PROBLÈMES AUX LIMITES EN THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

PAR

J. L. LIONS

Introduction

Le présent travail a pour but essentiel l'étude des problèmes mixtes au sens de M. Hadamard. Rappelons très brièvement le problème : on donne un ouvert Ω de R^n et sur cet ouvert un opérateur différentiel elliptique D, linéaire, à coefficients constants ou variables; on considère le cylindre $\Omega \times (t \geq 0)$, t variable de temps; on cherche $u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$, solution de $D_x u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u = 0$ $\left(\text{ou } D_x u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0\right)$ pour $t > 0$, les fonctions $u(x, 0)$ $\left(\text{resp. et en outre } \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)\right)$ étant données (conditions initiales) et $u(x, t)$ étant assujetti à certaines conditions aux limites sur la frontière $\Gamma \times (t > 0)$, $\Gamma =$ frontière de Ω (exemple : $u(x, t)$ est donné sur $\Gamma \times (t > 0)$) (voir dans la bibliographie les travaux cités d'Hadamard, Courant-Hilbert, Bureau, Petrowsky).

Il existe classiquement deux méthodes de résolution pour ces problèmes (sans parler de la méthode des différences finies):

1ère méthode. On effectue une transformation de Laplace en t (Doetsch [1]); on est ramené à l'étude de problèmes aux limites attachés à l'opérateur elliptique $D + \lambda$, $\lambda =$ paramètre.

2ème méthode (Méthode des fonctions propres; cf. Bureau [1]). On suppose que D est auto-adjoint, que l'ouvert Ω est borné de frontière « régulière » de sorte que les fonctions propres de l'opérateur D ($D u_k = \lambda_k u_k$) forment un système orthonormal complet dans $L^2(\Omega)$ (espace des fonctions de carré sommable sur Ω); on cherche alors u sous la forme : $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) X_k(t)$.

Ces deux méthodes sont applicables sous des conditions différentes, mais il y a toujours essentiellement les deux mêmes difficultés:

(I) Etude des problèmes aux limites relatifs à l'opérateur $D+\lambda$.

(II) Si l'on a une fonction u obtenue par transformation de Laplace inverse (ou développement en série de fonctions propres) la fonction u ainsi obtenue est-elle bien solution du problème, et notamment est-elle une fois (resp. deux fois) continûment différentiable en t?

Le chapitre I de ce travail est une étude systématique des problèmes aux limites attachés à un opérateur « elliptique » $D+M$, le chapitre II apporte une contribution au problème (II) par utilisation des résultats du chapitre I.

Chapitre I

Soit V et Q deux espaces de distributions sur un ouvert Ω quelconque de R^n, V étant *un espace de Hilbert*, contenu dans Q; on donne sur V une forme $((u, v))$, qui détermine *à la fois* un opérateur Λ (opérateur différentiel dans les applications) *et des conditions aux limites relatives à* Λ (la donnée de cette forme revient à se donner une formule de Green). On donne alors au N° 2 une condition suffisante très simple permettant d'affirmer que Λ *est un isomorphisme de N sur Q'*, où Q' est le dual de Q et N un espace construit à partir de $((u, v))$ et Q. Ce théorème, de démonstration facile, donne le critère le plus important du Chapitre I; il contient entre autres un théorème de Gårding (résolution du problème de Dirichlet); c'est d'ailleurs le travail de Gårding (cf. Gårding [1] à [4]) qui a été le point de départ du présent travail. L'opérateur inverse de Λ, soit G, est l'opérateur de Green de la forme $((u, v))$. Diverses propriétés de ces opérateurs sont étudiées aux N° 4 à 7: systèmes complets de fonctions propres, stabilité et régularité des opérateurs de Green.

L'idée de se donner la forme $((u, v))$ *avant* de se donner l'opérateur Λ n'est pas nouvelle; elle est d'usage courant dans la théorie variationelle des problèmes aux limites : voir Courant-Hilbert [1], Chap. VII, et les travaux de H. Weyl, Pleijel, Friedrichs, Aronszajn, Soboleff, etc... La méthode suivie est donc une systématisation, possible grâce à l'usage des distributions de Schwartz, de ces méthodes classiques.

Bien entendu, le problème pratique ne se pose pas de la même façon : on donne l'opérateur Λ ainsi que des conditions aux limites; il s'agit de voir si le problème aux limites correspondant admet une solution ou non. Il est donc nécessaire de donner une classe générale d'opérateurs Λ auxquels on sache systématiquement attacher des formes $((u, v))$ sur des espaces de Hilbert convenables. C'est l'objet des N° 8 à 12 du § 1.

Le N° 13 généralise les notions précédentes : au cas des systèmes différentiels. Les resultats de ce N° sont généralisés, suivant une idée de M. L. Schwartz, dans un court article, suivant ce travail.

Le § 2 donne les exemples principaux : problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels d'ordre 2 (à coefficients bornés non continus, à coefficients non bornés, etc...), puis problèmes aux limites relatifs à des opérateurs d'ordre $2m$, m quelconque; le cas de Δ^2+1, $\Delta=$ laplacien, est étudié de plus près. On considère ensuite des problèmes aux limites sur un espace de Riemann. Pour finir, est étudié un système de conditions aux limites faisant intervenir des dérivées d'ordre arbitrairement grand, pour un opérateur différentiel d'ordre 2 (par exemple).

Quelques problèmes utiles dans la pratique, pouvant être résolus par des méthodes voisines, n'ont pas été donnés, pour ne pas allonger outre mesure : ces problèmes font l'objet d'articles à paraître.

De façon générale tout ce chapitre est élémentaire; il suppose seulement connu les fondements de la théorie des distributions de Schwartz (Schwartz [1], [2]). Rien n'est supposé connu de la très vaste littérature consacrée aux problèmes aux limites (sauf en quelques points précis, pouvant être passés). Dans le § 2 on utilise certaines propriétés d'espaces fonctionnels, variantes de l'espace de Beppo Levi utilisé en théorie du potentiel (Deny [1], Brelot [1]); ces propriétés sont démontrées dans Deny-Lions [1] ou Lions [3] (voir aussi Soboleff [1], [2]).

Une méthode voisine a été donnée indépendamment par Browder [4] qui porte surtout son effort sur la différentiabilité au sens usuel des solutions — problème non abordé ici, où toutes les dérivations sont effectuées au sens des distributions.

Une autre méthode, basée sur la théorie des prolongements d'opérateurs non continus dans un espace de Hilbert, a été utilisée par Friedrichs [1] et Krein [1] puis Visik [2] pour les opérateurs d'ordre 2 (voir aussi Jennings [1]). Les travaux de Visik peuvent d'ailleurs être simplifiés et généralisés par utilisation des résultats de Gårding ou des notres.

Chapitre II

Une fois en possession des notions du Chapitre I, on peut poser de façon rigoureuse le problème mixte au sens de M. Hadamard; c'est le problème mixte fin (§ 2, N° 1). Il y a lieu de modifier alors ce problème suivant la méthode de Schwartz pour le problème de Cauchy; on est ainsi conduit aux problèmes qui suivent. De façon générale on désigne $\mathcal{D}'_+(t, X)$ l'espace des distributions en t à valeurs dans un espace de Banach X, de supports en t limités à gauche (le strict essentiel concernant ces espaces et notamment la généralisation du produit de composition en t est rappelé dans le § 1; pour plus de détails on se reportera à Schwartz [6], [7] et Grothendieck [1] et [2]).

On pose alors le problème suivant : on donne Λ défini par la forme $((u, v))$, ce qui définit N; puis on donne K, élément de l'espace $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; Q'))$. Trouver u dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$, solution de

$$\Lambda u + K * u = T,$$

où T est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

Pour résoudre ce problème on distingue deux cas. Dans le 1^er^ cas on suppose que K admet une transformée de Laplace en t. On donne au N° 2 du § 2 une condition suffisante générale *pour que l'opérateur* $\Lambda + K^*$ (K^* = opérateur de composition en t par K) *soit un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$. On montre que la solution de l'équation proposée est fournie par $u = \mathcal{G} * T$, où $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$ *et admet une transformée de Laplace en t*. La distribution $\mathcal{G}$ est dite : *distribution de Green* de l'opérateur $\Lambda + K^*$. On donne ensuite deux théorèmes d'application du théorème du N° 2, et on étudie la stabilité des distributions de Green. Ces théorèmes sont ensuite appliqués aux opérateurs différentiels les plus importants de la physique mathématique (d'ailleurs considérablement généralisés); c'est l'objet des N° 5 à 10. Les resultats des N° 2 à 10 sont les plus importants de tout ce travail.

On considère ensuite le 2^ème^ cas : celui où K n'admet pas de transformée de Laplace en t; un résultat général pour ce cas est donné au N° 12.

Une fois en possession de la distribution de Green, on constate au N° 13 qu'elle permet de résoudre une nouvelle catégorie de problèmes mixtes : les problèmes mixtes « explosifs ».

Les N° 14, 15, 16 reviennent sur les problèmes mixtes initiaux : les problèmes mixtes fins. Le N° 14 utilise pour cela la théorie des semi-groupes (Hille [1] et Yosida [1]). Les N° 15 et 16 utilisent une transformation de Laplace (bien entendu ces méthodes sont très voisines l'une de l'autre). Le N° 17 étudie la régularité des noyaux de Green, i. e. des noyaux (au sens de Schwartz) des applications $T \to \mathcal{G} * T$. Enfin le N° 18 étudie rapidement la réflexion des ondes dans le cas du classique opérateur des ondes.

L'essentiel de ce travail a été résumé dans les notes (I) et (III) de Lions [1].

Quelques problèmes mixtes utiles ne sont pas résolus ici, comme par exemple les problèmes mixtes avec conditions aux limites dépendantes du temps, le cas d'opérateurs à coefficients variables en t; ces problèmes feront l'objet d'articles prochains.

Je suis heureux de pouvoir remercier vivement ici M. L. Schwartz qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et ses encouragements; je lui suis redevable de très nombreuses améliorations, tant dans le fond que dans la forme.

