suite infinie d'entiers positifs correspond, $n_\nu = n_\nu\ (Q)$ $(\nu = 1, 2, \ldots;\ n_\nu(Q) \to \infty$* avec ν), *de sorte que* (9.1):

$$Q^{[n_\nu]} = F^{[n_\nu]}(Q),\ \in E,\ \to Q \qquad (\textit{pour } \nu \to \infty). \tag{9.7 a}$$

L'ensemble $W(E)$ est partout dense sur le noyau parfait $N(E)$ de E.

On vérifie d'abord que $W(E)$, où $E \in (C)$, contient un point. Soit $\bar{\omega}$ une portion quelconque de E; si $\bar{\omega}$ ne contient pas un ensemble parfait, nous n'en pouvons rien conclure; mais si $\bar{\omega}$ contient un ensemble parfait, $\bar{\omega}$ sera dans (C) selon (9.3, 1°) et $W(\bar{\omega})$ sera non-vide; donc pour toute portion $\bar{\omega}$ de $N(E)$ l'ensemble $W(\bar{\omega})$ existe; *par là la conclusion dans* (9.7).

THÉORÈME 9.8 *Supposons que $P\ (\subset D)$ parfait et toutes les portions de P sont dans une classe (C_0) (Définition* 9.4)*; soit $E^*(P)$ l'ensemble de points M' sur P, tels qu'à chaque point M' de $E^*(Q)$ une suite d'entiers positifs n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, qui tendent vers $+\infty$, correspond de sorte que $G(M', 0)$ contienne un point Q', vers lequel tend la suite de ses transformés $Q'^{[n_\nu]}\ (= F(Q', n_\nu))$, le point $Q'^{[n_\nu]}$ étant sur un ensemble $G(M_{n_\nu}, 0)$ et M_{n_ν} étant sur P $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Cet ensemble $E^*(P)$ est partout dense sur P.*

En effet, notons d'abord que l'ensemble

$$E(P) = \sum_{M \in P} G(M, 0) \tag{a$_1$}$$

est de la classe (C) (9.3). L'ensemble $W(E(P))$ $(\subset E(P))$, défini d'accord avec (9.7), est partout dense sur le noyau parfait $N(E(P))$ de $E(P)$. Si Q' est un point sur $W(E(P))$, donc sur $E(P)$ (a$_1$), d'après (9.7), (9.7 a) il s'ensuit qu'il existe une suite infinie d'entiers positifs, $n_\nu = n_\nu(Q')$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $\to +\infty$ avec ν, de sorte que (a$_2$) $$Q'^{[n_\nu]}, \in E(P), \to Q';$$

vu (a$_1$) des points M', M_{n_ν} existent, tels que

(a$_3$) $$Q' \in G(M', 0), \quad Q'^{[n_\nu]} \in G(M_{n_\nu}, 0), \quad M' \in P, \quad M_{n_\nu} \in P.$$

M' est un point de $E^*(P)$. Selon l'hypothèse toute portion $\bar{\omega}$ de P est de la classe (C_0); en raison des développements que nous venons de donner, $E^*(\bar{\omega})$ existe pour toute portion $\bar{\omega}$ de P. *D'où la conclusion du théorème.*

REMARQUE 9.9. Pour tout point M' sur l'ensemble $E^*(P)$ du théorème l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M}')$, où $\mathfrak{M}' = G(M', 0)$, est *stable* $(+)$ *spécialement à* $G(M', 0)$ (Définition 4.19).

Cet énoncé s'établit en notant que (a$_3$) $G(M', 0)$ contient Q' et que $G^{[n_\nu]}(M', 0) = G(M', n_\nu)$ contient le point $Q'^{[n_\nu]}(=F(Q', n_\nu))$; donc la distance entre $G(M', 0)$, $G(M', n_\nu)$ satisfait à l'inégalité

$$|G(M', 0) - G(M', n_\nu)| \leqq |Q' - Q'^{[n_\nu]}|;$$

vu (a$_2$) le premier membre ici tend vers zéro, d'où

(9.9 a) $$\underline{\lim}_{t \to +\infty} |(G(M', 0) - G(M', t)| = 0 \qquad (M' \in E^*(P));$$

la conclusion dans (9.9) découle d'après Définition 4.19.

L'espèce de stabilité, dont il s'agit dans le théorème et qui a lieu pour l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M}')$ (où $\mathfrak{M}' = G(M', 0)$) si $M' \in E^*(P)$, est en général plus stricte que la stabilité $(+)$ spécialement à $G(M', 0)$.

REMARQUE 9.10. Si pour un point M' donné, n désignant des entiers et $d(\cdots)$ désignant le diamètre de $(\cdots)$, on a

(9.10 a) $$\underline{\lim} \, |G(M', 0) - G(M', n)| = 0, \quad dG(M', n) \to 0$$

pour $n \to +\infty$, il s'ensuit que sur $G(M', 0)$ il existe un point Q, de sorte que pour une suite d'entiers n_ν, $\to +\infty$ avec ν, les 'consequents' $Q^{[n_\nu]}$ de Q convergent vers Q.

Afin de vérifier ceci notons d'abord (9.10 a) que pour une suite n_ν on a

$$\eta(M', n_\nu) = |G(M', 0) - G(M', n_\nu)| \to 0.$$

Sur $G(M' 0)$, $G(M', n_\nu)$ on peut trouver des points Q_{n_ν}, Q'_{n_ν}, respectivement, de façon que $\eta(M', n_\nu) = |Q_{n_\nu} - Q'_{n_\nu}|$. En choisissant une suite partielle de n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, mais en gardant la même notation, on peut disposer de sorte que

$$|Q - Q_{n_\nu}| \to 0, \quad \text{où } Q \text{ est un point sur } G(M', 0).$$

Par suite
$$|Q-Q^{[n_\nu]}| \leqq |Q-Q_{n_\nu}|+|Q_{n_\nu}-Q'_{n_\nu}|+|Q'_{n_\nu}-Q^{[n_\nu]}|$$
$$\leqq |Q-Q_{n_\nu}|+\eta(M', n_\nu)+d\,G(M', n_\nu);$$

le troisième membre tend vers zéro; *d'où la conclusion dans* 9.10.

Si Q est un point sur $E(P)$ (Définition 9.2), *désignons par* $H(Q)$ *l'ensemble de points* M *sur* P, *pour lesquels* $G(M, 0)$ *contient* Q; $H(Q)$ existe. Dans les hypothèses du théorème, si $Q \in W(E(P))$ $(\subset E(P))$, soit $H(Q)$ l'ensemble correspondant; pour tout M de $H(Q)$ il existe une suite n_ν $(\to +\infty)$, de façon que $Q^{[n_\nu]}$ est sur $G(M_{n_\nu}, 0)$, où M_{n_ν} est sur P, et que $Q^{[n_\nu]}\to Q$ (Q étant sur $G(M, 0)$); un tel point M appartient à $E^*(P)$; par suite $H(Q)\subset E^*(P)$ et on voit que la réunion des $H(Q)$, décrivant $W(E(P))$, est contenue dans $E^*(P)$. D'autre part, si M' est un point de $E^*(P)$, $G(M', 0)$ contiendra un point Q', tel qu'une suite de conséquents $Q'^{[n_\nu]}$ $[\in G(M'_{n_\nu}, 0)$ avec $M'_{n_\nu}\in P]$ existe, de sorte que $Q'^{[n_\nu]}\to Q'$ — c'est une conséquence de la définition de $E^*(P)$; ce point Q' appartient à $W(E(P))$ et $M'\in H(Q')$; par là $E^*(Q)$ est contenu dans la réunion des $H(Q)$, Q parcourant $W(E(P))$; conséquemment

$$\sum_{Q\in W(E(P))} H(Q)=E^*(P). \tag{9.11}$$

(9.12) Nous dirons que les ensembles E constituent une classe $(\bar{C})$, si les conditions (9.3, 1°), (9.3, 2°) ont lieu, tandis que la condition (9.3, 3°) est modifiée ainsi:

($\bar{3}$°) à E donne de $(\bar{C})$ il correspond un entier $N=N(E)$, tel que toute suite de n, $\geqq N$, conséquents de E en contient deux, ayant en commun une portion de l'un et de l'autre, cette portion contenant un ensemble parfait (selon (9.3, 1°) une telle portion appartiendra à $(\bar{C})$).

(9.13) *La classe* $(\bar{C}_0)$ consiste d'ensembles parfaits P $(\subset D)$, pour chacun desquels $E(P)$ (Définition 9.2) appartient à $(\bar{C})$ (9.12).

Une class (C) (9.3, 1°, 2°, 3°), dont tout ensemble contient la fermeture d'un ensemble ouvert, est une classe $(\bar{C})$ (voir (D; p. 155)).

En suivant à peu près la démonstration donnée par M. Denjoy dans (D; p. 155–157) pour sa classe modifiée (C) on aboutit à l'énoncé suivant.

(9.14) *Si* E *appartient à une classe* $(\bar{C})$ (9.12) *et si* $W(E)$ *est défini comme dans* (9.7), (9.7 a), *il s'ensuit que* $W(E)$ *est un résiduel du noyau parfait* $N(E)$ *de* E.

Si P est un ensemble parfait de $(\bar{C}_0)$ (9.13), l'ensemble $W(E(P))$ [(9.7), (9.7 a)] sera un résiduel du noyaus parfait $N(E(P))$ de $E(P)$; dans ce cas la question se pose si l'ensemble $E^*(P)$, défini dans Théorème 9.8 et donc représentable sous la forme (9.11), est un résiduel de P. A présent nous laissons cette question de côté.

10. Pénétration dans tel ensemble donné d'avance (suite)

Nous allons maintenant fonder notre raisonnement, sur la pénétration dans tel ensemble donné d'avance, moyennant les hypothèses topologiques, incorporées dans la définition suivante.

DÉFINITION 10.1. *Une classe* (C^*) *d'ensembles parfaits* P $(\subset D)$ *est définie ainsi :*

(10.1 a) toute portion de P (de (C^*)) est dans (C^*);

(10.1 b) les transformés $F^{[1]}(P)\,(=P^{[1]})$, $F^{[-1]}(P)\,(=P^{[-1]})$ (9.1) sont dans (C^*);

(10.1 c) à tout P de (C^*) il correspond un entier $N=N(P)$ de façon que dans toute suite de N transformés (de rangs croissants) de P,

$$P^{[n_1]},\ P^{[n_2]},\ \ldots,\ P^{[n_N]},$$

on peut en trouver deux, $P'=P^{[n_i]}$, $P''=P^{[n_j]}$, où $i<j$, de sorte que (avec la notation de Définition 9.2)

(1°) $$E(P')\cdot P'' \text{ contient un ensemble de } (C^*)$$

et que

(2°) $$P'\cdot E(P'') \text{ contient un ensemble de } (C^*).$$

On peut admettre les conditions (10.1 c, 1°) (10.1 c, 2°) comme satisfaites pour différentes couples d'entiers $i<j$; dans la suite nous envisageons des classes (C^*) sans une de ces deux conditions.

THÉORÈME 10.2. *Envisageons un ensemble* $P\in(C^*)$ *(Définition* 10.1). *Soit* $W_1^*(P)$ *l'ensemble de points* M *sur* P *tels que si* $M\in W_1^*(P)$, *il existe une suite de conséquents de* M *(de rangs non-décroissants),* $M^{[n_k]}$, *tels que*

(10.2 a) $|M^{[n_k]}-G(M,0)|$ (= la distance de $M^{[n_k]}$ à $G(M,0)$)$\to 0$ *pour* $k\to\infty$.

En outre, soit $W_2^*(P)$ *l'ensemble de points* M *sur* P, *à chacun desquels des entiers* $n_1\leqq n_2\leqq\cdots$ *correspondent, de sorte qu'il y a sur* P *un point* Q_k, *tendant vers* M, *tandis que l'ensemble* $G(Q_k,0)$ *contient un point* N_k, *dont le consequent* $N_k^{[n_k]}$ *satisfait aux conditions*

(10.2 b) $$N_k^{[n_k]}\in P\quad (k=1,2,\ldots),\qquad N_k^{[n_k]}\to M\quad (\textit{pour } k\to\infty).$$

Les ensembles $W_1^*(P)$, $W_2^*(P)$ *ont en commun un ensemble* $W^*(P)$ *partout dense sur* P. *De plus, sans la condition* (10.1 c, 2°) $W_1^*(P)$ *sera encore partout dense sur* P.

Notons d'abord que, si H $(\subset D)$ est un ensemble quelconque et n est un entier,

$$(1_0) \qquad E(H^{[n]}) = E(H)^{[n]}.$$

En effet

$$E(H) = \sum_{M \in H} G(M, 0), \quad E(H)^{[n]} = \sum_{M \in H} G(M, 0)^{[n]} = \sum_{M \in H} G(M, n)$$
$$= \sum_{M \in H} G(M^{[n]}, 0) = \sum_{M^{[n]} \in H^{[n]}} G(M^{[n]}, 0) = \sum_{M' \in H^{[n]}} G(M', 0) = E(H^{[n]}).$$

Nous écrivons

$$(2_0) \qquad H = 0\,(C^*)$$

et dirons que H est vide (C^*), si H ne contient aucun ensemble de (C^*).

Dans la suite de transformés $P, P^{[1]}, \ldots, P^{[N-1]}$, où $N = N(P)$, soit j *le plus petit rang*, de sorte que les conditions (10.1 c, 1°), (10.1 c, 2°) aient lieu à la fois pour $P' = P^{[i]}$, $P'' = P^{[j]}$, où i est un entier, $\geqq 0$, inférieur à j; il existe deux ensembles H', H'' de la classe (C^*) de sorte que

$$(3_0) \qquad H' \subset E(P^{[i]}) \cdot P^{[j]}, \quad H'' \subset P^{[i]} \cdot E(P^{[j]});$$

on outre, si $0 \leqq m < j$, on aura

(4_0) ou bien $E(P^{[i]}) \cdot P^{[m]} = 0\,(C^*)$ ou bien $P^{[i]} \cdot E(P^{[m]}) = 0\,(C^*)$, dès que i $(\geqq 0)$ est inférieur à m. *Démontrons maintenant que* $i = 0$. Si $i > 0$, appliquons la transformation $F^{[-i]}$ (9.1) dans les formules (3_0); en tenant compte de (1_0), on obtient

$$A' = H'^{[-i]} \subset E(P) \cdot P^{[j-i]}, \quad A'' = H''^{[-i]} \subset P \cdot E(P^{[j-i]})$$

A', A'' sont dans (C^*) (10.1 b); en écrivant $m = j - i$ $(0 < i < j)$, on déduit (vu que $A' \subset P^{[m]}$, $A'' \subset E(P)^{[m]}$):

$$B^1 = A'^{[-m]} \subset P, \quad C^1 = A''^{[-m]} \subset E(P);$$

$$(\mathrm{a}_1) \qquad B^{1[m]} (= A') \subset E(P), \qquad (\mathrm{a}_2) \quad C^{1[m]} (= A'') \subset P;$$

$$(\mathrm{a}_3) \qquad B^{1[m]} \subset P^{[m]}, \qquad (\mathrm{a}_4) \quad C^{1[m]} \subset E(P)^{[m]} = E(P^{[m]});$$

selon (10.1 b) les ensembles $B^1, C^1, B^{1[m]}, C^{1[m]}$ appartiennent à (C^*); en raison de $[(\mathrm{a}_3), (\mathrm{a}_1)]$ et de $[(\mathrm{a}_4), (\mathrm{a}_2)]$

$$(5_0) \qquad E(P) \cdot P^{[m]} \neq 0\,(C^*), \quad P \cdot E(P^{[m]}) \neq 0\,(C^*)$$

(c'est-à-dire, les ensembles dans (5_0) contiennent, tous les deux, des ensembles de (C^*)); mais $m\,(= j - i)$ est inférieur à j; donc il y a contradiction à (4_0); *il faut que* $i = 0$.

