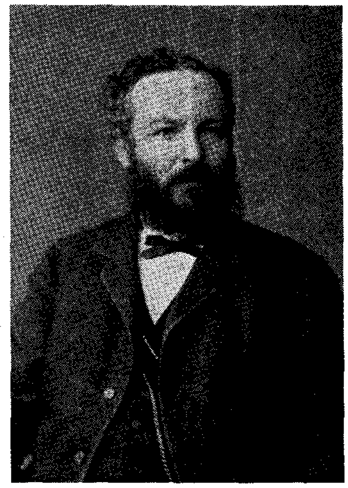

Seinem lieben Freunde G. Mittag-Leffler d. 25 Dec. 1884. Georg Cantor

*Institut Mittag-Leffler, Stockholm*

AN UNPUBLISHED PAPER BY GEORG CANTOR:

# PRINCIPIEN EINER THEORIE DER ORDNUNGSTYPEN ERSTE MITTHEILUNG


BY

I. GRATTAN-GUINNESS

*Enfield College of Technology, Enfield, Middlesex, England*





5 — 702909 *Acta mathematica*. 124. Imprimé le 2 Avril 1970.

## Introduction

### 1. The motivation of the paper

In the seventh volume of *Acta Mathematica*, for 1885–86, Georg Cantor published a paper on various properties of $n$-dimensional point sets [20]. He put to its title the subheading "second communication" (*zweite Mitteilung*), with a footnote that it was a sequel to the "first communication" (*première communication*) on the same subject, which appeared in 1883 as a letter to Mittag-Leffler in the second volume of his journal [17]. Yet the *zweite Mitteilung* bears an even closer relation to an *erste Mitteilung* destined for the same seventh volume, in which Cantor gave a comprehensive account of the properties of ordered sets. But this paper never appeared: while he was proofreading the first eight pages, he accepted Mittag-Leffler's suggestion that it should not be published at that time, and in fact it never appeared.

To appreciate the circumstances of this strange affair, we must go back to 1882 and the founding by Mittag-Leffler of *Acta Mathematica*. Like all editors, Mittag-Leffler hoped to give his journal a noteworthy start by publishing important work. Doubtless he remembered the good fortune of Crelle, who had begun the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* with a plentiful supply of work from Abel: indeed he put a portrait of Abel as the frontispiece to the first volume of *Acta Mathematica*. But it was the French school which dominated his early pages, with important work from Hermite and his pupils, especially Appell, Picard and Poincaré.

Mittag-Leffler had another idea for promoting his journal, for which he drew further on his friendship with Hermite. Cantor's papers on analysis and set theory had been appearing in German in recent years, mostly in *Mathematische Annalen*, and Mittag-Leffler secured Hermite's cooperation in the preparation of French translations of the most important papers by the pupils. He obtained Cantor's consent for the project, and indeed came into intimate correspondence with him as a result of this approach. The opposition to Cantor's work had left Cantor isolated at Halle University, relying on frequent correspondence with friendly colleagues, and in 1882 he switched his main contact from Dedekind [see [36], [29], 177–251] to Mittag-Leffler. During the next three years many letters passed between them, of which about 170 have survived in Cantor's originals and Mittag-Leffler's copies in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm (formerly his home). They give a remarkable picture of Cantor's work and his personality, which was only partially revealed in Schönflies's review [39] of this period of Cantor's life; for Cantor passed through a profound emotional disturbance at this time in which the opposition to his work and the new territory into which it was moving helped to provoke bouts of mental illnes from which he was to suffer intermittently for the rest of his life.

But we confine our present interest to Cantor's unpublished paper on ordered sets. The result of the collaboration with Hermite's pupils was a series of translations in the second (1883) volume of *Acta Mathematica* [[11]–[16]], followed by the *première communication* on $n$-dimensional sets and part of a letter to Cantor from Mittag-Leffler's student, Bendixson [1]. The complete collection was reviewed by Jules Tannery in the October 1884 number of the *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* [40], at the end of a survey of the first two volumes of *Acta mathematica*; and it was the receipt of a copy of this article from Mittag-Leffler that motivated Cantor to prepare his paper on ordered sets during the winter of 1884–85.

## 2. The preparation of the paper

Cantor passed through the first depressive phase of his life in the summer of 1884: in a letter to Mittag-Leffler on the 21st June (apparently the first for about seven weeks) he complained of feeling unwell, and doubted the progress of his researches. But the climax of his anxieties came during a holiday in Friedrichroda in August, when he brought himself to attempt a reconciliation with his opponent Kronecker—a gesture which Kronecker accepted, although Cantor was still to suffer fixations against him—and a few days later found great uncertainty over the proof or disproof of his Continuum Hypothesis that the cardinality $\theta$ of the non-infinitesimal continuum equalled $\aleph_1$ in his series of cardinals $\aleph_0$, $\aleph_1$, .... On the 26th August he sent Mittag-Leffler a proof that $\theta = \aleph_1$; but on 14th November he announced not only that the proof was wrong but also that he had found a "strong proof" that $\theta$ did not belong to the series of cardinals at all. The next day he withdrew his "strong proof" and returned to his assertion that $\theta = \aleph_1$, giving on the day after details of a new proof [see [39], 9–11, 16–19; [34], 237–243]. And it was during this period that he began writing his paper on ordered sets.

It was a practice in Cantor's time to draft letters in detail in a letter-book, in order to write out an unaltered version for posting. Cantor used twenty such letter-books in the course of his life, and they remained among his papers after his death in 1918. His descendants have continued to occupy his house to this day, but his magnificent library was sold for a modest sum in the 1920's and most of his papers have been lost. But a few items have survived: among them, the manuscript on ordered sets, and three of the letter-books. One of them was used by Cantor from October, 1884 to July, 1888: it begins with the draft of an important letter to Mittag-Leffler begun on the 20th October, 1884 (which we shall consider later), continues with a letter of the 6th November which became the paper on ordered sets, and was interrupted by the letter of the 16th November in which Cantor explained his new proof of the Continuum Hypothesis. By his own dating in the letter-book some of the paper was prepared by the 18th November, but it was not completed until 25th February, 1885. He had announced his intention of writing it in an addendum of the 28th October to the letter of the 20th, and reported its commencement in a short note to Mittag-Leffler of the 6th November, 1884 as a reply to Jules Tannery's review of the *Acta Mathematica* papers [Documents I and III]: on the 18th November he sent off the completed articles, promising the rest in two weeks and also three other papers (of which only the *zweite Mitteilung* was written) for early in the following year [Document IV]. During November he sent a few minor corrections in letters and postcards: on Christmas Day he sent an inscribed photograph of himself, which we reproduce here on the title-page. In January, 1885, the page-proofs of the first eight pages were sent to him from Stockholm, and late in February he completed and sent off the manuscript and asked to receive the rest of the proofs as soon as possible [Document V]. Mittag-Leffler agreed to this request in a letter of the 26th February; but on the 9th March he sent another letter, suggesting that it would be better if Cantor were not to publish his results until he had used them to solve some outstanding problem such as the Continuum Hypothesis, and allow the results to be rediscovered in, say, 100 years' time, when it would be found that Cantor had had the ideas long previously [Document VII]. Cantor agreed to the idea on the 15th [Document VIII], and asked for the return of the manuscript then, and again on the 23rd [Document IX]. Mittag-Leffler returned the part of the manuscript (pp. 9–20) not in proofs, retaining the rest, and the matter was never referred to again. Apart from the *zweite Mitteilung* and a short paper of 1892 where he gave his diagonalisation proof of the non-denumerability of the real line continuum [24], Cantor published little more on set-theory until the survey article on transfinite arithmetic in two parts in 1895 and 1897 [[25], [27]]. But he had not forgotten his old manuscript, for in a letter of January, 1896 to Gerbaldi, the translator into Italian of the first part of the new paper [26], he recalled in rather aggrieved terms that Mittag-Leffler had told him that it had been "100 years premature" [Document X]. He also mentioned the incident in a lecture given in Brunswick in September 1897 (doubtless at the constant Dedekind's invitation); (1) but his feelings towards Mittag-Leffler remained warm, for in a letter sent to Poincaré shortly after the one to Gerbaldi he reminisced on the event in more detail, and then in moving language reaffirmed the importance he still felt for Mittag-Leffler's friendship [Document XI].

### 3. Cantor's new ideas for his theory of point sets

The first eight pages of the manuscript and a set of the proof-pages were filed by Mittag-Leffler in his house: he sent back to Cantor the rest of the manuscript, which Cantor then put with his corrected proof-sheets. Mittag-Leffler's judgement implies that the paper does not contain any major new results in set theory, but in fact his remark shows only his own failure to appreciate the new stage in Cantor's thought that had begun with the letter started on the 20th October, 1884. Cantor's work on set theory up to that date may be summarised as follows. The first results had been produced in the early 1870's in connection with the problem of the uniqueness of representation of a function by a Fourier series. He had extended the ideas of Riemann and his Halle senior colleague Heine on the possibility of the series not being convergent at a number of points, by inventing point set theory to consider non-convergence of the series over sets of points of the first and second species (*Gattung*), defined by the property that the sequence of derived sets $P'$, $P''$, ... did or did not lead to the empty set. Hence a set of the second species could have a non-empty derived set $P^{(\infty)}$, which would itself possess a derived set $P^{(\infty+1)}$; *and so arose the transfinite numbers, without reference to the question of the cardinality and ordinality of points sets themselves.* Indeed, in a paper of 1880 Cantor recalled that he had developed his sequence of infinite numbers

$$\infty, \infty^{\infty}, \infty^{\infty^{\infty}}, \ldots$$

ten years previously—that is, in 1870, when he had only just started to publish his work on Fourier series [[7], 358; not in [15] or [28]]. The recollection came in the second of a series of papers in *Mathematische Annalen*, in which he *did* take set theory away from its applications in analysis into a separate study of its own and so to a new, more abstract, phase, where transfinite arithmetic *was* applied to the examination of the cardinality and ordi-

(1) No manuscript survives of the lecture, but a set of notes made by Stäckel was seen by Fraenkel when preparing his biography of Cantor [see [30], 265–266]. In his book *Abstract set theory*, Fraenkel cited these notes to remark that *Acta Mathematica* had rejected *the survey paper of 1895–97* at some earlier time for being "100 years too early" [see [31], 1–2, 249; and also [30], 213]. But Cantor must have been referring to the manuscript of 1884: thus there was either a misunderstanding of Cantor's lectures by Stäckel, or of Stäckel's notes (which we have not yet traced) by Fraenkel.

In his review of the correspondence, Schönflies thought that the manuscript on ordered sets—which of course he did not find—appeared as part of a later publication [that is, [23], §§ I, VIII; see [39], 15].

nality of sets, where the Continuum Hypothesis became the chief unsolved problem, and where decomposition theorems such as the "Cantor-Bendixson theorem" [[1], 419] were developed partly for the purpose of solving it.

After his depressive phase in the summer of 1884 Cantor explained new ideas in his October letter [Document I] *which opened a third, specifically topological, period,* surpassing the previous phase in the sophistication of its methods of set decomposition. So far he had relied on fundamental set-theoretic relations between a set $P$ and its derived set $P'$ to categorise sets: for example, in modern notation:

$$P \text{ is } \begin{cases} \textit{closed} \\ \textit{perfect} \\ \textit{dense-in-itself} \end{cases} \quad \text{if } P \begin{cases} \supset P' \\ \equiv P'. \\ \subset P' \end{cases} \tag{2}$$

Now he introduced a whole series of new types of sets, defined by more sophisticated relations, which he claimed to have conceived during the previous winter.

1. *Coherence of P*, written $cP$ and defined by

$$cP \equiv P \cap P'. \tag{3}$$

2. *Adherence of P*, written $aP$ and defined by

$$aP \equiv P \cap (P - P'). \tag{4}$$

These two ideas gave the decomposition

$$P \equiv aP \cup cP, \tag{5}$$

and led not only to new series of iterated sets similar to the sequence of derived sets, that is

$$c^2P,\ c^3P,\ \ldots \tag{6}$$

and

$$a^2P,\ a^3P,\ \ldots, \tag{7}$$

*but also to a new type of mixed iteration*:

$$acP,\ caP,\ \ldots. \tag{8}$$

(8) led to a new decomposition theorem.

$$P \equiv \Big(\bigcup_{\alpha' < \alpha} (ac^{\alpha'}P)\Big) \cup (c^{\alpha}P), \tag{9}$$

(where $\alpha$ is an ordinal of the first (finite) or second number class) and thus to the new categories:

3. *Inherence of P*, written $iP$ and defined by

$$iP \equiv c^{\alpha}P \tag{10}$$

and

4. The set *seP*, defined by

$$seP \equiv \bigcup_{\alpha'<\alpha} (ac^{\alpha'}P), \tag{11}$$

in terms of which (9) would be written

$$P \equiv seP \cup iP. \tag{12}$$

Cantor used the notation *seP* in his letter because the set was *separated*, that is, in his terminology, it contained no dense-in-itself subset. Next Cantor briefly discussed another new idea: *a homogeneous set of the $\alpha$-th order*. If the accumulation point $p'$ of a set $P$ is such that the points of intersection of $P$ with a sphere centre $p'$ and radius $\varrho$ is of $\alpha$-th cardinality for all $\varrho$, then $p'$ is *an accumulation point of the $\alpha$-th order*. For a dense-in-itself set each point is of course an accumulation point; and if in addition it is an accumulation point of the $\alpha$-th order, then the set is homogeneous of the $\alpha$-th order. This property led Cantor to another decomposition of a dense-in-itself set into homogeneous subsets, reducible to a result similar to the "Cantor-Bendixson theorem":

$$P \equiv P_{(1)} \cup P_{(2)}, \tag{13}$$

where $P_{(1)}$ and $P_{(2)}$ are homogeneous of the first and second cardinalities. Now $iP$ is dense-in-itself: thus (12) became

$$P \equiv (seP) \cup (i_1P) \cup (i_2P). \tag{14}$$

Finally Cantor introduced a new notation for the

5. *Derived set of $P$*, now to be written $\partial P$ and defined by

$$\partial P \equiv P', \tag{15}$$

and then defined his last new category:

6. *Supplement of $P$*, written $sP$ and defined by

$$sP \equiv \partial P - P. \tag{16}$$

From (3) and (5) follow the new decompositions

$$\partial P \equiv cP \cup sP \tag{17}$$

and

$$P \cup \partial P \equiv aP \cup cP \cup sP. \tag{18}$$

Cantor concluded the mathematical part of his letter by noting the iterative and combinatorial possibilities of $a$, $c$, $\partial$ and $s$: and in a post card of the 4th November (which clarified that the results assumed that the various sets and subsets were non-empty) he changed the notation *seP* of (11) back to the *rP* that he had first written in the letter-book, called the set the *remainder* (*Rest*) of $P$, and pointed out that there were now *six* set operators to examine: $a$ (adherence), $c$ (coherence), $\partial$ (derivative), $i$ (inherence), $r$ (remainder) and $s$ (supplement) [Document II]. Thus he had available much new machinery for set-theoretic investigations, and he began them with his paper on ordered sets [Document VI] in reply to Jules Tannery's review of the *Acta Mathematica* papers.

Tannery had surveyed certain principal features of Cantor's work as revealed in the translated articles—rational and irrational numbers, set decomposition theorems, and the theory of ordinals—and in connection with the latter theory, he briefly described the idea of a denumerable well-ordered set and the different ordinalities which follow from rearrangements of a set [[40], 169–170]. He had gone no further than these elementary steps, and in the opening paragraphs of the paper Cantor implied possible misunderstandings and an interest by Tannery in the philosophical problems, as opposed to the mathematical
§ 1 content, of the theory of ordered sets. The ordering that a set might show he called an *order-type*, or briefly, *type*, and often he just called a simply ordered set an order-type. After
§ 2 a survey of the possible applications of the theory in pure and applied mathematics and
§ 3 a summary on the property of cardinality, he turned to simple ordering in detail, distin-
§ 4 guishing between the order-type of the first number class ($\omega$), the rationals in $(0, 1)$ ($\eta$), and the real line continuum ($\theta$), and for each order-type $\alpha$ specified the inverse order-type $^*\alpha$ (changed later to $\alpha_*$). Then he turned to well-ordering. It is well known that Cantor believed that every set could be well-ordered: the developments which led to the detection of the axiom of choice and its equivalence to Cantor's belief did not take place until the the beginning of this century. In this paper Cantor noted that an infinite well-ordered set
§ 5 and the set of inverse order could not be of the same order-type, and showed that the
§ 6 laws of addition and multiplication could hold for simply as well as for well-ordered sets.