Je remercie aussi M. H. G. Garnir qui m'a fait bénéficier de sa profonde connaissance des problèmes aux limites.

Je remercie M. le Doyen Pérès, M. M. Janet et M. H. Cartan qui ont accepté de se joindre à M. L. Schwartz pour constituer le jury auquel cette thèse a été soumise. Ma reconnaissance va également à M. J. Hadamard, qui a bien voulu présenter mes notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Avant de donner la table des matières, précisons qu'au cours d'un même N° (example : N° 10) les théorèmes, propositions, etc... sont notés : Théorème 10.1, Théorème 10.2, ..., Proposition 10.1, etc...

Table des matières

Chapitre I. Problèmes aux limites pour une classe générale d'opérateurs de type elliptique

§ 1. Théorie générale

§ 2. Applications

Chapitre II. Problèmes aux limites de type mixte

§ 1. Préliminaires

§ 2. Problèmes mixtes

Index des notations et définitions

Chapitre I

Problèmes aux limites pour une classe générale d'opérateurs de type elliptique

§ 1. Théorie générale

1. Hypothèses et problème

On désigne toujours par Ω un ouvert *quelconque* de R^n. On désigne par $\mathcal{D}_\Omega$ ($\mathcal{D}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à valeurs complexes, à support compact, muni de la topologie de limite inductive de Schwartz; on désigne par $\mathcal{D}'_\Omega$ (ou $\mathcal{D}'$) son dual (muni en général de la topologie forte), espace des distributions sur Ω; on désigne par $\mathcal{E}_\Omega$ (ou $\mathcal{E}$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, sans conditions sur les supports, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω des fonctions et de chacune de leurs dérivées; on note $\mathcal{E}'_\Omega$ (ou $\mathcal{E}'$) l'espace dual, espace des distributions à support compact sur Ω; on désigne par $L^p(\Omega)$ (ou L^p) l'espace des classes de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable sur Ω, pour la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \dots dx_n$ $(x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n)$; si $u \in L^p(\Omega)$, sa norme usuelle est notée $\| u \|_{L^p(\Omega)}$.

Sauf indication expresse du contraire, *toutes les dérivations sont effectuées au sens de* $\mathcal{D}'_\Omega$.

On donne maintenant un espace vectoriel topologique localement convexe[1] séparé, Q, avec :

$$\mathcal{D}_\Omega \subset Q \subset \mathcal{D}'_\Omega$$

les injections[2] $\mathcal{D}_\Omega \to Q$ et $Q \to \mathcal{D}'_\Omega$ étant continues et $\mathcal{D}_\Omega$ étant dense dans Q. Toute forme linéaire continue sur Q, soit T, définit par restriction une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_\Omega$, donc une distribution $\tilde{T} \in \mathcal{D}'_\Omega$; on a donc une application canonique du dual Q' de Q dans $\mathcal{D}'_\Omega$, et cette application est biunivoque : si $\tilde{T} = 0$, c'est que T est nul sur $\mathcal{D}$, donc, $\mathcal{D}$ étant dense dans Q, $T = 0$. On peut donc identifier Q' à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$; on a :

---

(1) Tous les espaces topologiques utilisés sont localement convexes; on ne le répétera plus.

(2) Si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, avec $E \subset F$, l'injection de E dans F est l'application identique $e \to e$ de E dans F.

$$\mathcal{D} \subset Q' \subset \mathcal{D}'$$

les injections étant continues et $\mathcal{D}$ étant faiblement dense dans Q'.

L'espace Q' sera muni de la topologie forte de dual. Lorsque Q est un espace de Hilbert (cas fréquent dans les applications) il y a évidemment un isomorphisme canonique entre Q et Q' qui permet d'identifier ces deux espaces; mais sauf dans le cas particulier où $Q = L^2(\Omega)$, nous n'effectuerons pas cette identification.

Si $T \in \mathcal{D}'$, $\overline{T}$ désigne la distribution complexe conjuguée de T[1]. On suppose que si T est dans Q, alors $\overline{T}$ est aussi dans Q; même chose pour Q'.

On donne maintenant un espace de Hilbert V, avec :

$$\mathcal{D} \subset V \subset Q \subset \mathcal{D}',$$

les injections étant continues. On suppose que si T est dans V, $\overline{T}$ y est aussi. *L'espace $\mathcal{D}$ n'est pas en général dense dans V*; si $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V, on n'introduira pas l'espace dual V', qui n'est pas un espace de distributions. L'espace V est généralement muni d'une topologie strictement plus fine que celle induite par Q, même lorsque Q est un espace de Hilbert. *Lorsque $\mathcal{D}$ est dense dans V, on prendra $Q = V$.*

On donne ensuite une forme sesqui-linéaire[2] *continue* sur $V \times V$, soit :

$$(u, v) \to ((u, v)), \quad u, v \in V. \tag{1.1}$$

La donnée de cette forme est fondamentale.

Comme $\mathcal{D}$ est contenu dans V avec une topologie plus fine, pour u fixé dans V, la forme semi-linéaire $\varphi \to ((u, \varphi))$ est continue sur $\mathcal{D}$, donc du type :

$$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \overline{\varphi} \rangle, \quad u \in V, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{1.2}$$

le crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$; (1.2) définit Λu, élément de $\mathcal{D}'$; on a donc défini une application linéaire : $u \to \Lambda u$ de V dans $\mathcal{D}'_\Omega$, qui est continue (si $u \to 0$ dans V, alors $((u, \varphi)) \to 0$ uniformément pour φ demeurant dans un ensemble borné de $\mathcal{D}$, donc $\Lambda u \to 0$ dans $\mathcal{D}'$ fort); par conséquent :

$$\Lambda \in \mathcal{L}(V; D'_\Omega)\ ^{(3)}. \tag{1.3}$$

---

[1] Défini par $\overline{T}(\varphi) = \overline{T(\overline{\varphi})}$.

[2] i.e. $((u, v))$ est linéaire en u, et semi-linéaire en v, c'est-à-dire : $((u, \lambda v)) = \overline{\lambda}((u, v))$ pour tout nombre complexe λ, $\overline{\lambda}$ = complexe conjugué de λ.

[3] Si E et F sont 2 espaces vectoriel topologiques, $\mathcal{L}(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Cet espace est généralement muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E (topologie qui fait de $\mathcal{L}(E; F)$ un espace de Banach, si E et F sont des espaces de Banach).

DÉFINITION 1.1. L'opérateur Λ défini par (1.2) est dit : *l'opérateur défini par la forme* $((u, v))$; réciproquement on dit que la forme $((u, v))$ est une forme *attachée à* Λ.

L'opérateur Λ sera le plus souvent dans la pratique un *opérateur différentiel.*

REMARQUE 1.1.

La forme $((u, v))$ définit Λ, mais la réciproque est généralement inexacte : la connaissance de Λ, élément de $\mathcal{L}(V; \mathcal{D}')$ détermine $((u, \varphi))$ pour tout $u \in V$, et $\varphi \in \mathcal{D}$, mais, sauf si $\mathcal{D}$ est dense dans V, ne détérmine pas $((u, v))$, pour tout $u \in V$ et $v \in V$; il est facile d'ailleurs de donner des exemples (cf. ci-après) de formes $((u, v))$ différentes et définissant le même opérateur Λ. Notons que si $\mathcal{D}$ est dense dans V, alors Λ est dans l'espace $\mathcal{L}(V; V')$.

Les problèmes

Notre but est de donner des conditions suffisantes portant sur $((u, v))$ permettant de construire des espaces X, Y, tels que Λ soit dans $\mathcal{L}(X; Y)$, et soit un isomorphisme de X sur Y.

Exemples simples de formes $((u, v))$.

EXEMPLE 1.1.

On désigne par $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions u, $u \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to \frac{\partial}{\partial x_i} u$ soient continues de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$; si u, v, sont dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, on pose :

$$(u, v)_{\mathcal{E}^1_{L^2}} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v\right)_{L^2}.$$

L'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert (cet espace a été introduit par Gårding; cf. Gårding, [1] à [4]; cf. aussi : Schwartz [3]; le fait que $\mathcal{E}^1_{L^2}$ soit un espace de Hilbert est immédiat; c'est d'ailleurs un cas particulier de le proposition 9.1 ci-après).

Ceci posé, on prend : $V = \mathcal{E}^1_{L^2}$ et la forme :

$$((u, v)) = b\,(u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v\right)_{L^2}.$$

L'opérateur Λ défini par cette forme est :

$$\Lambda = -\Delta + b,\ \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{(Laplacien)}.$$

EXEMPLE 1.2.

On prend $V = \mathcal{E}^1_{L^2}$ comme dans l'exemple 1.1. On utilise en outre le fait suivant (Cf. Deny-Lions [1]) : on suppose que la frontière de Ω contient un morceau Γ de variété une fois continuement différentiable de dimension $n-1$; on suppose Γ borné; on peut alors *prolonger* la fonction u (définie dans Ω) sur Γ; soit γu cette fonction prolongée. Elle est définie de façon précise comme suit : on peut définir une application linéaire continue et une seule, $u \to \gamma u$, de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans l'espace $L^2(\Gamma)$ des classes de fonctions de carré sommable sur Γ pour la mesure superficielle, de telle sorte que γu coincide presque partout (pour la mesure superficielle) avec les valeurs de u sur Γ, lorsque u est continue dans $\Omega \cup \Gamma$. On prend alors sur $V \times V$ la forme :

$$((u, v)) = b\,(u, v)_{L^2} + \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v\right)_{L^2} + k \int_\Gamma \gamma u\, \overline{\gamma v}\, ds,$$

$k =$ constante complexe, $ds =$ mesure superficielle sur Γ. L'opérateur Λ défini par cette forme est encore $-\Delta + b$, comme dans l'exemple 1.1.

On voit donc bien qu'à des formes différentes peuvent correspondre des opérateurs Λ identiques.

2. Le théorème d'isomorphisme

ESPACE $\mathcal{H}$.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace des $u \in V$, tels que Λu soit dans Q'; on le munit de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to \Lambda u$ soient continues de $\mathcal{H}$ dans V et Q' respectivement.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, on prend $V = Q$, alors $\mathcal{H}$ *coincide avec* V.