Nous revenons au texte qui précède (3_0), (4_0). *Parmi les transformés* P, $P^{[1]}$, $P^{[2]}$, ... *il y a un premier, soit* $P^{[n_1]}$, *tel que*

$$(6_0) \qquad E(P)\cdot P^{[n_1]} \text{ contient un } H' \in (C^*),$$
$$P\cdot E(P^{[n_1]}) \text{ contient un } H'' \in (C^*);$$

pour $m=1, 2, \ldots, n_1-1$ (si $n_1>1$)

$$(7_0) \qquad \text{ou bien } E(P)\cdot P^{[m]}=0\ (C^*), \text{ ou bien } P\cdot E(P^{[m]})=0\ (C^*).$$

Vu que $H'\subset P^{[n_1]}$, il y a un ensemble P_1, tel que (6_0)

$$(8_0) \qquad P_1\,(=H'^{[-n_1]})\subset P, \quad P_1^{[n_1]}\,(=H')\subset E(P), \quad P_1\in(C^*);$$

on peut supposer ($\delta(\cdots)$ désignant le diamètre) que

$$(9_0) \qquad \delta(P_1)<\tfrac{1}{2}\,\delta(P)$$

[en gardant la même notation pour P_1, $H'\,(=P_1^{[n_1]})$, on remplace P_1, si c'est nécessaire, par une portion convenable, comme dans le cas analogue dans (D; p. 154); on tient compte de (10.1 a)]. En outre (6_0) $H''\subset E(P)^{[n_1]}$, donc il existe un ensemble H_1, de façon que

$$(10_0) \qquad H_1\,(=H''^{[-n_1]})\subset E(P), \quad H_1^{[n_1]}\,(=H'')\subset P, \quad H_1\in(C^*);$$

on peut faire en sorte que $\delta(H_1)<\frac{1}{2}\delta(P)$. En procédant ainsi pas à pas, nous obtenons des ensembles P_k ($k=1, 2, \ldots$), en nombre infini, ainsi que des ensembles H_k, ($k=1, 2, \ldots$) et des entiers n_k, de façon que

$$(11_0) \qquad P\supset P_1\supset P_2\supset\cdots, \quad P_k\in(C^*), \quad \delta(P_k)<2^{-k}\,\delta(P), \quad H_k\in(C^*);$$

$$(12_0) \qquad P_k^{[n_k]}\subset E(P_{k-1}), \quad H_k\subset E(P_{k-1}), \quad H_k^{[n_k]}\subset P_{k-1}, \qquad k=1, 2, \ldots,$$

où $P_0=P$. *Les* n_k *sont choisis successivement pour* $k=1, 2, \ldots$, *comme les entiers les plus petits possibles* (comme n_1 l'était dans (6_0)) *afin de satisfaire* (11_0), (12_0). Pareillement au cas analogue dans (D; p. 154), *les* n_k *sont non-décroissants.* Notons d'abord qu'en vertu de la définition des ensembles $E(\cdots)$ on a $E(H')\supset E(H'')$, dès que $H'\supset H''$. *Démontrons que* $n_2\geqq n_1$. Si $n_2<n_1$, on observe que (12_0)

$$(13_0) \qquad P_2^{[n_2]}\subset E(P_1), \quad H_2\subset E(P_1), \quad H_2^{[n_2]}\subset P_1;$$

par là

$$(14_0) \qquad E(P)\,P^{[n_2]}\supset[E(P_1)\,P_2^{[n_2]}=]\,P_2^{[n_2]}\in(C^*);$$

d'autre part, $E(P^{[n_2]})\supset E(P_1^{[n_2]})=E(P_1)^{[n_2]}$, d'où ($13_0$)

$$(15_0) \qquad P\,E\,(P^{[n_2]}) \supset [P_1\,E\,(P_1^{[n_2]}) \supset P_1\,H_2^{[n_2]} =]\,H_2^{[n_2]} \in (C^*)\,;$$

les formules (14_0), (15_0) sont contraires à (7_0) pour $m = n_2$ (n_2 étant supposé inférieur à n_1); *conséquemment* $n_2 \geqq n_1$. Les inégalités

$$(16_0) \qquad n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_{k-1} \leqq n_k \leqq \cdots$$

découlent moyennant l'induction, en suivant des procédés du genre intervenant pour vérifier que $n_2 \geqq n_1$.

L'ensemble commun aux P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ (11_0) est un *point unique* $M \in P$. M étant sur P_k pour $k = 1, 2, \ldots,$ on a $M^{[n_k]} \in P_k^{[n_k]}$; donc (12_0)

$$(17_0) \qquad M^{[n_k]} \in E\,(P_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

On observe que

$$E\,(P_{k-1})\,(= \sum_{Q \in P_{k-1}} G\,(Q, 0)) \supset (M, 0)\,;$$

les $E\,(P_{k-1})$ sont fermés (9.5), de plus en raison de (11_0)

$$(18_0 \qquad E\,(P) \supset E\,(P_1) \supset E\,(P_2) \supset \cdots, \quad E^* = \prod_{k=1}^{\infty} E\,(P_{k-1}) \supset G\,(M, 0)\,;$$

E^* est fermé. *Nous allons établir que*

$$(19_0) \qquad E^* = G\,(M, 0)\;(= E\,(M))$$

[cela étant vrai même si les P_k sont seulement fermés]. En effet, si E^* contenait un point Q' n'appartenant pas à $G\,(M, 0)$, on aurait

$$|\,Q' - G\,(M, 0)\,| = \delta > 0, \quad Q' \in E\,(P_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Sur P_k il y a un point M_k, tel que $Q' \in G\,(M_k, 0)$; puisque $\Pi\,P_k = M$, M_k tend vers M pour $k \to \infty$. On observe que

$$(20_0) \qquad 0 < \delta \leqq \text{l'écart}\,(G\,(M_k, 0),\, G\,(M, 0)) = \eta_k\,;$$

$G\,(Q, 0)$ varie continûment avec le point Q, donc

$$\sigma_k = \text{l'écart mutuel}\,(G\,(M_k, 0),\, G\,(M, 0)) \to 0\,;$$

η_k, qui ne surpasse pas σ_k, doit tendre vers zéro; on aboutit à une contradiction à (20_0); (19_0) *est vérifié.* En récapitulant, $M^{[n_k]}$ (17_0) est sur $E\,(P_{k-1})$ fermé, pour $k = 1, 2, \ldots,$ et $\Pi\,E\,(P_{k-1}) = G\,(M, 0)$ (18_0), donc

$$(21_0) \qquad L^+\,\{M^{[n_k]}\} \subset G\,(M, 0),$$

où le premier membre est *l'ensemble de points d'accumulation* de la suite de points $M^{[n_k]}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Pour les raisons pour lesquelles (4.5 c) équivaut à (4.5 $\bar{c}$) on note que (21_0) revient à ce que

$$\text{l'écart}\,(M^{[n_k]}, G(M, 0)) = |M^{[n_k]} - G(M, 0)| \to 0 \qquad (\text{pour } k \to \infty);$$

c'est précisément l'énoncé (10.2 a). $M\,(=\Pi\, P_k)$ *est un point de* P *appartenant à l'ensemble* $W_1^*(P)$, *défini dans le théorème; par suite* $W_1^*(P)$ *existe, dès que* P *est dans la classe* (C^*).

Considérons maintenant les ensembles H_k $[(11_0), (12_0)]$. Soit un point quelconque sur H_k; puisque $N_k \in E(P_{k-1})$, un point Q_k existe sur P_{k-1} tel que

$$(23_0) \qquad N_k \in G(Q_k, 0), \quad Q_k \to M$$

$[Q_k \to M$ parce que $P_1 P_2 \cdots = M]$. D'autre part (12_0)

$$(24_0) \qquad N_k^{[n_k]} \in H_k^{[n_k]} \subset P_{k-1} \subset P, \quad N_k^{[n_k]} \to M.$$

Le point M *appartient donc à l'ensemble* $W_2^*(P)$, *dont il s'agit dans le théorème; cet ensemble ainsi existe.* $M\,(=P_1 P_2 \cdots)$ est un point qui se trouve à la fois sur $W_1^*(P)$ et sur $W_2^*(P)$; l'ensemble $W_1^*(P)\, W_2^*(P)$ existe. En vertu de (10.1 a) ce résultat s'applique à toute portion $\bar{\omega}$ de P. *Conséquemment* $W_1^*(P)\, W_2^*(P)$ *est partout dense sur* P *de classe* (C^*).

Remarque 10.3. L'ensemble $W_1^*(P)\, W_2^*(P)$ contient un sous-ensemble $W_{1,2}^*(P)$ partout dense sur P, avec la propriété additionnelle que pour tout point M de $W_{1,2}^*(P)$ on peut disposer de sorte que les deux suites $n_k\,(=n_k(M))$ intervenant dans (10.2 a) et (10.2 b), respectivement, sont identiques. En effet, cela se voit, si l'on représente P comme une somme dénombrable de portions $\bar{\omega}_s$ $(s=1, 2, \ldots)$ de diamètre tendant vers zéro, telles que tout point de P est contenu dans une infinité des $\bar{\omega}_s$, et si sur toute $\bar{\omega}_s$ nous trouvons un point M_s de $W_1^*(\bar{\omega}_s)\, W_2^*(\bar{\omega}_s)$ (donc de $W_1^*(P)\, W_2^*(P)$ d'accord avec nos développements, donnés plus haut pour le point $M = P_1 P_2 \cdots$; l'ensemble $W_{1,2}^*(P) = \{M_1, M_2, \ldots\}$ aura les propriétés voulues.

Si l'on se passe de la condition (10.1 c, 2°) dans la définition de la classe (C^*), *l'ensemble* $W_1^*(P)$ *restera partout dense sur* P; ceci s'ensuit quand on reprend les développements (1_0)–(24_0), avec des modifications assez évidentes, qui résultent de l'omission de (10.1 c, 2°). *Théorème* 10.2 *est démontré.*

Théorème 10.4. *Soit* $P \in (C^*)$ (*Définition* 10.1), *mais sans condition* (10.1 c, 1°). *Soit* $W_{1,-}^*(P)$ *l'ensemble de points* M *sur* P *tels que, si* $M \in W_{1,-}^*(P)$, *il existe une suite de précédents de* M,

$$M^{[-n_k]} \qquad (0 < n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots),$$

de façon que

(10.4 a) $$|M^{[-n_k]} - G(M, 0)| \to 0 \quad \text{pour } k \to \infty.$$

Cet ensemble $W^*_{1,-}(P)$ est partout dense sur P.

Si les deux conditions (10.1 c, 1°), (10.1 c, 2°) n'ont pas lieu simultanément pour les mêmes couples (i, j), où $i < j$, mais si (10.1 c, 1°) et (10.1 c, 2°) ont lieu séparément (c'est-à-dire, pour certaines couples (i, j)), avec $i < j$, les couples pouvant être différentes pour (10.1 c, 1°) et (10.1 c, 2°) — *dans ce cas les ensembles $W^*_1(P)$, $W^*_{1,-}(P)$ sont encore partout denses sur P.* Ce résultat s'ensuit de Théorème 10.4 et de la remarque terminant l'énoncé de Théorème 10.2.

Pour démontrer ce théorème observons d'abord que dans la suite $P, P^{[1]}, \ldots, P^{[N-1]}$ ($N = N(P)$ de Définition 10.1) il y a un transformé $P^{[j]}$ de rang minimum, de sorte que (10.1 c, 2°) a lieu pour $P' = P^{[i]}$, $P'' = P^{[j]}$ pour un $i\,(\geqq 0) < j$; il existe un P_1 de (C^*), que nous prenons de diamètre inférieur à $\delta(P)$, de sorte que

$$P_1 \subset P^{[i]} E(P^{[j]}),$$

tandis que, pour $0 \leqq m < j$,

$$P^{[i]} E(P^{[m]}) = 0\,(C^*) \qquad (\text{notations de } (2_0)),$$

dès que $i\,(\geqq 0) < m$. Comme dans le texte à la suite de (4_0) on établit que $i = 0$. Donc parmi les transformés $P, P^{[1]}, P^{[2]}, \ldots$ on trouve un premier, soit $P^{[n_1]}$, de sorte qu'il existe un P_1 (avec $\delta(P_1) < \frac{1}{2}\delta(P)$) de (C^*), tel que

$$P\,E(P^{[n_1]}) \supset P_1;$$

$P_1 \subset E(P)^{[n_1]}$, donc $P^{[-n_1]} \subset E(P)$. Puis nous opérons sur $P_1\,(\subset P)$, comme nous l'avons fait sur P. On obtient une suite

$$P \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{k-1} \supset P_k \supset \cdots \quad [\text{où } \delta(P_k) < 2^{-k}\delta(P)]$$

d'ensembles de la classe (C^*) et une suite d'entiers $0 < n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots$, qui sont choisis les plus petits possibles, de sorte que

(b_1) $$P_k^{[-n_k]} \subset E(P_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ P_0 = P).$$

La démonstration que $n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots$ se fait comme dans le texte qui suit (12_0). Le point unique M, commun à tous les P_k, a son transformé $M^{[-n_k]}$ sur $P_k^{[-n_k]}$, donc (b_1) sur $E(P_{k-1})$, cela étant pour $k = 1, 2, \ldots$. En tenant compte de (18_0), (19_0) on déduit que

$$(\mathrm{b}_2) \qquad L^{-}\{M^{[-n_k]}\} \subset G(M, 0),$$

où $L^{-}\{\cdots\}$ est *l'ensemble de points d'accumulation de la suite* $M^{[-n_k]}$ $(k=1, 2, \ldots)$; (b_2) équivaut à (10.4 a); donc $W^*_{\bar{1}, -}(P)$ existe; *le théorème s'ensuit* en vertu de la condition (10.1 a).

Introduisons une classe $(\bar{C}^*)$, modification de (C^*), comme il suit.

Définition 10.5. $(\bar{C}^*)$ est une classe (C^*), selon Définition 10.1, avec les conditions (10.1 c, 1°), (10.1 c, 2°) sous la forme plus stricte:

(10.5 c, $\bar{1}$°) $E(P')$ et P'' ont en commun une portion de l'un et de l'autre,

(10.5 c, $\bar{2}$°) P' et $E(P'')$ ont en commun une portion de l'un et de l'autre.

Les portions indiquées dans ($\bar{1}$°), ($\bar{2}$°) nécessairement appartiennent à $(\bar{C}^*)$. Nous faisons pour les conditions (10.5 c, $\bar{1}$°), (10.5 c, $\bar{2}$°) et pour la classe $(\bar{C}^*)$ une remarque de la sorte faite à la suite de Définition 10.1 pour (10.1 c, 1°), (10.1 c, 2°), (C^*).

Théorème 10.6. *Si* $P \in (\bar{C}^*)$ *et si les ensembles* $W^*_{\bar{1}}(P)$, $W^*_{\bar{2}}(P)$, $W^*_{\bar{1}, -}(P)$ *sont ceux dont il s'agit dans les théorèmes* 10.2, 10.4, *il s'ensuit que* $W^*_{\bar{1}}(P)\, W^*_{\bar{2}}(P)\, W^*_{\bar{1}, -}(P)$ *est un résiduel de* P, *en effet contient un résiduel normal. Sans condition* (10.5 c, $\bar{2}$°) $W^*_{\bar{1}}(P)$ *sera encore un résiduel de* P; *sans condition* (10.5 c, $\bar{1}$°) $W^*_{\bar{1}, -}(P)$ *sera un résiduel de* P.

Avant d'établir ce théorème notons d'abord que *les suites non-décroissantes des entiers* n_k $(k=1, 2, \ldots)$, *qui interviennent dans* (10.2 a), (10.2 b), (10.4 a), *peuvent être supposées croissantes vers* $+\infty$. En effet, considérons la suite (n_k), définie à propos de (12_0) et étant celle dont il s'agit dans (10.2 a), (10.2 b). S'il existe un s fini tel que

$$(\mathrm{c}_1) \qquad n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots < n_{k_0} = s = n_{k_0+1} = n_{k_0+2} = \cdots,$$

c'est que, comme l'avait remarqué M. Denjoy dans un cas analogue (voir (D; p. 155)), M doit être un point double de la transformation $F^{[s]}$ (notation 9.1). On aura dans le cas, à présent considéré, et pour le point M envisagé

$$M^{[n_k]} = M^{[s]} = F^{[s]}(M) = F(M, s) = M = F(M, 0) \qquad (\text{pour } k \geqq k_0).$$

Le mouvement le long de la trajectoire ponctuelle $C(M)$, défini par la transformation $F(M, t)$ (où t est continu), sera périodique, ou bien M sera un point d'équilibre. Dans ce cas on peut poser (à propos de (10.2 b))

$$Q_k = M, \quad N_k = M, \quad N_k^{[n_k]} \,(= N_k^{[s]}) = M \quad \text{pour} \quad k \geqq k_0.$$

Par conséquent, dans le cas (c_1) on peut disposer de sorte que n_k tend vers $+\infty$ (pour $k \to \infty$), en posant

$$(c_2) \qquad n_{k_0+j} = s + j s \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots,$$

$n_1, n_2, \ldots, n_{k_0}$ $(=s)$ ayant la signification préalablement donnée (relativement (12_0)). La vérification de la remarque en italiques (à la suite de Théorème 10.6) pour les n_k, dont il s'agit dans (10.4 a), se fait de la même manière.

Comme une consequence de (D; p. 155), nous observons que, si $P \in (\bar{C}^*)$ et si $P^{[k]}$ est un transformé de P de rang k, les portions de P et de $P^{[k]}$ se correspondent réciproquement. En répétant les développements à partir de (1_0) jusqu'à (12_0) pour un ensemble P de (C^*) on trouve des ensembles H_k, P_k, tels que

$$(c_3) \qquad P \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_{k-1} \supset P_k \supset \cdots, \qquad \delta(P_k) < 2^{-k}\delta(P), \;\; P_k \,\varepsilon\, (\bar{C}^*),$$

$$(c_4) \qquad P_k^{[n_k]} \subset E(P_{k-1}), \quad H_k \subset E(P_{k-1}), \quad H_k^{[n_k]} \subset P_{k-1}\,(k \geqq 1), \quad H_k \,\varepsilon\, (\bar{C}^*)\,;$$

$P_k^{[n_k]}$ est une portion de $E(P_{k-1})$ et de $P_{k-1}^{[n_k]}$; $H_k^{[n_k]}$ est une portion de P_{k-1} et de $E(P_{k-1}^{[n_k]})$. Il s'ensuit que P_k, H_k sont des portions de P_{k-1} et de $E(P_{k-1})$, respectivement. De plus $n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots$ et n_k tend vers $\to +\infty$ (d'accord avec (c_1)–(c_2)). Puisque [(18_0), (19_0), (c_4)]

$$\Pi\, E(P_{k-1}) = G(M, 0), \quad P_k^{[n_k]} \subset E(P_{k-1}) \text{ fermé},$$

on a la formule, plus générale que (21_0),

$$(c_5) \qquad L^+\{P_k^{[n_k]}\} \subset G(M, 0),$$

où M est le point unique commun aux P_k et $L^+\{\cdots\}$ est l'ensemble de points d'accumulation (pour $k \to \infty$, donc pour $n_k \to +\infty$) des $P_k^{[n_k]}$. Pour les raisons, en vertu desquelles (4.5 $\bar{c}$) équivaut à (4.5 c), il découle que (c_5) revient à ce que

$$(c_6) \qquad \text{l'écart } (P_k^{[n_k]}, G(M, 0)) \to 0 \quad (\text{pour } k \to \infty).$$

Puisque $E(P_k) \supset G(M, 0)$, l'écart de $P_k^{[n_k]}$ à $E(P_k)$ ne surpasse pas celui de $P_k^{[n_k]}$ à $G(M, 0)$; donc (c_6)

$$(c_7) \qquad \eta_k = \text{l'écart } (P_k^{[n_k]}, E(P_k)) \to 0 \quad (\text{pour } k \to \infty).$$

Vu que $H_k^{[n_k]} \subset P_{k-1}$ (c_4) et que $P_k \subset P_{k-1}$ (c_3), on obtient

$$\sigma_k = \delta(H_k^{[n_k]} + P_k) \; (\leqq \delta(P_{k-1}) < 2^{-k+1}\,\delta(P)) \to 0.$$

H_k étant contenu dans $E(P_{k-1})$, il en résulte que $L^+\{H_k\} \subset G(M, 0)$; pareillement à ($c_5$)–($c_7$) on déduit que

$$\tau_k = \text{l'écart } (H_k, E(P_k)) \to 0.$$

P peut être représenté comme une somme de ses portions $P(n)$:

$$(c_8) \qquad P = \sum_{n=1}^{\infty} P(n), \qquad \delta(P(n)) \to 0 \qquad (\text{pour } n \to \infty),$$

de sorte que tout point de P appartient à une infinité de $P(n)$.