So far Cantor had basically been collecting together and reassembling his results from earlier papers, and it was this section of his paper that he completed and sent off to Mittag-Leffler on the 18th November. During the next three months he wrote the last two articles of his paper, which almost doubled its length and began to use the ideas summarised in the October letter. He dealt only with coherence and adherence, as defined for a simply ordered set, calling an accumulation point $e$ of the simply ordered set $A$ of type $\alpha$ a *chief element* (originally *limit element*, but changed by Cantor in proofs), if between any earlier and later elements $'e$ and $e'$ in the ordering lay an infinity of elements of $A$. Then the coherence and adherence were defined by

$$Ac \equiv \{x \mid x \text{ is a chief element, and also a member, of } A\} \tag{19}$$

and

$$Aa \equiv \{x \mid x \text{ is not a chief element, but is a member, of } A\} \tag{20}$$

(where he now placed the operator letter after, rather than before, the set letter), from

which the decomposition (5) again follows. Cantor devoted the rest of the article to more sophisticated decompositions of $A$ using the sets of (6)–(8), and to particular examples of ordered sets corresponding to the types of set (dense-in-itself, etc.) that he had introduced in his earlier work. Then in his last article he generalised the results to sets over which $n$ § 7
independent orderings would apply. The example of this which he had in mind was of $n$-dimensional sets, for which the natural ordering applied along each dimension. He discussed the different order-types derivable in such a case from a given type $\alpha$, and in particular the type $\alpha_{*\nu}$ in which the $\nu$th order-type is reversed. Then he outlined the relations between $n$-dimensional sets, defining the similarity between two such sets and addition and multiplication of them, their coherence and adherence, and the properties of particular types. § 8

This work on $n$-dimensional ordered sets seems to have inspired Cantor to write his *zweite Mitteilung* on general $n$-dimensional sets, which appeared with the dating "29th January, 1885" slightly later (pp. 105–124) in the same volume of *Acta Mathematica* for which the *erste Mitteilung* (pp. 49– ) had been intended. After the completion of the second paper Cantor sent in an addendum for the first, in which he referred to the second by page location and contrasted the approaches in the two of them. The second work followed more closely the October letter, presenting in a rambling form the new ideas for general ($n$-dimensional) rather than ordered sets [20]; but neither there nor later did he develop in published work the formal possibilities of his new set operators. Doubtless he was hoping to find a proof of the Continuum Hypothesis by means of the new kinds of decomposition theorem that were within his grasp, and from his presumed failure in his aim perhaps there remained in his memory the advice of Mittag-Leffler not to publish work which did not contain the solution of some important problem. Thus with his agreement to Mittag-Leffler's unfortunate if prophetic request for the withdrawal of the *erste Mitteilung*, the new era of set-theoretic development that it was to open made little impact, being obscured from the start by the identification of the *zweite Mitteilung* as the successor to the 1883 *première communication* because of the superficial common interest in $n$-dimensional sets, rather than to the unknown *erste Mitteilung* on ordered sets and the letter to Mittag-Leffler of the 20th October, 1884.

## Documents

In preparing the various manuscripts, we have preserved contemporary spellings and occasional grammatical errors but have incorporated intended alterations. We complete Cantor's references and indicate other occasional matters within square brackets in the text: more substantial points are discussed in footnotes. The pagination of each document is indicated by a double line || in the text with the page number in the margin.

We recall certain terminologies and notations of Cantor which are not now familiar or are used in other senses:

| | |
|---|---|
| $+, \Sigma$ | Union of (two, many) sets. |
| $\mathfrak{D}(\ldots)$ | Intersection (*Durchschnitt*) of the sets .... |
| $o$ | Empty set. |
| *Grenzelement*<br>*Hauptelement* | Accumulation point (*Häufungspunkt*). |

Cantor intended the term *Hauptelement*, and the notation $\alpha_*$ for the inverse order-type, to be used throughout his paper; but in the other letters which we cite we follow his use there of *Grenzelement* and $^*\alpha$.

## I. Extracts from a letter by Cantor to Mittag-Leffler, written 20th–28th October, 1884: new ideas on set theory

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm. Draft in the 1884–88 letter-book, pp. 1–10. Most of the first seven pages of this letter are quoted in [34], 247–248.

(14) ... Ich bin bereits im vorigen Winter zu erheblichen Erweiterungen meiner bisher in den „Acta" und den „Annalen" publicirten Arbeiten in der Mengenlehre gelangt, habe aber bis jetzt mit deren Publication gewartet, sowohl aus dem Grunde, um die Sachen
15 reifer werden zu lassen, wie auch hauptsächlich || weil ich mich gezwungen sehe, für mehrere neue wichtige Begriffe auch *Namen* einzuführen, mit deren Wahl ich ausserordentlich vorsichtig bin, da ich von der Ansicht ausgehe, dass es für die Entwickelung und Ausbreitung einer Theorie gar nicht wenig auf eine glückliche, möglichst zutreffende Namengebung ankommt. Ich habe aus diesen Gründen auf eine Besprechung mit dem Herrn Dr. L. Scheffer in München gewartet, welcher, wie Sie wissen, zu den talentvollsten unter den jungen Leuten gehört, welche sich in ihren Arbeiten den meinigen angeschlossen haben.(1) Diese Besprechung habe ich vor kurzer Zeit in Berlin gehabt und nachdem H. Scheffer sich mit der von mir getroffenen Wahl der Namen einverstanden erklärt hat, bin ich schon seit zwei Wochen dabei, die Sachen für die Acta auszuarbeiten; ich thue dies, weil ich es doch einmal angefangen habe, auch weiter in französischen Sprache, was hoffentlich eine Entschuldigung bei unseren französischen Collegen finden wird; um das

(1) [Scheffer died a few months later, in his 27th year. For Cantor's obituary notice, see [21].]

Urtheil der deutschen kümmere ich mich im Allgemeinen sehr wenig, wie dies durch die Umstände mir zur Zeit gerechtfertigt erscheint.

Zunächst habe ich zu erklären, dass es zweckmässig ist, für die Ableitungen einer Punctmenge $\mathfrak{P}$, welche wir mit $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \dots \mathfrak{P}^{(\nu)}, \dots \mathfrak{P}^{(\omega)}, \dots \mathfrak{P}^{(\alpha)}, \dots$ bezeichnen, *neben* dieser Bezeichnungsweise *noch* eine andere einzuführen, nämlich dafür resp. zu setzen:

$$\partial\mathfrak{P} = \partial^1\mathfrak{P},\ \partial^2\mathfrak{P},\ \dots\ \partial^\nu\mathfrak{P},\ \dots\ \partial^\omega\mathfrak{P},\ \dots\ \partial^\alpha\mathfrak{P},\ \dots .$$

Man hat alsdann allgemein:

$$\partial^\beta\partial^\alpha\mathfrak{P} \equiv \partial^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}\ \dots . \qquad (1)$$

|| Und nun komme ich zum Neuen! 16

Es werde:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}, \partial\mathfrak{P}) \equiv c\mathfrak{P}\ \dots \qquad (2)$$

$$c(c\mathfrak{P}) \equiv c^2\mathfrak{P}$$

$$c(c^2\mathfrak{P}) \equiv c^3\mathfrak{P}$$

$$\dots$$

genannt; offenbar ist stets $c^\nu\mathfrak{P}$ Divisor von $c^{\nu+}\mathfrak{P}$; man definirt daher ferner:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{P}, c\mathfrak{P}, c^2\mathfrak{P}, \dots, c^\nu\mathfrak{P}, \dots) \equiv c^\omega\mathfrak{P}\ \dots \qquad (3)$$

$$c(c^\omega\mathfrak{P}) \equiv c^{\omega+1}\mathfrak{P}$$

$$\dots$$

Allgemein wenn $\alpha$ eine transfinite Zahl der *ersten* Art, so definirt man:

$$c^\alpha\mathfrak{P} \equiv c(c^{\alpha-1}\mathfrak{P})\ \dots \qquad (4)$$

und wenn $\alpha$ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art, so definirt man:

$$c^\alpha\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{D}(\dots c^{\alpha'}\mathfrak{P} \dots)\ \dots \qquad (5)$$

wo $\alpha'$ alle ganzen Zahlen, die $<\alpha$ sind, durchläuft. (N. B. Man hat auch hier das Gesetz: $c^\beta c^\alpha\mathfrak{P} \equiv c^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}$.)

Dies vorausgeschickt, so ist nach (2) $c\mathfrak{P}$ ein bestimmter Divisor von $\mathfrak{P}$; der Inbegriff aller Puncte von $\mathfrak{P}$, die nicht zugleich Puncte von $c\mathfrak{P}$ sind, werde mit $a\mathfrak{P}$ bezeichnet; man hat alsdann:

$$\mathfrak{P} \equiv a\mathfrak{P} + c\mathfrak{P}\ \dots \qquad (6)$$

$a\mathfrak{P}$ ist, wie man sieht, stets eine *isolirte* Menge, sie ist die Menge der *isolirten* Puncte von $\mathfrak{P}$, $c\mathfrak{P}$ ist die Menge derjenigen Puncte von $\mathfrak{P}$, welche zugleich *Grenzpuncte* von $\mathfrak{P}$ sind.

|| Ich nenne nun $c\mathfrak{P}$ die *Cohärenz* von $\mathfrak{P}$, $a\mathfrak{P}$ nenne ich die *Adhärenz* von $\mathfrak{P}$; ferner 17
werde $c^\alpha\mathfrak{P}$ die $\alpha^{te}$ *Cohärenz* von $\mathfrak{P}$ genannt.

Unter $c^0\mathfrak{P}$ werde $\mathfrak{P}$ selbst verstanden.

Man hat zunächst die leicht für *jede feste* Zahl $\gamma$ beweisbare Gleichung:

$$\mathfrak{P} \equiv \sum_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} ac^{\gamma'}\mathfrak{P} + c^{\gamma}\mathfrak{P}\ldots. \tag{7}$$

Unter $ac^{\gamma'}\mathfrak{P}$ wird hier die Adhärenz der $\gamma'^{\text{ten}}$ Cohärenz von $\mathfrak{P}$ verstanden: es sind also alle diese Summanden *isolirte* Mengen und daher von der *ersten* Mächtigkeit.

Ich hebe nun hervor, dass, nach (2) und (6), wenn $\mathfrak{P}$ eine *insichdichte* Menge, alsdann $c\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ und $\alpha\mathfrak{P} = o$ ist und dass offenbar auch das Umgekehrte gilt.

Es ist daher von vorn herein zu erwarten, dass von einem gewissen $\gamma$ and $c^{\gamma}\mathfrak{P}$ immer entweder $o$ oder eine insichdichte Menge wird; dies wird bestätigt durch folgenden Satz:

18 || „Was auch $\mathfrak{P}$ sei, es giebt stets eine der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl $\alpha$, so dass:

$$c^{\alpha}\mathfrak{P} \tag{$\mathfrak{H}$}$$

entweder $o$ oder eine insichdichte Menge wird."

Diesen Satz beweise ich mit *absoluter* Strenge und in der *einfachsten* Weise, indem ich mich *nur* auf die Theoreme I und III der Annalen abh. Bd. XXIII, § 15 und auf gewisse Theoreme der „Grundlagen" stütze. [[19], § 15; [10], § 10.]

Setzen wir nun in (7) für $\gamma$ das in jenem Theorem ($\mathfrak{H}$) gefundene $\alpha$, so haben wir:

$$\mathfrak{P} \equiv \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} ac^{\alpha'}\mathfrak{P} + c^{\alpha}\mathfrak{P}\ldots \tag{8}$$

Daraus ergeben sich nun wichtige Folgerungen. Ist $\mathfrak{P}$ eine *separirte* Menge, d. h. eine solche die *keinen* insichdichten Bestandtheil hat, so muss offenbar $c^{\alpha}\mathfrak{P}$ gleich Null sein; daher in diesem Falle:

$$\mathfrak{P} \equiv \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} ac^{\alpha'}\mathfrak{P}.$$

In dieser Summe ist nun jeder Summand als *isolirte* Menge von der *ersten* Mächtigkeit,
19 ebenso der Inbegriff || aller Glieder von der *ersten* Mächtigkeit; mithin ist $\mathfrak{P}$ selbst von der *ersten* Mächtigkeit. Wir haben also den Satz:

„*Jede separirte* Menge ist von der *ersten* Mächtigkeit." ($\mathfrak{J}$)

Ferner: ist $\mathfrak{P}$ *nicht* eine separirte Menge, so ist $c^{\alpha}\mathfrak{P}$ eine insichdichte Menge, die ich mit $i\mathfrak{P}$ bezeichne und die *Inhärenz* von $\mathfrak{P}$ nenne. Wird ferner in diesem Falle die Summe: $\sum_{\alpha'=0,1\ldots<\alpha} ac^{\alpha'}\mathfrak{P}$ mit $se\mathfrak{P}$ bezeichnet, so überzeugt man sich leicht, dass $se\mathfrak{P}$ eine *separirte* Menge ist; denn jeder insichdichte Bestandtheil von $se\mathfrak{P}$ wäre auch insichdichter Bestandtheil von $\mathfrak{P}$ und daher auch von $c^{\alpha}\mathfrak{P} \equiv i\mathfrak{P}$.

Wir haben also folgenden Satz:

„Ist $\mathfrak{P}$ irgend eine nicht separirte Menge, so zerfällt sie, und zwar nur auf eine Art, in eine separirte Menge $se\mathfrak{P}$ und eine insichdichte Menge $i\mathfrak{P}$, so dass: ($\mathfrak{K}$)

$$\mathfrak{P} \equiv se\mathfrak{P} + i\mathfrak{P}\ldots\text{"} \tag{9}$$

Vordem ich weiter gehe will ich bemerken, dass meine schon publicirten Sätze über *abgeschlossene* Mengen in diesen Theoremen als besondere Fälle enthalten sind.

|| Dazu beachte man nur Folgendes: 20

1) Jeder *insichdichte* Bestandtheil von $\mathfrak{P}$ ist immer auch Bestandtheil *aller* ihrer Cohärenzen: $c^{\alpha}\mathfrak{P}$.

2) Ist $\mathfrak{P}$ eine *abgeschlossene* Menge, so ist allgemein: $c^{\gamma}\mathfrak{P} \equiv \partial^{\gamma}\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}^{\gamma}$.

Daraus folgt:

a) Ist $\mathfrak{P}$ eine *abgeschlossene* Menge *erster* Mächtigkeit, so ist $\mathfrak{P}$ eine separirte Menge; denn sonst würde sie als *abgeschl.* Menge sogar einen *perfecten* Bestandtheil haben, der nach meinem Theorem ($A$) in Acta II p. 409 [[17], 409–412; [28], 246–249] immer eine *höhere* Mächt. hat, als die erste.

Es muss also hier: $\partial^{\alpha}\mathfrak{P} \equiv c^{\alpha}\mathfrak{P} \equiv o$ sein, was mit meinem Satze ($\mathfrak{C}$) in Acta II p. 409 [[17], 409, 413–414; [28], 247, 250–251] übereinstimmt.

b) Ist $\mathfrak{P}$ eine *abgeschlossene* Menge *höherer* als erster Mächt., so kann $\mathfrak{P}$ nach Satz ($\mathfrak{J}$) keine separirte Menge sein; in Formel (9) des Satzes ($\mathfrak{K}$) bildet nun $i\mathfrak{P}$ wegen des Abgeschlossenseins von $\mathfrak{P}$ eine *perfecte* Menge und wir erhalten die Formel:

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{R} + \mathfrak{S}$$

des Satzes ($E'$) in Math. Ann. Bd. XXIII, p. 471. [[19], 471; [28], 227–228.]

So findet man leicht fast alle früheren Sätze gewissermaassen als specielle Fälle in meinen allgemeinen Sätzen ($\mathfrak{H}$), ($\mathfrak{J}$) und ($\mathfrak{K}$) wieder.