On notera que si Q (donc Q') est un espace de Banach, il en est de même pour $\mathcal{H}$. Par ailleurs, si $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V, l'espace $\mathcal{H}$ peut à priori être réduit à $\{0\}$.

ESPACE N.

On désigne par N le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ formé des fonctions u qui vérifient :

(2.1) $$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \text{ pour tout } v \in V,$$

le crochet désignant la dualité entre Q' et Q. L'espace N est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ que l'on munit de la topologie induite par $\mathcal{H}$.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, l'espace N coincide avec V. En effet, par définition de Λ, la relation (2.1) a lieu pour tout $v=\varphi \in \mathcal{D}$, donc pour tout $v \in V$ par prolongement.

Par contre si $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V, la relation (2.1) n'est pas vraie en général pour $u \in \mathcal{H}$ et $v \in V$.

EXEMPLE 2.1.

On prend V et $((u, v))$ comme dans l'exemple 1.1, p. 4. On prend $Q=L^2(\Omega)$; $\mathcal{H}$ est alors l'espace des $u \in V$, tels que Λu soit dans L^2, et qui vérifient :

$$(-\Delta u+b u, v)_{L^2}=((u, v)) \text{ pour tout } v \in V,$$

i.e. :

$$(-\Delta u, v)_{L^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v\right)_{L^2} \text{ pour tout } v \in V.$$

Cette relation n'est pas vraie en général pour $u \in \mathcal{H}$, $v \in V$; elle n'est vérifiée que pour les u dont la dérivée normale (dans un sens généralisé, car aucune hypothèse n'est faite sur la frontière de Ω) est nulle sur la frontière de Ω.

On a donc défini des espaces $\mathcal{H}$ et N tels que Λ soit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}$ (ou N) dans Q'. On va maintenant donner une condition suffisante simple pour que Λ soit un isomorphisme de N sur Q'. Pour cela il est utile de décomposer $((u, v))$ en sa partie hermitienne et anti-hermitienne :

$$((u, v))=((u, v))_1+i\,((u, v))_2, \tag{2.2}$$

où :

$$((u, v))_1=\tfrac{1}{2}\left(((u, v))+\overline{((v, u))}\right)$$

$$((u, v))_2=\tfrac{1}{2}\, i\left(((u, v))-\overline{((v, u))}\right).$$

On pose alors la

DÉFINITION 2.1. La forme $((u, v))$ est *elliptique* s'il existe $a>0$, tel que pour tout $u \in V$, on ait :

$$((u, u))_1 \geq a\,\|u\|_V^2 \text{ [1]}. \tag{2.3}$$

Cette notion ne dépend donc que de la partie hermitienne de la forme $((u, v))$.

Il résulte de la définition 2.1, que si $((u, v))$ est elliptique, $((u, v))_1$ définit sur V un produit scalaire hilbertien de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$.

On a alors le

---

[1] $\|u\|_V=$ norme de u dans V; de façon générale, si E est un espace de Banach, et si $e \in E$, $\|e\|_E=$ norme de e.

THÉORÈME 2.1. *Si la forme* $((u, v))$ *est elliptique, l'opérateur* Λ *défini par cette forme, est un isomorphisme* (topologique) *de* N *sur* Q' [1].

DÉMONSTRATION.

a) Soit à résoudre

$$\Lambda u = f, \tag{2.4}$$

f donné dans Q', u cherché dans N. Si (2,4) admet une solution, alors, pour v quelconque dans V, on a :

$$((u, v)) = \langle f, \bar{v} \rangle. \tag{2.5}$$

Réciproquement, si u *est dans* V et vérifie (2.5) pour tout $v \in V$, alors (2.5) a en particulier lieu pour tout $v = \varphi$ dans $\mathcal{D}$, donc :

$$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle = \langle f, \bar{\varphi} \rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D},$$

donc $\Lambda u = f$, ce qui montre déjà que u est dans $\mathcal{H}$. Mais alors, puisque $\Lambda u = f$, on a, pour v quelconque dans V, $\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle = ((u, v))$ (par (2.5)), donc u est dans N ; donc (2.4) équivaut à (2.5), $u \in V$.

REMARQUE 2.1.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, alors $N = V$, $Q' = V'$, et l'équivalence de (2.4) et (2.5) est évidente.

b) Pour f fixé dans Q', la forme semi-linéaire :

$$v \to \langle f, \bar{v} \rangle,$$

est continue sur V, espace de Hilbert pour $((u, v))_1$, donc :

$$\langle f, \bar{v} \rangle = ((Jf, v))_1, \tag{2.6}$$

ce qui définit J, élément de $\mathcal{L}(Q' ; V)$.

Pour u fixé dans V, $v \to ((u, v))_2$ est une forme semi-linéaire continue sur V, donc :

$$((u, v))_2 = ((Hu, v))_1, \tag{2.7}$$

ce qui définit H, élément de $\mathcal{L}(V ; V)$, opérateur hermitien pour le produit scalaire $((u, v))_1$.

Alors (2,5) équivaut à :

$$(1 + iH) u = Jf, \tag{2.8}$$

[1] Noter que ceci entraîne que N (donc a fortiori $\mathcal{H}$) n'est pas réduit à $\{0\}$.

qui admet une solution unique, H étant hermitien, donnée par

$$u = G f, \tag{2.9}$$

avec :

$$G = (1 + i H^{-1} J, \tag{2.10}$$

ce qui définit G comme élément de $\mathfrak{L}(Q'; V)$. Mais en outre G opère linéairement de Q' dans N, et continûment; en effet, si $f \to 0$ dans Q' alors $u \to 0$ dans V, et comme $\Lambda u = f$, $u \to 0$ dans $\mathcal{H}$, donc dans N, donc :

$$H \in \mathfrak{L}(Q'; N). \tag{2.11}$$

Le théorème est donc démontré.

On a en outre construit un inverse bilatère G de Λ; on a les relations ;

$$\begin{cases} \Lambda \cdot G = 1, & 1 \in \mathfrak{L}(Q'; Q'), \\ G \cdot \Lambda = 1, & 1 \in \mathfrak{L}(N; N). \end{cases} \tag{2.12}$$

DÉFINITION 2.2. L'opérateur G est dit : *l'opérateur de Green* de la forme $((u, v))$.

En raison de son importance, explicitons dans le cas particulier où $\mathcal{D}$ est dense dans V, l'énoncé correspondant du théorème 2.1 :

THÉORÈME 2.2. *Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, et si la forme $((u, v))$ est elliptique, l'opérateur Λ est un isomorphisme de V sur V'.*

REMARQUE 2.2.

Comme Λ est élément de $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; Q')$, on peut considérer le composé:

$$G \cdot \Lambda = P, \text{ élément de } \mathfrak{L}(\mathcal{H}; N). \tag{2.13}$$

On a : $P^2 = P$, donc P est un *projecteur* de $\mathcal{H}$ sur N. A ce projecteur est associé la décomposition en somme directe topologique de $\mathcal{H}$ donnée par :

$$\mathcal{H} = P\,\mathcal{H} + (1 - P)\,\mathcal{H},$$

ou encore : tout $u \in \mathcal{H}$ s'écrit :

$$u = P u + (1 - P) u,$$

$P u$ est dans N, et $\Lambda P u = u$, donc si $v = (1 - P) u$, on a : $\Lambda v = 0$, on a donc la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{H} = N + \mathcal{H}_{\Lambda}, \tag{2.14}$$

où $\mathcal{H}_{\Lambda}$ désigne l'espace des $u \in \mathcal{H}$ solutions de $\Lambda u = 0$.

Lorsque Λ est fixe, les formes $((u, v))$ attachées à Λ étant variables, alors $\mathcal{H}_{\Lambda}$ est fixe et N est un supplémentaire variable de $\mathcal{H}_{\Lambda}$ dans $\mathcal{H}$.

3. Problèmes aux limites

On désigne par $\mathcal{K}$ un espace vectoriel topologique, contenant $\mathcal{H}$, et on suppose donné un prolongement de Λ, encore appelé Λ, tel que pour tout $u \in \mathcal{K}$, Λu soit defini, et soit dans Q', de sorte que :

$$\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{K}; Q'). \tag{3.1}$$

On peut toujours prendre $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ mais on pourra très souvent prendre pour $\mathcal{K}$ un espace beaucoup plus grand que $\mathcal{H}$.

On pose alors le

PROBLÈME 3.1. Trouver U dans $\mathcal{K}$, solution de

$$\Lambda U = F, \tag{3.2}$$

où F est donné dans Q', *avec les conditions aux limites* [1]

$$U - h \in N, \tag{3.3}$$

où h est donné dans $\mathcal{K}$. La condition (3.3) ne change pas si l'on remplace h par $h + v$, v quelconque dans N.

On a tout de suite le

THÉORÈME 3.1. *Si la forme* $((u, v))$ *est elliptique, le problème* 3.1, *admet une solution unique, fournie par* :

$$U = h + G(F - \Lambda h). \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION.

Posons : $u = U - h$. L'équation (3.2) donne alors : $\Lambda u = f$, $f = F - \Lambda h$, donc est dans Q', et on cherche u dans N; donc, d'après le théorème 2.1, $u = Gf$, d'où le théorème. La fonction U donnée par (3.4) ne change pas si l'on remplace h par $h + v$, $v \in N$, car $v - G\Lambda v = 0$.

[1] Ceci est une définition.

REMARQUE 3.1.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V et si $\mathcal{K}$ est un espace strictement plus grand que V, la condition (3.3) se réduit à :

$$U - h \in V.$$

On pose la

DÉFINITION 3.1. Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, le problème 3.1 est dit : *le problème de Dirichlet relativement à* $((u, v))$, *ou à* Λ.

Dans le cas général on pose :

DÉFINITION 3.2. Le problème 3.1 est dit : *le problème aux limites relativement à la forme* $((u, v))$.

EXEMPLE 3.1.