Les resultats (c_5) ... auront lieu pour tout $P(n)$. Ainsi

$$(c_9) \quad \eta_k(n) = \text{l'écart } (P_k^{[n_k]}(n).\ E(P_k(n))) \to 0,\ \sigma_k(n) = \delta(H_k^{[n_k]}(n) + P_k(n)) \; (< 2^{-k+1}\,\delta(P_n))$$
$$< 2^{-k-1}\,\delta(P)) \to 0 \; (\text{pour } k \to \infty); \qquad n_k = n_k(n);$$
$$\tau_k(n) = \text{l'écart } (H_k(n), E(P_k(n))) \to 0 \; (\text{pour } k \to \infty);$$

$H_k(n)$ est un ensemble associé avec $P(n)$ de la même manière que H_k l'est avec P; $n_k \to +\infty$ avec k. En raison de (c_9)

$$(c_{10}) \qquad \eta_k(n) < \frac{1}{s}, \quad \tau_k(n) < \frac{1}{s}, \quad n_k = n_k(n) > s$$

pour $k \geqq k(n, s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$; *nous faisons en sorte que* $k(n, s) > s$. En suivant quelques-unes des idées de M. Denjoy (D; p. 155, 156), posons

(c_{11}) $o_{n,s} = 0(P_{k(n,s)}(n) =$ l'ensemble de points internes de $P_{k(n,s)}(n)$ par rapport à P; les ensembles

$$(c_{12}) \qquad o_{n,s}, \; O_s = \sum_n o_{n,s}$$

sont ouverts sur P. Toute portion $\bar{\omega}$ de P contient une portion $P(n)$, donc elle contient tout l'ensemble de la suite (c_3) $P(n) \supset P_1(n) \supset P_2(n) \supset \ldots$; ainsi ($c_{11}$)

$$\bar{\omega} \supset P_{k(n,s)}(n) \supset o_{n,s}, \qquad \bar{\omega}\, O_s \neq 0.$$

Par conséquent O_s *est partout dense sur* P*; l'ensemble fermé* $F_s = P - O_s$ *est non-dense sur* P*;* par là

$$(c_{13}) \qquad R = P - \sum_s F_s = \prod_s O_s$$

est un résiduel normal de P. Soit M un point de R ; M appartient à tous les O_s ; par suite (c_{12})

$$(c_{14}) \qquad M \in o_{n',s}, \quad M \in P_{k(n',s)}(n'), \quad \text{où } n' = n'(s) \text{ et } s = 1, 2, \ldots;$$

vu (c_4) (pour $P_k(n')$),

$$(c_{15}) \qquad M^{[q(s)]} \in P_{k'(s)}(n'(s))^{[q(s)]} \subset E(P_{k'(s)-1}(n'(s))),$$

où ($k(n,s)$ étant le nombre introduit à propos de (c_{10}))

$$(c_{16}) \qquad k'(s) = k(n'(s), s), \qquad q(s) = n_{k'(s)}(n'(s));$$

de plus

$$(c_{17}) \qquad k'(s) > s, \quad q(s)\,(>s) \to \infty \qquad (\text{pour } s \to \infty).$$

et (c_9)

$$\eta_{k'(s)}(n'(s) = \text{l'écart } (P_{k'(s)}\, n'(s))^{[q(s)]}, \quad E(P_{k'(s)}(n'(s))) \to 0 \qquad (\text{pour } s \to \infty).$$

Selon (c_3), pour $P(n)$, et parce que $P(n) \subset P$ on a

$$\delta(P_k(n)) < 2^{-k}\,\delta(P(n)) \leqq 2^{-k}\,\delta(P);$$

donc (c_{17})

$$(c_{18}) \qquad \delta(P_{k'(s)}(n'(s))) < 2^{-k'(s)}\,\delta(P) < 2^{-s}\,\delta(P) \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

A cause de (c_{14}) les ensembles parfaits $P_{k'(s)}(n'(s))$ ont le point M (de R) en commun ; leurs diamètres tendent vers zéro (c_{18}) ; il s'ensuit que

$$M = \prod_s P_{k'(s)}(n'(s)).$$

En tant que

$$\delta(P_{k'(s)-1}(n'(s)))\,(< 2^{-k'(s)+1}\,\delta(P) < 2^{-s+1}\,\delta(P)) \to 0 \qquad (\text{pour } s \to \infty)$$

et que $P_{k'(s)}(n'(s))$ est contenu dans $P_{k'(n)-1}(n'(s))$, nous avons aussi

$$(c_{19}) \qquad M = \prod_s P_{k'(s)-1}(n'(s)).$$

Évidemment

$$\text{l'écart } (P_{k'(s)-1}(n'(s)),\, M)\,[= \max\,(N \in P_{k'(s)-1}(n'(s)))\,|\,N - M\,|\,] \to 0.$$

Nous allons établir que

$$(c_{20}) \qquad h_s = \text{l'écart } (E(P_{k'(s)-1}(n'(s)),\, G(M, 0)) \to 0.$$

En effet au cas contraire il existe un α positif et une suite d'entiers s_j $(j=1,2,\ldots)$, $\to +\infty$, tels que $h_s \to \alpha$ pour $s=s_j\to\infty$. Les s_j peuvent être choisis de telle sorte que sur $E(P_{k'(s)-1}(n'(s)))$ $(s=s_j)$ il y ait un point Q_{s_j}, tel que $Q_{s_j}\to Q^*$, où Q^* est un point à distance α de $G(M,0)$; $|Q^*-G(M,0)|=\alpha$. Selon la définition de $E(\cdots)$ un point N_{s_j} se trouve sur $P_{k'(s)-1}(n'(s))$ $(s=s_j)$, de sorte que Q_{s_j} est sur $G(N_{s_j},\ 0)$; pourtant (c_{19}) entraîne que

$$N_{s_j}\to M, \quad \lambda_j = \text{l'écart mutuel } (G(N_{s_j},0),\ G(M,0))\to 0,$$

$G(N,0)$ variant continûment avec le point N. La distance $|Q_{s_j}-G(M,0)|$ ne surpasse pas l'écart de $G(N_{s_j},0)$ à $G(M,0)$; celui-ci vaut λ_j au plus ; d'où

$$|Q_{s_j}-G(M,0)|\,(\leqq \lambda_j)\to 0 \qquad (\text{pour } j\to\infty)\ ;$$

ceci est contraire aux relations

$$Q_{s_j}\to Q^*, \quad |Q^*-G(M,0)|=\alpha>0.$$

La formule (c_{20}) *est vérifiée.*

Le conséquent $M^{[q(s)]}$ étant sur $E(P_{k'(s)-1}(n'(s)))$ (c_{15}), il résulte que

$$|M^{[q(s)]}-G(M,0)|\,(\leqq h_s\ (c_{20}))\to 0 \qquad \text{pour } s\to\infty\ ;$$

en outre (c_{17}), $q(s)\to+\infty$. Par là nous concluons que

$$L^+\{M^{[q(s)]}\}\subset G(M,0), \text{ dès que } M\in R,$$

où les entiers $q(s)\,(\to+\infty)$ peuvent dépendre de M. L'ensemble $W_1^*(P)$, mentionné dans Théorème 10.2, contient le résiduel R (c_{13}) ; $W_1^*(P)$ *est un résiduel de* P $(\in(\bar{C}^*))$.

Pour M sur R (c_{13}), vu (c_{14}) et (c_4) et en tenant compte de la notation (c_{16}) on obtient

$$(c_{21}) \qquad H_{k'(s)}^{[q(s)]}(n'(s))\subset P_{k'(s)-1}(n'(s)), \quad H_{k'(s)}(n'(s))\subset E(P_{k'(s)-1}(n'(s)))\,;$$

puisque M est le point commun aux ensembles $P_{k'(s)-1}(n'(s))$ (dont les diamètres tendent vers zéro), il résulte que

$$(c_{22}) \qquad \text{l'écart } (H_{k'(s)}^{[q(s)]}(n'(s)),\ M)\to 0.$$

Si N_s est un point sur $H_{k'(s)}(n'(s))$, il découle (c_{21}) que

$$(c_{23}) \qquad N_s\in G(Q_s,0),\ Q_s \text{ étant un point sur } P_{k'(s)-1}(n'(s))\,;$$

puisque $\delta(P_{k'(s)-1}(n'(s)))\to 0$ et (c_8) $P_{k'(s)-1}(n'(s))\subset P$, on obtient

$$(c_{24}) \qquad Q_s(\in P) \to M\,;$$

en outre, à cause de la première formule dans (c_{21}),

$$N_s^{[q(s)]}(\in H_{k'(s)}(n'(s))^{[q(s)]}) \in P_{k'(s)-1}(n'(s))\,;$$

donc en raison de (c_{19})

$$(c_{25}) \qquad N_s^{[q(s)]}(\in P) \to M.$$

En vertu de (c_{23}), (c_{24}) (c_{25}) on voit que le point M sur le résiduel R (c_{13}) est un point d'ensemble $W_2^*(P)$, ainsi désigné dans Théorème 10.2 ; conséquemment $W_2^*(P)\,(\supset R)$ *est un résiduel de* P.

Enfin on démontre que l'ensemble $W_{1,-}^*(P)$, introduit dans Théorème 10.4, est un résiduel de $P(\in (C^*))$; pour ce but on fait emploi de la démonstration de Théorème 10.4 et des méthodes intervenant plus haut. *Théorème* 10.6 *est ainsi vérifié.*

Au lieu de la transformation $F^{[1]}(Q) = F(Q, 1)$ (9.1) et de sa réciproque $F^{[-1]}(Q) = F(Q, -1)$ on peut employer la transformation

$$(10.7) \qquad F^{[\alpha]}(Q) = F(Q, \alpha) \qquad (F^{[-\alpha]}(Q) = F(Q, -\alpha)),$$

où α est un nombre positif. Correspondant aux classes

$$(10.7\,\text{a}) \qquad (C)\ (9.3), \quad (C_0)\ (9.4), \quad (\bar{C})\ (9.12), \quad (\bar{C}_0)\ (9.13), \quad (C^*)\ (10.1), \quad (\bar{C}^*)\ (10.5)$$

on définit les classes

$$(10.7\,\text{b}) \qquad (C)_\alpha, \quad (C_0)_\alpha, \quad (\bar{C})_\alpha, \quad (\bar{C}_0)_\alpha, \quad (C^*)_\alpha, \quad (\bar{C}^*)_\alpha,$$

en remplaçant dans (10.7 a) $F^{[1]}$ (et $F^{[-1]}$) F par $F^{[\alpha]}$ (et $F^{[-\alpha]}$).

Alors pour les classes (10.7 b), dans les divers cas, on obtient les énoncés correspondants :

(9.7) $(C)_\alpha$, Théorème 9.8 $(C_0)_\alpha$, (9.14) $(\bar{C})_\alpha$, Théorème 10.2 $(C^*)_\alpha$,

Théorème 10.4 $(C^*)_\alpha$, Théorème 10.6 $(\bar{C}^*)_\alpha$.

DÉFINITION 10.8. $(\bar{C}^*)_0$ est une classe d'ensembles parfaits, qui satisfont aux conditions dans (10.5) correspondant à la transformation $F^{[\alpha]}$ (au lieu de $F = F^{[1]}$) pour tout α positif ; $(\bar{C}^*)_0$ est la partie commune des classes $(\bar{C}^*)_\alpha$ $(\alpha > 0)$.

Si $P \in (\bar{C}^*)_0$, Théorème 10.6 aura lieu pour l'ensemble P, considéré comme appartenant à la classe $(\bar{C}^*)_\alpha$ pour n'importe quel α positif. Envisageons, par exemple, l'ensemble $W_1^*(P)_\alpha$ qui est $W_1^*(P)$ pour la transformation $F^{[\alpha]}$; $W_1^*(P)_\alpha$ *est un rési-*

duel de P ; c'est l'ensemble de points M sur P, à chacun desquels il correspond une suite d'entiers

$$n_{k,\alpha} = n_{k,\alpha}(M)\,(k=1,2,\ldots)\ ;\quad 0 \leqq n_{k,\alpha} \leqq n_{k+1,\alpha}\ ;\quad \lim_k n_{k,\alpha} = +\infty,$$

de façon que

$$|M^{[\alpha n_{k,\alpha}]} - G(M,0)| \to 0 \text{ pour } k \to \infty\ ;$$

ici $M^{[\alpha n_{k,\alpha}]} = F(M, \alpha n_{k,\alpha})$; on peut supposer que

$$\alpha n_{k,\alpha} > k \text{ pour tout } \alpha > 0 \text{ et } k = 1, 2, \ldots .$$

Si $\alpha_i\,(i=1,2,\ldots)$ est une suite quelconque de nombres positifs, *l'ensemble*

$$W_1^*(P)_0 = \prod_i W_1^*(P)_{\alpha_i}$$

sera un résiduel de P (étant la partie commune à une infinité dénombrable de résiduels) ; pour M sur ce résiduel on aura

(10.8′) $$|F(M, \alpha_i n_{k,\alpha_i}) - G(M,0)| \to 0 \text{ quand } k \to \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Remarque 10.9. Si $P \in (\bar{C}^*)$, les ensembles de points $M \in P$, pour lesquels l'ensemble-trajectoire $C(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M} = G(M,0)$, est *stable* $(+)$ *spécialement à* $G(M,0)$, ou bien est stable $(-)$ spécialement à $G(M,0)$ (Définition 4.19), ces deux ensembles sont des résiduels de P.

En effet, ces ensembles contiennent respectivement $W_1^*(P)$ et $W_{1,-}^*(P)$; chacun de ceux-ci est un résiduel de P, d'après Théorème 10.6.

11. Les récurrences (I*), la stabilité-GP et le centre (I*) de mouvements

Dans cette section nous envisageons le groupe de transformations $F^{[n]}$ (n entier) (9.11). *L'espace D de mouvements sera fermé dans U_r, possiblement non-borné* (sauf mention contraire), *invariant par* $F^{[1]}, F^{[-1]}$. Les ensembles $G(M,t)$ seront selon Remarque 4.1′. Rappelons la notation

$$E(H) = \sum_{M \in H} G(M, 0),$$

où H est un ensemble quelconque dans D.

D'accord avec Nemietsky et Stepanoff (NS ; p. 359) nous dirons qu'une demi-trajectoire ponctuelle $M^{[n]}$ est *stable-L^+* (Lagrange) $[L^-]$, si la demi-trajectoire $M^{[n]}$ $(n \geqq 0)$ $[M^{[n]}\,(n \leqq 0)]$ est situé dans un sous-ensemble *compact* de D (ou de l'espace considéré). *Ici et dans la suite 'compact' veut dire 'fermé dans U_r et borné'.*

Nous dirons que la *condition* $(D^*)\,[(R^*)]$ est satisfaite dans $D[R]$, si dans $D[R]$ il existe au moins une trajectoire $M^{[n]}$ stable-L^+, ou bien stable-L^- ; nous écrirons $D \in (D^*)\,[(R^*)]$, si $D[R]$ satisfait à la condition $(D^*)\,[(R^*)]$. Si $D[R]$ est compact, $D[R] \in (D^*)\,[(R^*)]$.

Ayant en vue les conditions (10.1 c, 1°), (10.1 c, 2°), qui interviennent dans notre définition d'une classe (C^*), introduisons des notions de récurrence comme il suit.

Définition 11.1. On dira que le mouvement dans l'ensemble invariant R, contenu dans D et pouvant coïncider avec D, est *récurrent* $(I^+)\,[(II^+)]$ *dans* R, si à tout ensemble $H, \subset R$, ouvert dans R un entier n_k, positif et croissant vers $+\infty$ avec k, correspond de sorte que, pour $k=1,2,\ldots$, on a

$$(11.1\text{ a}) \qquad E(H)\,H^{[n_k]} \neq 0 \qquad [(11.1\text{ b}) \quad H\,E(H^{[n_k]}) \neq 0].$$

On définit d'une manière analogue les récurrences (I⁻), (II⁻).

Dans le cas particulier, où $G(M,0)=M$ pour tout point M de R, la récurrence (I^+) dans R se confond avec la récurrence (II^+) (puisqu'alors $(E(H)=H, E(H)^{[n_k]} = E(H)^{[n_k]} = H^{[n_k]})$ et on aura 'la récurrence de domaines' selon G. D. Birkhoff (voir (NS ; p. 372, sq.), où cette espèce de récurrence est définie pour un groupe continu de transformations).

Nous dirons que le point M est *errant* $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ *dans* R (invariant et contenu dans D), s'il existe dans R *un* voisinage $O(M)$ de M (c'est-à-dire, un ensemble ouvert dans R et contenant M) et un N positif, de sorte que

$$(11.2) \qquad E(O(M))\,O^{[n]}(M)=0 \quad (\text{pour tout entier } n \geqq N),$$

$$[(11.2\text{ a}) \qquad O(M)\,E(O^{[n]}(M))=0 \quad (\text{pour } n \geqq N)] \;;$$

il y a de pareilles définitions pour les points errants (I^-), (II^-) dans R.