Nun gehe ich weiter und muss dazu die Erklärung eines höchst wichtigen neuen Begriffes, des Begriffes einer *homogenen* Punctmenge vorausschicken. || Dieser Begriff 21
hängt mit Folgenden zusammen: ist $p'$ ein Grenzpunct einer Punctm. $\mathfrak{P}$, so wird es Ihnen leicht werden, ganz strenge zu beweisen, dass, wenn $\mathfrak{K}(\varrho, p')$ die ihn umgebende Kugel mit dem Radius $\varrho$ und wenn $\mathfrak{P}_{\varrho}$ der in diese Kugel fallender Bestandtheil von $\mathfrak{P}$ ist, alsdann immer von einem hinreichend kleinen Werthe von $\varrho$ an, also etwa für $\varrho < \delta$, alle Punctmengen $\mathfrak{P}_{\varrho}$ von *gleicher* Mächtigkeit werden; ist nun die sich gleich bleibende Mächtigkeit aller dieser Mengen $\mathfrak{P}_{\varrho}$ etwa die $\alpha^{\text{te}}$, wo $\alpha$ eine ganze finite oder transfinite Zahl ist, so wollen wir den Punct $p'$ einen Grenzpunct $\alpha^{\text{ter}}$ *Ordnung* von $\mathfrak{P}$ nennen.

Ist nun $\mathfrak{P}$ eine *insichdichte* Punctmenge, von solcher Beschaffenheit, dass *jeder* ihrer Puncte $p$ ein Grenzpunct $\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{P}$ ist, so nenne ich $\mathfrak{P}$ eine *homogene Punctmenge* $\alpha^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Es besteht alsdann folgender Satz:

„*Jede insichdichte* Punctmenge $\mathfrak{P}$ ist auf nur eine Weise zusammengesetzt aus *homogenen* Mengen $\mathfrak{P}_{(\alpha)}$ ($\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung), so dass:

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_{(1)} + \mathfrak{P}_{(2)} + \ldots + \mathfrak{P}_{(\alpha)} + \ldots\text{“} \qquad (\mathfrak{L})$$

Hier können nun einzelne Bestantheile fortfallen, d. h. $o$ sein, und es wird sogar *allgemein*
22 gezeigt, dass in unseren Räumen $\mathfrak{G}_n$ solche Grenzpuncte $p'$, || deren Ordnungszahl $\alpha > 2$ ist, *nicht* Platz haben; daraus folgt, dass in unseren Gleichung $(\mathfrak{L})$ alle Glieder, bei denen $\alpha > 2$ ist, $o$ sind. Es besteht also für jede *insichdichte* Menge $\mathfrak{P}$ die *eindeutige* Zerlegung:

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_{(1)} + \mathfrak{P}_{(2)} \cdots \qquad (10)$$

wo $\mathfrak{P}_{(1)}$ und $\mathfrak{P}_{(2)}$ *homogene* Mengen resp. der *ersten* und *zweiten* Ordnung sind.

Wenden wir nun diesen Satz auf $i\mathfrak{P}$ in Formel (9) an, so erhalten wir, *was auch* $\mathfrak{P}$ *sei*, die Zerlegung:

$$\mathfrak{P} \equiv se\mathfrak{P} + i_1\mathfrak{P} + i_2\mathfrak{P} \ldots \qquad (11)$$

d. h. ... „*Jede* Punctmenge $\mathfrak{P}$ ist *eindeutig* zusammengesetzt aus einer *separirten* Menge $se\mathfrak{P}$, aus einer *homogenen Menge erster Ordnung* $i_1\mathfrak{P}$ und einer *homogenen Menge zweiter Ordnung* $i_2\,\mathfrak{P}$; jeder dieser drei Bestandtheile kann $o$ sein.“ $(\mathfrak{M})$

Man beweist ferner den Satz:

„Jede homogene Menge $\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung ist stets von der $\alpha^{\text{ten}}$ Mächtigkeit.“ $(\mathfrak{N})$

Aus den Sätzen $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N})$ ergiebt sich ein Beweis für den in Borchardts J. Bd.
23 84 pag. 257 am Schluss der dortigen Abhandlung ausgespro||chenen Satz. [Die Continuum-hypothese! [5], 257; [28], 132.]

Ich will noch bemerken, dass es sich empfiehlt in der Mengenlehre noch ein Zeichen einzuführen, nämlich unter $s\mathfrak{P}$ den Inbegriff derjenigen Puncte von $\mathfrak{P}^{(1)} \equiv \partial\mathfrak{P}$ zu verstehen, welche nicht zugleich Puncte von $\mathfrak{P}$ sind; man hat alsdann:

$$\partial\mathfrak{P} \equiv c\mathfrak{P} + s\mathfrak{P} \ldots \qquad (12)$$

und sieht leicht, dass die Menge:

$$\mathfrak{P} + s\mathfrak{P} \equiv a\mathfrak{P} + c\mathfrak{P} + s\mathfrak{P}$$

stets eine *abgeschlossene* Menge ist; aus letzteren Grunde nenne ich die Punctmenge $s\mathfrak{P}$ das *Supplement von* $\mathfrak{P}$.

Die Anwendung der 4 Zeichen $a$, $c$, $\partial$, $s$, indem man sie combinirt und iterirt, führt zu einem Algorithmus, welchen mit vielen interessanten Fragen zusammenhängt.

.......

25 || d. $28^{\text{ten}}$ Oct. 84.

... Dass Paul Tannery, welcher in dem Bulletin de la Société math. einen Aufsatz zur „Théorie des ensembles“ publicirt hat [[41]], nicht der an der Sorbonne angestellte Professor

Jules Tannery ist, wusste ich sehr wohl; von Ihnen erfahre ich zu meinem Interesse, was ich noch nicht gewusst, dass Jules T. der Recensent über meine Arbeiten im Bulletin von Darboux ist. Ihrer gültigen Erlaubniss gemäss, werde ich Ihnen meine Antwort darauf in Briefform an Sie einsenden, sobald die Fortsetzung, resp. der Schluss der Tanneryschen Recension im nächsten Hefte des „Bulletin" erschienen sein wird?

.......

**II. Postcard from Cantor to Mittag-Leffler, written 4th November, 1884: additions to the October letter**

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm.

Halle 4 Nov. 84.

Mein lieber Freund,

In den Sätzen ($\mathfrak{K}$) ($\mathfrak{L}$) ($\mathfrak{M}$) meines Briefes v. 20 Oct. 84 findet sich eine gewisse Ungenauigkeit resp. Incorrectheit im Ausdrücke, die zu Missverständnissen führen könnte; es möge dies dem Umstände entschuldigend zu Gute gehalten werde, dass ich meine Briefe schnell und sofort ins Reine schreibe.

Wenn ich in ($\mathfrak{K}$), ($\mathfrak{L}$), ($\mathfrak{M}$) sage, dass die dort gelehrten Zerlegungen *eindeutig* sind, so ist dies in *gewissem, näher zu definirenden* Sinn zu verstehen.

Zum Beispiel hat in ($\mathfrak{K}$) die Punctmenge $i\mathfrak{P}$ *nicht bloss* die Bedeutung eines *insichdichten* Bestandtheils von $\mathfrak{P}$, sondern des *punctreichsten insichdichten Bestandtheils von* $\mathfrak{P}$, und in *diesem ergänzenden Sinne* sind die Ausdrücke „eindeutig", „nur auf eine Weise" in den Theoremen ($\mathfrak{K}$), ($\mathfrak{L}$), ($\mathfrak{M}$) zu verstehen. Ferner habe ich meinem Briefe noch hinzufügen, dass ich die dort mit $se\mathfrak{P}$ bezeichnete Punctmenge, den ***Rest*** (***résidu***) von $\mathfrak{P}$ nenne und von jetzt ab nicht mit $se\mathfrak{P}$, sondern einfacher mit $r\mathfrak{P}$ bezeichne. Die in meiner neuen Arbeit eingeführten Zeichen sind also die *sechs:* $a$, $c$, $\partial$, $i$, $r$, $s$.

Freundlichst grüssend
Ihr
treu ergebener
G. Cantor

**III. Letter from Cantor to Mittag-Leffler, written 6th November, 1884: the commencement of the *erste Mitteilung* on ordered sets**

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm.

|| Halle d. 6 Nov. 1884. 1

Mein lieber Freund,

Besten Dank für Ihren werthen Brief vom 2$^{\text{ten}}$. Nachdem ich gestern den Schluss des so liebenswürdigen und wohlwollenden Referats über meine Arbeiten seitens des Herrn

Jules Tannery in Darboux's Bulletin gelesen, habe ich heute angefangen, Ihnen meine darauf bezüglichen Bemerkungen in Briefform zu schreiben, was wohl in wenigen Tagen beendiget und Ihnen zugesandt werden wird. Alsdann werde ich nachdem ich Ihre Bemerkungen über den mathematischen Inhalt meines Schreibens d. d. $20^{t}$ Oct d. J. erhalten
2 haben werde, mit Vergnügen den unterbrochenen Faden dieses || Schreibens wieder aufnehmen und Ihnen die gewünschte Aufklärung in Bezug auf die Fundamente der mathematischen Physik zu geben suchen.

Inzwischen empfangen Sie meinen besten Gruss und empfehlen Sie mich gütigst sowohl Ihrer Frau Gemahlin, wie auch Frau S. von Kowalewsky.

Ihr
ergebener Freund
Georg Cantor.

## IV. Extracts from a letter by Cantor to Mittag-Leffler, written 18th November, 1884: progress with the *erste Mitteilung* and plans for further work

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm.

(1) ... Ihre Bemerkungen über meine Bezeichnungen sind mir sehr werthvoll; ich werde mich darnach in der betreffenden Publication richten; dieselbe schicke ich voraussichtlich im December nach Stockholm an Ihren Vertreter: es wird die Fortzetzung der angefangenen Abhandlung in Acta II pag. 409: sur divers théorèmes de l. th. des ens. de points, sein [[17]]; jene ist als *première communication* bezeichnet, die jetzige wird *denselben Titel* fuhren und als *seconde communication* auftreten. [Die *zweite Mitteilung* [20].]

Die für die Acta bestimmte grössere Abhandlung „Théorie des Types d'ordre" dürfte im Januar oder Februar druckfertig werden, ebenso meine arithmetischen Untersuchungen zur Theorie der quadratischen Formen.

In der vorhin erwähnten *seconde communication* der Abh: Sur divers théorèmes d. l. th. d. ens. d. points werde ich auch erwähnen, dass H. Bendixson auf meine Aufforderung hin einen selbständigen Beweis über den Satz dass alle *separirten* Mengen von der *ersten* Mächtigkeit sind, gefunden hat; grüssen Sie ihn, bitte, ich habe noch nicht Zeit gefunden, ihm zu schreiben.

Was den Punct anbetrifft, über welchen Sie Aufklärung wünschen, so ist derselben verhältnissmässig leicht mit Hülfe der transfiniten Zahlenlehre zu erledigen, wie ich Ihnen
2 mündlich zeigen werde; ich meine den || Satz, dass für jeden *Grenzpunct* einer Menge $\mathfrak{P}$ ein $\delta$ vorhanden ist, so dass für $\varrho<\delta$, *alle* $\mathfrak{P}_{\varrho}$ von *einer* und *derselben* Mächt. sind; der Beweis lässt keinen Zweifel an der Richtigkeit des Satzes aufkommen.

Heute erlaube ich mir, Ihnen die *ersten* Paragraphen der *ersten* Mittheilung über die Principien der Theorie der *Ordnungstypen* zu zuschicken; die folgenden Paragraphen *dieser ersten* Mittheilung werden in zwei Wochen fertig sein und zunächst über die Operationen mit den transfiniten Zahlen, dann über die Typen *mehrfach geordneter* Mengen das Principielle bringen. ...

P. S. In der später kommenden Abh. „Théorie des Types d'ordre" werde ich die mathematischen Entwickelungen und Definitionen, welche ich in der gegenwärtigen Abh „Principien einer Theorie der Ordnungstypen" gebe nicht mehr wiederholen, *sondern mich auf diese gegenwärtige Arbeit beziehen*! (3)

## V. Extract from a letter by Cantor to Mittag-Leffler, written 21st February, 1885: the completion of the *erste Mitteilung*

Original, in the Institute Mittag-Leffler, Stockholm; the final pages of the paper were sent off by Cantor four days later.

|| Halle d. 21 Febr. 1885. 1

Mein lieber Freund,

Sollte es nicht mit zu grossen Opfern für Sie verbunden sein, so würde ich Ihnen allerdings sehr dankbar sein, wenn Sie eine möglichst baldige Fortsetzung im Druck der „Principien der Th. d. Ordnungstypen", wovon bis jetzt ein Bogen gesetzt ist, gestatten wollten. Es handelt sich bei dieser *ersten* Mittheilung über diesen Gegenstand nur noch um zwei, höchstens drei Bogen.

Der Grund dieses Drängens besteht darin, dass ich ohne die in dieser Publication eingeführten Begriffe nicht im Stande bin, weiteres in der Mengenlehre zu publicieren, so unerlässlich sind sie; ferner habe ich für das nächste Semester bereits ein 4 stundiges Colloq „Zahlentheorie, als Einleitung in die Theorie d. Ordnungstypen" angekündigt und möchte daher, dass bis dahin das wesentlichste über den völlig neuen Gegenstand gedruckt vorliege.

|| Mit dem herzlichen Wunsche, dass Ihr langes Schweigen nicht etwa auf Unwohlsein 2
bei Ihnen zurückzuführen sei,

Ihr
treu ergebener Freund
G. Cantor
...

## VI. Letter from Cantor to Mittag-Leffler, begun 6th November, 1884: *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*

Sheets 1–8 of the manuscript and the proofs of the first eight pages of text are in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm. Sheets 9–20 and addenda, and corrected proofs, are among Cantor's surviving papers. The draft is in the 1884–88 letter-book, pp. 10–23 and 28–30.

According to a date-stamp on their first page, the proofs were issued on the 17th January, 1885. They were page-numbered from 49 to 56, by which means we identify them as intended for the seventh volume of *Acta Mathematica*, the only volume of that period which contained a paper (in the end, [32]) beginning on p. 49. We indicate the pagination of both proofs and manuscript, and enclose sections added at later stages within curled brackets { }. We also preserve throughout Cantor's intentions to change the notation of the inverse order-type from $^*\alpha$ to $\alpha_*$, and the term for an accumulation point from *Grenzelement* to *Hauptelement*; and we incorporate largely without indication a series of stylistic changes given in a letter of the 30th November, 1884. In the proof-pages the symbols for sets were printed as $M$ and $P$; but in rendering the rest of his manuscript we follow his explicit request for Gothic letters to denote sets. The paper begins with a row of dots suggesting a continuation from earlier text; but both the manuscript and the draft start with the text as printed below.

# ||PRINCIPIEN EINER THEORIE DER ORDNUNGSTYPEN. 1
49

## ERSTE MITTHEILUNG.

Auszug eines Schreibens an den Herausgeber.

VON

GEORG CANTOR

IN HALLE.

... Sie haben erlaubt, Ihnen einige Bemerkungen mitzutheilen, die mir beim Lesen des von Herrn JULES TANNERY verfassten Referats über einen Theil meiner Arbeiten (in dem Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, $8_2$, 1884; Revue p. 136–171) [sic: [40](1)] in den Sinn gekommen sind und, nachdem ich schon in meinem Briefe d. v. 20 October d. J. einiges hierauf Bezügliche gesagt, nehme ich mir die Freiheit, in gegenwärtigem mein Vorhaben zu Ende zu führen, da ich gestern den Schluss der Recension in dem soeben erschiedenen Octoberhefte der Zeitschrift erhalten habe. Sollten Sie, wie Aussicht vorhanden ist, in einigen Wochen bei Ihrem Pariser Aufenthalte mit Herrn JULES TANNERY zusammentreffen, so bitte ich Sie, ihm meinen verbindlichsten Dank dafür auszusprechen, dass er das Referat hat übernehmen wollen, wie auch für die Geneigtheit, die er mir und meinen Untersuchungen darin erwiesen hat.

### § 1.

Ich fühle mich Herrn TANNERY zu Dank verbunden, wenn er an verschiedenen Stellen seiner Kritik meinen Untersuchungen einen *philo-||sophischen,* ja sogar einen *metaphy-* 50
*sischen* Werth beimisst; ich sehe hierin ein Lob und halte mich dadurch für geehrt.