On prend les hypothèses et notations de l'exemple 1.1, p. 23, et exemple 2.1, p. 25; $\Lambda = -\Lambda + b$; on suppose $b > 0$; alors, on constate tout de suite que la forme $((u, v))$ est elliptique. On prend pour espace $\mathcal{K}$ l'espace des distributions u telles que Δu soit dans L^2, espace que l'on munit de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to \Delta u$ soient continues de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{D}'$ et dans $L^2(\Omega)$ respectivement (cet espace est beaucoup plus grand que l'espace $\mathcal{H}$). Le problème 3.1 est alors *le problème de Neumann* (généralisé) relativement à l'opérateur $-\Delta + b$, $b > 0$; il admet une solution unique.

4. Application de la théorie de F. Riesz

On suppose dans ce N° que les hypothèses suivantes ont lieu :

(C 1) $$Q \subset L^2 \subset Q'$$

(C 2) L'injection de V dans Q' est complètement continue.

On donne la forme $((u, v))$ sur $V \times V$ et l'on définit la forme sesqui-linéaire *adjointe*, $((u, v))^*$, par :

$$((u, v))^* = ((u, v))_1 - i\,((u, v))_2.$$

Cette forme définit un opérateur Λ^*, *adjoint de* Λ, par :

$$\langle \Lambda^* u, \bar{\varphi} \rangle = ((u, \varphi))^* \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}.$$

On considère alors l'espace N^* défini à partir de $((u, v))^*$ comme N l'est à partir de $((u, v))$: $u \in N^*$ si $u \in V$, $\Lambda^* u \in Q'$ et vérifie :

$$\langle \Lambda^* u, \bar{v} \rangle = ((u, v))^* \text{ pour tout } v \in V.$$

Notons que la forme $((u, v))^*$ est elliptique en même temps que $((u, v))$. On pose alors les problèmes suivants :

PROBLÈME $P(\lambda)$ (*resp.* $P_0(\lambda)$).

Trouver $u \in N$, solution de

$$\Lambda u + \lambda u = f \quad (\text{resp. } f = 0), \tag{4.1}$$

où f est donné dans Q', et λ un nombre complexe donné.

PROBLÈME $P^*(\bar{\lambda})$ (*resp.* $P_0^*(\bar{\lambda})$).

Trouver $u' \in N^*$ solution de

$$\Lambda^* u' + \bar{\lambda} u' = f' \quad (\text{resp. } f' = 0), \tag{4.2}$$

où f' est donné dans Q', $\bar{\lambda}$ = complexe conjugué de λ.

On a alors le

THÉORÈME 4.1. *On suppose que* (C 1) *et* (C 2) *ont lieu et que la forme* $((u, v))$ *est elliptique. Alors :*

a) *La condition nécessaire et suffisante pour que le problème* $P(\lambda)$ (*resp.* $P^*(\bar{\lambda})$) *admette une solution unique, est que le problème* $P_0(\lambda)$ (*resp.* $P_0^*(\bar{\lambda})$) *admette seulement la solution nulle. Il en est ainsi sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de* λ (*le spectre du problème*).

b) *Si* λ *est dans le spectre, le problème* $P_0(\lambda)$ *admet un nombre fini* ν (dépendant de λ) *de solutions linéairement indépendantes dans* V, *soit* $u_1, \ldots, u_\nu$. *Le problème* $P_0^*(\bar{\lambda})$ *en admet le même nombre; soit* $u_1', \ldots, u_\nu'$ *ces solutions. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème* $P(\lambda)$ (*resp.* $P^*(\bar{\lambda})$) *admette une solution est que l'on ait :*

$$\langle f, \overline{u_i'} \rangle = 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, \nu \tag{4.3}$$

(*resp.*

$$\langle f', \overline{u_i} \rangle = 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, \nu). \tag{4.4}$$

DÉMONSTRATION.

On utilise les opérateurs J et H introduits p. 26. On désigne par J_1 la restriction de J à l'espace; J_1 est composé de l'injection de V dans Q' et de $J \in \mathcal{L}(Q'; V)$. Comme l'injection est complètement continue par hypothèse, J_1 est *complètement continu.* En outre, $((J_1 u, u))_1 = \langle u, \bar{u} \rangle = \| u \|_{L^2}^2 \geq 0$, donc J_1 est un opérateur hermitien positif pour la structure $((u, v))_1$.

Si u est solution de (4.1), alors pour v quelconque dans V on a :

$$((u, v)) + \lambda \langle u, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle. \tag{4.5}$$

Réciproquement si u est dans V, et vérifie (4,5) pour tout v dans V, alors u est solution de (4.1), donc est dans $\mathcal{H}$, puis on constate que u est dans N, donc (4.1) équivaut à (4.5) et cette dernière égalité équivaut à :

$$(1 + i H + \lambda J_1) u = J f. \tag{4.6}$$

De même (4.2) équivaut à :

$$(1 - i H + \bar{\lambda} J_1) u' = J f'. \tag{4.7}$$

On transforme (4.7) comme suit : on pose :

$$(1 - i H) u' = U', \tag{4.8}$$

qui équivaut à

$$u' = (1 - i H)^{-1} U'. \tag{4.9}$$

Alors (4.7) équivaut à (4.8) *et*

$$U' + \bar{\lambda} J_1 (1 - i H)^{-1} U' = J f'. \tag{4.10}$$

Si l'on pose : $K = (1 + i H)^{-1} J_1$, son adjoint K^* est donné par :

$$K^* = J_1 (1 - i H)^{-1},$$

et par conséquent (4.6) (resp. (4.7)) équivaut à

$$(1 + \lambda K) u = (1 + i H)^{-1} J f \tag{4.11}$$

(resp. à

$$(1 + \bar{\lambda} K^*) U' = J f'). \tag{4.12}$$

Comme J_1 est complètement continu, il en est de même de K, donc les théorèmes de F. Riesz sont applicables aux équations (4.11) et (4.12). Donc :

a) La condition nécessaire et suffisante pour que (4.11) ou (4.12) admette une solution unique est que l'équation sans second membre n'admette que la solution nulle; il en est ainsi sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ : le spectre du problème, i.e. le spectre de K.

b) Soit λ un élément du spectre; soit $u_1, \ldots, u_\nu$ une base de l'espace des solutions de l'équation homogène correspondant à (4.11); de même $U'_1, \ldots, U'_\nu$ pour (4.12).

La condition nécessaire et suffisante pour que (4.11) ait une solution est que :

$$((1+iH)^{-1} Jf, U_i'))_1 = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, \nu,$$

soit :

$$((Jf, (1-iH)^{-1} U_i'))_1 = 0.$$

Mais si l'on pose : $u_i' = (1-iH)^{-1} U_i'$, $\{u_i'\}$ constitue une base de l'espace des solutions de $P_0^*(\bar{\lambda})$, et finalement la condition nécessaire et suffisante devient : $((Jf, u_i'))_1 = 0$, soit $\langle f, \overline{u_i'} \rangle = 0$ pour tout i, c'est (4.3).

La condition nécessaire et suffisante pour que (4.12) admette une solution est : $((Jf', u_i))_1 = 0$ pour tout i, donc : $\langle f', \bar{u}_i \rangle = 0$, pour tout i, c'est (4.4).

5. Systèmes complets de fonctions propres

On fait encore les hypothèses (C 1) et (C 2), p. 29, et en outre on suppose que la forme $((u, v))$ est hermitienne : $((u, v)) = \overline{((v, u))}$ pour tout $u, v \in V$. On la suppose aussi elliptique (déf. 2.1, p. 25).

On cherche les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur Λ relativement à la forme $((u, v))$, i.e. les solutions dans N de

(5.1) $$\Lambda u = \lambda u, \text{ pour des } \lambda \text{ convenables (valeurs propres).}$$

Soit J l'opérateur défini p. 26, et comme au N° précédent, J_1 la restriction de J à $\mathfrak{L}(V; V)$. Alors (5.1) équivaut à

(5.2) $$u = \lambda J_1 u.$$

Or grâce à (C 2), J_1 est complètement continu, et c'est un opérateur hermitien positif; il a un ensemble dénombrable de valeurs propres, et les fonctions propres correspondantes forment un système *complet* dans V.

Soit :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

la suite croissante des valeurs propres, chaque valeurs propre étant comptée autant de fois que son ordre de multiplicité; soit u_k les fonctions propres correspondantes, complètement déterminées si on leur impose la condition de former un système *orthonormal* dans $L^2(\Omega)$; on a :

(5.3) $$((u_k, u_k)) = \lambda_k (u_k, u_k)_{L^2}.$$

On a le

THÉORÈME 5.1. *Sous les hypothèses* (C 1) *et* (C 2) *du* N° 4, *la forme* $((u, v))$ *étant hermitienne et elliptique, le système* u_k (*resp. le système* $u_k/\sqrt{\lambda_k}$) *est orthonormal complet dans* L^2 (*resp. dans* V *pour le produit scalaire* $((u, v))$).

DÉMONSTRATION.

Le système u_k est complet dans V; par (5.3), le système $u_k/\sqrt{\lambda_k}$ est orthonormal. Enfin comme V est dense dans L^2 (puisque V contient $\mathcal{D}$) le système u_k est complet dans L^2 d'où le résultat.

Donnons la variante suivante du résultat précédent :

PROPOSITION 5.1. *Mêmes hypothèses qu'au Théorème* 5.1, *et en outre* $Q = L^2\ (= Q')$. *Alors le système* $\dfrac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + \lambda_k^2}}$ *est orthonormal complet dans* N, *espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$(u, v)_N = ((u, v)) + (\Lambda u, \Lambda v)_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION.

Soit J_2 la restriction de J à $\mathcal{L}(N; N)$. L'opérateur J_2 est complètement continu (il suffit même pour cela que l'injection de N dans L^2 soit complètement continue). Par ailleurs :

$$(J_2 u, u)_N = ((J_1 u, u)) + (u, \Lambda u)_{L^2} = \|u\|_{L^2}^2 + ((u, u))$$

donc J_2 est un opérateur hermitien positif dans N, espace de Hilbert pour la structure $(u, v)_N$. L'opérateur J_2 possède un système complet de fonctions propres, système qui n'est autre que u_k; reste à montrer que $\dfrac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + \lambda_k^2}}$ est orthonormal; or :

$$(u_k, u_k)_N = ((u_k, u_k)) + \lambda_k^2 \|u_k\|_{L^2}^2 = \lambda_k + \lambda_k^2$$

d'où le résultat [1].