(11.3) La récurrence $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ entraîne la récurrence $(\mathrm{II}^-)\,[(\mathrm{I}^-)]$ et réciproquement.

En effet, en appliquant la transformation $F^{[-n_k]}$ à (11.1 a), par exemple, on obtient $H\,E(H^{[-n_k]}) \neq 0$; cette relation implique la récurrence (II^-).

De la même manière il résulte que :

(11.4) Si le point M est errant $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ dans R, ce point sera errant $(\mathrm{II}^-)\,[(\mathrm{I}^-)]$ dans R et réciproquement.

(11.5) Désignons par (I^*) un quelconque des (I^+), (II^+), (I^-), (II^-) ; *l'ensemble* $W(\mathrm{I}^*)$ *de points errants* (I^*) *dans* R *est invariant.*

En effet, soit M un point particulier, errant (I^+) par exemple ; considérons un point $M^{[k]}$, où k est un entier ; appliquons à (11.2) la transformation $F^{[k]}$; pour $n > N$ on aura

$$(1_0) \qquad 0 = E(O(M))^{[k]} O^{[k+n]}(M) = E(O^{[k]}(M))(O^{[k]}(M))^{[n]} ;$$

un voisinage (dans R) $O_k(M^{[k]})$ de $M^{[k]}$ existe de façon que

$$(2_0) \qquad O_k(M^{[k]}) \subset O^{[k]}(M), \quad E(O_k(M^{[k]})) \subset E(O^{[k]}(M)),$$
$$(O_k(M^{[k]}))^{[n]} \subset (O^{[k]}(M))^{[n]} ;$$

vu (1_0), (2_0)

$$0 = E_R(O_k(M^{[k]}))(O_k(M^{[k]}))^{[n]} \quad (\text{pour } n > N) ;$$

donc pour tout entier k le point $M^{[k]}$ est errant (I^+), dès que M l'est.

(11.6) *L'ensemble* $W(\mathrm{I}^*)$ (11.5) *est ouvert dans* R.

De cet énoncé découle, en notant que, si M est errant (I^+), par exemple, et satisfait donc à (11.2) et si Q est un point dans $O(M)$, qu'on pourra trouver un voisinage $O(Q) \subset O(M)$; alors $O^{[n]}(Q) \subset O^{[n]}(M)$, de sorte que $E(O(Q)) \cdot O^{[n]}(Q)$ étant un sous-ensemble de l'ensemble au premier membre dans (11.2), sera vide pour tout $n \geqq N$; Q est errant (I^+) dans R.

En vertu de (11.4)

$$(11.7) \qquad W(\mathrm{I}^+) = W(\mathrm{II}^-), \quad W(\mathrm{II}^+) = W(\mathrm{I}^-),$$

les ensembles

$$(11.7\,\mathrm{a}) \qquad R - W(\mathrm{I}^+), \quad R - W(\mathrm{II}^+)$$

de points non errants (dans R) (I^+) *et* (II^+), respectivement, s'ils ne sont pas vides, *sont fermés* (dans R) *et invariants.*

Si M est un point de $R - W(\mathrm{I}^+)$, à tout voisinage $O(M)$ dans R il correspond un n_k, > 0 et tendant vers $+\infty$ avec k, de sorte que

$$(11.8) \qquad E(O(M))\, O^{[n_k]}(M) \neq 0, \quad O(M)\, E(O^{[-n_k]}(M) \neq 0$$

pour $k = 1, 2, \ldots$; si M est sur $R - W(\mathrm{II}^+)$, on aura

$$(11.8\,\mathrm{a}) \qquad O(M)\, E(O^{[n_k]}(M)) \neq 0, \quad E(O(M))\, O^{[-n_k]}(M) \neq 0$$

pour une suite n_k ($\to +\infty$) convenable.

Définition 11.9. $R(\subset D)$ étant invariant, nous dirons qu'un point M de R est *stable-GP*$^+$ *dans R — stable* (+) *dans R au sens généralisé de Poisson* — si à *tout* voisinage $O(M)$ dans R un n_k, $\to +\infty$, correspond tel que

(11.9 a) $$E(O(M))\,M^{[n_k]} \neq 0 \qquad (k=1,2,\ldots)\;;$$

il y a une définition analogue de la stabilité-GP^+ dans R.

Dans le cas où $G(M,0)=M$ on aura $E(O(M))=O(M)$ et la stabilité-GP^+ devient la stabilité P^+ de Poisson au sens ordinaire. On note que (11.9 a) entraîne

(11.9 b) $$M\,E(O^{[-n_k]}(M)) \neq 0 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Les relations (11.9 a) (11.9 b) impliquent (11.8). D'où on conclut ainsi.

(11.10) Tout point M stable-GP^+ $[GP^-]$ dans $R(\subset D)$ appartient à l'ensemble $R-W(\mathrm{I}^+)\,[R-W(\mathrm{II}^+)]$ (11.7 a) de points non-errants $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ dans R.

On vérifie aisément que, *si M est un point stable-GP^+ $[GP^-]$ dans R, il en est de même pour tout point* $M^{[n]}$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$, c'est-à-dire pour la 'trajectoire' $M^{[n]}$.

(11.11) Si l'ensemble R, $\subset D$, invariant satisfait à la condition (R^*), l'ensemble

(11.11 a) $$R_1(\mathrm{I}^+)=R-W(\mathrm{I}^+) \quad [R_1(\mathrm{II}^+)=R-W(\mathrm{II}^+)] \qquad (11.7\text{ a})$$

de points non-errants $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ dans R sera non-vide.

Considérons, par exemple, $W(\mathrm{I}^+)$ qui est l'ensemble de points M errants dans R, à la fois au sens (I^+) et au sens (II^-) ; à M sur $W(\mathrm{I}^+)$ un $N>0$ et un voisinage $O(M)$ dans R correspondent, tels que

(1_0) $$E(O(M))\,O^{[n]}(M)=0, \quad O(M)\,E(O^{[-n]}(M))=0 \qquad (\text{pour } n \geqq N)\;;$$

d'où

(2_0) $$O(M)\,O^{[n]}(M)=0, \quad O(M)\,O^{[-n]}(M)=0 \qquad (\text{pour } n \geqq N).$$

Donc $W(\mathrm{I}^+)$ est contenu dans l'ensemble W qui s'obtient de $W(\mathrm{I}^+)$ dans le cas où $G(M,0)=M$. Nous nommerons *W l'ensemble de points errants dans R au sens ordinaire*. Par suite

(3_0) $$R_1(\mathrm{I}^+)=R-W(\mathrm{I}^+) \supset R-W=R_1,$$

où R_1 est l'ensemble de points non-errants dans R au sens ordinaire. Car on sait que R_1 n'est pas vide (NS ; p. 373), il en est de même pour $R_1(\mathrm{I}^+)$; (11.11) *s'ensuit.*

Théorème 11.12. *$R(\supset D)$ étant invariant, compact, et $R_1(\mathrm{I}^+\,;\,\varepsilon)$ designant l'ensemble de points de R à distance moins de ε de $R_1(\mathrm{I}^+)=R-W(\mathrm{I}^+)$ [(11.11 a), (3_0)], il en découle que tout mouvement $M^{[n]}$ errant (I^+) dans R ne reste qu'un 'temps' fini hors de $R_1(\mathrm{I}^+\,;\,\varepsilon)$ et, en effet, hors de $(R_1\,;\,\varepsilon)=$ l'ensemble de points de R à distance $<\varepsilon$ de R_1 (3_0) ; c'est-à-dire, à tout point M de et à $\varepsilon>0$ il correspond un $N_\varepsilon\,(>0)$ fini, tel que*

(11.12 a) $$M^{[n]} \in R_1(\mathrm{I}^+ ; \varepsilon) \text{ et } M^{[n]} \in (R_1 ; \varepsilon) \quad \text{pour } |n| \geqq N_\varepsilon.$$

Ainsi toute trajectoire $M^{[n]}$ *dans* $W(\mathrm{I}^+)$ *s'approche indéfiniment de* R_1 ; *l'ensemble* $W(\mathrm{I}^+)(\subset W)$ *a des points d'accumulation sur* R_1.

En effet M errant (I^+) dans R est aussi errant au sens ordinaire; selon (NS; p. 374) $M^{[n]}$ reste un temps fini hors de l'ensemble $(R_1 ; \varepsilon)$. Vu que $R_1(\mathrm{I}^+ ; \varepsilon)$ contient $(R_1 ; \varepsilon)$ il s'ensuit que $M^{[n]}$ reste un temps fini hors de $R_1(\mathrm{I}^+ ; \varepsilon)$. Par là on obtient (11.12 a). Si $M \in W(\mathrm{I}^+)$, les points $M^{[n]}(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ se trouvent tous dans la 'bande' $R_1(\mathrm{I}^+ ; \varepsilon) W(\mathrm{I}^+)$ (bordant $R_1(\mathrm{I}^+)$) et dans la 'bande' $(R_1 ; \varepsilon) W$ (bordant R_1), à un nombre fini près de valeurs de n. Les $M^{[n]}$ sont dans $W(\mathrm{I}^+)$, en raison de l'invariance de $W(\mathrm{I}^+)$; la seconde relation (11.12 a) étant établie, et $\varepsilon\,(>0)$ étant arbitrairement petit, on est mené à la remarque à la suite de (11.12 a).

Si les ensembles $R_1(\mathrm{I}^+)$, R_1 ne se confondent pas, des points M existent qui sont non-errants (I^+) dans R, mais qui sont errants au sens ordinaire dans R.

Si l'espace D de mouvements considérés est compact (donc $D \in (D^*)$), l'ensemble $R_1(\mathrm{I}^+) = D - W(\mathrm{I}^+)$ de points de D non-errants (I^+) dans D sera non-vide ; $R_1(\mathrm{I}^+)$ est compact, invariant. En prenant $R_1(\mathrm{I}^+)$ comme l'ensemble d'un mouvement nouveau, on y trouve un ensemble

$$R_2(\mathrm{I}^+) = R_1(\mathrm{I}^+) - W_1(\mathrm{I}^+) \neq 0,$$

compact et invariant, de points non-errants (I^+) dans $R_1(\mathrm{I}^+)$; $W_1(\mathrm{I}^+)$ est l'ensemble (invariant, ouvert dans $R_1(\mathrm{I}^+)$) de points de $R_1(\mathrm{I}^+)$ errants (I^+) dans $R_1(\mathrm{I}^+)$. On obtient une suite finie ou transfinie d'ensembles $R_\beta(\mathrm{I}^+)$, $W_\beta(\mathrm{I}^+)$:

$$R_\beta(\mathrm{I}^+) = R_{\beta+1}(\mathrm{I}^+) + W_\beta(\mathrm{I}^+),$$

les $R_\beta(\mathrm{I}^+)(\supset R_{\beta+1}(\mathrm{I}^+))$ sont non-vides, compacts. Si $\beta + 1$ est un nombre de la première espèce, $R_{\beta+1}(\mathrm{I}^+)$ est l'ensemble de points de $R_\beta(\mathrm{I}^+)$, non-errants (I^+) dans $R_\beta(\mathrm{I}^+)$; si β est de la deuxième espèce, on a

$$R_\beta(\mathrm{I}^+) = \prod R_\gamma(\mathrm{I}^+) \qquad (\gamma < \beta)$$

D'après le théorème de Cantor il existe un nombre α (de classe II au plus) tel que

(11.13) $$R(\mathrm{I}^+) = R_\alpha(\mathrm{I}^+) = R_{\alpha+1}(\mathrm{I}^+) = R_{\alpha+2}(\mathrm{I}^+) = \ldots ;$$

$R(\mathrm{I}^+)$ est compact, si D l'est.

DÉFINITION 11.14. L'ensemble $R(\mathrm{I}^+)$ (11.13), qui est non-vide si D est compact, est *le centre* (I^+) *de mouvements.*

Nous venons de construire le centre $R(\mathrm{I}^+)$ d'une manière analogue à celle utilisée pour obtenir "l'ensemble de mouvements centraux", au sens ordinaire, ou simplement 'le centre', selon G. D. Birkhoff (NS ; p. 374, 375). On s'aperçoit de ce que *le centre* $R(\mathrm{I}^+)$ *contient le centre ordinaire.*

Soit $R, \subset D$ (compact), un ensemble invariant ; considérons

(11.15) $R_1^0(\mathrm{I}^+)=$ l'ensemble de points internes à $R_1(\mathrm{I}^+)\,(=R-W(\mathrm{I}^+))$ relativement à R, $R_1(\mathrm{I}^+)$ étant l'ensemble de points non-errants (I^+) dans R.

(11.16) Si $R_1^0(\mathrm{I}^+)$ (11.15) n'est pas vide et si G est un ensemble quelconque de $R_1^0(\mathrm{I}^+)$, invariant et ouvert dans R, il s'ensuit que dans G il y a récurrence (I^+) (Définition 11.1.).

Soit H un ensemble particulier, $\subset G$, ouvert dans G ; soit M un point de H ; $H=O(M)$ est ouvert dans R ; puisque $G\subset R_1(\mathrm{I}^+)$, M est non errant (I^+) dans R, donc [(11.8) avec $O(M)=H$] on obtient

(11.16 a) $$E(H)\,H^{[n_k]}\neq 0, \quad H\,E(H^{[-n_k]})\neq 0,$$

n_k étant une suite qui dépend de H et $\to +\infty$ avec k ; parce que H est un ensemble quelconque ouvert dans G, on voit que (11.16 a) *revient à la conclusion indiquée dans* (11.16). Les ensembles H, $H^{[\pm n_k]}$ sont dans G ; l'ensemble $E(H)$ et ses transformés sont dans D et peuvent avoir des points hors de G.

En raison de (11.10) et de la remarque à la suite de (11.10) on observe que *si une trajectoire* $M^{[n]}\,(n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$ *est stable-*GP^+ $[GP^-]$ *dans* D, elle sera située dans l'ensemble $R_1(\mathrm{I}^+)\,[R_1\,\mathrm{II}^+)]$ de points non-errants $(\mathrm{I}^+)\,[(\mathrm{II}^+)]$ dans $D\cdot R_1(\mathrm{I}^+)$ est la réunion des ensembles $W_1(\mathrm{I}^+)$, $R_2(\mathrm{I}^+)$ disjoints et invariants ; la trajectoire $M^{[n]}$ doit se trouver entièrement dans $W_1(\mathrm{I}^+)$ ou bien dans $R_2(\mathrm{I}^+)$. Or $W_1(\mathrm{I}^+)$ est l'ensemble de points errants (I^+) dans $R_1(\mathrm{I}^+)$. Si $M^{[n]}\in W_1(\mathrm{I}^+)$, la trajectoire $M^{[n]}$ serait un sous-ensemble (invariant) de points errants (I^+) dans $R_1(\mathrm{I}^+)$; pour tout $M^{[\nu]}$ particulier on aurait (11.2) :

(a$_1$) $$E(H_\nu)H_\nu^{[n]}=0 \qquad (\text{pour tout } n\geqq N),$$

où H_ν ouvert dans $R_1(\mathrm{I}^+)$ est *un* voisinage de $M^{[\nu]}$; on peut prendre $H_\nu=\omega'_\nu R_1(\mathrm{I}^+)$, ω'_ν désignant un ensemble ouvert dans U_r et contenant $M^{[\nu]}$. De plus (si c'est nécessaire) choisissons ω_ν, ω'_ν, un ensemble ouvert dans U_r de sorte que

$$\omega_\nu D\supset H_\nu\,(\ni M^{[\nu]}),$$

tandis que $\omega_\nu D$ soit suffisamment proche à H_ν, au sens que, comme une conséquence de (a_1) (et possiblement en prenant $H_\nu,\ni M^{[\nu]}$, assez petit) on ait

$$(a_2) \qquad E(\omega_\nu D)\cdot(\omega_\nu D)^{[n]}=0 \qquad (\text{tout } n \geqq N).$$

Un tel choix de ω_ν est possible à cause du caractère (4.1 b) de continuité de $G(Q, 0)$. D'autre part (vu (11.9 a) pour $M^{[\nu]}$)

$$E(O(M^{[\nu]}))\, M^{[\nu+n_k]} \neq 0$$

pour *tout* voisinage $O(M^{[\nu]})$ dans D ($n_k = n_{k,\nu}$ dépendant de ce voisinage et $\to +\infty$ avec k); en particulier on peut poser $O(M^{[\nu]}) = \omega_\nu D$; d'où

$$(a_3) \qquad E(\omega_\nu D)\cdot M^{[\nu+n_k]} \neq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

L'ensemble $(\omega_\nu D)^{[n]}$ contient $M^{[\nu+n]}$. Par là les formules (a_2), (a_3) sont contradictoires, dès que $n_k \geqq N$. Conséquemment *la trajectoire* $M^{[n]}$ *est dans* $R_2(\mathrm{I}^+)$, *quand elle est stable*-GP^+ *dans* D. De la même façon on montre que $M^{[n]} \in R_3(\mathrm{I}^+)$ et ainsi de suite. Enfin par une induction transfinie on est mené au résultat suivant.

(11.17) *Les trajectoires* $\{M^{[n]}\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *stables*-GP^+ $[GP^-]$ *dans* D (11.9) *sont contenus dans le centre* (I^+) $[(\mathrm{II}^+)]$ *de mouvements* (*Définition* 11.14), *pourvu que ce centre existe.*

REMARQUE 11.17′. En employant le raisonnement du genre intervenant plus haut, on démontre qu'une trajectoire $M^{[n]}$ stable-GP^+ dans D est non-errant (I^+) relativement à l'espace de $\{M^{[n]}\}$.