Denn ich gehöre nicht zu Denjenigen, welche wegen der mancherlei Misserfolge, welche die *Metaphysik* durch die Versehen einiger ihrer Bearbeiter, besonders in diesem und im vorigen Jahrhundert, geärntet hat, diese || Wissenschaft selbst gering schätzen; 2
ich glaube dass *Metaphysik* und *Mathematik* von Rechtswegen in einem Tauschverkehr stehen sollten und dass in den Zeiten ihrer entscheidensten Fortschritte sie eng verbrüdert auftreten.

Unglücklicherweise kommt dann freilich, wie die Geschichte bis jetzt gezeigt hat, sehr bald ein Zwist unter ihnen auf, der durch Generationen hin währen und sich soweit

(1) [Cantors reference is to TANNERY's review of the whole of the first two volumes of *Acta Mathematica.*]

vergrössern kann, dass die feindlichen Brüder sich gar nicht mehr kennen, geschweige denn von einander wissen, was sie sich gegenseitig Alles zu verdanken haben.

Wäre es aber nicht gerade aus letzteren Gründen möglich, dass die sicherlich wohlgemeinte Accentuirung der *philosophischen* Seite meiner Untersuchungen, welche sich in der Kritik des Herrn TANNERY bemerklich macht, zwar nicht darauf berechnet ist, aber doch den Erfolg haben möchte, dass diejenigen mathematischen Zeitgenossen, welche meinen Arbeiten zunächst fremd gegenüberstehen, sich nicht die Mühe nehmen werden, sie auf ihren möglicherweise doch auch vorhandenen, *mathematischen* Gehalt zu prüfen?

Ich glaube daher Herrn TANNERY nicht zu nahe zu treten, wenn ich im Folgenden den Versuch mache, Aufklärungen über meine Untersuchungen zu geben, um damit *Missverständnissen* vorzubeugen, deren Aufkommen von ihm gewiss nicht gewollt wird.

§ 2.

Die *realen ganzen Zahlen* 1, 2, 3, ... bilden eine verhältnissmässig *ganz kleine Species* von *Gedankendingen*, welche ich *Ordnungstypen* oder auch schlichtweg *Typen* (von ὁ τύπος) nenne; {sie sind verwandt den ἀϱιϑμοὶ νοητοί oder εἰδητιχοί PLATONS, mit denen sie vielleicht sogar ganz übereinstimmen;} dementsprechend ist diejenige Disciplin, welche heute
51 »*höhere Arithmetik*« (Théorie des nombres) genannt wird, nur ein *verhält-*‖*nissmässig kleiner*
3 ‖ *Bestandtheil*, oder, wenn sie wollen, der *Anfang* oder die *Einleitung* zu einer ihrer Anlage nach ausserordentlich weitreichenden und umfassenden Lehre, welche ich »*Theorie der Ordnungstypen*« (theoria typorum ordinalium) oder kürzer »*Typentheorie*« nenne. {Es ist dies dieselbe, welche ich, wie Sie wissen, seit zwei Jahren für die Acta mathematica vorbereite und von der ich Ihnen bisjetzt nur *gelegentlich* und *nicht ganz genau* als von einer *Theorie der transfiniten Zahlen* berichtet habe [[17]].}

Doch sind auch diejenigen *Gedankendinge*, welche ich *transfinite* oder *überendliche Zahlen* nenne, nur besondere *Arten* von *Ordnungstypen*; sie sind nämlich die *Typen wohlgeordneter Mengen* (M. v. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, p. 4 und ff.). [[10], §§ 2–3.]

Die allgemeine *Typentheorie* scheint mir nach allen Richtungen einen grossen Nutzen zu versprechen.

Sie bildet einen wichtigen und grossen Theil der *reinen Mengenlehre* (Théorie des ensembles), also auch der *reinen Mathematik*, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts Anderes als *reine Mengenlehre*.

Dann steht sie in enger Beziehung zu den übrigen Theilen der *reinen*, aber auch zu der *angewandten Mengenlehre*, wie z. B. zur *Punktmengenlehre*, zur *Functionentheorie* und zur *mathematischen Physik*.

Unter *angewandter Mengenlehre* verstehe ich Dasjenige, was man *Naturlehre* oder *Kosmologie* zu nennen pflegt, wozu || also die sämmtlichen sogenannten *Naturwissen-* 4
*schaften* gehören, sowohl die auf die *anorganische*, wie auch auf die *organische* Welt sich beziehenden.

Was die *Functionentheorie* angeht, so kann man mit Zuhülfenahme der *Typentheorie* dort auftauchende Fragen beantworten, welche sich mit den bisher bekannten Hülfsmitteln gar nicht angreifen lassen.

Die *mathematische Physik* wird von der *Typentheorie* gleichfalls betroffen, weil sich letztere als ein mächtiges und tief einschneidendes Werkzeug zur *Ergründung* und zur *begrifflichen Construction* der sogenannten *Materie* ausweist.

Damit hängt auch die Anwendbarkeit der *Typentheorie* in der *Chemie* zusammen; es ist aber die hier gemeinte *Typentheorie* nicht zu verwechseln mit der *ebenso benannten* Theorie von Gerhardt, welcher die Chemie wesentlich ihre gegenwärtige Gestaltung verdankt, obgleich die Gerhardt'sche Theorie längst nicht mehr in ihrer ursprünglichen Form anerkannt wird, sondern sich erheblichen Umgestaltungen hat unterziehen müssen, || welches 52
Schicksal sie, meines Erachtens, nothwendig mit allen vergangenen oder noch kommenden Theorien theilen wird, die auf der *chemischen Atomistik* ihr Gebäude errichten. (1) Mit *dieser* Typentheorie hat die *meinige* nichts als den *Namen* gemein.

Von ganz besonderem Interesse scheinen mir aber die Anwendungen der *mathematischen Typentheorie* auf das Studium und die Forschung im Gebiete des *Organischen* zu sein.

Ich will daher in den folgenden Paragraphen die *Principien* der *Theorie der Ordnungstypen* so kurz wie möglich auseinandersetzen.

## § 3.

Jeder wohldefinirten *Menge* von *Elementen*, gleichviel von welcher Beschaffenheit die letzteren (und ob sie *gleichartig* oder *ungleichartig*, ob einfach oder zusammengesetzt) sind, kommt eine bestimmte *Mächtigkeit*, die ich auch *Valenz* nenne, zu.

|| Um die *Mächtigkeit* einer *durch Definition gegebenen Menge* zu bestimmen, schickt 5
man den *Beziehungsbegriff* der *Äquivalenz* voraus; man nennt nämlich *zwei* Mengen *äquivalent*, wenn sie sich *gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.*

Unter *Mächtigkeit* oder *Valenz* einer gegebenen Menge *M* verstehe ich den *Allgemeinbegriff* (Gattungsbegriff, Kategorie), *unter welchen alle der Menge M äquivalenten Mengen und nur diese,* (*und daher auch die Menge M selbst*) *fallen.*

Von *äquivalenten* Mengen sage ich auch, dass sie zu *einer* und *derselben Mächtigkeits-*

---

(1) [The reference is to Charles Frédéric Gerhardt (1816–1856). On his theory of chemical types, see [37], 456–460.]

*classe* gehören: die *Classe* einer Menge $M$ ist also nicht Anderes, als der *Umfang* (dieses Wort in der Bedeutung der Schullogik als »ambitus» genommen) des zur Menge $M$ gehörigen *Allgemeinbegriffs*, welchen ich die *Mächtigkeit der Menge M* genannt habe.

Die *Mächtigkeit* einer Menge $M$ ist hiernach als die *Vorstellung* dessen bestimmt, was *allen* der Menge $M$ *äquivalenten* Mengen und *nur diesen* und daher auch der Menge $M$ selbst *gemeinsam* ist; sie ist die *repraesentatio generalis*, das *τὸ ἓν παρὰ τὰ πολλά* für alle Mengen *derselben Classe wie M*. Sie erscheint mir daher als der *ursprünglichste*, sowohl
53 *psychologisch*, wie auch *methodologisch einfachste Stammbegriff*, entstanden durch || *Abstraction* von allen *Besonderheiten*, die eine Menge von *bestimmter Classe* darbieten kann, sowohl in Ansehung der *Beschaffenheit* ihrer *Elemente*, wie auch hinsichtlich der *Beziehungen* und *Anordnungen*, in welchen die *Elemente sei es untereinander* oder zu *ausserhalb der Menge liegenden Dingen* stehen können. Indem man nur auf *Dasjenige reflectirt*, *was allen einer und derselben Classe angehörigen Mengen gemeinsam ist* entsteht der Begriff *Mächtigkeit* oder *Valenz*.

6 Das Wort »*Mächtigkeit*» ist vielleicht am Besten im || *Griechischen* durch »*τὸ χϱάτος*», im *Lateinischen* durch »*potestas*» oder »*plenitudo*», im *Französischen* durch »*puissance*» oder durch die Neubildung »*valence*», im *Englischen* durch »*power*» oder »*mightiness*», im *Italienischen* durch »*podesta*» zu übersetzen.

In den »*Grundlagen*» habe ich bewiesen (oder vielmehr den Weg und die Mittel zum Beweise vollständig angegeben), dass die *verschiedenen Mächtigkeiten unendlicher Mengen* eine *nach demselben Typus* gebildete aufsteigende *absolut unendliche Reihe* ausmachen, wie die *realen, ganzen finiten* und *transfiniten Zahlen selbst*; je mehr man den *vollen Sinn* und *Inhalt* dieses Satzes zu erfassen sucht, um somehr muss man die *Natur* in ihrer *unermesslichen Grösse* bewundern. (M. vergl. »*Grundlagen*» pag. 37 und die Note 2 auf pag. 43 und 44.) [[10], § 12, Anm. 2.]

§ 4.

Unter einer *einfach geordneten Menge* verstehe ich eine Menge, deren *sämmtliche* Elemente, sei es *von Natur*, sei es durch eine *conventionelle gesetzmässige Beziehung*, in ein *bestimmtes Rangverhältniss* unter einander gesetzt sind, demgemäss von *je zwei* Elementen der Menge das eine den *niedrigeren* oder *früheren*, das andere den *höheren* oder *späteren Rang* einnimmt und dass ferner bei *je drei herausgegriffenen* Elementen $e$, $e'$, $e''$, wenn $e$ einen niedrigeren Rang hat, als $e'$, $e'$ einen niedrigeren Rang hat als $e''$, alsdann auch immer der Rang von $e$ niedriger ist als der von $e''$.

*Zwei einfach geordnete Mengen* nenne ich *einander ähnlich*, wenn es möglich ist, sie *gegenseitig eindeutig* und *vollständig* einander *dermaassen* zuzuordnen, dass das Rangverhältniss von *je zwei* Elementen der *einen* geordneten Menge *dasselbe* ist, wie das der

*beiden entsprechenden* Elemente ‖ der *andern* geordneten Menge, wir wollen ein *solches* 54
*Verhältniss zweier geordneten* Mengen auch dadurch ausdrücken, dass wir ‖ von ihnen 7
sagen: *sie lassen sich auf einander abbilden.* (1)

Jede *einfach geordnete Menge* hat nun einen bestimmten *Ordnungstypus* oder, wie ich mich auch kürzer ausdrücken will, einen bestimmten *Typus*; darunter verstehe ich denjenigen *Allgemeinbegriff, unter welchen sämmtliche der gegebenen geordn. Menge ähnliche geordnete Mengen, und nur diese, (folglich auch die gegebene geordnete Menge* s e l b s t*) fallen.* Die *Typen* der *endlichen einfach geordneten Mengen* sind nichts Anderes, als die *endlichen ganzen Zahlen*, in Zeichen: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$.

*Denjenigen Ordnungstypus*, zu welchem beispielsweise die Menge der rationalen Zahlen von der Form $1-1/\nu$ (*ihrer Grösse nach geordnet*) gehört, bezeichne ich bekanntlich mit dem Buchstaben $\omega$.

Für *denjenigen Ordnungstypus*, welcher beispielsweise gegeben ist durch die in ihrer *natürlichen Ordnung* (so dass die *kleineren* dem Range nach *niedriger* gestellt werden, als die *grösseren*) aufgefassten *rationalen* Zahlen, die $> 0$ und $< 1$ sind, habe ich in meiner für die A c t a m a t h e m a t i c a bestimmten Abhandlung *Théorie des Types d'Ordre* das Zeichen $\eta$ eingeführt.

*Denjenigen Ordnungstypus*, welcher beispielsweise durch den in seiner *natürlichen* Folge betrachteten Inbegriff *aller reellen*, d. h. *rationalen* und *irrationalen* Zahlen, welche $> 0$ und $< 1$ sind, repräsentirt wird, bezeichne ich mit dem Buchstaben $\theta$.

Um dies Alles zu erläutern will ich Folgendes anführen.

Es lässt sich beweisen, und zwar genau mit denselben Betrachtungen, welche ich in A c t a m a t h e m a t i c a, Bd. 4, pag. 383 [[18], 383; [28], 253] und in M a t h e m a t i s c h e A n n a l e n, Bd. XXIII, pag. 482 und ff. [[193], 482–485; [28], 238–241] bei einem verwandten Gegenstand gebraucht habe, dass jede linear Punktmenge $P$, welche längs eines ganzen Intervalls $(a \ldots b)$ *überalldicht* und von der *ersten* Mächtigkeit ist und zu welcher die Endpunkte $a$ und $b$ *nicht* mitgehören, als eine *monoton wachsende* eindeutige Function *derjenigen* Punktmenge hergestellt werden kann, deren Ordnungstypus wir soeben mit $\eta$ bezeichnet haben; diese beiden geordneten Punktmengen sind daher *einander ähnlich* und wir können
also den Satz ‖ aussprechen, dass *jede Punktmenge P* von der bezeichneten Art den Ord- 8
nungstypus $\eta$ hat.

---

(1) [On p. 14 of the letter-book, Cantor added the following sentence to the draft, but omitted it from the final version:

"Es hat also hier das Wort „abbilden" einen andern Sinn (und ich darf hinzufügen, einem dem Sprachgebrauch entsprechenderen Sinn), als es seit Gauss und Riemann in der Funct.theorie und Geometrie gewonnen hat, wo man jetzt sogar jede functionelle Zuordnung zweier Gebilde für eine „Abbildung" ausgiebt, was m. e. sich durch aus nicht rechtfertigen lässt. Wenn ich nicht irre, so ist dieser maaslose Gebrauch des Wortes auf Herrn A. Clebsch zurückzuführen".]

55 ‖ So hat darnach, um ein Beispiel anzuführen, der Inbegriff aller rellen *algebraischen Zahlen* in *seiner natürlichen Ordnung* den Typus $\eta$. {Man kann aber auch auf demselben Wege den folgenden Satz beweisen, in welchem über die *Beschaffenheit* der die Menge constituirenden *Elemente* nichts vorausgesetzt ist: ist $\mathfrak{M}$ eine *einfach-geordnete* Menge *erster Mächtigkeit*, welche weder ein dem Rang nach niedrigstes, noch ein höchstes Element hat und welche so beschaffen ist, dass zwischen *je zweien* Elementen $e$ und $e'$ stets eine *unendliche* Anzahl andrer Elemente dem Rang nach vorhanden sind, so hat $\mathfrak{M}$ den Ordnungstypus $\eta$.} Dagegen hat, wie leicht zu beweisen, die Menge aller *rationalen* Zahlen, die $\geqq 0$ und $< 1$ sind, einen *andern* Typus, der (nach der bald folgenden Definition für die *Summe* zweier Typen) durch $1+\eta$ zu bezeichnen ist; ebenso ist die Menge aller rationalen Zahlen, die $> 0$ und $\leqq 1$ sind, vom Typus $\eta+1$ und endlich die Menge aller rationalen Zahlen, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, vom Typus $1+\eta+1$.