6. Propriétés de regularité des noyaux de Green

On revient aux hypothèses générales du N° 2, sans hypothèse de complète continuité. On a défini p. 27, l'opérateur de Green $G \in \mathcal{L}(Q'; N)$ de la forme $((u, v))$, supposée elliptique. Cet opérateur G définit en particulier une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$; cette application est définie par un *noyau distribution* $G_{x, y}$ [2] (cf. Schwartz [5]) élément de l'espace $\mathcal{D}'_{\Omega_x \times \Omega_y}$ des distributions sur $\Omega_x \times \Omega_y$.

---

[1] Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, alors $Q = V$, $Q' = V'$ (et (C 1) s'écrit : $V \subset L^2 \subset V'$); Λ est un isomorphisme de V sur V' d'inverse J; si u', v' sont dans V', on pose : $(u', v')_{V'} = ((J u', J v'))$, ce qui définit sur V' un produit scalaire hilbertien. Alors $\sqrt{\lambda_k}\, u_k$ *est un système orthonormal complet dans* V' (pour la structure $(u', v')_{V'}$). En effet il est complet, car V est dense dans V', et

$$\left(\sqrt{\lambda_k}\, u_k', \sqrt{\lambda_k}\, u_k'\right)_{V'} = \lambda_k\, ((J u_k', J u_k')) = 1.$$

[2] On note avec des indices en bas les distributions, des indices en haut les fonctions.

Réciproquement si l'on connaît la restriction de G à $\mathcal{D}$, et si $\mathcal{D}$ est dense dans Q' (fort), alors G est complètement déterminé.

On pose la

DÉFINITION 6.1. *Le noyau distribution* $G_{x,y}$ correspondant à *l'opérateur de Green* G est dit : *le noyau de Green de la forme* $((u, v))$ (ou de l'opérateur Λ pour la forme $((u, v))$ ou encore de l'opérateur Λ sans plus lorsque $\mathcal{D}$ est dense dans V).

On veut étudier la *régularité* de $G_{x,y}$ (cf. Schwartz [5], pour la notion de régularité).

On introduit comme au N° 4 la forme adjointe $((u, v))^*$ de $((u, v))$, qui définit Λ^* adjoint de Λ. On fait l'hypothèse (la forme $((u, v))$ étant elliptique) :

(R 1) Toute solution dans N de $\Lambda u = f$, f donné dans $Q' \cap \mathcal{E}$ est dans $N \cap \mathcal{E}$.

(R* 1) Toute solution dans N^* de $\Lambda^* u^* = f$, f donné dans $Q' \cap \mathcal{E}$ est dans $N^* \cap \mathcal{E}$.

EXEMPLE 6.1.

On donne $((u, v))$ comme dans l'exemple 1.1 (p. 23). Alors : $\Lambda = \Lambda^* = -\Delta + b$ (on suppose $b > 0$). Alors (R 1) = (R* 1) a lieu, car toute solution distribution de $-\Delta u + b u = f$, est indéfiniment différentiable là où le 2ème membre l'est (cf. Schwartz [1] et [2]).

De façon générale : (R 1) et (R* 1) seront vérifiés lorsque Λ et Λ^* seront des opérateurs différentiels elliptiques à coefficients indéfiniment différentiables, par application des théorèmes de Petrowsky [1], Friedrichs [1], John [1].

On désigne par G^* l'opérateur de Green de la forme $((u, v))^*$. L'opérateur G est donné par : $G = (1 + iH)^{-1} J$; alors : $G^* = (1 - iH)^{-1} J$.

D'après la propriété (R 1), G opère linéairement de $Q' \cap \mathcal{E}$ dans $N \cap \mathcal{E}$ (et G^* de $Q' \cap \mathcal{E}$ dans $N^* \cap \mathcal{E}$). Munissons tous les espaces intersection considérés de la topologie borne supérieure. Il faut voir si dans ces conditions, G opère *continûment* de $Q' \cap \mathcal{E}$ dans $N \cap \mathcal{E}$. C'est vrai si le théorème du graphe fermé est applicable à ces espaces; en effet il suffit alors de montrer ceci : si $f \in Q' \cap \mathcal{E}$ tend vers 0 dans $Q' \cap \mathcal{E}$, et $Gf \to X$ dans $N \cap \mathcal{E}$, alors $X = 0$ ce qui est évident, vu que $f \to 0$ dans Q', ce qui entraîne $Gf \to 0$ dans N, donc $X = 0$.

Pour pouvoir appliquer sans difficulté le théorème du graphe fermé on est conduit à l'hypothèse :

(R 2) L'espace Q est un espace de Banach.

Alors N est un espace de Banach, ainsi que Q', ce qui fait que les espaces

$N \cap \mathcal{E}$ et $Q' \cap \mathcal{E}$ sont des espaces de Fréchet, donc le théorème du graphe fermé leur est applicable (cf. Bourbaki, [1], cor. 5, p. 37).

En résumé :

THÉORÈME 6.1. *Sous les hypothèses* (R 1) (*resp.* (R* 1)) *et* (R 2) *la forme* $((u, v))$ *étant elliptique, l'opérateur de Green* G *de* $((u, v))$ (*resp.* G^* *de* $((u, v))^*$) *est dans l'espace* : $\mathfrak{L}(Q' \cap \mathcal{E};\ N \cap \mathcal{E})$ (*resp.* $\mathfrak{L}(Q' \cap \mathcal{E};\ N^* \cap \mathcal{E})$).

En particulier :

$$G \in \mathfrak{L}(Q' \cap \mathcal{E};\ Q \cap \mathcal{E}) \tag{6.1}$$

et

$$G^* \in \mathfrak{L}(Q' \cap \mathcal{E};\ Q \cap \mathcal{E}). \tag{6.2}$$

On introduit maintenant (en vue d'une transposition de (6.1) et de (6.2)) l'espace dual de $Q \cap \mathcal{E}$, que l'on note $Q' + \mathcal{E}'$, pour la raison suivante : toute distribution T de l'espace dual de $Q \cap \mathcal{E}$ est de la forme : $T = f + S$, $f \in Q'$ et $S \in \mathcal{E}'$; cet espace est muni de la topologie forte de dual. On suppose maintenant que Q est *réflexif* (i.e. le dual de Q' fort est Q); alors le dual de $Q' \cap \mathcal{E}$ est noté $Q + \mathcal{E}'$; toute distribution de ce dual est somme d'un élément de Q et d'un élément de $\mathcal{E}'$. On aura besoin du

LEMME 6.1. *L'espace* Q' *est dense dans* $Q' + \mathcal{E}'$.

DÉMONSTRATION.

Il faut approcher un élément T de $\mathcal{E}'$ par des éléments de Q'; or, par régularisation par exemple, T est limite dans $\mathcal{E}'$ d'éléments de $\mathcal{D}$, d'où le résultat.

Ceci posé, transposons (6.2); on définit ${}^tG^*$, élément de $\mathfrak{L}(Q' + \mathcal{E}';\ Q + \mathcal{E}')$, par :

$$\langle {}^tG^* S, \bar{f} \rangle = \langle S, \overline{G^* f} \rangle \tag{6.3}$$

où $S \in Q' + \mathcal{E}'$, $f \in Q' \cap \mathcal{E}$, le premier crochet désigne la dualité entre $Q + \mathcal{E}'$ et $Q' \cap \mathcal{E}$, le 2ème entre $Q' + \mathcal{E}'$ et $Q \cap \mathcal{E}$: ${}^tG^*$ n'est pas un transposé au sens habituel à cause de la présence dans (6.3) des complexes conjugués.

On a maintenant le

LEMME 6.2. *Pour tout* f *dans* Q', *on a :*

$${}^tG^* f = G f. \tag{6.4}$$

DÉMONSTRATION.

Soit f_1 quelconque dans $\mathcal{D}$; il faut montrer que :

$$\langle {}^tG^* f, \bar{f}_1 \rangle = \langle G f, \bar{f}_1 \rangle.$$

Or le 1er membre, par définition de ${}^tG^*$, vaut : $\langle f, \overline{G^* f_1}\rangle$. Si l'on pose : $u = Gf$, $u^* = G^* f_1$, u (resp. u^*) est solution dans N (resp. dans N^*) de :

$$\Lambda u = f \text{ (resp. de } \Lambda^* u^* = f_1).$$

Il faut montrer que :

$$\langle u, \bar{f}_1\rangle = \langle f, \bar{u}^*\rangle = \overline{\langle f_1, \bar{u}\rangle}. \tag{6.5}$$

Or

$$\langle f, \bar{u}^*\rangle = ((u, u^*)), \ \overline{\langle f_1, \bar{u}\rangle} = \overline{((u^*, u))^*} = \overline{((u^*, u))_1} + i\,((u^*, u))_2 = ((u, u^*))$$

d'où le résultat.

Donc G et ${}^tG^*$ coincident sur Q', et Q' et dense dans $Q' + \mathcal{E}'$ (Lemme 6.1) donc :

THÉORÈME 6.2. *Sous les hypothèses* (R 1), (R* 1), (R 2) *l'espace Q étant en outre réflexif, l'opérateur de Green G de $((u, v))$ se prolonge en un opérateur* (encore noté G) *élément de l'espace* $\mathcal{L}(Q' + \mathcal{E}'; Q + \mathcal{E}')$.

Résultat analogue pour G^*.[1]

REMARQUE 6.1.