En raison de (11.13) et puisque $R_\beta(\mathrm{I}^+) = R_{\beta+1}(\mathrm{I}^+) + W_\beta(\mathrm{I}^+)$, on conclut que l'ensemble $W_\alpha(\mathrm{I}^+)$ de points de $R(\mathrm{I}^+) = R_\alpha(\mathrm{I}^+)$ errants (I^+) dans $R(\mathrm{I}^+)$ est vide.

(11.18) *Si* $D \in (D^*)$ *et* $R(\mathrm{I}^+)$ *est le centre* (*de mouvements dans* D), *il y a récurrence* (I^+) *dans* $R(I^+)$.

La récurrence (I^+) dans $R(\mathrm{I}^+)$ signifiérait qu'à tout $H, \subset R(\mathrm{I}^+)$, ouvert dans $R(\mathrm{I}^+)$ un n_k, $\to +\infty$, correspond tel que

$$(b_1) \qquad E(H)\, H^{[n_k]} \neq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Donc, si l'énoncé (11.18) est en défaut, il existe un $H_0, \subset R(\mathrm{I}^+)$, ouvert dans $R(\mathrm{I}^+)$, pour lequel n_k n'existe pas, c'est-à-dire :

$$(b_2) \qquad E(H_0)\, H_0^{[n]} = 0 \ (\text{pour tout } n \geqq N_0),$$

où N_0 fini est suffisamment grand. Si M_0 est un point particulier dans H_0, on peut considérer H_0 comme un voisinage $O(M_0)$ de M_0 dans $R(\mathrm{I}^+)$. En vertu de (11.2) (avec $O(M) = O(M_0)$, $N = N_0$, $R = R(\mathrm{I}^+)$) (b_2) signifie que M_0 est errant (I^+) dans

$R(\mathrm{I}^+) = R_\alpha(\mathrm{I}^+)$; donc $M_0 \in W_\alpha(\mathrm{I}^+)$. Il y a contradiction à la remarque qui précède (11.18) ; (11.18) *est verifié.*

(11.19) *Soit* $R, \subset D$, *fermé, invariant, et* $W_1^*(R)$ *l'ensemble de points* M *de* R, *tels qu'il existe un* n_k, *dépendant de* M *et* $+\infty$ *avec* k, *de sorte que* $|M^{[n_k]} - G(M,0)| \to 0$ *(c'est pareille à la definition de* $W_1^*(\dots)$ *dans Theoreme* 10.2). *L'ensemble* $GP^+(R)$ *de points de* R *stables-*GP^+ *dans* R *est identique avec* $W_1^*(R)$.

Soit M *un point de* $GP^+(R)$. Soit H_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ une suite d'ensembles ouverts dans R, $M \in H_\nu$, tels que

$$\bar{H}_{\nu+1} \subset H_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \qquad d(H_\nu) \to 0.$$

A tout H_ν il correspond un $n_{\nu,k}$, $\to +\infty$ avec k, tel que

$$E(H_\nu)\, M^{[n_{\nu,k}]} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

(M étant sur R invariant, les $M^{[n_{\nu,k}]} \in R$). Puisque

$$E(H_{\nu+1}) \subset E(\bar{H}_{\nu+1}) \subset E(H_\nu) \subset E(\bar{H}_\nu),$$

on obtient

$$\prod E(\bar{H}_\nu) = \prod E(\bar{H}_{\nu+1}) \subset \prod E(H_\nu) \subset \prod E(\bar{H}_\nu) \ ;$$

donc

$$\prod E(H_\nu) = \prod E(\bar{H}_\nu).$$

Enfin en raison de (10.18_0), (10.19_0) (pour des ensembles fermés)

$$E^* = \prod E(H_\nu) = G(M, 0) \tag{c$_1$}$$

Choisissons des entiers

$$n_1 = n_{1,k_1} > 1, \quad n_2 = n_{2,k_2} > 2, \dots, \quad n_s = n_{s,k_s} > s, \dots ;$$

on aura $M^{[n_s]} \in E(H_s)$ $(s = 1, 2, \dots)$, n_s tendant vers $+\infty$ avec s ; (c_1) entraîne que tous les points d'accumulation de la suite $M^{[n_s]}$ se trouvent dans $G(M, 0)$, c'est-à-dire que $|M^{[n_s]} - G(M, 0)| \to 0$ $(n_s \to +\infty)$. Par là

$$GP^+(R) \subset W_1^*(R). \tag{c$_2$}$$

Supposons maintenant que M *est un point de* $W_1^*(R)$; donc

$$|M^{[n_k]} - R\,G(M, 0)| \to 0 \quad \text{pour une suite } n_k = n_k(M) \to +\infty. \tag{c$_3$}$$

Remarquons que, si M est un point sur R et si H *ouvert dans* R *contient* M, il s'ensuit que $R\,G(M, 0)$ est à distance $\sigma(H)$ positive de $R - R\,E(H)$:

$$\sigma(H) = |R\,G(M, 0) - (R - R\,E(H))| > 0.$$

En effet

$$R - R\,E\,(H) = R\,(E\,(R) - E\,(H)) = R\,E\,(R - H)\ ;$$

$R - H$ est fermé dans R (donc dans U_r) ; d'où $E\,(R - H)$ et $R - R\,E\,(H)$ sont fermés ; $R\,G\,(M, 0)$, $R - R\,E\,(H)$, disjoints, sont tous les deux fermés ; donc $\sigma\,(H) > 0$. M étant sur $W_1^*\,(R)$, un entier $N\,(H)\,(> 0)$ existe tel que

$$(\mathrm{c}_4) \qquad E\,(H)\,M^{[n_k]} \neq 0 \qquad \text{pour } k \geqq N\,(H).$$

Si (c_4) était en défaut, il y aurait un voisinage (dans R) H_0 de M pour lequel $N\,(H_0)$ n'existe pas, donc :

$$E\,(H_0)\,M^{[n_{k_j}]} = 0 \qquad \text{pour une suite } k_j \to \infty\ ;$$

nécessairement

$$|\,M^{[n_{k_j}]} - R\,G\,(M,\,0)\,| \geqq \sigma\,(H_0) > 0\ ;$$

on aboutit à une contradiction à (c_3) (avec $k = k_j$) ; (c_4) étant vrai pour tout H ouvert dans R et contenant M, il en résulte que $M \in G\,P^+\,(R)$; d'où

$$(\mathrm{c}_5) \qquad W_1^*\,(R) \subset G\,P^+\,(R).$$

L'énoncé 11.19 *s'ensuit en vertu de* (c_2), (c_5).

(11.20) Soit $G\,(M, 0)$ assujetti aux conditions de la remarque 4.1′ ; soit $R, \subset D$, fermé. Alors

$$(11.20\,\mathrm{a}) \qquad E\,(A)\,B \text{ est ouvert dans } R,$$

dès que A, B sont n'importe quels ensembles situés et ouverts dans R, tels que $E\,(A)\,B \neq 0$.

D'accord avec les développements à la suite de (c_3) l'ensemble

$$R - R\,E\,(A) = R\,E\,(R - A), \quad \text{où } R - A \text{ est fermé dans } R,$$

est fermé dans R (aussi dans U_r) ; conséquemment $R\,E\,(A)$ est ouvert dans R et $E\,(A)\,B = (R\,E\,(A))\,B$ est un produit de deux ensembles ouverts dans R ; d'où la conclusion dans (11.20 a).

Théorème 11.21. *Soit $R, \subset D$ (compact), un ensemble invariant, fermé, où il y a récurrence* (I^+) *(le centre $R\,(\mathrm{I}^+)$, par exemple). Sur R les points M stables-$G\,P^+$ sont partout denses.*

Soit H un ensemble ouvert dans R. Le résultat voulu s'obtient quand on montre que H contient un point M stable-$G\,P^+$. Vu la récurrence (I^+) dans R, un entier n_1 existe, tel que

$$(\mathrm{d}_1) \qquad E(H)\,H^{[n_1]} \neq 0, \qquad n_1 > 1.$$

$H^{[n_1]}$ est ouvert dans R, comme H l'est. A cause de (11.20) (d_1) entraîne qu'il existe des ensembles H', ouverts dans R, tels que

$$H' \subset E(H)\,H^{[n_1]}\,(\subset R)\ ;$$

l'ensemble au premier membre de (d_1) est un H'. Il s'ensuit que

$$(\mathrm{d}_2) \qquad H_1\,(=H'^{[-n_1]}) \subset H, \quad H_1^{[n_1]}\,(=H') \subset E(H),$$

H_1 étant ouvert dans R ; nous faisons en sorte que (d désignant le diamètre)

$$(\mathrm{d}_3) \qquad \bar{H}_1 \subset H, \quad d(\bar{H}_1) < \tfrac{1}{2}\, d(\bar{H}).$$

En laissant H_1 jouer le rôle de H, on trouve un H_2, $\subset H_1$, avec les propriétés (d_2), (d_1) relativement à H_1 (au lieu de H) ; ainsi on obtient une suite infinie d'ensembles H_k $(k=1, 2, \ldots)$ et d'entiers n_k, de sorte que

$$H \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots\ ; \quad H_k \text{ ouvert dans } R\ ;$$

$$\bar{H}_k \subset H_{k-1}\ ; \quad d(\bar{H}_k) < 2^{-k}\, d(\bar{H})\ ; \quad n_k > k\ ;$$

$$(\mathrm{d}_4) \qquad H_k^{[n_k]} \subset E(H_{k-1}) \quad \text{pour } k=1, 2, \ldots\ ; \ H_0 = H.$$

La suite d'ensembles fermés $\bar{H}_1 \supset \bar{H}_2 \supset \ldots$, leurs diamètres tendant vers zéro, possèdent un point unique M en commun :

$$(\mathrm{d}_5) \qquad M = \prod \bar{H}_k = \prod H_k.$$

M est un point de H qui, pour $k=1, 2, \ldots$, se trouve dans H_k, d'où (d_4) :

$$(\mathrm{d}_6) \qquad M^{[n_k]} \in E(H_{k-1}) \subset E(\bar{H}_{k-1}) \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Pour les mêmes raisons, pour lesquelles la formule (c_1) a lieu, nous avons

$$(\mathrm{d}_7) \qquad \prod E(\bar{H}_{k-1}) = \prod E(H_{k-1}) = G(M, 0).$$

A cause de (d_6), (d_7) et puisque n_k $(>k) \to +\infty$, on déduit que

$$L^+\{M^{[n_k]}\} \subset G(M, 0), \quad \text{donc } |M^{[n_k]} - G(M, 0)| \to 0 \text{ pour } k \to \infty,$$

où $L^+\{M^{[n_k]}\}$ est l'ensemble de points d'accumulation de points $M^{[n_k]}$ (pour $n_k \to +\infty$). On s'aperçoit de ce que $M \in W_1^*(R)$. Mais d'après (11.19) $W_1^*(R) = G\,P^+(R)$. Parce que tout ensemble H, ouvert dans R, contient un point M de $W_1^*(R)$, *la conclusion du théorème découle.*

REMARQUE 11.22. D'après (11.17), (11.18) et Théorème 11.21, si D est compact, le centre $R(\mathrm{I}^+)$ de mouvements est la fermeture des trajectoires $\{M^{[n]}\}$ stables-GP^+ dans D (ceci est analogue à un énoncé dans (NS ; p. 375)).

Dans Théorème 11.21 et dans la remarque en haut le centre $R(\mathrm{I}^+)$ peut être remplacé par le centre $R(\mathrm{II}^+)$, tandis que les ensembles $W_1^*(\ldots)$, $GP^+(R)$ soient remplacés par $W_{1,-}^*(\ldots)$ (définition comme dans Théorème 10.4), $GP^-(R)$, respectivement.

Voici un approfondissement de Théorème 11.21.

THÉORÈME 11.23. *Si R, $\subset D$ (compact), est invariant, fermé, et s'il y a récurrence* (I^+) $[(\mathrm{II}^+)]$ *dans R (le centre $R(\mathrm{I}^+)$ $[R(\mathrm{II}^+)]$, par exemple), les points stables-GP^+ $[GP^-]$ forment un résiduel de R.*

Ce résultat peut être etabli en suivant les méthodes du genre que nous avons utilisées dans la démonstration de Théorème 10.6.

Les développements et les résultats de la section actuelle, ainsi que des sections 9, 10 peuvent être formulés, convenablement modifiés et sans difficultés additionnelles, quand au lieu du groupe $F^{[n]}$ (n entier) on considère un groupe continu $F(M, t)$ $(-\infty < t < \infty)$ de transformations, laissant l'espace de mouvements invariant.

12. Considérations aléatoires et centre (I^+) d'attraction

Dans cette section l'espace D, invariant par $F^{[1]}$, $F^{[-1]}$, est fermé (dans U_r) à distance finie.

Soit E un ensemble dans l'espace D. Pour H, $\subset D$, définissons une fonction numerique ainsi :

$$\varphi_E(H) = 1 \text{ si } HE \neq 0, \qquad \varphi_E(H) = 0 \text{ si } HE = 0.$$

De plus posons

$$(1_0) \qquad \sigma_E(M, k) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_E(G(M, j)) \qquad (k \text{ entier } > 0) ;$$

$$\underline{P}_E(M) = \underline{\lim} \frac{1}{k} \sigma_E(M, k), \quad \overline{P}_E(M) = \overline{\lim} \frac{1}{k} \sigma_E(M, k) \qquad (k \to +\infty) ;$$

$$P_E(M) = \lim \frac{1}{k} \sigma_E(M, k), \quad \text{si } \underline{P}_E = \overline{P}_E .$$

Ce sont les *probabilités, supérieure, inférieure et ordinaire, d'intersection de l'ensemble-mobile $G(M, n)$ $[= G(M, 0)^{[n]}$, entier$]$ avec l'ensemble E, pour $n \to +\infty$.* Il y a des definitions analogues pour $n \to -\infty$. On peut écrire

$$P_E(M) = P(G(M, n) E \neq 0), \quad \underline{P}_E(M) = \underline{P}(\ldots), \; \cdots.$$

Évidemment $0 \leqq \underline{P}_E \leqq \overline{P}_E \leqq 1$. On observe que

$$(2_0) \qquad \varphi_{E_1}(G(M, j)) \leqq \varphi_{E_2}(G(M, j)) \text{ si } E_1 \subset E_2 ;$$

$$(3_0) \qquad \varphi_{E_1+E_2}(G(M, j)) \leqq \varphi_{E_1}(G(M, j)) + \varphi_{E_2}(G(M, j)).$$

Donc (1_0)

$$(4_0) \qquad \sigma_{E_1}(M, k) \leqq \sigma_{E_2}(M, k) \text{ si } E_1 \subset E_2 ;$$

$$(5_0) \qquad \sigma_{E_1+E_2}(M, k) \leqq \sigma_{E_1}(M, k) + \sigma_{E_2}(M, k).$$

Quand $E_1 E_2 = 0$, il se peut qu'à la fois $G(M, j) E_1 \neq 0$, $G(M, j) E_2 \neq 0$. Par conséquent, en général, inégalité dans (3_0), (5_0) ne peut être remplacée par égalité, même si les ensembles E_1, E_2 sont disjoints. Pour les probabilités on obtient $[(2_0) - (5_0)]$

$$(12.1) \qquad \underline{P}_{E_1}(M) \leqq \underline{P}_{E_2}(M), \quad \overline{P}_{E_1}(M) \leqq \overline{P}_{E_2}(M), \quad \text{si } E_1 \subset E_2 ;$$

$$(12.1\text{ a}) \qquad \underline{P}_{E_1+E_2}(M) \leqq \underline{P}_{E_1}(M) + \overline{P}_{E_2}(M), \quad \overline{P}_{E_1+E_2}(M) \leqq \overline{P}_{E_1}(M) + \overline{P}_{E_2}(M).$$

En général, dans (12.1 a) *on peut remplacer* $\leqq$ *par* $=$, *dans le cas ou* E_1, E_2 *sont disjoints et les probabilités uniques existent, seulement si* $G(M, 0) = M$ $(G(M, n) = M^{[n]})$.

Nous dirons qu'un ensemble $F, \subset D$, *fermé invariant est centre* (I^+) *d'attraction de mouvement d'ensemble-mobile* $G(M, j)$ *pour* $j \to +\infty$, si la probabilité (pour $n \to +\infty$) d'intersection d'ensemble $G(M, j)\,[= G(M, 0)^{[j]}]$ avec $O(F, \varepsilon)$ est 1 pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(12.2) \qquad P_{\omega_\varepsilon}(M) = 1 \quad (\omega_\varepsilon = O(F, \varepsilon))$$

(ici ω_ε est ensemble de points dans D à distance $< \varepsilon$ de F).

Dans le cas $G(M, 0) = M$ on obtient le *centre d'attraction* (d'un mouvement ponctuel $M^{[j]}$) *au sens ordinaire*, dont la théorie a été développée par M. Hilmy [voir (NS ; p. 390–395)], qui considère le temps comme un paramètre continu. Le résultat suivant est un analogue d'un théorème de Hilmy (NS ; p. 390).

THÉORÈME 12.3. *Supposons que* $G(M, j)$ *(*j *entier représente une ensemble-trajectoire individuelle dans l'espace* D, *telle qu'il existe un ensemble* $F_0, \subset D$, *compact pour lequel*

$$(12.3\text{ a}) \qquad G(M, j) \subset F_0 \quad (\textit{pour tout } j \geqq 0).$$

Alors dans F_0 *il existe un ensemble* F', *fermé, qui est centre* (I^+) *d'attraction de mouvement d'ensemble-mobile* $G(M, j)$ *et qui peut être caractérisé comme l'ensemble de points* $Q, \in F_0$, *pour lesquels*

(12.3 b) $$\overline{P}_s(M) > 0 \quad (s = S(Q, \varepsilon)) \qquad \textit{pour tout } \varepsilon > 0$$

(ici la probabilité supérieure est celle de l'intersection de s avec l'ensemble $G(M, j)$ pour $j \to +\infty$; $S(Q, \varepsilon)$ est une sphère ouverte).