Es folgt aus unseren Definitionen, dass zwei *geordnete* Mengen von *einem und demselben* Typus eo ipso auch von *gleicher Mächtigkeit* sind, also *in eine und dieselbe Mächtigkeits-classe* gehören; dagegen habe zwei *einfach geordnete* Mengen einer und derselben Mächtigkeitsclasse im Allgemeinen *verschiedene* Typen. {Die Typen *endlicher* einfach geordneter Mengen, welche mit den endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... zusammenfallen, bilden die *erste Typenclasse*; die Typen einfach geordneter Mengen *erster* Mächtigkeit constituiren das, was ich die *zweite Typenclasse*, die Typen *zweiter* Mächtigkeit das was ich die *dritte Typenclasse* nenne, u. s. w.}

Für die Typen einfach geordneter Mengen, welche ich auch *lineare Typen* nenne, ist es folgenreich, dass *jeder Typus* einen *im Allgemeinen* von ihm verschiedenen *zweiten* Typus bestimmt, welchen ich den dem ersteren *entgegengesetzten Typus* nenne; es ist der Typus *derjenigen* geordneten Menge, welche aus der *gegebenen* geordneten Menge *dadurch* hervorgeht, dass wir das *Rangverhältniss aller ihrer Elemente überall umkehren*. Ist $\alpha$ das Zeichen, für irgend einen Typus, so bezeichne ich den *entgegensetzten* Typus mit:

$$\alpha_*.$$

Offenbar ist: $$\alpha_{**} = \alpha.$$

56 ‖ So ist z. B. $$(\eta+1) = (1+\eta)_*; \quad (1+\eta) = (\eta+1)_*.$$

Die Menge der rationalen Zahlen von der Form $1+1/\nu$, wenn sie als nach ihrer Grösse rangirt angesehen werden, ist offenbar vom Typus: $\omega_*$.

9 ‖ Dass *entgegengesetzte Typen* auch *zusammenfallen* können, sieht man an dem Typus jeder *endlichen* geordneten Menge, sowie auch an den Typen $\eta=\eta_*$; $(1+\eta+1)=(1+\eta+1)_*$; ebenso ist:

$$\theta=\theta_*; \quad (\theta+1)=(1+\theta)_*; \quad (1+\theta)=(\theta+1)_*; \quad (1+\theta+1)=(1+\theta+1)_*.$$

## § 5.

Von den *einfach geordneten* Mengen zeichnen sich durch besondere Eigenschaften diejenigen aus, welche ich in den »*Grundlagen*», § 2, pag. 4 [[10], § 2] *wohlgeordnete* Mengen genannt habe; ich nenne deren *Ordnungstypen* allgemein *reale ganze Zahlen* (*ἀριθμοί*) und zwar die *Ordnungstypen endlicher wohlgeordneter* Mengen nenne ich *endliche* oder *finite* Zahlen, dagegen die *Ordnungstypen unendlicher wohlgeordneter* Mengen *unendliche, überendliche* oder *transfinite Zahlen* genannt werden.

Diejenigen *transfiniten Zahlen,* welche *Ordnungstypen* von *wohlgeordneten* Mengen *erster* Mächtigkeit sind, bilden *zusammen* einen *Inbegriff* von *Zahlen,* welchen ich die *zweite Zahlenclasse* genannt habe; die *Mächtigkeit dieses* Systems von transfiniten Zahlen ist, wie ich in §§ 12 und 13 der »*Grundlagen*» [[10]] bewiesen habe, genau die *zweite Mächtigkeit.*

Ebenso bilden diejenigen *transfiniten Zahlen* welche *Ordnungstypen* von *wohlgeordneten* Mengen *zweiter* Mächtigkeit sind, zusammen die *dritte Zahlenclasse,* welche, wie mit denselben Mitteln leicht zu zeigen ist, *genau* die *dritte Mächtigkeit* besitzt; und dies geht immer so weiter.

Die *Anwendbarkeit* der *transfiniten Zahlen* in der *Mengenlehre* und in der *Functionentheorie* geht sowohl aus *Ihrer inhaltreichen* Arbeit in Acta mathematica, Bd. 4, pag. 1 »*Sur la représentation analytique des fonctions*[1] *monogènes uniformes d'une variable indépendante*» [[35]], wie auch aus meinen bisherigen Arbeiten über Punctmengen in Acta Math. Bd. II und IV [[17], [18]] und in Math. Ann. Bd. XV, XVII, XX, XXI, XXIII [[6]–[10], [19]] *hinlänglich* || hervor. Fragt man nach einem *entscheidenden Kriterium* dafür, 10
ob eine *reale ganze Zahl* $\alpha$ *endlich* oder ob sie *transfinit* ist, so besteht ein solches darin, dass für *endliche Zahlen* die *entgegengesetzten* Typen mit ihnen *zusammenfallen,* so dass:

$$\alpha = \alpha_*,$$

wogegegen bei *transfiniten Zahlen* diese Gleichung *niemals* statt hat.

Dass bei Typen *unendlicher* geordneter, *nur nicht wohlgeordneter* Mengen diese Gleichung *auch* vorkommen kann, sahen wir an mehreren Beispielen in § 4.

Die *Abbildung* zweier *einander aehnlichen geordneten* Mengen (wie wir sie in § 4 definirt haben) wird *im Allgemeinen* auf *mehrere* und sogar auf *unendlich viele Weisen* möglich sein, und es erhebt sich bei *jedem Ordnungstypus* die Frage, auf *wie viele Weisen* er als *sich selbst ähnlich* betrachtet werden kann und *wie diese,* im Allgemeinen, *vielen Weisen* unter einander *zusammenhängen.*

---

(1) [This is the end of the proof-pages. We now read on from p. 9 of the manuscript.]

Von den *Zahlen*, sowohl den *finiten*, wie auch den transfiniten (d. h. also von den Ordnungstypen *wohlgeordneter* Mengen) gilt der leicht beweisbare Satz, dass jede von ihnen *sich selbst* nur *auf eine Weise ähnlich* ist.(1) Dasselbe gilt von den, den Zahlen entgegengesetzten Typen, z. B. von $\omega_*$, $(\omega+1)_*$, ...; ferner gilt es auch von Typen der Form:

$$\alpha+\beta_*,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ *zwei Zahlen* sind. Dagegen trifft *nicht* dasselbe bei Typen von der Form:

$$\beta_*+\alpha$$

zu, wo $\alpha$ und $\beta$ zwei transfinite Zahlen sind.}

§ 6.

Zwischen *allen Typen einfach geordneter Mengen* (also *nicht blos* zwischen den Typen *wohlgeordneter* Mengen, den sogenannten *Zahlen*) herrscht eine *strenge*, wenn ich mich so ausdrücken darf, *arithmetische Gesetzmässigkeit*.

Es bestehen zunächst auch hier ganz allgemein die *Operationen* des *Addirens* und *Multiplicirens*. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei einfach geordnete Mengen von den *Typen* $\alpha$ und $\beta$, so entsteht durch *Vereinigung* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wenn festgestellt wird, dass sowohl die Elemente von $\mathfrak{A}$ ihr Rangverhältniss *unter sich*, wie auch die Elemente von $\mathfrak{B}$ ihr Rangver-
11 hältniss *unter sich* in der Vereinigung *behalten* sollen und dass der Rang || *aller* Elemente von $\mathfrak{A}$ *niedriger* sei, als der Rang *aller* Elemente von $\mathfrak{B}$, eine neue einfach geordnete Menge $\mathfrak{C}$, deren *Typus* wir als die *Summe* der beiden Typen $\alpha$ und $\beta$, in Zeichen $=\alpha+\beta$ *definiren*; hier heisse $\alpha$ der *Augend* und $\beta$ der *Addend* in der *Summe*.

Es werden *im Allgemeinen* $\alpha+\beta$ und $\beta+\alpha$ *verschiedene Typen* bedeuten.

(1) [In a postcard of the 23rd November, 1884, Cantor summarised and then changed the original text at this point as follows:

"Am Schlusse des § 4 [sic] meiner Arbeit hat sich folgendes Versehen eingeschlichen. Ich sage: Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zahlen sind, so sei:

$$\ldots +\alpha+{}^*\beta+\gamma+{}^*\delta+\ldots$$

ein *Typus*, der sich selbst nur auf *eine* Weise ähnlich ist.

*Es soll aber heissen*:

Sind $\alpha$, $\beta$, zwei finite oder transfinite Zahlen, so ist den Typus:

$$\alpha+{}^*\beta$$

sich selbst nur auf eine Weise ähnlich. Dagegen gilt dies *nicht* vom Typus ${}^*\beta+\alpha$, wie man leicht sieht. Bitte die Stelle in diesem Sinne zu ändern!"

But in his letter of the 30th November, Cantor changed the passage again to the text that now follows.]

*Zwei Typen* $\alpha$ und $\beta$ bestimmen aber auch in folgender Weise einen *dritten* Typus. Sei $\mathfrak{B}$ eine einfach geordnete Menge vom Typus $\beta$; an die Stelle *jedes* Elementes von $\mathfrak{B}$ setze man eine einfach geordnete Menge vom Typus $\alpha$; die *Vereinigung aller* dieser Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ (welche sämtlich vom Typus $\alpha$ sind) bildet eine neue *einfach geordnete* Menge $\mathfrak{D}$, wenn festgesetz wird, dass die Elemente jeder *einzelnen* von ihnen ihr *gegenseitiges* Rangverhältniss auch *in der Vereinigung* behalten dagegen *je zwei* Elemente, welche zwei *verschiedenen* von den Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ angehören, *in der Vereinigung* dasselbe Rangverhältniss haben, welches zwischen den entsprechenden beiden Mengen, denen sie angehören, innerhalb des Typus $\beta$ besteht. Den *Typus* von $\mathfrak{D}$ nennen wir das *Product* aus den beiden Typen $\alpha$ und $\beta$, wobei $\alpha$ der *Multiplicandus*, $\beta$ der *Multiplicator* genannt wird. Dieses *Product* wird durch $\alpha \cdot \beta$ oder $\alpha\beta$ bezeichnet. Diese Festsetzung, *welche von meinem bisherigen Gebrauch, z. B. in den »Grundlagen» abweicht* [[10], § 3], (indem ich *dort* den Multiplicator *links*, den Multiplicandus *rechts* schrieb, während ich es von jetzt ab *umgekehrt* machen will) ist aus bestimmten Gründen die *zweckmässigere*.

Auch bei der *Multiplication* der *Typen* ist im Allgemeinen $\alpha\beta$ von $\beta\alpha$ *verschieden*.

Dagegen ist, wie man leicht beweist, stets:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma),$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

d. h. für die *Addition* und *Multiplication* der *linearen Typen* gilt ganz allgemein das *associative Gesetz*.

{Man überzeugt sich ebenso leicht, dass das *distributive* Gesetz bei der Multiplication in der folgenden Gestalt, woher $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta$ als *Multiplicatoren* auftreten *allgemeine* Gültigkeit bei *allen* Typen hat:

$$\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\gamma\beta.\}$$

(1) {|| *Zur Erläuterung der definirten Operationen eignen sich folgende Sätze, deren Beweise aus einem in § 4 angeführten Theorem abzuleiten sind.*

(1) [On p. 16 of the letter-book Cantor noted that the text that had been written so far was sent off to Mittag-Leffler on the 18th November, 1884. But the parcel seems to have contained also the section beginning two paragraphs below: "Ist $\pi$ ... " and ending " ... beschäftigen soll", for it was drafted on p. 17 of the letter-book and written out on both sides of a small slip of paper attached to p. 11 of the manuscript. Later Cantor drafted a version of the intermediate paragraphs in the margin of p. 16 of the letter-book and sent the final version to Mittag-Leffler, who wrote them out in his own hand on a separate sheet of paper, dated it "5th February, 1885" and indicated to the printer that they should be inserted at the present place. In view of this situation, we indicate by our sign || three extra unnumbered paginations: the sheet written out by Mittag-Leffler, and the two sides of Cantor's slip of paper attached to p. 11 of the manuscript.]

Ist $\eta$ der in § 4 unter diesem Zeichen definirte Typus und sind $\alpha$, $\alpha'$ zwei verschiedene Zahlen der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse, so ist:

$$\eta\alpha = \eta\alpha' = \eta; \;\; \eta^2 = \eta,$$

und daher ist auch jede Potenz $\eta^\nu$ gleich $\eta$, wo $\nu$ eine beliebige endliche ganze Zahl ist; dagegen sind $\alpha\eta$ und $\alpha'\eta$ stets verschiedene Typen.}

|| Ist $\pi$ ein Ordnungstypus von solcher Beschaffenheit, dass die Darstellung desselben als Product zweier Factoren nur dann möglich ist, wenn zum Wenigsten einer derselben gleich $\pi$ ist, so nennen wir $\pi$ einen *Primtypus* und wenn im Besondern $\pi$ eine *Zahl* ist, so heisse sie *Primzahl*. Darnach kann man sich leicht überzeugen, dass beispielweise $\eta$, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$, $\theta$, $1+\theta$, $\theta+1$, $1+\theta+1$ *Primtypen* und $\omega$, $\omega^\nu+1$, $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^\omega}$ *Primzahlen* sind, ebenso wie alle bisher sogenannten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... diese Bezeichnung auch in unserm allgemeineren Sinne behalten.

Wie bei den *endlichen Zahlen* die Zerlegung in Primfactoren eine, abgesehen von der Reihenfolge der Factoren, völlig bestimmte ist, gilt auch ein gleiches bei gewissen Gesetzungen für die *transfiniten Zahlen*, wo sogar die || Reihenfolge der Factoren in gewissem Sinne bestimmt ist. Bei den *andern Ordnungstypen* (welche nicht Zahlen sind) erfährt dieses Gesetz der eindeutigen Zerlegung in *Primtypen* Modificationen, deren Feststellung uns später beschäftigen soll.

12 || § 7.

In § 6 haben wir diejenigen mit linearen Typen ausführbaren Operationen auseinandergesetzt, welche bei den *endlichen Zahlen* von Alters her bekannt sind und von denen es sich nun heraussstellte, dass sie in *voller Allgemeinheit* auch auf die unendlichen *Typen* und *Zahlen* ausgedehnt werden können; es giebt aber ausser *Addition* und *Multiplication* noch *andere Operationen* von derselben *Ursprünglichkeit* und *Allgemeinheit*, die bei den unendlichen Typen oder Zahlen aus dem Grunde nicht hervorgetreten sind, weil hier das *Actualunendliche* keine Rolle spielt. Bei den unendlichen Typen und Zahlen kommen diese neuen Operationen wesentlich in Betracht.

Denken wir uns irgend eine *unendliche* einfach geordnete Menge $\mathfrak{A}$ vom Typus $\alpha$.

Sei $e$ ein Element von $\mathfrak{A}$, so *kann* dasselbe folgendes *Vorkommniss* darbieten; wird mit $'e$ *irgend* ein dem Range nach *früher* als $e$ vorkommendes Element von $\mathfrak{A}$ bezeichnet und $'e = e$ gesetzt, falls in $\mathfrak{A}$ keine dem Range nach niedrigeren Elemente, als $e$ vorhanden sind, bezeichnen wir ferner mit $e'$ *irgend* ein dem Range nach *später* als $e$ vorkommendes Element von $\mathfrak{A}$, setzen jedoch $e' = e$, falls in $\mathfrak{A}$ keine dem Range nach höheren Elemente, als $e$ vorhanden sind, dann fallen zwischen $'e$ und $e'$ (dem Range nach) stets unendlich viele Elemente von $\mathfrak{A}$; *erfüllt* $e$ diese *Bedingung*, so wollen wir $e$ ein *Hauptelement* von $\mathfrak{A}$ nennen.

Die sämmtlichen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen *Hauptelemente* bilden, wenn unter ihnen dasselbe Rangverhältniss, wie in $\mathfrak{A}$ erhalten bleibt, eine neue *einfach geordnete* in $\mathfrak{A}$ enthaltene Menge, welche wir die *Cohärenz* von $\mathfrak{A}$ nennen und mit $\mathfrak{A}c$ bezeichnen; den Typus von $\mathfrak{A}c$ wollen wir mit $\alpha c$ bezeichnen und die *Cohärenz* von $\alpha$ nennen. Wenden wir auf $\mathfrak{A}c$ und $\alpha c$ von neuem die Operation $c$ an, so wollen wir das Resultat hiervon resp. mit $\mathfrak{A}c^2$ und $\alpha c^2$ bezeichnen und eine entsprechende Bedeutung werde den Zeichen $\mathfrak{A}c^\nu$ und $\alpha c^\nu$ verliehen.