Le noyau $G_{x,y}$ est *très régulier* au sens de L. Schwartz; il peut s'écrire $G_x(y)$ ou $G(x)_y$; $G_{x,y}$ est une fonction indéfiniment différentiable de x, y, pour $x \neq y$. On a : $G_x(y) = G(\delta_x(y))$, où $\delta_x(y)$ désigne la distribution en x ($\in \mathcal{D}'_{\Omega_x}$) masse 1 au point $y \in \Omega$ (donc : $\delta_x(y) \in Q' + \mathcal{E}'$). Le noyau distribution $G_{x,y}$ est ce qu'on appelle ordinairement la « fonction » de Green.

REMARQUE 6.2.

Il peut être utile de considérer des hypothèses moins restrictives que (R 1) ou (R* 1), à savoir : toute solution dans N de $\Lambda u = f$ est m fois continûment différentiable si f est dans Q' et m fois continûment différentiable (cf. les travaux cités de Friedrichs et John). Si $m = 0$ (fonctions continues), on a : $G \in \mathcal{L}(Q' + \mathcal{E}'^0; Q + \mathcal{E}'^0)$, où $\mathcal{E}'^0$ désigne l'espace des mesures à support compact sur Ω, ce qui suffit pour pouvoir former $G(\delta_x(y))$.

7. Stabilité des opérateurs de Green.

On donne l'ouvert Ω fixe et sur cet ouvert les espaces V, Q, Q', *fixes*. On donne une suite de formes sesqui-linéaires, notées $((u, v))^k$, k entier ≥ 1, $k \to \infty$. On fait l'hypothèse :

---

[1] *Note ajoutée à la correction des épreuves :* M. L. Schwartz a démontré (non publié) que lorsque Λ et Λ^* sont elliptiques indéfiniment différentiables, G se prolonge en un élément de l'espace $\mathcal{L}(Q' + \mathcal{E}'; N + \mathcal{E}')$ (et non seulement $\mathcal{L}(Q' + \mathcal{E}'; Q + \mathcal{E}')$).

$$\text{(S 1)} \quad \begin{cases} ((u,\, v))^k \to ((u,\, v)) \text{ lorsque } k \to \infty, \text{ uniformément pour } u \text{ et } v \\ \text{demeurant dans un borné de } V; \text{ autrement dit:} \\ |((u,\, v))^k - ((u,\, v))| \le \varepsilon_k \|u\|_V \|v\|_V, \ \varepsilon_k \to 0 \text{ si } k \to \infty. \end{cases}$$

On suppose ensuite :

$$\text{(S 2)} \quad \begin{cases} \text{La forme } ((u,\, v)) \text{ est elliptique, i.e. :} \\ \text{il existe } a > 0 \text{ tel que } ((u,\, u))_1 \ge a \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V. \end{cases}$$

Notons le facile

LEMME 7.1. *Sous les hypothèses* (S 1) *et* (S 2), *la forme* $((u, v))^k$ *est elliptique pour* k *assez grand.*

DÉMONSTRATION.

De façon plus précise, on va montrer ceci :

$$\text{(7.1)} \quad \begin{cases} \text{Pour tout } a_1 > 0, \text{ avec } a_1 < a, \text{ il existe } k(a_1) \text{ tel que pour } k > k(a_1) \text{ on ait :} \\ ((u,\, u))_1^k \ge a_1 \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V. \end{cases}$$

En effet, par (S 1) il existe k_0, dépendant de a_1 tel que pour $k > k_0$ on ait :

$$|((u,\, u))_1^k - ((u,\, u))_1| \le a - a_1, \ u \in V, \ \|u\|_V \le 1,$$

donc

$$((u,\, u))_1^k \ge ((u,\, u))_1 - (a - a_1) \|u\|_V^2$$

d'où le résultat avec $k(a_1) = k_0$.

La forme $((u, v))^k$ définit un opérateur Λ^k (par : $\langle \Lambda^k u, \bar{\varphi} \rangle = ((u, \varphi))^k$, $\varphi \in \mathcal{D}$). Du lemme 7.1 résulte que Λ^k est un isomorphisme de N^k sur Q', N^k étant l'espace construit à partir de Λ^k et $((u, v))^k$ comme N l'est à partir de Λ et $((u, v))$. Soit G^k l'opérateur de Green de la forme $((u, v))^k$; G^k est dans l'espace $\mathcal{L}(Q'; N^k)$, donc en particulier dans l'espace $\mathcal{L}(Q'; V)$. On a le

THÉORÈME 7.1. *Sous les hypothèses* (S 1) *et* (S 2), $G^k \to G$ *dans l'espace* $\mathcal{L}_b(F'; V)$.[1]

DÉMONSTRATION.

Soit f donné dans Q'. On pose :

$u^k = G^k f$, $u = Gf$; u^k (resp. u) est solution dans N^k (resp. dans N) de : $\Lambda^k u^k = f$ (resp. de $\Lambda u = f$). Pour tout v dans V on a les relations :

$$((u^k,\, v))^k = \langle f,\, \bar{v} \rangle, \ ((u,\, v)) = \langle f,\, \bar{v} \rangle$$

[1] Voir note (1) p. 21.

donc $((u^k - u, v))^k = ((u, v)) - ((u, v))^k$; si l'on fait dans cette relation : $v = u^k - u$, et que l'on prend les parties réelles des deux membres, il vient :

$$((u^k - u, u^k - u))_1^k = \mathrm{Re}\,(((u, u^k - u)) - ((u, u^k - u))^k)\,^{(1)}.$$

Le 1[er] membre est $\geq a_1 \| u^k - u \|_V^2$ pour $k > k(a_1)$ (lemme 7.1) et par (S 1), le 2[ème] est majoré en module par : $\varepsilon_k \| u \|_V \| u^k - u \|_V$, d'où :

$$\| u^k - u \|_V \leq \frac{\varepsilon_k}{a_1} \| u \|_V. \tag{7.2}$$

Le théorème résulte de (7.2) : si f demeure dans un ensemble borné de Q', alors u demeure dans un ensemble borné de V, et (7.2) montre alors que $u^k \to u$ dans V uniformément lorsque f demeure dans un borné de Q', d'où le théorème.

On a en outre obtenu, par (7.2), une évaluation de l'erreur qui peut être utile.

8. Opérateur $D + M$

Comme on l'a déja indiqué dans l'introduction la situation pratique sera généralement inverse de la situation précédente. On donne d'abord l'opérateur Λ, et certaines conditions aux limites; on cherche si les problèmes aux limites correspondants admettent, ou non, une solution. Il est donc indispensable d'avoir un procédé systématique, permettant de construire, à partir d'opérateurs Λ donnés assez généraux pour couvrir les cas pratiques, les formes $((u, v))$ et les espaces V et N. On est alors conduit aux notions des N° 8 à 13.

On donne un *espace de Hilbert* E avec $\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$ étant dense dans E; le dual de E est un espace de distributions noté E', qu'on n'identifie pas à E sauf si $E = L^2$ (cf. p. 21 et 22). On donne l'opérateur A_0 avec :

(E 1) A_0 *est un isomorphisme* (topologique) *de* E *sur* L^2.

On introduit alors ${}^tA_0$, élément de $\mathcal{L}(L^2; E')$, défini par :

$$\langle {}^tA_0 f, \bar{e} \rangle = \langle f, \overline{A_0 e} \rangle = (f, A_0 e)_{L^2} \tag{8.1}$$

où f est dans L^2, $e \in E$, le 1[er] crochet désignant la dualité entre E' et E; ${}^tA_0$ n'est pas un transposé ordinaire à cause des complexes conjugués.

On donne maintenant ν opérateurs,

(E 2) $A_i \in \mathcal{L}(E; \mathcal{D}')$ *et* $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D}; L^2)$, $i = 1, \ldots, \nu$.

---

(1) Voir note (1) p. 21.

On introduit ${}^tA_i$, élément de $\mathcal{L}(L^2; \mathcal{D}')$, défini par

$$\langle {}^tA_i f, \overline{\varphi}\rangle = (f, A_i \varphi)_{L^2}, \qquad f \in L^2, \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{8.2}$$

On donne ensuite une famille d'opérateurs g_{ij}, g_0 :

$$g_{ij} \in \mathcal{L}(L^2; L^2), \ g_0 \in \mathcal{L}(L^2; L^2), \qquad i, j = 1, \dots, \nu. \tag{8.3}$$

EXEMPLE 8.1.

$E = L^2 (= E')$; A_0 opérateur identique de L^2 dans lui-même, A_i = opérateur différentiel quelconque à coefficients constants, g_{ij} = opérateur de multiplication : $f \to g_{ij} f$, par une fonction quelconque $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ (espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω).

OPÉRATEUR $D+M$.

A partir des données précédentes, on fabrique l'opérateur D, élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}; \mathcal{D}')$ défini par :

$$D\varphi = \sum_{i,j=1}^{\nu} {}^tA_i (g_{ij} A_j \varphi) \text{ [1]}. \tag{8.4}$$

On considère ensuite l'opérateur :

$$M = {}^tA_0 g_0 A_0, \tag{8.5}$$

élément de $\mathcal{L}(E; E')$. On pose alors

$$\Lambda = D + M. \tag{8.6}$$

Telle est la classe des opérateurs Λ auxquels on va attacher des former $((u, v))$ sur des espaces V à définir.

9. Espaces $\mathcal{E}(A)$, $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}'(A)$

ESPACE $\mathcal{E}(A)$.

On désigne par $\mathcal{E}(A)$ l'espace des fonctions $u \in E$, telles que $A_i u$, à priori élément de $\mathcal{D}'$, soit dans L^2 pour tout $i = 1, \dots, \nu$; cet espace est muni de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to A_i u$ soient continues de $\mathcal{E}(A)$ dans E et L^2 respectivement. Pour $u, v \in \mathcal{E}(A)$ on pose :

$$(u, v)_{\mathcal{E}(A)} = (A_0 u, A_0 v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{\nu} (A_i u, A_i v)_{L^2}, \tag{9.1}$$

---

[1] Il est immédiat de constater que D est élément de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}; \mathcal{D}')$.