Selon le lemme de Borel-Lebesgue on couvre F_0 par une somme finie d'ensembles $H_{1,\nu}$ ouverts dans F_0, de diamètre $d\,H_{1,\nu} < 1$:

(1°) $$F_0 = \sum_\nu H_{1,\nu} = \sum_\nu F_{1,\nu}, \text{ où } F_{1,\nu} = \overline{H}_{1,\nu} \text{ est fermé dans } U_r.$$

On note que [(1_0), (12.3 a)]

(2°) $$\frac{1}{k}\sigma_{F_0}(M, k) = 1, \qquad P_{F_0} = 1$$

[dans la démonstration ci-après nous omettrons l'indication de dépendance des probabilités extrêmes et ordinaires de M]. Les entiers ν, qui interviennent dans (1°), sont subdivisés en les ν' et les ν'', selon qu'on ait

(3°) $$\overline{P}_{F_{1,\nu'}} > 0 \text{ ou } P_{F_{1,\nu''}} = 0.$$

Les ν' existent; sinon $\overline{P}_{F_0} \leqq \Sigma \overline{P}_{F_{1,\nu}} = 0$ et $P_{F_0} = 0$. Posons

(4°) $$F_1 = \sum_{\nu'} F_{1,\nu'} \qquad (d\,F_{1,\nu} < 1),$$

$F_1 (\subset F_0)$ est fermé dans U_r. Vu que $F_0 - F_1 \subset \Sigma F_{1,\nu''}$, on a

$$\overline{P}_{F_0 - F} \leqq \Sigma \overline{P}_{F_{1,\nu''}} = 0 \qquad (3°) ;$$

de plus (12.1 a) $\underline{P}_{F_0} \leqq \underline{P}_{F_1} + \overline{P}_{F_0 - F_1} = \underline{P}_{F_1}$; donc (2°)

(5°) $$P_{F_0 - F_1} = 0, \qquad P_{F_1} = 1.$$

En laissant F_1 jouer le rôle de F_0 nous trouvons un $F_2, \subset F_1$, de la même manière que nous venons d'obtenir F_1 à partir de F_0 (mais avec $d\,H_{2,\nu} < \frac{1}{2}$) et ainsi de suite. Moyennant l'induction on obtient

(a_1) $$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots ; \quad F_k\,(\neq 0) \text{ fermé dans } U_r \ (k = 1, 2, \ldots) ;$$
$$P_{F_k} = 1, \quad P_{F_k - F_{k+1}} = 0 \ (k \geqq 0), \quad P_{F_0 - F_k} = 0 ; \quad F_{k-1} = \sum_\nu F_{k,\nu} \qquad \text{(somme finie)} ;$$

(a_2) $$F_k = \sum_{\nu'} F_{k,\nu'}, \quad F_{k,\nu'} \text{ fermé dans } U_r ; \quad d\,F_{k,\nu} < 2^{-k+1} ; \quad \overline{P}_{F_{k,\nu'}} > 0, \quad P_{F_{k,\nu''}} = 0.$$

Envisageons maintenant l'ensemble *compact*

(12.4) $$F' = F'(M) = \prod_k F_k\ (\subset F_0).$$

Pour k assez grand $F_k \subset O(F', \varepsilon)$; d'où (12.1) $\underline{P}_{F_k} \leqq \underline{P}_{O(F',\varepsilon)} (\leqq 1)$; en raison de (a_1) :

$$(12.4\,a) \qquad P_{\omega'} = 1 \quad (\omega' = O(F', \varepsilon)) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

$S(Q, \varepsilon)$ désignant l'ensemble de points de D à distance $< \varepsilon$ du point Q, démontrons le résultat suivant.

(12.5) *F' (12.4) est l'ensemble de points $Q, \in F_0$, tels que $\overline{P}_s > 0$ ($s = S(Q, \varepsilon)$) pour $\varepsilon > 0$.*

En effet (A_1) *si au point Q de D un η correspond, tel que $P_{s(\eta)} = 0$ ($s(\eta) = S(Q, \eta)$), on aura $Q \in D - F'$.* Sinon nous aurions $Q \in F' = \prod F_k$, où (a_2)

$$F_k = \sum_{\nu'} F_{k,\nu'}, \quad d\,F_{k,\nu'} < 2^{-k+1}, \quad \overline{P}_{F_{k,\nu'}} > 0\,;$$

ainsi

$$Q \in F_{k,\nu'_k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \; \nu'_k \text{ étant un des } \nu' \text{ pour } k\,;$$

le diamètre de $F_{k,\nu'}$ tendant vers zero (pour $k \to \infty$) et $F_{k,\nu'_k} \subset S(Q, \eta)$ pour $k \geq k_\eta$ (k_η suffisamment grand), on obtient (12.1) :

$$\overline{P}_{F_{k,\nu'_k}} \leqq \overline{P}_{s(\eta)} = 0 \qquad \text{(d'après l'hypothèse)}\,;$$

donc $P_{F_{k,\nu'_k}} = 0$; ceci est contraire à la définition des ν'. D'autre part : (A_2) *si $\overline{P}_s > 0$ ($s = S(Q, \varepsilon)$) pour tout $\varepsilon > 0$, tandis que $Q \in F_0$, on aura $Q \in F'$.*

Cela s'établit en notant que $F_0 = \Sigma H_{1,\nu}$, où $H_{1,\nu}$ est ouvert dans F_0 ; par là $Q \in H_{1,\nu_1}$ pour un ν_1 et il existe un voisinage $F_0 S(Q, \varepsilon_1)$ tel que (1°)

$$s_1 = F_0 S(Q, \varepsilon) \subset H_{1,\nu_1} \subset \overline{H}_{1,\nu_1} = F_{1,\nu_1} \qquad \text{pour un } \varepsilon_1 > 0.$$

Puisque $G(M, j) \subset F_0$ ($j \geqq 0$), on observe que $\varphi_{s_1}(G(M, j)) = \varphi_s(G(M, j))$ ($j \geqq 0$), où $s = S(Q, \varepsilon_1)$; donc $(1/k)\,\sigma_{s_1}(M, k) = (1/k)\,\sigma_s(M, k)$ et, en particulier $\overline{P}_{s_1} = \overline{P}_s$. D'après l'hypothèse dans (A_2) on aura $0 < \overline{P}_{s_1} \leqq \overline{P}_{\sigma_1}$ ($\sigma_1 = F_{1,\nu_1}$) ; $\overline{P}_{\sigma_1}$ étant positif, il s'ensuit que $Q \in F_1$ et, en effet, $F_0 S(Q, \varepsilon) \subset F_1$ pour $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1$; opérons sur F_1 comme nous l'avons fait sur F_0 ; par induction il découle que $Q \in F_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) ; d'où la conclusion dans (A_2).

L'énoncé (12.5) *s'ensuit en vertu de* (A_1), (A_2).

Soit $Q \in F'$ et $Q' = Q^{[n_0]}$ (un entier n_0) ; nous voulons établir que $Q' \in F'$.A $\varepsilon > 0$ donné un $\delta > 0$ correspond, tel que

$$(b_1) \qquad s^0 = s^{[n_0]} = S(Q, \delta)^{[n_0]} \subset S(Q', \varepsilon) = \sigma'.$$

D'après (12.5), (1_0)

$$(b_2) \qquad \overline{P}_s = \overline{\lim_k}\, \frac{1}{k}\, \sigma_s(M, k) > 0, \qquad \sigma_s(M, k) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_s(G(M, j))\,;$$

(b₃) $$\sigma'(M,k) \geqq \sigma_{s^0}(M,k).$$

Remarquons que

(b₄) $$G(M,j).\ s \neq 0\ [=0] \text{ entraîne } G(M,j+n_0).\ s^{[n_0]} \neq 0\ \ [=0]$$

et réciproquement. *Démontrons maintenant que*

(B) $$\sigma_s(M,k) \leqq \sigma_{s^{[n_0]}}(M,k) + |n_0| \qquad (\text{pour } k > |n_0|)$$

c'est-à-dire, que

(B₁) $$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \varphi_s(G(M,j)) \leqq \lambda' + |n_0| = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{s^0}(G(M,j)) + |n_0| \qquad (s^0 = s^{[n_0]}).$$

On obtient (b₄) $\varphi_s(G(M,j)) = \varphi_{s^0}(G(M,j+n_0))$, donc

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{s^0}(G(M,i+n_0)) = \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} \varphi_{s^0}(G(M,j)),$$

$$\lambda - \lambda' = \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} \varphi_{s^0}(G(M,j)) - \sum_{j=1}^{k} \varphi_{s^0}(G(M,j))\ ;$$

d'où, si $n_0 > 0$,

$$|\lambda - \lambda'| = \left| \sum_{j=k+1}^{n_0+k} \varphi_{s^0}(G(M,j)) - \sum_{j=1}^{n_0} \varphi_{s^0}(G(M,j)) \right| \leqq n_0\ ;$$

d'autre part, si $n_0 = -m_0 < 0$:

$$|\lambda - \lambda'| = \left| \sum_{j=1-m_0}^{k-m_0} \varphi_{s^0}(G(M,j)) - \sum_{j=1}^{k} \varphi_{s^0}(G(M,j)) \right| =$$

$$\left| \sum_{j=-m_0+1}^{0} \varphi_{s^0}(G(M,j)) - \sum_{j=k+1-m_0}^{k} \varphi_{s^0}(G(M,j)) \right| \leqq m_0 = |n_0|\ ;$$

(B₁) *et donc* (B) *sont vérifiés.* Or on déduit [(B), (b₂)] :

$$\overline{\lim_k} \frac{1}{k} \sigma_s(M,k) \leqq \overline{\lim_k} \left[\frac{1}{k} \sigma_{s^0}(M,k) + \frac{|n_0|}{k} \right] = \overline{P}_{s^0}\ ;$$

(b₅) $$0 < \overline{P}_s \left(= \overline{\lim} \frac{1}{k} \sigma_s(M,k) \right) \leqq \overline{P}_{s^0}, \text{ où } s = S(Q,\delta), \qquad s^0 = S(Q,\delta)^{[n_0]}.$$

σ' (b₁) contient s^0, par suite $\overline{P}_{\sigma'}(\geqq \overline{P}_{s^0}) > 0$, où $\sigma' = S(Q', \varepsilon)$ et ε est un nombre positif quelconque. Conséquemment (12.5) le point $Q' = Q^{[n_0]}$ est sur F', dès que Q l'est ; F' (12.4) est invariant, compact et F' satisfait à (12.4 a). Nous avons établi que F' est centre (I⁺) d'attraction de mouvement $G(M,n)$ avec le caractère 12.5. *Théorème* 12.3 *est établi.*

DÉFINITION 12.6. Si dans la définition de centre (I^+) F d'attraction de $G(M, j)$, pour $j \to +\infty$, donnée à propos de (12.2), on omet la condition d'invariance, nous dirons que F est un *centre* (I^+) *faible d'attraction de mouvement* $G(M, j)$ (pour $j \to +\infty$).

THÉORÈME 12.7. *Supposons que dans l'espace D il y a une ensemble-trajectoire individuelle $G(M, j)$, telle que*

$$(12.7\,\mathrm{a}) \qquad G(M, j).\ F_0 \neq 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $F_0, \subset D$, est un ensemble compact. Alors il se trouve dans F_0 un ensemble F' $(\neq 0)$ fermé, qui est centre (I^+) faible d'attraction de $G(M, j)$ et relativement auquel ont lieu les propriétés suivantes :

(12.7 b) *si $Q \in F'$, il suit que $\overline{P}_{S(Q, \varepsilon)}(M) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$:*

(12.7 c) *si $\overline{P}_{F_0 S(Q, \varepsilon)}(M) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et si $Q \in F_0$, alors $Q \in F'$.*

Nous construisons F' précisement d'accord avec le texte à la suite de (12.3 b) jusqu'à (12.4) ; F' est compact ; la conclusion (12.4 a) reste valide dans les hypothèses actuelles. Conséquemment F' (12.4) est un centre (I^+) faible d'attraction de $G(M, j)$. En examinant la démonstration de (A_1) (à la suite de (12.5)), on observe que ce résultat est encore vrai ; ceci revient à (12.7 b). Pour établir (12.7 c) considérons un point Q, tel que

$$(\mathrm{c}_1) \qquad Q \in F_0, \quad \overline{P}_{F_0 S(Q, \varepsilon)}(M) > 0 \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Introduisons la notation :

$$(\mathrm{c}_2) \qquad s(\varepsilon) = S(Q, \varepsilon), \quad s_1(\varepsilon) = F_0 S(Q, \varepsilon), \quad s_2(\varepsilon) = F_1 S(Q, \varepsilon), \ldots ;$$

on a $s(\varepsilon) \supset s_1(\varepsilon) \supset s_2(\varepsilon) \supset \cdots$. Puisque (1°) $F_0 = \Sigma H_{1,\nu}$ ($H_{1,\nu}$ ouvert dans F_0), il existe un entier ν_1 et un $\varepsilon_1 > 0$ de sorte que

$$(\mathrm{c}_3) \qquad s_1(\varepsilon_1) \subset H_{1,\nu_1} \subset \overline{H}_{1,\nu_1} = F_{1,\nu_1}.$$

En raison de (c_1), (c_3)

$$(\mathrm{c}_4) \qquad 0 < \overline{P}_{s_1(\varepsilon)} \leqq \overline{P}_{F_{1,\nu_1}} \text{ pour } 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1 ;$$

d'où ν_1 est un ν' (4°) et il s'ensuit que

$$F_1 = \Sigma F_{1,\nu'} \supset F_{1,\nu_1} \supset s_1(\varepsilon_1) ;$$

c'est-à-dire,

$$(\mathrm{c}_5) \qquad Q \in s_1(\varepsilon) \subset F_1 \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1$$

(dès que $Q \varepsilon F_0$). Or $G(M, j)\, s_1(\varepsilon) = 0$ entraîne $G(M, j)\, s_2(\varepsilon) = 0$ (vu que $s_2(\varepsilon) \subset s_1(\varepsilon)$), donc $\varphi_{s_1(\varepsilon)}(G(M, j)) = 0$ implique $\varphi_{s_2(\varepsilon)}(G(M, j)) = 0$; d'autre part, si $G(M, j)\, s_1(\varepsilon) \neq 0$ (pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$), on observe ($c_5$) que le premier membre est un ensemble contenu dans F_1, de là on aura $G(M, j)\, s_2(\varepsilon) \neq 0$ et on voit que $\varphi_{s_1(\varepsilon)}(G(M, j)) = 1$ entraîne $\varphi_{s_2(\varepsilon)}(G(M, j)) = 1$ $(\varepsilon \leqq \varepsilon_1)$. Par suite

$$\varphi_{s_2(\varepsilon)}(G(M, j)) = \varphi_{s_1(\varepsilon)}(G(M, j)) \quad \text{pour } j \geqq 0 \text{ et } 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1 :$$

d'où (c_4)

$$0 < \overline{P}_{s_1(\varepsilon)} = \overline{P}_{s_2(\varepsilon)}. \quad (0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1). \tag{c_6}$$

Un ε_2 existe, $0 < \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$, tel que pour l'ensemble $s_2(\varepsilon_2)$ (c_2), ouvert dans F_1, on a

$$s_2(\varepsilon_2) \subset H_{2,\nu_2} \subset \overline{H}_{2,\nu_2} = F_{2,\nu_2}$$

pour un ν_2, pour lequel H_{2,ε_2} contient Q ($F_1 = \Sigma H_{2,\nu}$, $H_{2,\nu}$ ouvert dans F_1, $Q \in s_2(\varepsilon)$). En vertu de (c_6) (avec $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_2$) on obtient

$$0 < \overline{P}_{s_2(\varepsilon)} \leqq \overline{P}_{F_2,\nu_2} \quad (0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_2) ;$$

ν_2 étant un ν' et F_2 étant la réunion des $F_{2,\nu'}$,

$$F_2 \supset s_2(\varepsilon_2) \supset s_2(\varepsilon) \quad \text{pour } \varepsilon \leqq \varepsilon_2 ;$$

par là

$$Q \in s_2(\varepsilon) \subset F_2 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_2 .$$

Par induction on établit l'existence d'une suite $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots$ de nombres positifs, tels que

$$Q \in s_k(\varepsilon) \subset F_k \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_k \quad \text{et } k = 1, 2, \ldots .$$

Conséquemment $Q \in \prod F_k = F'$, lorsque (c_1) a lieu. *Théorème* 12.7 *est démontré.*

Dans l'ensemble F' en général il n'y a pas d'invariance. Pourtant nous démontrerons le résultat suivant.

(12.8) *Dans les conditions de Théorème* 12.7 *le centre* (I^+) F' (12.4) *faible d'attraction de* $G(M, j)$ *jouit de la propriété que, si* Q *est un point sur* F', *le point* $Q^{[j]}$ *(*j *de signe variable) sera aussi sur* F' *pour tout entier* j, *pour lequel un* ε_j *positif existe de sorte que* $S(Q^{[j]}, \varepsilon_j) \subset F_0$.