In der unendlichen Reihe von *geordneten* Mengen:

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}c,\ \mathfrak{A}c^2,\ \ldots\ \mathfrak{A}c^\nu,\ \ldots$$

ist jede eine *Bestandtheil* der vorangehenden; der im Allgemeinen von Null verschiedene *gemeinsame Bestandtheil* von ihnen *allen* oder, was dasselbe bedeutet, die geordnete Menge:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}c,\ \ldots\ \mathfrak{A}c^\nu,\ \ldots)$$

werde mit $\mathfrak{A}c^\omega$ und ihr Typus mit $\alpha c^\omega$ bezeichnet. Die allgemeine Definition von $\mathfrak{A}c^\varrho$ und von deren Typus $\alpha c^\varrho$, wo $\varrho$ eine beliebige transfinite Zahl bedeutet, wird auf *vollständige Induction* wie folgt gegründet: ist $\varrho$ eine transfinite Zahl *erster Art*, d. h. giebt es eine ihr unmittelbar vorangehende $\varrho - 1$, so ist:

$$\mathfrak{A}c^\varrho \equiv (\mathfrak{A}c^{\varrho-1})\,c;$$

|| ist aber $\varrho$ eine transfinite Zahl *zweiter Art*, so ist: 13

$$\mathfrak{A}c^\varrho \equiv \mathfrak{D}(\ldots,\ \mathfrak{A}c^{\varrho'},\ \ldots),$$

wo $\varrho'$ *alle* Zahlen, die kleiner als $\varrho$ sind, zu durchlaufen hat.

Hiernach überzeugt man sich leicht, dass wenn $\varrho$ und $\sigma$ irgend zwei endliche oder transfinite Zahlen sind, man immer hat:

$$(\mathfrak{A}c^\varrho)\,c^\sigma \equiv \mathfrak{A}c^{\varrho+\sigma} \quad \text{und:} \quad (\alpha c^\varrho)\,c^\sigma = \alpha c^{\varrho+\sigma}.$$

$\mathfrak{A}c^\varrho$ heisse die $\varrho^{\text{te}}$ *Cohärenz* von $\mathfrak{A}$, $\alpha c^\varrho$ die $\varrho^{\text{te}}$ *Cohärenz* des Ordnungstypus $\alpha$.

Liegt der Fall vor, dass:

$$\mathfrak{A}c \equiv \mathfrak{A},$$

so nennen wir $\mathfrak{A}$ eine *insichdichte* geordnete Menge und ihren Typus $\alpha$ einen *insichdichten* Typus.

So sind z. B. die *Typen*: $\eta$, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$, $\theta$, $1+\theta$, $\theta+1$, $1+\theta+1$ *insichdichte Typen.*

Dagegegen haben wir beispielsweise:

$$\omega c = 0;\quad (\omega+\nu)c = 1;\quad (\omega 2)c = 1;\quad (\omega 2+\nu)c = 2;\quad (\omega\mu)c = \mu - 1;\quad (\omega\mu+\nu)c = \mu;$$
$$\omega^2 c = \omega;\quad (\omega^2+1)\,c = \omega+1;\quad \omega^\omega c = \omega^\omega.$$

Hier haben $\nu$ und $\mu$ die Bedeutung *endlicher* positiver ganzer Zahlen.

Das letzte Beispiel, wonach $\omega^\omega c = \omega^\omega$, ist auch darum instructiv, weil sich daran zeigt, dass aus der Gleichung $\alpha c = \alpha$ nicht geschlossen werden kann, dass $\alpha$ ein *insichdichter* Typus sei, dazu ist vielmehr erforderlich, dass $\mathfrak{A}c \equiv \mathfrak{A}$.

Diejenigen Elemente einer geordneten Menge $\mathfrak{A}$, welche *nicht* Hauptelemente von $\mathfrak{A}$ sind, nennen wir *isolirte* Elemente von $\mathfrak{A}$: sie bilden zusammen in der Rangordnung, in welcher sie in $\mathfrak{A}$ zu einander stehen, eine *einfach geordnete* in $\mathfrak{A}$ enthaltene Menge, welche wir die *Adhärenz* von $\mathfrak{A}$ nennen und mit $\mathfrak{A}a$ bezeichnen; ebenso nennen wir den Typus von $\mathfrak{A}a$ die *Adhärenz* von $\alpha$ und geben ihm das Zeichen $\alpha a$.

Die geordnete Menge $\mathfrak{A}a$ besteht aus lauter *isolirten* Elementen und wird daher eine *isolirte* Menge genannt; darum nennen wir auch $\alpha a$ einen *isolirten* Typus.

Die vorhandene Beziehung der drei geordneten Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}a$, $\mathfrak{A}c$ können wir durch die Formel ausdrücken:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}a + \mathfrak{A}c,$$

wobei aber zu beachten ist, dass hier auf der rechten Seite eine Zusammenfassung der Elemente von $\mathfrak{A}a$ und $\mathfrak{A}c$ in *derjenigen Rangordnung vorzunehmen ist, in welcher sie ursprünglich in* $\mathfrak{A}$ *gegeben sind,* so dass jene Formel nicht etwa mit der Formel $\alpha = \alpha a + \alpha c$ gleichbedeutend ist, welche letztere, wie man sich leicht überzeugt, *im Allgemeinen nicht zutrifft.*

14 || In *demselben Sinne* hat man die folgende sehr allgemeine Formel:

$$\mathfrak{A} \equiv \sum_{\varrho'=0,1,\ldots<\varrho} \mathfrak{A}c^{\varrho'}a + \mathfrak{A}c^{\varrho},$$

wo $\varrho$ irgend eine gegebene endliche oder überendliche Zahl bedeutet. (1)

Jeder *insichdichte* Bestandtheil von $\mathfrak{A}$ ist, was auch $\varrho$ sei, immer auch Bestandtheil von $\mathfrak{A}c^\varrho$; daraus folgt, dass die geordnete Menge $\sum_{\varrho'=0,1\ldots<\varrho} \mathfrak{A}c^{\varrho'}a$ *keinerlei* insichdichten Bestandtheil haben kann; solche Mengen nennen wir *separirte* Mengen, ihre Typen *separirte Typen.*

(1) [Cantor deleted the following paragraph from the manuscript, perhaps because of its incomplete reference to the (then incomplete?) *zweite Mitteilung*:

"Aus diesem Theorem folgt dass, wenn $\mathfrak{A}$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Mächtigkeit ist, alsdann $\mathfrak{A}c^\varrho$ eine *insichdichte Menge oder Null* wird, sobald $\varrho$ eine gewisse innerhalb der $\varkappa+1^{\text{ten}}$ oder einer niedrigeren Zahlenklasse gelegene Grenze erreicht oder überschreitet; so haben wir z. B. in einem vorangehenden Aufsatz (pag. [111–112] dieses Bandes) [[20], 111–112: [28], 266] bewiesen, dass eine in einer unendlichen geraden gelegene *Punctmenge* $\mathfrak{P}$, welche offenbar eine besondere *einfach geordnete* Menge darstellt, stets so beschaffen ist, dass für $\varrho \geqq d$, $\mathfrak{P}c^\varrho$ Null oder insichdicht wird, wo $\alpha$ eine gewisse der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl bedeutet, und wir sehen hier, dass dieser Theorem unter einem *allgemeineren,* für *alle einfachgeordneten Mengen* gültigen steht."]

Fassen wir eine einfachgeordnete Menge $\mathfrak{A}$ in's Auge, welche der folgenden Bedingung genügt: *ist* $e, e', e'', \ldots, e^{(\nu)}, \ldots$ *irgend eine zu ihr gehörige einfach unendliche Folge von Elementen, die entweder dem Range nach mit* $\nu$ *fortwährend steigen, oder fortwährend dem Range nach abnehmen, während* $\nu$ *wachst, so giebt es ein bestimmtes Element* $f$ *von* $\mathfrak{A}$, *welches im ersteren Fall höheren Rang hat, als alle* $e^{(\nu)}$, *wogegen jedes im Vergleich mit* $f$ *niedrigere Element* $'f$ *von den* $e^{(\nu)}$ *für hinreichend grosse Werthe von* $\nu$ *im Range übertroffen wird und welches im zweiten Falle niedrigeren Rang hat, als alle* $e^{(\nu)}$, *wogegen jedes im Vergleich mit* $f$ *höhere Element* $f'$ *von einem gewissen* $\nu$ *an höheren Rang hat, als die* $e^{(\nu)}$; *hier ist offenbar* $f$ *ein Hauptelement von* $\mathfrak{A}$.

Entspricht eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{A}$ den in dieser Bedingung enthaltenen Voraussetzungen, so nennen wir sie eine *abgeschlossene* Menge und ihren Typus $\alpha$ einen *abgeschlossenen Typus*.

Darnach sind z. B. $\omega+1$, $\omega^\nu+1$, $1+\theta+1$ *abgeschlossene* Typen, dagegen sind es *nicht* die Typen: $\omega$, $\omega^\nu$, $\eta$, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Menge, so ist jede ihrer *Cohärenzen* $\mathfrak{A}c\varrho$ auch eine solche und wir können daher auch sagen, dass wenn $\alpha$ ein *abgeschlossener Typus* ist, dasselbe auch von $\alpha c\varrho$ zu sagen ist.

Ist eine einfach geordnete Menge sowohl *insichdicht*, wie auch *abgeschlossen*, so nennen wir sie eine *perfecte* Menge und ihren Typus einen *perfecten* Typus.

Darnach ist z. B. $1+\theta+1$ eine [!] *perfecter Typus*. Ich bemerke endlich, dass jede *nicht abgeschlossene* Menge durch geeignete *Interpolation* neuer Elemente zu einer *abgeschlossenen* Menge ergänzt werden kann.

|| § 8. 15

Wir schreiten nun zur Betrachtung *n-fach geordneter Mengen* und ihrer *Ordnungstypen*, wo wir unter $n$ bis auf Weiteres eine *endliche* ganze Zahl verstehen, obwohl später die Steigerung zu Typen von unendlichfach geordneten Mengen nothwendig und ausführbar werden wird.

Unter einer $n$-fach geordneten Menge verstehen wir eine solche, deren sämmtliche Elemente nach $n$ *Beziehungen* (Dimensionen) geordnet sind; diese $n$ Beziehungen müssen wir uns ebenfalls in eine bestimmte Folge gebracht denken, so dass sie als *erste, zweite, ...* $n^{\text{te}}$ *Beziehung* unterschieden werden können.

Dieser Begriff einer $n$-fach geordeneten Menge ist den folgenden näheren Bestimmungen unterworfen.

Sind $a$ und $a'$ *irgend* zwei Elemente einer $n$-fach geordneten Menge $\mathfrak{A}$, so besteht zwischen ihnen *in Rücksicht auf jede der n Beziehungen* und bestimmtes Verhältniss des Ranges, so dass $a$ entweder *niedrigeren* oder *gleichen* oder *höheren* Rang hat, als $a'$; das

Rangverhältniss von $a$ und $a'$ in Rücksicht auf eine der $n$ Beziehungen ist im Allgemeinen unabhängig von dem Rangverhältniss derselben Elemente in Rücksicht auf die übrigen Beziehungen, nur ein Fall ist auszunehmen, dass nämlich in Rücksicht auf $(n-1)$ der $n$ Beziehungen $a$ und $a'$ gleichen Rang haben, wo dann in Rücksicht auf die noch übrige Beziehung gleicher Rang unter ihnen nicht statt haben kann, weil sonst ihre Unterscheidung in der vorliegenden Ordnung aufhören würde und nur durch Hinzunahme *neuer* Beziehungen bewirkt werden könnte.

Es wird ferner bei einer $n$-fach geordneten Menge $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt, dass wenn in Bezug auf *eine und dieselbe* der $n$ Beziehungen $a$ niedrigeren oder gleichen Rang hat, als $a'$, $a'$ niedrigeren oder gleichen Rang hat, als $a''$, alsdann auch $a$ niedrigeren oder gleichen Rang hat, wie $a''$, wobei die Gleichheit des Ranges im letzteren Falle nur unter Voraussetzung der Gleichheit des Ranges in den beiden ersteren Fällen statt hat. Zwei $n$-fach geordnete Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heissen einander *ähnlich*, wenn es möglich ist sie *gegenseitig eindeutig und vollständig*, *Element für Element* einander derart zu zuordnen, dass wenn $a$ und $a'$ *irgend zwei* Elemente der ersten, $b$ und $b'$ die zugehörigen Elemente der andern sind, alsdann das Rangverhältniss von $a$ und $a'$ in *Rücksicht auf jede der n Beziehungen* in $\mathfrak{A}$ dasselbe ist, wie das Rangverhältniss der Elemente $b$ und $b'$ in Rücksicht auf die *entsprechende* Beziehung in $\mathfrak{B}$; es wird hierbei die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung in $\mathfrak{A}$ der $\nu^{\text{ten}}$ Beziehung in $\mathfrak{B}$ entsprechend gedacht.

16 || Wir bedienen uns auch der Ausdruckweise, dass wir von zwei ähnlichen $n$-fach geordneten Mengen sagen: sie lassen sich *aufeinander abbilden* und wir nennen das Element $b$ in $\mathfrak{B}$ das *Bild* des Elementes $a$ in $\mathfrak{A}$, und umgekehrt.

Unter dem *Ordnungstypus* einer $n$-fach geordneten Menge $\mathfrak{A}$ verstehen wir denjenigen *Allgemeinbegriff*, unter welchem sämmtliche der Menge $\mathfrak{A}$ ähnlichen $n$-fach geordneten Mengen und nur diese (somit auch $\mathfrak{A}$ selbst) stehen; wir nennen solche Typen *n-fache* oder *n-dimensionale Ordnungstypen.*

Handelt es sich um $n$-fach geordnete Mengen mit einer endlichen Zahl $m$ von Elementen, so nennen wir die zugehörigen Typen *endliche Ordnungstypen.* Die Anzahl der verschiedenen Ordnungstypen $n$-fach geordneter Mengen mit $m$ Elementen ist offenbar *endlich* und ihre Bestimmung als Function von $n$ und $m$ ist nicht ohne Interesse. Sämmtliche *endliche* Ordnungstypen bilden die *erste* Typenclasse; die Typen $n$-fach geordneter Mengen von der *ersten* Mächtigkeit, zählen wir zur *zweiten Typenclasse*, die Typen $n$-fach geordneter Mengen der *zweiten* Mächtigkeit gehören zur *dritten* Typenclasse u. s. w.

Mit jedem $n$-fachen Typus $\alpha$ sind $2^n-1$ *andere*, im Allgemeinen unter einander und von $\alpha$ verschiedene Typen verbunden, welche wir mit $\alpha$ und unter einander *conjugirte* Typen nennen.

Ist nämlich $\mathfrak{A}$ eine Menge vom Typus $\alpha$, so entsteht daraus eine neue $n$-fach geordnete

Menge $\mathfrak{A}'$, wenn festgesetzt wird, dass in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung das Rangverhältniss aller Elemente *umgekehrt* werde, die Gleichheit im Rang jedoch, falls sie vorkommt, erhalten bliebe und dass alle übrigen Rangverhältnisse (in Rücksicht auf die anderen Beziehungen) ungeändert gelassen werden. Der Ordnungstypus von $\mathfrak{A}'$ werde mit $\alpha_{*\nu}$ bezeichnet.

Hier hat also $_{*\nu}$ die Bedeutung eines *Operationssymbols* und wir haben daher im Ganzen $n$ derartige Operationssymbole $_{*1},_{*2},\ldots_{*n}$, welche successive auf $\alpha$ angewandt (wobei offenbar die Ordnung der Aufeineanderfolge dieser Operationen auf das Resultat keinen Einfluss hat) die im Allgemeinen verschiedenen $2^n-1$ mit $\alpha$ und unter sich conjugirten Typen ergeben. Wie leicht zu sehen, ist $\alpha_{*\nu\,*\nu}=\alpha$.

Es kann vorkommen, dass alle konjugirten Typen oder dass einige unter ihnen gleich $\alpha$ sind; in letzterem Falle ist die Anzahl der ungleichen conjugirten Typen ein Theil von $2^n$, also eine Potenz von 2. Ist diese Anzahl etwa gleich $2^k$ so sind $2^k$-mal je $2^{n-k}$ conjugirte Typen einander gleich.

|| Die *Abbildung* zweier einander ähnlichen $n$-fach geordneten Mengen wird im All- 17
gemeinen auf mehrfache Art, in gewissen Fallen auf nur eine Art möglich sein. Das letztere findet z. B. bei *endlichen* Typen immer statt, wie zu beweisen ist.