(9.2) $$\|u\|^2_{\mathcal{E}(A)} = \|u\|^2_0 + \|u\|^2_1,$$

où

(9.3) $$\|u\|^2_0 = \|A_0 u\|^2_{L^2}$$

et

(9.4) $$\|u\|^2_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \|A_i u\|^2_{L^2}.$$

Comme d'après (E 2), A_i est dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}; L^2)$, l'espace $\mathcal{D}$ est contenu dans $\mathcal{E}(A)$. On a la

PROPOSITION 9.1. *L'espace $\mathcal{E}(A)$ est un espace de Hilbert pour la structure définie par* (9.1). *L'espace $\mathcal{E}(A)$ est contenu dans E avec une topologie plus fine.*

DÉMONSTRATION.

La quantité (9.1) est un produit scalaire préhilbertien sur $\mathcal{E}(A)$. Si $\|u\|_{\mathcal{E}(A)} = 0$ alors $A_0 u = 0$ donc $u = 0$ (par (E 1)). On a évidemment $\mathcal{E}(A) \subset E$ algébriquement; mais si $e \to 0$ dans $\mathcal{E}(A)$, alors $A_0 e \to 0$ dans L^2 donc, par (E 1), $e \to 0$ dans E. Reste à montrer que $\mathcal{E}(A)$ est *complet* pour la structure (9.1). Soit u_k une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}(A)$; donc $A_0 u_k$ et $A_i u_k$, i fixé quelconque, sont des suites de Cauchy dans L^2 qui est complet, donc : $A_0 u_k \to v_0$ et $A_i u_k \to v_i$ dans L^2; mais par (E 1), il en résulte que $u_k \to u$ dans E, d'où résulte par (E 2) que $A_i u_k \to A_i u$ dans $\mathcal{D}'$, donc $v = A_i u$, d'où le résultat.

ESPACE $\mathcal{D}(A)$.

C'est *l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}(A)$*. Cet espace est muni de la topologie induite par $\mathcal{E}(A)$, c'est un espace de Hilbert. On peut avoir $\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}(A)$ mais les cas les plus intéressants sont ceux où $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}(A)$.

EXAMPLE 9.1.

$E = L^2$, $A_0 = 1$, $A_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Alors $\mathcal{E}(A)$ est l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, de l'exemple 1.1, p. 23. L'espace $\mathcal{D}(A)$ est alors note $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$; cet espace est strictement contenu dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ si et seulement si la frontière de Ω n'est pas de capacité nulle (Cf. Deny- Lions [1]).

La proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION 9.2. *L'espace $U(A)$, orthogonal de $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{E}(A)$ pour la structure* (9.1) *est l'espace des solutions de l'équation*

$$ {}^tA_0 A_0 u + \sum_{i=1}^{\nu} {}^tA_i A_i u = 0. \tag{9.5} $$

COROLLAIRE 9.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}$ ne soit pas dense dans $\mathcal{E}(A)$ est que* (9.5) *admette des solutions non nulles dans $\mathcal{E}(A)$.*

ESPACE $\mathcal{D}'(A)$.

C'est le dual fort de $\mathcal{D}(A)$; c'est un espace de Hilbert. On a la

PROPOSITION 9.3. *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(A)$ s'écrit de façon unique :*

$$ T = {}^tA_0 A_0 f + \sum_{i=1}^{\nu} {}^tA_i A_i f, \tag{9.6} $$

où $f \in \mathcal{D}(A)$. Les conditions « $f \to 0$ dans $\mathcal{D}(A)$ » et « $T \to 0$ dans $\mathcal{D}'(A)$ » sont équivalentes.

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{D}_A$ l'espace $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}(A)$ et $\varphi \to X(\varphi)$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_A$. Alors $\varphi \to X(\bar{\varphi})$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}_A$, donc $\mathcal{D}_A$ étant un espace pré-hilbertien, il existe un élément f et un seul dans $\mathcal{D}(A)$ tel que : $X(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{D}(A)}$ ou encore $X(\varphi) = \langle T, \bar{\varphi} \rangle$, T donné par (9.6). On peut donc identifier X et T, d'où la représentation (9.6). Pour tout u dans $\mathcal{D}(A)$, on a alors :

$$ \langle T, \bar{u} \rangle = (A_0 f, A_0 u)_{L^2} + \sum_{i=1}^{\nu} (A_i f, A_i u)_{L^2} \tag{9.7} $$

(1^{er} membre désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(A)$ et $\mathcal{D}(A)$), d'où aussitôt la fin de la proposition.

On démontrera de la même façon la

PROPOSITION 9.4. *Toute distribution du type*

$$ S = {}^tA_0 f_0 + \sum_{i=1}^{\nu} {}^tA_i f_i, \tag{9.8} $$

où f_0 et f_i sont quelconques dans L^2, est dans $\mathcal{D}'(A)$.

10. Espace V, Q; produits scalaires et ellipticité

On prend pour espace V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(A)$ contenant $\mathcal{D}(A)$:

$$ \mathcal{D} \subset V \subset \mathcal{E}(A) \subset \mathcal{D}'. $$

On prendra pour espace Q l'espace E sauf si $V=\mathcal{D}(A)$, auquel cas $V=Q$, donc $Q'=\mathcal{D}'(A)$; si $Q=E$, alors $Q'=E'$. Le cas $V=\mathcal{D}(A)$ correspond au problème de Dirichlet.

Pour $u, v \in V$, on pose, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible :

$$(10.1) \qquad (u, v)_{A, g} = \sum_{i, j=1}^{\nu} (g_{ij} A_j u, A_i v)_{L^2} + (g_0 A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Sur $V \times V$ on prend alors la forme sesqui-linéaire :

$$(10.2) \qquad ((u, v)) = (u, v)_{A, g}.$$

On voit facilement que :

$$(10.3) \qquad ((u, v))_1 = \sum_{i, j=1}^{\nu} \left(\frac{g_{ij}+g_{ji}^*}{2} A_j u, A_i v\right) + \left(\frac{g_0+g_0^*}{2} A_0 u, A_0 v\right)_{L^2} \text{ (1)}.$$

L'opérateur Λ *défini par* $((u, v))$ *est* $D+M$; en effet,

$$(g_{ij} A_j u, A_i \varphi)_{L^2} = \langle {}^tA_i g_{ij} A_j u, \bar{\varphi}\rangle,$$

par définition de ${}^tA_i$, et

$$(g_0 A_0 u, A_0 \varphi)_{L^2} = \langle {}^tA_0 g_0 A_0 u, \bar{\varphi}\rangle.$$

Etudions l'ellipticité de la forme $((u, v))$; elle est elliptique si et seulement si :

$$(10.4) \qquad \sum_{i, j} \left(\frac{g_{ij}+g_{ji}^*}{2} A_j u, A_i u\right)_{L^2} + \left(\frac{g_0+g_0^*}{2} A_0 u, A_0 u\right)_{L^2} \geq a \|u\|^2_{\mathcal{E}(A)}$$

pour tout $u \in V$, $a>0$.

Le moyen le plus simple de réaliser (10.4) est de supposer qu'il existe $a_1>0$ et $a_2>0$ tels que :

$$(10.5) \qquad \sum_{i, j=1}^{\nu} ((g_{ij}+g_{ji}^*) A_j u, A_i u)_{L^2} \geq a_1 \|u\|_1^2$$

$$(10.6) \qquad ((g_0+g_0^*) A_0 u, A_0 u)_{L^2} \geq a_2 \|u\|_0^2$$

pour tout $u \in V$.

On peut poser la

DÉFINITION 10.1. L'opérateur $M={}^tA_0 g_0 A_0$ est dit *de partie hermitienne strictement positive dans* V s'il existe $a_2>0$ tel que (10.6) ait lieu pour tout $u \in V$.

---

(1) De façon générale, si X est dans $\mathcal{L}(L^2; L^2)$, X^* désigne l'adjoint de X.

Reste à regarder de plus près la condition (10.5). Il faut d'abord noter — ce qui est important — *qu'un opérateur donné D admet en général une infinité de décompositions distinctes* du type (8.4), p. 39. Voici un exemple :

EXEMPLE 10.1.

On donne, sur un ouvert Ω quelconque de R^2 (coordonnées x_1, x_2), l'opérateur :

$$D=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Sous cette forme, on prendra :

$$A_1=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ A_2=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ A_3=\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Mais l'on peut écrire D sous la forme :

$$D=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

et sous cette forme, il faudra prendre :

$$A_1=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ A_2=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

(pas d'opérateur A_3).

On voit donc que (10.5) est une notion non seulement relative à D mais encore au mode de décomposition de D — ou encore, comme il a déja été signalé, que la donné de $((u, v))$ est davantage que la donnée de Λ, sauf dans le cas du problème de Dirichlet : $\mathcal{D}$ dense dans V, ici $V=\mathcal{D}(A)$ — .

Supposons donc D donné *avec sa décomposition*; alors la notion (10.5) dépend encore de l'espace V (comme on verra sur les exemples). Finalement on pose la

DÉFINITION 10.2. *L'opérateur D défini par* (8.4) *est dit V-elliptique, s'il existe $a_1>0$ tel que l'on ait* (10.5) *pour tout $u\in V$.*

Cette définition ne fait intervenir que la partie hermitienne de D.

En résume : si l'opérateur D est V-elliptique, et M de partie hermitienne strictement positive, la forme sesqui-linéaire $((u, v))=(u, v)_{A, g}$ sur $V\times V$, qui est attachée à $D+M$, est elliptique.

EXEMPLE 10.2.

On prend $A_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $E=L^2$, $A_0=1$, donc $\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}^1_{L^2}$, et pour g_{ij} l'opérateur de multiplication par g_{ij} que nous supposons être une constante réelle, avec $g_{ij}=g_{ji}$. Une condition nécessaire de $\mathcal{D}^1_{L^2}$-ellipticité est alors (voir par exemple Visik [1]).

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq a\,|\xi|^2, \quad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\Xi^n.$$

La condition est suffisante, et même suffisante pour assurer la $\mathcal{E}^1_{L^2}$-ellipticité (immédiat). On voit donc que dans ce cas la notion de V-ellipticité est en fait indépendante de V. Même résultat pour des coefficients variables continus. Il n'en est plus de même pour des opérateurs différentiels d'ordre >2, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 10.3.