En effet, soit Q un point sur F' et $Q' = Q^{[n_0]}$, où n_0 est un entier positif ou negatif. Selon (12.7 b) on a

$$\overline{P}_{S(Q,\varepsilon)} > 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{d_1}$$

Cette relation nous permet de répéter les développements (b_1)–(b_5) ; ainsi

$$0 < \overline{P}_{s(\delta)} \leqq \overline{P}_{s^0} \qquad (s(\delta) = S(Q, \delta), \; s^0 = S^{[n_0]}(Q, \delta)),$$

où $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ et $s^0 \subset S(Q', \varepsilon)$; par suite

$$(\mathrm{d}_2) \qquad \overline{P}_{S(Q', \varepsilon)} > 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Dans l'hypothèse (12.7 a) actuelle (d_2) n'entraîne pas que $Q' \in F'$. D'après (12.7 c), pour que $Q' \in F'$ il suffit que $\overline{P}_{s'(\varepsilon)}$, où $s'(\varepsilon) = F_0 S(Q', \varepsilon)$, soit positif pour tout $\varepsilon > 0$. Si pour un entier n_0 un $\varepsilon_0 > 0$ existe de sorte que $S(Q', \varepsilon_0) \subset F_0$, on aura pour $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$:

$$S(Q', \varepsilon) = s'(\varepsilon) \text{ et } (d_2) \; \overline{P}_{s'(\varepsilon)} > 0 \; ;$$

pour un tel n_0 le point $Q^{[n_0]}$ sera sur F'. *L'énoncé* (12.3) *est vérifié.*

On pourrait pousser les développements de cette section plus loin, ayant en vue quelques des résultats de M. Hilmy (NS ; p. 393–395), ainsi que la récurrence (I^+) (ou (II^+)) selon Définition 11.1.

13. Le théorème ergodique dans une hypothèse de Denjoy

Désormais nous ne supposerons pas que D soit fermé (au sens ordinaire ou à distance finie) *dans un espace euclidien.* Jusqu'ici nous avons étudié des développements divers, fondés sur la transformation ponctuelle $F(Q, t)$, ou bien sur la transformation $F^{[1]}(Q) = F(Q) = F(Q, 1)$ (9.1) (et son inverse $F^{[-1]}(Q) = F(Q, -1)$), ces transformations ayant seulement un caractère topologique. Sous telles transformations les ensembles fermés se correspondent réciproquement, le même étant vrai pour les ensembles ouverts. *Dans la section actuelle nous procédons dans la supposition que D est invariant par $F(x, t)$* (sauf à mention contraire) *et dans l'hypothèse métrique que voici.*

HYPOTHÈSE 13.1. Supposons que la transformation $F = F(x, t)$, dont il s'agit en haut, ainsi que son inverse $F(x, -t)$ jouissent de la propriété que les fonctions, qui définissent ces transformations, possèdent des coefficients différentiels de premier ordre, finis et continus dans D.

On peut prouver dans l'hypothèse 13.1 que les ensembles suivants sont mesurables :

$$W(E) \text{ (9.7) ; } E^*(P) \text{ (Théorème 9.8) ; } W_1^*(P), \; W_2^*(P) \text{ (Théorème 10.2) ;}$$

$$W_{1,-}^*(P) \text{ (Théorème 10.4) ;}$$

cela reste vrai même si l'hypothèse 3.1 s'applique seulement par rapport à $F^{[1]}$, $F^{[-1]}$ au lieu de $F(x, t)$, $F(x, -t)$.

Dans cette condition (D ; p. 126) les ensembles mesurables (au sens Borel-Lebesgue) se correspondent ; en particulier les ensembles épais (de mesure positive), ainsi que les ensembles minces (de mesure nulle), se correspondent. Posons

(13.2) $$\mu_j(m) = \text{min. mes. } H^{[j]}, \quad \nu_j(m) = \text{max. mes. } H^{[j]}$$

($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) pour $H, \subset D$, de mesure m. Ici et dans la suite il est entendu que *la mesure B.–L. de D est finie*. On observe que

(13.2 a) $$0 < \mu_j(m) \leqq \nu_j(m) \ (\text{pour } m > 0) \ ;$$

$$\lim_{m \to 0} \nu_j(m) \ ; \quad \mu_0(m) = \nu_0(m) = m \ ;$$

$\mu_j(m)$ et $\nu_j(m)$ sont non-croissants pour $m\,(>0)$ décroissant.

La condition métrique, dont M. Denjoy a fait l'emploi (D ; p. 157) *dans le cas de l'invariance de D par* $F^{[1]}$, *est la suivante*

(13.3) $$0 < \mu(m) \leqq \text{mes. } H^{[j]} \quad \text{pour mes. } H = m > 0$$

$$\text{et pour } j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

où $\mu(m)$ est indépendant de j, dans cette hypothese mes. $H^{[j]} \leqq \nu(m)$ (pour mes. $H = m$ et $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ; les fonctions μ et ν sont inverses l'une de l'autre. L'hypothèse (13.3) a lieu, si les fonctions $\mu_j(m)$ (13.2) satisfont à

$$\min_j. \mu_j(m) \ (= \mu(m)) > 0 \qquad \text{pour } m > 0.$$

Si D est invariant par $F(x, t)$ (t un paramètre continu, $-\infty < t < +\infty$) *on pourra envisager la condition* (13.3) *de M. Denjoy dans sa forme continue :*

(13.3^c) $$0 < \mu(m) \leqq \text{mes. } F(H, t) \leqq \nu(m)$$

pour mes. $H = m > 0$ et $-\infty < t < +\infty$, où $\mu(m)$ vaut min. mes. $F(H, t)$ (pour mes. $H = m$, $-\infty < t < +\infty$), $\mu(m) > 0$ pour $m > 0$; $\nu(m)$ est la fonction inverse de $\mu(m)$.

Dans chacune des deux hypothèses on a

$$\mu(m) \leqq m \leqq \nu(m) \ ; \qquad \mu(m) \downarrow 0, \ \nu(m) \downarrow 0 \quad \text{avec } m.$$

La condition (13.3) est satisfaite (D ; p. 152), s'il existe un *invariant intégral positif* (invariance par $F^{[1]}$)

(13.4) $$\Phi(H) = \int_H f(x)\,dx, \quad \Phi(H^{[1]}) = \Phi(H), \quad H \subset D,$$

où $f(x)$ sommable sur D est positif sur une plénitude de D ; la nullité de $\Phi(H)$ et de mes. H est simultanée.

M. Denjoy a fait la conjecture (D ; p. 152, 153, en note) que, réciproquement, l'hypothèse (13.3) entraîne l'existence d'un *invariant integral positif* sur D, avec l'invariance par $F^{[1]}$; soit

$$(13.5) \qquad m_j = m_j(H) = \text{mes. } H^{[j]}, \quad \Phi_k(H) = \frac{1}{k}(m_1 + \cdots + m_k) \ ;$$

dans la condition (13.3) la conjecture est que la limite

$$(13.6) \qquad \lim_{k \to +\infty} \Phi_k(H) = \Phi(H)$$

existe pour tout $H, \subset D$, mesurable ; si c'est ainsi, $\Phi(H)$ sera un invariant intégral positif de la forme (13.4). *On peut remplacer* m_j *dans* (13.5) *par* mes. $H^{[-j]}$ $(j = 1, 2, \cdots)$.

Quand la condition métrique de M. Denjoy est dans sa forme continue (13.3^c), *la conjecture* (du genre offert dans la condition (13.3)) *serait la suivante.* En posant

$$(13.5^c) \qquad \Phi(H_1 \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau m(H, t)\, dt, \ \text{ où } \ m(H, t) = \text{ mes. } F(H, t),$$

la limite

$$(13.6^c) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} \Phi(H, \tau) = \Phi(H)$$

existe pour tout ensemble $H, \subset D$, mesurable. Dès que cette conjecture soit réalisée, $\Phi(H)$ sera un invariant intégral positif au sens que

$$(13.4^c) \qquad \Phi(H) = \int_H f(x)\, dx, \qquad \Phi(F(H, t)) = \Phi(H),$$

$f(x)$ sommable sur, D, $f(x) > 0$ sur une plénitude de D. *On peut faire une telle conjecture pour les t tendant vers $-\infty$, c'est-à-dire avec* mes. $F(H, -t)$ *au lieu de* mes. $F(H, t)$.

(13.7) Si D est invariant par $F(x, t)$ et s'il y a une mesure μ^*, $\geqq 0$, invariante (par $F(x, t)$), $\mu^*(D)$ fini, le théorème ergodique de Birkhoff a lieu (NS ; p. 481), sauf au plus sur un ensemble de mesure μ^* nulle ; il y a un théorème ergodique aussi pour le cas quand la mesure est invariante seulement par $F^{[1]}$.

(13.7 a) Si la conjecture de Denjoy était vraie, par exemple dans la forme continue, il s'ensuivrait que le théorème ergodique (13.7) a lieu avec $\mu^* = \Phi$ [13.6^c, 4^c], donc sauf sur un ensemble D_0 de mesure B.-L. nulle :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi(F(x, t))\, dt \quad \text{existe sur } D - D_0, \ \text{ si } \int_D |\varphi(x)|\, f(x)\, dx < \infty.$$

Selon (D ; p. 153), dans l'hypothèse (13.3) il existe une fonction $a(x)$ sommable sur D, positive sauf au plus sur un ensemble e_0 invariant (par $F^{[1]}$) de mesure B.-L. nulle, telle que

$$(1_0) \qquad \text{mes. } H^{[1]} = \text{mes. } F(H,1) = \int_H a(x)\,dx.$$

En posant $b(x) = 1/a(x^{[-1]})$, on déduit (par induction) pour $r \geqq 1$:

$$(2_0) \qquad \text{mes. } H^{[r]} = \int_H a(x^{[r-1]})\,a(x^{[r-2]}) \dots a(x^{[1]})\,a(x)\,dx,$$

$$\text{mes. } H^{[-r]} = \int_H b(x^{[-r+1]})\,b(x^{[-r+2]}) \dots b(x^{[-1]})\,b(x)\,dx.$$

Pour $k > 0$ on obtient [(13.5), (2_0)]

$$(3_0) \qquad \Phi_k(H) = \int_H q_k(x)\,dx, \quad q_k(x) = \frac{1}{k}\,[a(x) + a(x)\,a(x^{[1]}) + \\ + \dots + a(x)\,a(x^{[1]}) \dots a(x^{[k-1]})] \;;$$

pour $\Phi_{-k}(H)$ $(k>0)$ on construit une expression analogue moyennant $b(x)$. En vertu de (13.3) et (13.5)

$$(4_0) \qquad \mu(m) \leqq \Phi_k(H) \leqq \nu(m) \qquad (m = \text{mes. } H)$$

pour tout entier $k > 0$; $\Phi_k(H)$ est complètement additive et absolument continue, comme une fonction d'ensemble mesurable B.-L. Puisque $\nu(0) = 0$ et $\mu(m) > 0$ pour $m > 0$, (4_0) entraîne que

(5_0) la nullité de $\Phi_k(H)$ et de mes. H a lieu simultanément.

Pour $k > 0$ cela s'ensuit aussi du fait que la fonction $q_k(x)$ (3_0) est positive sur la plénitude invariante $D - e_0$ de D (les $a(x^{[j]}) > 0$ pour $x \in D - e_0$). Posons, pour $k \to +\infty$,

$$(6_0) \qquad \underline{q}(x) = \varliminf q_k(x), \quad \Phi_*(H) = \int_H \underline{q}(x)\,dx.$$

Le raisonnement actuel ne permet pas la constatation :

$$\mu(m) \leqq \Phi_*(H)\,(m = \text{mes. } H), \text{ comme une conséquence de } (4_0).$$

C'est ainsi, vu le principe d'abaissement (Fatou), selon lequel on peut seulement conclure que

$$(7_0) \qquad \Phi_*(H) \leqq \varliminf \int_H q_k(x)\;dx = \varliminf \Phi_k(H) \leqq \nu(m) \;;$$

on a $\varliminf \Phi_k(H) \geqq \mu(m)$, mais il est concevable qu'on ait $\Phi_*(H) < \mu(m)$ pour quelques ensembles H de mesure positive. Autant que $q_k(x)>0$ sur $D-e_0$, $\underline{q}(x)\geqq 0$ sur $D-e_0$; si $\underline{q}(x)=0$ sur une plénitude de D, on aura (6_0) $\Phi_*(H)=0$ pour tout $H, \subset D$, mesurable et il n'y aura rien d'intérèt. Considérons le cas où $\underline{q}(x)>0$ sur un ensemble épais (invariant) de D (nous n'avons pas établi que ce cas peut être réalisé). Vu que $\Phi_*(H)\leqq \nu(m)$ (7_0), $\underline{q}(x)$ *est sommable sur* D (dans tous les cas). Selon (D ; p. 153), $c(x)$ étant sommable sur D, $\int_H c(x)\,dx$ sera invariant par $F^{[1]}$, si

$$c(x^{[1]})\,a(x)=c(x) \tag{8_0}$$

[en posant $y=x^{[1]}$, on obtient (1_0) $dy=a(x)\,dx$ et $\int_{H^{[1]}} c(y)\,dy=\int_H c(x^{[1]})\,a(x)\,dx$]. Démontrons que $\Phi_*(H)$ (6_0) est invariant. En raison de (3_0) :

$$\frac{k+1}{k}\,q_{k+1}(x)=\frac{a(x)}{k}+q_k(x^{[1]})\,a(x) \qquad (a(x)\geqq 0). \tag{9_0}$$

Soit x un point sur $D-e_0$; pour une suite k_j, $\to +\infty$ avec j, on obtient $q_{k_j}(x^{[1]})\to \underline{q}(x^{[1]})$, donc (9_0) :

$$\underline{q}(x)\leqq \lim_j q_{k_j+1}(x)=\underline{q}(x^{[1]})\,a(x).$$

D'autre part, soit k'_j, $\to+\infty$ avec j, une suite telle que $q_{k_j+1}(x)\to\underline{q}(x)$; il s'ensuit (9_0) que

$$\underline{q}(x)=\lim_j q_{k_j}(x^{[1]})\,a(x)\geqq \underline{q}(x^{[1]})\,a(x).$$

D'où $\underline{q}(x)=\underline{q}(x^{[1]})\,a(x)$ sur la plénitude $D-e_0$ de D ; mais cela est une relation d'accord avec (8_0). Par conséquent $\Phi_*(H)\,(6_0)$ *est une mesure invariante,* avec $\Phi_*(D)\leqq \nu(|D|)<\infty$. Pourtant nous n'avons pas établi que Φ_* est un invariant intégral positif au sens de (13.4) (ce serait le cas seulement dans le cas où $\underline{q}>0$ sur une plénitude de D) ; autrement dit, il est concevable que $\Phi_*(H_0)=0$ pour un ensemble H_0 epais.

(13.8) Dans l'hypothèse (13.3) une conséquence de (13.7), avec $\mu^*=\Phi_*$ (6_0), est que le théorème ergodique a lieu sauf au plus sur un ensemble de mesure Φ_* nulle.

Dans ce résultat nous n'affirmons pas que l'ensemble exceptionnel est au plus un ensemble de mesure B.-L. nulle. Pourtant dans *un cas particulier nous allons établir l'existence des invariants intégraux positifs dans la condition* (13.3) *de Denjoy.*

(13.9) *Soit* mes. $D<\infty$ *;* D *invariant par* $F^{[1]}$ *; soient* $q_k(x)$, $\Phi_k(H)$ *les fonctions intervenant dans* (13.5), (3_0), (13.9 a) $$\underline{q}(x) = \underline{\lim}\, q_k(x),\ \overline{q}(x) = \overline{\lim}\, q_k(x),$$

$$\Phi_*(H) = \int_H \underline{q}(x)\,dx,\ \Phi^*(H) = \int_H \overline{q}(x)\,dx\ ;$$

dans l'hypothèse (13.3), *avec la condition additionnelle*

(13.9 b) $$\bar{\mu}'(0) = \overline{\lim_{m\to 0}} \frac{\mu(m)}{m} > 0,$$

il s'ensuit que $\Phi_*(H)$, $\Phi^*(H)$ *sont des invariants intégraux positifs au sens de* (13.4) (donc ne s'annulant que pour les ensembles minces).

En effet vu (13.3) et (13.5)

(a_1) $$\mu(|H|) \leqq \Phi_k(H) \leqq \nu(|H|) \qquad (k = 1, 2, \dots)\,;$$

la relation (3_0) pour $\Phi_k(H)$ signifie que

(a_2) $$q_k(x) = \Phi_k'(x)$$

est la dérivée générale (au sens de fonctions d'ensemble mesurable) de $\Phi_k(H)$; cette dérivée existe sur une plénitude D' (que l'on peut supposer invariante par $F^{[1]}$) de D. Soient m_1, $m_2, \dots$ une suite de nombres positifs, $\to 0$, tels que

(a_3) $$\underline{\nu}'(0) = \underline{\lim}_m \frac{\nu(m)}{m}\ (\text{pour } m, > 0, \to 0) = \lim_j \frac{\nu(m_j)}{m_j}.$$

Les fonctions $\mu(m)$, $\nu(m)$ étant inverses l'une de l'autre, on note que dans la condition (13.9 b)

(a_4) $$(1 \leqq)\, \underline{\nu}'(0) = \frac{1}{\bar{\mu}'(0)} < +\infty.$$

Soient H_j ($j = 1, 2, \dots$) une suite d'ensembles fermés, $H_j \ni x$, $d\,H_j$ (diamètre de H_j)$\to 0$, ayant un paramètre de régularité [voir, par exemple, S. Saks, Theory of the Integral, p. 106] positif ; si x est un point sur D', on aura

(a_5) $$q_k(x)\,(= \Phi_k'(x)) = \lim \frac{1}{|H_j|} \Phi_k(H_j).$$

Ici et dans la suite $|A|$, où A est un ensemble, signifie la mesure B.–L. de A. Choisissons les H_j d'une telle suite de sorte que $|H_j| = m_j$; vu (a_1)

$$\frac{1}{|H_j|} \Phi_k(H_j) \leqq \frac{\nu(m_j)}{m_j}\,;$$

en laissant $j \to +\infty$ on obtient $[(a_3), (a_5)]$ $q_k(x) \leqq \underline{\nu}'(0)$ fini. De la même manière on trouve une borne inférieure de $q_k(x)$. On déduit

$$(6_6) \qquad \bar{\mu}'(0) \leqq q_k(x) \leqq \underline{\nu}'(0)\ ; \quad \bar{\mu}'(0) \leqq \underline{q}(x) \leqq \bar{q}(x) \leqq \underline{\nu}'(0)\ ;$$

sur une plénitude invariante (par $F^{[1]}$) de D ; donc

$$(a_7) \qquad \bar{\mu}'(0)\,|\,H\,| \leqq \Phi_*(H) \leqq \Phi^*(H) \leqq \underline{\nu}'(0)\,|\,H\,|.$$

A la suite de (8_0) nous avons déjà établi que $\Phi_*(H)$ est invariant par $F^{[1]}$; de la même manière on montre que $\Phi^*(H)$ possède ce caractère. En tant que $0 < \bar{\mu}'(0)$, (a_6) *et* (a_7) *entraînent la conclusion dans* (13.9).