Jeder *unendliche* $n$-fache Ordnungstypus bietet also die *Frage*, auf wie viele Weisen er als *sich selbst ähnlich* betrachtet werden kann und *wie* diese im Allgemeinen *vielen* Weisen unter einander zusammenhängen.

Ich komme nun zu den *Operationen*, welchen die $n$-fachen Ordnungstypen unterworfen werden können.

Wir haben in jeder $n$-fach geordneten Menge $\mathfrak{A}$ die $n$ *Beziehungen* (Dimensionen), nach welchen ihre Elemente geordnet sind, als die *erste*, *zweite*, ... $n^{\text{te}}$ Beziehung unterschieden; werden nun mehrere $n$-fache Ordnungstypen zusammen betrachtet, so gilt für uns die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung in allen als *dieselbe*. Falls aber diese Typen nicht sämmtlich von derselben Dimensionzahl sind, so beschränken wir uns vorläufig auf den Fall, dass die Dimensionzahlen sämmtlicher Typen eine bestimmte endliche Zahl $n$ nicht überschreiten; dann können und wollen wir jeden der in Betracht kommenden Typen von kleinerer Dimensionenzahl, als $n$, etwa von der Dimensionenzahl $m<n$, als einer $n$-dimensionalen Typus betrachten, in welchem die sämmtlichen Elemente in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung, wenn $\nu>m$ ist, *einen und denselben* Rang haben.

Sind nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei $n$-fach geordnete Mengen von den Typen $\alpha$ und $\beta$, so entsteht durch die Vereinigung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine neue $n$-fach geordnete Menge $\mathfrak{C}$, wenn festgesetzt wird, dass *in Rücksicht auf jede der n Beziehungen* sowohl die Elemente von $\mathfrak{A}$ ihr Rangverhältniss unter sich, wie auch die Elemente von $\mathfrak{B}$ ihr Rangverhältniss unter sich behalten sollen und dass der Rang *aller* Elemente von $\mathfrak{A}$ niedriger sei, als der Rang *aller* Elemente von $\mathfrak{B}$; der Typus von $\mathfrak{C}$ bleibt offenbar derselbe wenn wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch, ihnen ähnliche Mengen ersetzen, wir nennen ihn die Summe von $\alpha$ und $\beta$ und schreiben ihn $=\alpha+\beta$, wobei $\alpha$ der *Augendus*, $\beta$ der *Addendus* heisst.

Das *Product* zweier $n$-dimensional *Typen* $\alpha$ und $\beta$ wird wie folgt definirt.

Sei $\mathfrak{B}$ eine $n$-fach geordnete Menge vom Typus $\beta$; *jedes Element* von $\mathfrak{B}$ bestehe uns einer $n$-fach geordneten Menge vom Typus $\alpha$; alle diese einander ähnlichen Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ werden durch eine bestimmte, beliebige *Abbildung* auf einander bezogen gedacht, ihre *Vereinigung* bildet eine neue $n$-fach geordnete Menge $\mathfrak{D}$ unter folgenden Bestimmungen: in Rücksicht auf *jede* der $n$ Beziehungen (wir wollen sagen, die $\nu^{\text{te}}$) werden die Rangverhältnisse der Elemente, welche einer und derselben Theilmenge z. B. $\mathfrak{A}$ angehören, als dieselben
18 genommen, wie sie in || Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung in $\mathfrak{A}$ auftreten; nimmt man hingegen zwei Elemente $a$ und $a'$, welche zwei verschiedenen Theilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ angehören so wird, falls *in Rücksicht auf die $\nu^{te}$ Beziehung* der Rang von $\mathfrak{A}'$, als Element von $\mathfrak{B}$, *verschieden* ist vom Rang von $\mathfrak{A}'$, als Element von $\mathfrak{B}$, *dasselbe* Rangverhältniss zwischen $a$ und $a'$ in $\mathfrak{D}$ bestimmt, wie es zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, als Elemente von $\mathfrak{B}$ herrscht; falls aber der Rang von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in *Rücksicht auf die $\nu^{te}$ Beziehung derselbe* ist, so wird das Rangverhältniss von $a$ und $a'$ in $\mathfrak{D}$ als *dasjenige* genommen, welches durch die *zu Grunde gelegte Abbildung* der beiden ähnlichen Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gegeben ist, so dass, wenn $a_1$ das Bild von $a'$ in $\mathfrak{A}$ ist, alsdann das Rangverhältniss von $a$ und $a'$ in $\mathfrak{D}$ dasselbe sein soll, wie dasjenige von $a$ und $a_1$ in $\mathfrak{A}$. Es lässt sich zeigen, dass der *Typus* der so definirten $n$-fach geordneten Menge $\mathfrak{D}$ *nur von den Typen $\alpha$ und $\beta$* abhängt, d. h. unabhängig davon ist, welche Abbildungen der einander ähnlichen Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ unter einander zu Grunde gelegt werden, wenn sie nur alle den Typus $\alpha$ haben und wenn nur ihre *Gesammtheit*, die wir $\mathfrak{B}$ genannt haben, vom Typus $\beta$ ist.

Diesen *Typus* der Menge $\mathfrak{D}$ nennen wir das *Product* aus $\alpha$ und $\beta$ und bezeichnen ihn mit $\alpha\beta$; $\alpha$ heisst der *Multiplicandus*, $\beta$ der *Multiplicator* dieses Products.

$\alpha+\beta$ ist im Allgemeinen von $\beta+\alpha$, ebenso $\alpha\beta$ von $\beta\alpha$ verschieden. Dagegen hat man auch hier die *associativen* Gesetze:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma); \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

und das *distributive* Gesetz nur in der Form:

$$\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\gamma\beta.$$

Wir nennen einen $n$-dimensionalen Ordnungstypus $\pi$ einen *Primtypus*, wenn die Gleichung:

$$\pi = \alpha\beta$$

nicht anders möglich ist, als wenn *zum Wenigsten einer* der beiden Factoren $\alpha$ und $\beta$ gleich $\pi$ ist.

Betrachten wir nun eine *unendliche* $n$-fach geordnete Menge $\mathfrak{A}$ vom Typus $\alpha$, so *kann es vorkommen*, dass ein Element $e$ von $\mathfrak{A}$ folgender Bedingung genügt: sei $'e_\nu$ *irgend* ein Element von $\mathfrak{A}$, welches in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung niedrigeren Rang als $e$ und in dem Falle, dass keine Elemente niedrigeren Ranges als $e$ vorkommen, sei $e_\nu$ gleich $e$ und es sei ferner $e'_\nu$ *irgend* ein Element von $\mathfrak{A}$, welches in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung höheren Rang hat, in dem Falle jedoch dass es keine Elemente höheren Ranges giebt, sei $e'_\nu$ gleich $e$, so giebt es stets unendlich viele Elemente von $\mathfrak{A}$, deren Rang, in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung nicht niedriger als der Rang von $'e_\nu$ und nicht höher, als derjenige von $e'_\nu$ ist, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$. Wenn dies der Fall ist, so nennen wir $e$ ein *Hauptelement* von $\mathfrak{A}$.

Die *sämmtlichen Hauptelemente* von $\mathfrak{A}$ bilden, wenn unter ihnen in Rücksicht auf *alle* $n$ Beziehungen dieselben Rangverhältnisse genommen werden, wie sie ihnen innerhalb $\mathfrak{A}$ zukommen, eine neue $n$-fach || geordnete Menge, welche wir die *Cohärenz* von $\mathfrak{A}$ nennen 19
und mit $\mathfrak{A}c$ bezeichnen. Wird an Stelle von $\mathfrak{A}$ eine ihr *ähnliche* Menge $\mathfrak{A}'$ genommen, so überzeugt man sich leicht, dass auch $\mathfrak{A}c$ und $\mathfrak{A}'c$ einander ähnlich sind. Den *Ordnungstypus*, von $\mathfrak{A}c$ nennen wir daher auch *Cohärenz* von $\alpha$ und schreiben ihn gleich $\alpha c$.

Die Definitionen von $\mathfrak{A}c^\varrho$ und $\alpha c^\varrho$ lassen sich mit *denselben* Worten geben, wie in § 7 die entsprechenden Definitionen bei einfach geordneten Mengen.

Diejenigen Elemente von $\mathfrak{A}$, welche nicht Hauptelemente sind, nennen wir auch hier *isolirte* Elemente von $\mathfrak{A}$ und ihre Gesammtheit *in derselben Ordnung* in welcher sie in $\mathfrak{A}$ vorkommen, bildet eine $n$-fach geordnete Menge, welche die *Adhärenz* von $\mathfrak{A}$ genannt und mit $\mathfrak{A}a$ bezeichnet wird; den Ordnungstypus von $\mathfrak{A}a$ nennen wir die *Adhärenz* von $\alpha$ und schreiben ihn gleich $\alpha a$.

Es besteht auch hier, was auch $\varrho$ für eine endliche oder überendliche Zahl sei, die Gleichung:

$$\mathfrak{A} \equiv \sum_{\varrho'=0,1,\ldots<\varrho} \mathfrak{A}c^{\varrho'}a + \mathfrak{A}c^\varrho,$$

wo wieder hervorzuheben ist, dass diese Gleichung, aus naheliegenden Gründen, nicht auf die entsprechenden Typen übertragbar ist.

Ist die Bedingung $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}c$ erfüllt, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *insichdichte* Menge, $\alpha$ ein insichdichter Typus; ist aber $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}a$, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *isolirte* Menge, $\alpha a$ ein *isolirter Typus*.

Hat ferner $\mathfrak{A}$ eine solche Beschaffenheit, dass keine ihrer Theilmengen (in welchen die sämmtlichen Elemente dasselbe Rangverhältniss erhalten, wie sie es in $\mathfrak{A}$ haben) insichdicht ist, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *separirte* Menge, $\alpha$ ein *separirter Typus*.

Eine $n$-fach geordnete Menge $\mathfrak{A}$ kann folgende Beschaffenheit haben: ist $a, a', a''$,

... $a^{(\varkappa)}$ ... *irgend* eine einfach unendliche Menge von Elementen von $\mathfrak{A}$, die in *Rücksicht auf jede der n Beziehungen* mit wachsendem Stellenzeiger $\varkappa$ dem Range nach stets zu oder stets abnehmen (wobei jedoch in den einen Beziehung ein Zunehmen, in den andern ein Abnehmen vorkommen kann), so existirt immer ein bestimmtes Element $f$ von $\mathfrak{A}$, so dass wenn $'f_\nu$ irgend ein, in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung im Range niedrigeres Element als $f$, $f'_\nu$ irgend ein, in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung im Range höheres Element als $f$ ist, alsdann, falls die Elemente $a^{(\varkappa)}$ eine in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung steigende Reihe bilden, von einem gewissen $\varkappa$ an $a^{(\varkappa)}$ stets in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung höheren Rang hat, als $'f_\nu$, falls aber die Elemente $a^{(\varkappa)}$ eine in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung fallende Reihe bilden, von einem $\varkappa$ an, $a^{(\varkappa)}$ stets in Rücksicht auf die $\nu^{\text{te}}$ Beziehung niedrigeren Rang hat, als $f'_\nu$, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$, ein solches Element $f$ von $\mathfrak{A}$ ist, wie man leicht sieht, immer ein *Hauptelement* von $\mathfrak{A}$.

Erfüllt $\mathfrak{A}$ diese *Bedingung* stets, d. h. für *jede* Reihe $a, a', a'', \ldots, a^{(\varkappa)}, \ldots$, so nennen wir $\mathfrak{A}$ || eine *abgeschlossene n*-fach geordnete Menge und ihren Typus $\alpha$ einen *abgeschlossenen* Typus.

Ist $\mathfrak{A}$ eine *abgeschlossene* Menge, so sind auch alle ihre *Cohärenzen*, sofern sie nicht verschwinden, abgeschlossene Menge; ist also $\alpha$ ein *abgeschlossener* Typus, so gilt dasselbe auch von $\alpha c\varrho$, sofern letzeteren nicht gleich Null ist. (¹)

{||Im Vorstehenden ist eine Verallgemeinerung von Begriffen vollzogen, denen wir in den Untersuchungen der *Punctmengenlehre* und im Besondern in der »*zweiten Mittheilung über verschiedene Theoreme etc.*» (Acta mathematica, t. VII, pag. 105) [[20]] zuerst begegnet sind; es scheint mir daher nicht überflüssig, auf eine gewisse *Differenz* ausdrücklich hinzuweisen, die mit *gleichnamigen* Vorstellungen in jenem *speciellen* und in unserm [!] *allgemeineren* Gebiete verbunden ist.

*Hier*, wo wir mit einfach und mehrfach geordneten Mengen nur in Absicht auf ihre *Ordnungstypen* zu thun haben, wird naturgemäss nicht nur von der *Beschaffenheit* der *Elemente*, sondern auch von allen Verhältnissen abgesehen, welche die *Elemente* der geordneten Menge unter einander haben können, mit *Ausnahme* derjenigen, durch welche ihr *gegenseitiges Rangverhältniss* bestimmt ist, während bei den *Punctmengen* dasjenige Verhältniss hinzukommt, wonach je zwei Elemente oder Puncte eine bestimmte *Entfernung* von einander haben.

Dadurch ist es bedingt dass den Begriff eines *Hauptelements*, wenn wir ihn auf eine

(¹) [This was the original end of the paper: on p. 30 of the letter-book Cantor noted that he sent this latter half of the manuscript to Mittag-Leffler on the 25th February, 1885. There now follows the addendum, drafted on the rest of p. 30 of the letter-book (where the numbering § 9 was put and then deleted), and written out on a separate sheet.]

*Punctmenge* $\mathfrak{P}$ anwenden, nicht genau mit dem Begriff eines *zu* $\mathfrak{P}$ *gehörigen Grenzpunctes von* $\mathfrak{P}$ zusammenfällt; jeder zu $\mathfrak{P}$ gehörige Grenzpunct von $\mathfrak{P}$ ist allerdings *immer* ein Hauptelement von $\mathfrak{P}$; doch ist das Umgekehrte, wie man sich leicht überzeugt, nicht immer der Fall.

Wir müssen daher bei den hiermit zusammenhängenden Vorstellungen von Cohärenz, Adhärenz, Inhärenz, insichdichte Menge, abgeschlossene Menge u. s. w. den *engeren* Sinn, welchen diese Worte in der *Punctmengenlehre* haben, von dem *weiteren* Sinn, der Ihnen in der Typentheorie zukommt, unterscheiden und es wird diese *Erinnerung* genügen, um jede Verwechselung und jeden Irrthum in dieser Richtung zu verhüten.}

Halle a. S. d. 6$^{\text{ten}}$ Nov. 1884.

~~21$^{\text{ten}}$ Februar 1885.~~(1)

## VII. Extract from a letter by Mittag-Leffler to Cantor, written 9th March, 1885: the suggested withdrawal of the *erste Mitteilung*

Original, in a copyist's hand, from the surviving Cantor papers. There is no copy in the Institut Mittag-Leffler.

PROFESSOR MITTAG-LEFFLER. Stockholm 9/3 1885.

Mein theurer Freund,

Endlich habe ich einige Augenblicke frei, welche ich dazu benutzen kann Ihnen zu schreiben. Sprechen wir dann zuerst einige Worte über Ihre Abhandlung über Typen theorie, die ich jetzt, leider doch nur flüchtig, durchgelesen habe. Ich finde die neue Grundidee die Sie darin entwickeln sehr schön und ich glaube wohl dass Sie von dieser [!] Gesichtspunkt aus sehr viel erreichen können. Aber ich will Ihnen nicht verhehlen dass es scheint mir es wäre Euer selbst wegen besser gewesen diese Untersuchungen nicht früher zu publicieren, als Sie neue sehr positive Resultate Ihrer neuen Betrachtungsweise darlegen können. Wäre es Ihnen z. B. gelungen durch die Typentheorie die Frage zu entscheiden ob das Linearcontinuum dieselbe Mächtigkeit hat oder nicht wie die zweite Zahlenclasse, dann würde gewiss Ihre neue Theorie den grössten Erfolg bei den || Mathematikern haben. Wie 2

(1) [To the change of date (written on page 20 of the manuscript) Cantor added the remark:

"N. B. Bitte dieses Datum zu behalten, es ist das Datum, unter welchem die ersten 6 Paragraphen an Herrn Mittag-Leffler geschickt worden sind."