Dans le reste de cette section nous omettrons la condition (13.9 b), en admettant ainsi le cas où $\bar{\mu}'(0)$ soit nul (alors $\nu'(0) = +\infty$). Nous allons maintenant démontrer, *sans emploi de mesures invariantes,* le théorème ergodique suivant, où l'ensemble exceptionnel est définitivement au plus de mesure B.-L. nulle.

THÉORÈME 13.10. *Soit* mes. D *fini,* D *étant invariant par* $F(x,t)$. *Admettons l'hypothèse de Denjoy* (13.3) ($\nu(|D|)$ *fini*). *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction mesurable et bornée* ($|\varphi(x)| \leqq c$) *dans l'espace* D, *la limite*

$$(13.10\,a) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi(F(x,t))\,dt$$

existe pour tout x *dans* D, *sauf au plus sur un ensemble de mesure* B.–L. *nulle.*

Remarquons d'abord que D dans ce théorème pouvant être non-compact, le théorème de N. Kryloff et N. Bogoliouboff (NS ; p. 514) sur l'existence de mesures invariantes ne s'applique pas dans le cas actuel. Notre démonstration est partiellement modelée d'après la preuve du théorème ergodique de G. D. Birkhoff, donnée par A. Khintchine (voir (K)) dans le cas où une mesure invariante est donné.

Soit k *un entier positif* fixe, jusqu'à mention contraire. En posant

$$(1^\circ) \qquad \Phi_k(H^{[\pm r]}) = \Phi_k(H) + \sigma_{k,\pm r}(H) \qquad (r = 0, 1, \ldots, k-1),$$

on obtient (13.5) :

$$k\,\sigma_{k,r}(H) = (|\,H^{[k+1]}\,| + \cdots + |\,H^{[k+r]}\,|) - (|\,H^{[1]}\,| + \cdots + |\,H^{[r]}\,|),$$

$$k\,\sigma_{k,-r}(H) = -(|\,H^{[k-r+1]}\,| + \cdots + |\,H^{[k]}\,|) + (|\,H^{[1-r]}\,| + \cdots + |\,H\,|).$$

Vu que (13.3) $|\,H^{[j]}\,| \leqq \nu(|\,H\,|)$,

$$(2^\circ) \qquad -\frac{r}{k}\nu(|\,H\,|) \leqq \sigma_{k,\pm r}(H) \leqq \frac{r}{k}\nu(|\,H\,|) \qquad (0 \leqq r < k)\ ;$$

$$-\nu(|\,H\,|) \leqq \sigma_{k,\pm r}(H) \leqq \nu(|\,H\,|) \qquad (r \geqq k).$$

Posons

$$a(x,\tau)=\int_0^\tau \varphi(F(x,t))\,dt. \tag{3°}$$

Comme dans le cas considéré dans (K), il suffit de démontrer que $\frac{1}{i}a(x, i)$ tend vers une limite, quand i entier tends vers $+\infty$. Soient

$$\bar\varphi(x)=\overline{\lim_i}\,\frac{1}{i}\,a(x,i),\quad \underline{\varphi}(x)=\underline{\lim_i}\,\frac{1}{i}\,a(x,i)\qquad(\text{entier } i\to+\infty). \tag{4°}$$

Supposons, si c'est possible, que deux nombres $\alpha<\beta$ *existent, tels que*

$$\Phi_k(S)>0,\ S \text{ étant l'ensemble où } \underline{\varphi}(x)<\alpha,\ \beta<\bar\varphi(x). \tag{13.11}$$

S est invariant (par $F(x,t)$). Des sous-ensembles M_l, M_l^* de S sont formés, selon (K), qui correspondent d'une certaine manière à un entier s, >0, donné ; ainsi $M_l\ (l\geqq 1)$ est l'ensemble de points sur S, tels que $a(x,l)>\beta l$, tandis que $a(x,j)\leqq\beta j$ pour $j<l$;

$$M_0^*=M_s\ ;\ M_{s-1}^*=M_{s-1}-M_{s-1}\sum_{r=0}^{s-1}M_s^{*[r]}\ ;\ \ldots \tag{5°}$$

$$M_l^*=M_l-M_l\sum_{i=l+1}^{s}\sum_{r=0}^{i-1}M_i^{*[r]}\ (1\leqq l<s)\ ;\ M_1^*=M_1-M_1\sum_{i=2}^{s}\sum_{r=0}^{i-1}M_i^{*[r]}\ ;$$

les M_l sont disjoints ; $S=\sum_1^\infty S_l$ (la notation : $A^{[r]}=F(A,r)$) ; de plus

$$S_s=\sum_{l=1}^{s}M_l=\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=0}^{l-1}M_l^{*[r]}\ ;\quad M_l^{*[r]}\cdot M_{l'}^{*[r']}=0\qquad(si\ (r,l)\neq(r',l'))\ ; \tag{6°}$$

$$M_l^{[r]}\subset M_1+\cdots+M_{l-r}\quad\text{pour}\quad 0\leqq r<l.$$

Pour $H,\subset D$, mesurable on déduit (3°) :

$$\int_{H^{[r]}}a(x',1)\,d\Phi_k(x')=\int_{H^{[r]}}\Big[\int_0^1\varphi(F(x',t))\,dt\Big]\,d\Phi_k(x')\qquad(\text{où } x'=x^{[r]},\ x\in H),$$

$$=\int_H\Big[\int_0^1\varphi(F(F(x,r),t))\,dt\Big]\,d\Phi_k(x^{[r]})=\int_H\Big[\int_0^1\varphi(F(x,r+t))\,dt\Big]\,d\Phi_k(x^{[r]})$$

$$=\int_H\Big[\int_r^{r+1}\varphi(F(x,t))\,dt\Big]\,d\Phi_k(x^{[r]})=\int_H[a(x,r+1)-a(x,r)]\,d\Phi_k(x^{[r]}).$$

Donc (1°)

$$\int_{H^{[r]}}a(x',1)\,d\Phi_k(x')=\int_H[a(x,r+1)-a(x,r)]\,d\Phi_k(x)+\int_H[a(x,r+1)-a(x,r)]\,d\sigma_{k,r}(x). \tag{7°}$$

H étant mesurable et e étant un sous-ensemble variable mesurable de H, $r \geqq 0$, posons

$$\underline{\sigma}_{k,r}(H) = \min_{e \subset H} \sigma_{k,r}(e), \quad \bar{\sigma}_{k,r}(H) = \max_{e \subset H} \sigma_{k,r}(e) \;;$$

désignons par $\sigma^*_{k,r}(H) = |\underline{\sigma}_{k,r}(H)| + \bar{\sigma}_{k,r}(H)$ la variation totale de la fonction $\sigma_{k,r}$ d'ensemble mesurable. Vu que $\nu(|e|) \leqq \nu(|H|)$, on obtient (2°) :

$$-\frac{r}{k}\nu(|H|) \leqq \underline{\sigma}_{k,r}(e) \leqq \bar{\sigma}_{k,r}(e) \leqq \frac{r}{k}\nu(|H|) \qquad (e \subset H) \;;$$

donc $\sigma^*_{k,r}(H)$, qui est une fonction positive non-décroissante d'ensemble H, satisfait à l'inégalité

$$\sigma^*_{k,r}(H) \leqq \frac{2r}{k}\nu(|H|). \tag{8°}$$

En tant que $|\varphi| \leqq c$, il s'ensuit (3°) que

$$|a(x, r+1) - a(x, r)| \leqq c \;;$$

d'ou (8°) dans ce cas

$$\left|\int_H [a(x, r+1) - a(x, r)]\, d\sigma_{k,r}(x)\right| \leqq \int_H \left|a(x, r+1) - a(x, r)\right| d\sigma^*_{k,r}(x) \tag{9°}$$

$$\leqq c\,\sigma^*_{k,r}(H) \leqq \frac{2rc}{k}\nu(|H|) \leqq \frac{r}{k}c_0, \qquad \text{où } c_0 = 2c\,\nu(|D|) \quad (r \geqq 0).$$

En vertu de (6°), (7°) il résulte que

$$\int_{S_s} a(x, 1)\, d\Phi_k(x) = \sum_{l=1}^{s}\sum_{r=0}^{l-1} \int_{M_l^{*[r]}} a(x, 1)\, d\Phi_k(x) \tag{10°}$$

$$= \sum_{l=1}^{s}\sum_{r=0}^{l-1} \int_{M_l^*} [a(x, r+1) - a(x, r)]\, d\Phi_k(x) + J_{k,s} \;;$$

En vertu de (9°)

$$J_{k,s} = \sum_{l=1}^{s}\sum_{r=0}^{l-1} \int_{M_l^*} [a(x, r+1) - a(x, r)]\, d\sigma_{k,r}(x), \qquad \text{où } |J_{k,s}| \leqq \frac{c_0 j_s}{k} \;; \tag{11°}$$

ici $j_s = \sum_1^s \frac{1}{2} l(l-1)$ est indépendant de k. Or sur $M_l^*, \subset M_l$, (5°) on a $a(x, l) > \beta l$; par là [(10°), (1°)]

$$\int_{S_s} a(x, 1)\, d\Phi_k(x) = \sum_{l=1}^{s} \int_{M_l^*} a(x, l)\, d\Phi_k(x) + J_{k,s} > \beta \sum_{l=1}^{s} l\,\Phi_k(M_l^*) + J_{k,s}$$

$$= \beta \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=0}^{l-1} \Phi_k (M_l^*) + J_{k,s} = \beta \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=0}^{l-1} [\Phi_k (M_l^{*[r]}) - \sigma_{k,r} (M_l^*)] + J_{k,s} ;$$

donc [(6°), (2°)]

(12°) $$\int_{S_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) > \beta\, \Phi_k (S_s) + \varepsilon_{k,s}, \quad \varepsilon_{k,s} = J_{k,s} - \beta\, \Lambda_{k,s},$$

$$\text{où } \Lambda_{k,s} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=0}^{l-1} \sigma_{k,r} (M_l^*), \quad |\Lambda_{k,s}| \leqq \frac{c_1 j_s}{k} \quad (c_1 = \nu(|D|)).$$

Vu que $|\varphi| \leqq c$ on aura (11°) :

(13°) $$|\varepsilon_{k,s}| \leqq c' \frac{j_s}{k}, \quad \text{où } c' = c_0 + \beta c_1.$$

En tenant compte de (12°), (13°), α, β $(\alpha < \beta)$ étant les nombres dont il s'agit dans (13.11), on conclut ainsi.

(13.12) *Dans les conditions du théorème, si* (3.11) *a lieu, on aura :*

$$\int_{S_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) > \beta\, \Phi_k (S_s) + \varepsilon_{k,s}, \quad |\varepsilon_{k,s}| < c' \frac{j_s}{k},$$

et pareillement

$$\int_{Q_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) < \alpha\, \Phi_k (Q_s) + \xi_{k,s}, \quad |\xi_{k,s}| < c'' \frac{j_s}{k}$$

$(k > 0)$, où c', c'' sont des constantes (qui peuvent dépendre de α, β) j_s est indépendant de k. Q_s est analogue à S_s; $Q_s \subset S$; $Q_s \to S$.

Or $|S_{\alpha,\beta}| > 0$, où $S_{\alpha,\beta} = S$ (13.11); $H_s = S_s Q_s \to S$. En tant que $\Phi_k (H) \leqq \nu(|H|)$, on a

$$\Phi_k (Q_s) = \Phi_k (H_s) + \delta'_{k,s}, \quad \Phi_k (S_s) = \Phi_k (H_s) + \delta_{k,s},$$

où $\delta'_{k,s}$, $\delta_{k,s}$, $\geqq 0$, ne dépassent pas $\nu_s = \nu(|S - H_s|)$. De plus

$$\int_{Q_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) = \int_{H_s} \cdots + \varrho'_{k,s}, \quad \int_{S_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) = \int_{H_s} \cdots + \varrho_{k,s},$$

où $|\varrho'_{k,s}|$, $|\varrho_{k,s}|$ ne surpassent pas $c\nu_s$. Vu (13.12)

$$\beta\, \Phi_k (H_s) + \gamma_{k,s} < \int_{H_s} a(x, 1)\, d\, \Phi_k (x) < \alpha\, \Phi_k (H_s) + \gamma'_{k,s};$$

ici $\gamma_{k,s} = \beta\, \delta_{k,s} - \varrho_{k,s} + \varepsilon_{k,s}$, $\gamma'_{k,s} = \alpha\, \delta'_{k,s} - \varrho'_{k,s} + \xi_{k,s}$. Donc

(14°) $$0 < \mu(|H_s|) \leqq \Phi_k (H_s) < \frac{\gamma'_{k,s} - \gamma_{k,s}}{\beta - \alpha} = \Gamma_{k,s},$$

si $s \geqq s_0$ de sorte que $|H_s| > 0$ pour tout $s \geqq s_0$. On obtient $\Gamma_{k,s}$ inférieur à $c_1 j_s k^{-1} + c_2 \nu_s$ (c_1, c_2, > 0, indépendants de k, s). Prenons un s, $\geqq s_0$, tel que $c_2 \nu_s < \frac{1}{2} \mu(|H_s|)$. Il y a contradiction pour k tel que $c_1 j_s k^{-1} < \frac{1}{2} \mu(|H_s|)$. (M. A. Freed m'a signalé qu'en general $Q_s \neq S_s$). Donc $S = S_{\alpha,\beta}$ *est mince pour toute couple de nombres* α, β. En suivant maintenant le raisonnement, fait dans (K) pour un but analogue, on forme une suite δ_j ($j = 1, 2, \ldots$) d'intervalles (α_j, β_j), où $\alpha_j < \beta_j$ et les extrémités des intervalles constituent l'ensemble de tous les nombres rationnels. Nous venons d'établir que S_{α_j, β_j} (l'ensemble de points tels que $\underline{\varphi}(x) < \alpha_j < \beta_j < \bar{\varphi}(x)$) est mince ; leur réunion est mince ; donc $\underline{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x)$ sur une plénitude D' de D ; par suite [(4°), (3°)] lim $(1/i)\, a(x, i)$ existe sur D'. *Théorème* (13.10) *est vérifié.*

Comme dans le cas d'une mesure invariante, la fonction

$$\psi(x) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(F(x, t))\, dt, \tag{13.13}$$

dont il s'agit dans Théorème 13.10 et qui existe pour $x \varepsilon D - D_0$, où D_0 invariant par $F(x, t)$, est mince, cette fonction est constante sur toute trajectoire individuelle ($\psi(F(x, t)) = \psi(x)$) pour tout $x \varepsilon D - D_0$. Selon la locution de Khintchine, nous disons que le mouvement est *indécomposable*, ou bien '*strongly transitive*', d'accord avec Birkhoff, si $A, \subset D$, invariant et epais entraîne mes. $(D - A) = 0$.

(13.14) *Dans les conditions de Théorème* 13.10, *si le mouvement est indécomposable dans* D, *il existe une constante* c *telle que* (13.13) *:*

$$\psi(x) = c \text{ sur une plénitude de } D. \tag{13.14 a}$$

Ce résultat se démontre comme dans le cas d'une mesure invariante (voir, par exemple (NS ; p. 490)). La preuve dépend du théorème ergodique et de l'invariance de $\psi(x)$ par $F(x, t)$, mais elle ne tient pas à l'existence d'une mesure invariante.

Dans les conditions du théorème il s'ensuit immédiatement que

$$\int_D \psi(x)\, dx = \lim_{\tau \to \infty} \int_D \varphi_\tau(x)\, dx, \quad \varphi_\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(F(x, t))\, dt. \tag{13.15}$$

En outre, les formules

$$\int_D \varphi_\tau(x)\, dx = \int_D \varphi(x)\, dx, \quad \int_D \psi(x)\, dx = \int_D \varphi(x)\, dx$$

en général n'auront pas lieu. Pourtant, si la mesure B.-L. était invariante (par $F(x, t)$), ces relations serait valables ; le même serait vrai, avec dx remplace par $d\mu^*$, si μ^* était une mesure invariante (NS ; p. 491).

Dans les hypothèses du genre de celles de M. Denjoy [(13.3), (13.3^c)] il devrait être possible d'établir, outre Théorème 13.10, plusieurs autres résultats ergodiques, où n'interviennent pas les mesures invariantes.

Renvois

[1]. A. DENJOY, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Parties I,..., IV, Paris, 1941–1949, 1–714 ; désigné dans la suite par (D).

[2]. V. V. NEMIETSKY et V. V. STEPANOFF, *La théorie qualitative des équations différentielles* (en russe), Moscow–Leningrad, 1949, 1–550 ; désigné par (NS) ; aussi V. V. NEMIETSKY, Topological problems of the theory of dynamical systems, *Uspehi Mat. Nauk* (N. S.) 4, N° 6 (34), 91–153 (1949) (en russe), traduit par *Amer. Math. Soc.*, Translation Number 103.

[3]. A. KHINTCHINE, Zu Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems, *Math. Annalen*, Bd. 107 (1932–33), 485–488 ; désigné dans la suite par (K).

[4]. G. D. BIRKHOFF, Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems, *Proc. N. A. S.*, t. 17 (1931), 650–655 ; aussi, Proof of the ergodic theorem, *Proc. N. A. S.*, t. 17 (1931), 655–660.