But we know that that was the date of the *commencement* of the paper: the first six paragraphs were sent to Mittag-Leffler only on the 18th November, and the rest on the 25th of February.]

es jetzt ist, fürchte ich dass die meisten sich sehr erschrecken werden wegen ihre neue Terminologie und Ihre sehr allgemeine philosophische Ausdruckweise. Was mich persönlich anbetrifft, finde ich dass Sie hier wie immer sehr gut schreiben und ich liebe sehr Ihre allgemeine Art die Untersuchungen anzustellen. Aber ich bin auch davon wohl bewusst dass sehr wenige Mathematiker meinen Geschmack theilen, und ich bin davon überzeugt dass die Veröffentlichung Ihrer neuen Arbeit, früher als Sie neue positive Resultate darlegen können, Ihr Ansehen bei den Mathematikern sehr viel schaden wird. Ich weiss wohl, dies ist Ihnen im Grunde einerlei. Aber wenn Ihre Theorien einmal auf diese Weise in Misscredit kommen, wird es sehr lange dauern bis sie wieder die Aufmerksamkeit der mathematischen Welt an sich ziehen. Ja es kann wohl sein dass man Ihnen und Ihre [!] Theorien nie in unserer Lebenszeit Gerechtigkeit zu Theil kommen lässt. So werden die Theorien wieder einmal nach 100 Jahren oder mehr von Jemand entdeckt und dann findet man wohl
3 nachträglich aus, dass || Sie doch schon das alles hatten und dann thut man Ihnen zuletzt Gerechtigkeit, aber auf diese Weise werden Sie keinen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung unserer Wissenschaft ausgeübt haben. Und einen solchen Einfluss auszuüben das wünschen Sie natürlich wie jeder Anderer der die Wissenschaft treibt. Ich glaube also, es wird der Sache und es wird Ihnen selbst am meisten nützen wenn Sie mit der Veröffentlichung der Typentheorie noch einige Zeit bis Sie Anwendungen davon geben können aufzuschieben.

Sie könnten [!] doch sehr wohl Ihre Arbeit schon jetzt als Manuscript drucken oder lithographiren lassen und bei Ihren Schülern verbreiten. Herr Eneström kann Ihnen davon benachrichtigen was es kosten würde Ihre Arbeit auf diese Weise hier zu drucken.

Glauben Sie doch nicht, mein lieber Freund, dass meine Ratschläge etwas damit zu thun haben dass ich Redactor der „Acta" bin. Ich werde im Gegentheil Ihre Arbeit sofort drucken lassen wenn Sie mir davon benachrichtigen dass Sie wirklich zu drucken ent-
4 schlossen sind. Ich habe || alle Dispositionen dafür getroffen, dass das Aufsetzen und Drucken sehr schnell gemacht werden kann. Lesen Sie in Scherings Gedächtnissrede über Gauss wie Gauss sich fürchtete seine Arbeiten über die nicht Euklidische Geometrie zu veröffentlichen [[38], 7–9]; und Ihre Arbeiten sind gewiss nicht weniger revolutionär als diejenigen von Gauss.

Ich werde Ihnen vorschlagen diejenigen Theile, welche ich in den beigelegten Correkturbogen mit Bleifeder vorgestrichen habe, auszuschliessen, falls Sie sich dafür entschliessen sollten Ihre Arbeit jetzt in Acta zu veröffentlichen. Ich bitte Ihnen mir Ihre Dispositionen darüber angeben zu wollen.

.......

### VIII. Letter from Cantor to Mittag-Leffler, written 15th March, 1885: acceptance of the withdrawal

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm: partly quoted in [39], 15.

Halle d. 15 März 1885.

Mein lieber Freund,

Den in Ihrem freundlichen Schreiben vom 9ten dieses enthaltenen Rathschlägen bin ich durchaus zugänglich; Sie sind überzeugt, dass es besser ist, die Publication der „Typentheorie" zurückzustellen, Sie theilen mir als mein Freund diese Ueberzeugung mit, ich bin Ihnen für diesen erneuten Beweis Ihrer Freundschaft dankbar und ersuche Sie, mir *möglichst bald* den in Ihrem Hände befindlichen Theil des betreffenden Manuscripts zurücksenden zu wollen.

Ich bin heute sehr in Eile und bitte Sie daher, die Kürze dieser Zeilen freundlichst entschuldigen zu wollen.

Ihr
aufrichtig ergebener
G. Cantor.

### IX. Letter from Cantor to Mittag–Leffler, written 23rd March, 1885: return of the manuscript

Original, in the Institut Mittag-Leffler, Stockholm.

Halle a/S. d. 23ten März 1885.

Sehr verehrter Freund,

Da ich das erbetene Manuscript der „Principien einer Theorie der Ordnungstypen" noch nicht von Ihnen zurückerhalten habe, so halte ich es für möglich, dass mein betreffendes Schreiben v. 15ten März verloren gegangen ist. Ich erlaube mir daher, Ihnen hierdurch mittheilen, dass ich mit den in Ihrem freundlichen Briefe v. 9te März enthaltenen Ansichten vollkommen einverstanden bin.

Mit freundlichen Grüssen
Ihr
aufrichtig ergebener
Georg Cantor

## X. Extract from a letter by Cantor to Gerbaldi, written 11th January, 1896: reminiscence on the *erste Mitteilung*

Draft on pp. 86–87 of the 1895–96 letter-book. Cantor indicates that this extract is taken from a letter sent a month earlier to Klein, of which there is no trace in the surviving letter-books. That letter is also not to be found in Klein's papers, now kept in the *Handschriftenabteilung* of the *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek*, Göttingen; but there are no grounds for thinking that Cantor had not sent it to him.

(86) ... Die Theorie der Ordnungstypen war bereits vor *elf* Jahren, anno 1884 soweit fertig, dass ich Herrn Mittag-Leffler eine längere Abhandlung darüber einsandte unter dem Titel:

„Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung."

Der Druck begann und ich besitze vom ersten Bogen noch einen Correcturabzug, den ich Ihnen gelegentlich zeigen will, ebenso auch das Manuscript vom uebrigen.

87 || Ueber den *eigentlich Grund*, warum der Druck damals sistirt wurde, bin ich noch heute nicht unterrichtet, er ist mir ein *Räthsel*!

Ich bekam nämlich plötzlich von Herrn M. L. einen Brief, worin er mir zu meinem grössten Erstaunen schreibt, er halte nach reiflicher Ueberlegung diese Publication fur *„um hundert Jahre verfrüht.*" Nach den Intentionen von Herrn M. L. hatte ich also noch bis zum Jahre 1984 damit warten sollen, was mir doch eine *zu starke Zumuthung* zu sein schien!

Da mir hierdurch, wie Sie begreifen werden, die mathematischen Journale *verleidet* wurden, so fing ich an meine Zeilen in der „Zeitschrift für Philosophie u. philos. Kritik" zu publiciren [[22], [23]]. Erst vor 9 Monaten entschloss ich mich dazu, die mathematische Seite meiner Lehre wieder in mathematischen Journalen zu behandeln. Von den „Acta Mathematica" will ich aber natürlich nichts mehr wissen! ........

## XI. Extract from a letter by Cantor to Poincaré, written 22nd January, 1896: further reminiscence on the *erste Mitteilung*

Draft, on pp. 121–123 of the 1895–96 letter-book. This section of the draft was con stantly altered: we present a "final version." There are no surviving papers of Poincaré, but there is no reason that the letter was not sent.

(121) ... Die Beziehungen, welche ich während der ersten vier Jahre dieser Zeitschrift [*Acta Mathematica*] zu ihr gehabt habe, sind *von M. L. selbst* im Jahre 1885, also bereits, *vor circa 11 Jahren gelöst* worden. Ich war nämlich schon damals im Besitz der Theorie der transfiniten Cardinalzahlen und Ordnungstypen und wollte dieselbe sofort in den „Acta

mathematica" publiciren. Herr M. L. nahm auch das von mir eingesandte Manuscript an, welches den Tittel führt:

„Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung."

Die Druckarbeit begann und ich war gerade mit der Correctur des ersten Bogens beschäftigt, welche ich zusammen mit dem damaligen Gehülfen der Acta Math., Herr G. Eneström besorgte.

|| Da erhielt ich einen Brief v. 9 März von Herrn Mittag-Leffler (den ich noch besitze), 122
worin er mir sehr nahe legt, die Arbeit zurückzuziehen, weil ich gewissermaassen mit derselben „um 100 Jahre zu früh" erschienen wäre. Ich telegraphierte ihm sofort [?], er möchte mir das Manuscript zurückschicken, was auch geschah. Es war mir plötzlich klar geworden, dass er es im Interesse seiner Acta mathem. wünschen müsste, meine Arbeit zurückgezogen zu sehen. Der Zusammenhang ist dieser! Schon meine früheren, seit 1870 publicirten Arbeiten hatten sich nicht des Beifalls der Berliner Machthaber Weierstrass, Kummer, Borchardt, Kronecker, zu erfreuen gehabt. Würde nun gar Herr Mittag Leffler meine noch weiter gehende und kühnere Theorie der transfiniten Ordnungstypen in den Acta Math. gebracht haben, so hätte er die Existenz seines noch jungen Unternehmens, welches vom Wohlwollen der Berliner Akademiker hauptsächlich abhing, *im höchsten Grade gefährdet.* Nur so lässt sich die seltsame Schwenkung meines Freundes erklären.

|| Ich habe ihm dieselbe daher auch keineswegs übelgenommen und meine liebevollen 123
Gesinnungen zu seiner Person sind noch immer unverändert ganz dieselben, wie vor jener Katastrophe. Allein ich glaube und hoffe, dass Sie sowohl, wie auch die sehr verehrten Herren Hermite, Picard und Appell, mir durchaus Recht geben werden, wenn ich nicht eintrete für eine Zeitschrift, für welche der Ausschluss meiner Arbeiten bis zu einem gewissen Grade zu einer Lebensfrage geworden war. Wahrscheinlich hat sich auch heute, wo ja zwar Kummer Kronecker und Borchardt durch den Tod ausgeschieden sind, dafür aber ihre Stelle Schwarz, Fuchs und Frobenius getreten sind, die Situation in Bezug auf mich und meine Arbeiten nicht verbessert, so dass mein Eintreten für Acta math. denselben vielleicht *ebenso schaden würde*, wie *vor 12 Jahren meine wissenschaftliche Mitarbeit.* Auch von dieser Seite empfiehlt sich daher sogar im Interessse der Acta math. selbst meine absolute Reserve. Mein freundschaftliches Verhältniss zu Gustav Mittag Leffler und seiner liebenswürdigen Frau Gemahlin hat durch diese Sache, wie gesagt, keinerlei Aenderung erfahren.

Uebrigens sind Sie auch der Erste, dem ich da von dieser Sache erzähle; ich hatte Alles fast vergessen und wurde erst durch Ihr Schreiben wieder lebhaft daran erinnert. Um vor Ihnen Allen wegen meiner Absage durchaus gerechtfertigt dazustehen, habe ich diese Dinge so umständlich erklären müssen.

.......

## Acknowledgements

I am most grateful to Cantor's descendants for the opportunity to study surviving documents in their possession; further extracts from the letter-books may be seen in [33]. For encouragement and assistance in the preparation of this paper, I thank Dr. R. C. H. Tanner, Professor L. Carleson and Sir Edward Collingwood, F.R.S.

## References

[1]. Bendixson, I., Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. *Acta Math.*, 2 (1883), 415–429.

[2]. Cantor, G. Über trigonometrische Reihen. *Math. Ann.*, 4 (1871), 139–143; [28], 87–91.

[3]. —— Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.*, 5 (1872), 123–132; [28], 92–102.

[4]. —— Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *J. reine angew. Math.*, 77 (1874), 258–262; [28], 115–118.

[5]. —— Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *J. reine angew. Math.*, 84 (1878), 242–258; [28], 119–133.

[6]. —— Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. *Math. Ann.*, 15 (1879), 1–7; [28], 139–145.

[7]. —— [[6]]. II. *Math. Ann.*, 17 (1880), 355–358; [28], 145–148.

[8]. —— [[6]]. III. *Math. Ann.*, 20 (1882), 113–121; [28], 149–157.

[9]. —— [[6]]. IV. *Math. Ann.*, 21 (1883), 51–58; [28], 157–164.

[10]. —— [[6]]. V. *Math. Ann.*, 21 (1883), 545–591; [28], 165–209. [Published with a preface as *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig, 1883.]

[11]. —— Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels. *Acta Math.*, 2 (1883), 305–310. [Translation of [4].]

[12]. —— Une contribution à la théorie des ensembles. *Acta Math.*, 2 (1883), 311–328. [Translation of [5].]

[13]. —— Sur les séries trigonométriques. *Acta Math.*, 2 (1883), 329–335. [Translation of [2].]

[14]. —— Extension d'une théorème de la théorie des séries trigonométriques. *Acta Math.*, 2 (1883), 336–348. [Translation of [3].]

[15]. —— Sur les ensembles infinis et linéaires de points. I–IV. *Acta Math.*, 2 (1883), 349–380. [Translation of [6]–[9].]

[16]. —— Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Math.*, 2 (1883), 381–408. [Translation of certain re-ordered sections of [10].]

[17]. —— Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à $n$ dimensions. Première communication. Extrait d'une lettre adressée à l'editeur. *Acta Math.*, 2 (1883), 409–414; [28], 247–251.

[18]. —— De la puissance des ensembles parfaits de points. Extrait d'une lettre adressée à l'editeur. *Acta Math.*, 4 (1884), 381–392; [28], 252–260.

[19]. —— [[6]]. VI. *Math Ann.*, 23 (1884), 453–488; [28], 210–246.

[20]. —— Über verschiedene Theoreme der Punctmengen in einem $n$-fach ausgedehnten stetigen Raume $G_n$. Zweite Mitteilung. *Acta Math.*, 7 (1885), 105–124; [28], 261–277.

[21]. —— Ludwig Scheffer (1859–1885). Nekrolog. *Bibl. Math.*, (1) 1 (1885), Sp. 197–199; [28], 368–369.

[22]. —— Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Unendliche. *Zeit. Phil. philos. Krit.*, 88 (1886), 224–233; [28], 370–377.

[23]. —— Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. *Zeit. Phil. philos. Krit.*, 91 (1887), 81–125 and 252–270, and 92 (1888), 240–265; [28], 378–439.

[24]. —— Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jber. deutsch. Math.-Verein.*, 1 (1892), 75–78; [28], 278–281.

[25]. —— Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. *Math. Ann.*, 46 (1895), 481–512; [28], 282–311.

[26]. —— Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti. *Riv. di mat.*, 5 (1895), 129–162. [Translation of [25].]

[27]. —— Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. II. *Math. Ann.*, 49 (1897), 207–246; [28], 312–356.

[28]. —— *Gesammelte Abhandlungen. Mathematischen und philosophischen Inhalts.* [Ed. E. Zermelo.] Berlin, 1932; reprint Hildesheim, 1962.

[29]. CAVAILLÈS, J., *Philosophie mathématique*. Paris, 1962.

[30]. FRAENKEL, A. A., Georg Cantor. *Jber. deutsch. Math.-Verein.*, 39 (1930), 189–266. [Also published separately: Leipzig, 1930.]

[31]. —— *Abstract set theory*. 3rd. ed., Amsterdam, 1966.

[32]. KREY, H., Über Systeme von Plancurven. *Acta Math.*, 7 (1885–86), 49–94.

[33]. MESCHKOWSKI, H., Aus den Briefbüchern Georg Cantors. *Arch. hist. exact sci.*, 2 (1962–66), 503–519.

[34]. —— *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. Braunschweig, 1967.

[35]. MITTAG-LEFFLER, G., Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. *Acta Math.*, 4 (1884), 1–79.

[36]. NOETHER, E. & CAVAILLÈS, J., [eds.] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Paris, 1937.

[37]. PARTINGTON, J., *A history of chemistry. Volume four*. London, 1964.

[38]. SCHERING, E., *Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr*. Göttingen, 1877.

[39]. SCHÖNFLIES, A., Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. *Acta Math.*, 50 (1927), 1–23.

[40]. TANNERY, J., [Review of [1] and [11]–[17].] *Bull. sci. math. astron.*, (2) 8 (1884), pt. 2, 162–171.

[41]. TANNERY, P., Note sur la théorie des ensembles. *Bull. Soc. math. France.*, 12 (1884), 90–96.

*Received July 15, 1969*