On prend sur un ouvert *borné* de R^2, l'opérateur D de l'exemple 10.1, écrit sous la 1ère forme. Il est $\mathcal{D}(A)$ elliptique mais non $\mathcal{E}(A)$ elliptique, car :

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u\right\|^2_{L^2}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u\right\|^2_{L^2}-\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}u\right\|^2_{L^2}$$

peut être négatif. Exemple : $u(x_1, x_2)=x_1\,x_2$, fonction de $\mathcal{E}(A)$ car Ω est borné.

Lorsque D est V-elliptique et M de partie hermitienne strictement positive, toute la théorie faite dans les N° 1 à 7 est valable. Explicitons la construction dans ce cas de l'espace N. C'est l'espace des $u\in V$ (1) tels que $(D+M)\,u\in Q'$ $(=E'$ ou $\mathcal{D}'(A))$ et qui vérifient :

$$\langle (D+M)\,u,\,\bar{v}\rangle=(u,v)_{A,g} \text{ pour tout } v\in V.$$

On a donc d'après le théorème 2.1, le

Théorème 10.1. *Si l'opérateur D donné par* (8.4) *est V-elliptique et l'opérateur M donné par* (8.5) *est de partie hermitienne strictement positive alors $D+M$ est un isomorphisme de N sur Q'* ($Q'=E'$ si V est différent de $\mathcal{D}(A)$, $Q'=\mathcal{D}'(A)$ si $V=\mathcal{D}(A)$).

11. Opérateurs frontières; nouveaux produits scalaires

La notion suivante est fondamentale pour les applications :

Définition 11.1. Soit F un espace de Hilbert quelconque. Un opérateur γ, élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}(A); F)$, est dit *opérateur frontière,* si γ est nul sur $\mathcal{D}(A)$ (et éventuellement sur d'autres éléments).

Tous les exemples utiles se déduisent du suivant :

(1) On peut prendre ici pour espace $\mathcal{H}$ l'espace des u éléments de $\mathcal{E}(A)$ (et non seulement de V) tels que $(D+M)\,u$ soit dans Q'.

EXEMPLE 11.1.

On prend, comme dans l'exemple 1.2, p. 24, $\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ et on suppose comme dans cet exemple que la frontière de Ω contient un morceau Γ de variété une fois continûment différentiable et que Γ est borné; si l'on prend : $F=L^2(\Gamma)$, espace des classes de fonctions de carré sommable sur Γ pour la mesure superficielle ds, alors on a rappelé dans l'exemple 1.2 comment on pouvait définir une application « prolongement en moyenne », $u\to\gamma(u)$, de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $F=L^2(\Gamma)$; cette application est une *application frontière*; elle est en effet nulle sur $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ (et aussi en général sur d'autres éléments).

EXEMPLE 11.2.

On donne cet exemple à titre de curiosité. On suppose que les A_i sont les opérateurs différentiels à coefficients constants et sans terme constant; pour tout φ dans $\mathcal{D}$, on a : $\int_\Omega A_i\varphi\,dx=0$. Si l'ouvert Ω est de mesure finie, l'application $u\to\int_\Omega A_i u(x)\,dx$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(A)$, nulle sur $\mathcal{D}$ donc sur $\mathcal{D}(A)$, et qui définit donc un opérateur frontière, avec $F=C$, corps des nombres complexes.

Soit maintenant B un élément quelconque de l'espace $\mathcal{L}(F;F)$:

$$B\in\mathcal{E}(F;F). \tag{11.1}$$

On définit sur $V\times V$ une nouvelle forme sesqui-linéaire en posant

$$((u,v))=(u,v)_{A,g}+(B\gamma u,\gamma v)_F \ \text{(1)}. \tag{11.2}$$

La forme (11.2) *définit l'opérateur* $\Lambda=D+M$. En effet, si $v=\varphi\in\mathcal{D}$, alors $\gamma\varphi=0$, donc $((u,\varphi))=(u,\varphi)_{A,g}$ et ceci vaut, comme on a déja vu : $\langle(D+M)u,\overline{\varphi}\rangle$.

On a la :

PROPOSITION 11.1. *Si l'opérateur D est V-elliptique, si M est de partie hermitienne strictement positive, et si $B+B^*$ est ≥ 0 ou bien de norme assez petite, la forme $((u,v))$ est elliptique.*

DÉMONSTRATION.

On a en effet : $((u,v))_1=$ partie hermitienne de $(u,v)_{A,g}$ (donnée par (10.1)) $+\left(\frac{B+B^*}{2}\gamma u,\gamma v\right)_F$.

L'inégalité (10.4) a lieu. Si donc $(B+B^*)\geq 0$, on a tout de suite :

$$((u,u))_1\geq a\,\|u\|^2_{\mathcal{E}(A)} \text{ pour tout } u\in V.$$

---

(1) $(\gamma u,\gamma v)_F$ désigne le produit scalaire dans F de γu et de γv.

Dans tous les cas on a d'ailleurs :

$$((u, u))_1 \geq a \| u \|^2_{\mathcal{E}(A)} - c \| B + B^* \| \| u \|^2_{\mathcal{E}(A)}, \quad c = \text{constante},$$

d'où la proposition dans le cas où la norme de $B + B^*$ est assez petite.

Dans ces conditions la théorie des N° 1 à 7 s'applique.

Explicitons encore la construction de l'espace N : c'est l'espace des $u \in V$, tels que $(D + M) u \in Q'$, et qui vérifient :

$$\langle (D + M) u, \bar{v} \rangle = (u, v)_{A, g} + (B \gamma u, \gamma v)_F,$$

soit :

$$\langle D u, \bar{v} \rangle = \sum_{i, j = 1}^{\nu} (g_{ij} A_j u, A_i v)_{L^2} + (B \gamma u, \gamma v)_F \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Ceci posé, on a, d'après le théorème 2.1, le

THÉORÈME 11.1. *Sous les hypothèses de la proposition* 11.1, *l'opérateur* $(D + M)$ *est un isomorphisme de* N *sur* Q'.

12. Opérateurs de perturbation

On donne $D + M$, avec sa décomposition, et on suppose choisi un espace $V \subset \mathcal{E}(A)$. On donne un opérateur P :

(12.1) $$P \in \mathcal{L}(V; Q').$$

DÉFINITION 12.1. Un opérateur P, donné avec (12.1), est dit *opérateur de perturbation*.

EXEMPLE 12.1.

$$P = \sum_{i=1}^{\nu} h_i A_i,$$

où :

$$h_i \in \mathcal{L}(L^2; Q').$$

EXEMPLE 12.2.

On suppose que $V = \mathcal{D}(A)$. On prend alors P comme dans l'exemple 12.1, et on peut lui ajouter un terme de la forme :

$$P_1 = \Sigma\, {}^t A_i k_i, \quad k_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A); L^2).$$

DÉFINITION 12.2. L'opérateur de perturbation P est dit *de partie hermitienne positive* dans V, si :

(12.2) $$\langle P u, \bar{u} \rangle + \langle u, \overline{P u} \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } u \in V.$$

On prend maintenant sur $V \times V$ la forme sesqui-linéaire :

(12.3) $$((u, v)) = (u, v)_{A, g} + (B\gamma u, \gamma v)_F + \langle P u, \bar{v} \rangle \text{ [1]}.$$

On a la

PROPOSITION 12.1. *Si D est V-elliptique, M de partie hermitienne positive, si $B + B^* \geq 0$, et si P est de partie hermitienne positive, alors la forme $((u, v))$ est elliptique.*

La démonstration est immédiate. On peut remplacer dans cette proposition : $B + B^* \geq 0$ et P de partie hermitienne positive par le fait que ces opérateurs soient de norme assez petite [2].

Sous les hypothèses de la proposition 12.1, la théorie des N° 1 à 7, s'applique. L'opérateur défini par $((u, v))$ est :

(12.4) $$\Lambda = D + M + P.$$

L'espace N est défini comme suit : c'est l'espace des $u \in V$ tels que $D u \in Q'$, et qui vérifient :

$$\langle D u, \bar{v} \rangle = \sum_{i, j=1}^{\nu} (g_{ij} A_j u, A_i v)_{L^2} + (B\gamma u, \gamma v)_F \text{ pour tout } v \in V.$$

Ici encore, *$D + M + P$ est un isomorphisme de N sur Q'.*

13. Cas des systèmes différentiels

Soit χ un entier positif fixé quelconque. Si M est l'un quelconque des espaces vectoriels topologiques considérés jusqu'ici, on désigne par M^χ l'espace vectoriel topologique produit $M^\chi = M \times \cdots \times M$, χ facteurs; tout $\vec{m} \in M$ est de la forme

$$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_\chi) = (m_i), \qquad m_i \in M.$$

Considérons maintenant les espaces $\mathcal{D}^\chi$ et $\mathcal{D}'^\chi$. On donne Q, espace vectoriel topologique, avec :

(13.1) $$\mathcal{D}^\chi \subset Q \subset \mathcal{D}'^\chi,$$

les injections de $\mathcal{D}^\chi$ dans Q et Q dans $\mathcal{D}'^\chi$ étant continues, l'espace $\mathcal{D}^\chi$ étant en outre dense dans Q; tout $\vec{q} \in Q$ est de la forme : $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_\chi)$, $q_i \in \mathcal{D}'$; alors $\vec{\bar{q}} = (\bar{q}_i)$; on suppose que $\vec{\bar{q}} \in Q$. Le dual Q' de Q est un espace de vecteurs-distributions :

(13.2) $$\mathcal{D}^\chi \subset Q' \subset \mathcal{D}'^\chi,$$

---

(1) Si l'on ne peut définir d'opérateur frontière raisonnable, supprimer le $2^{\text{ème}}$ terme.

(2) Q' qui est soit E' soit $\mathcal{D}'(A)$ est toujours un espace de Hilbert, donc $\mathcal{L}(V; Q')$ est un espace de Banach.

les injections étant continues, $\mathcal{D}^{\chi}$ étant faiblement dense dans Q'. On donne maintenant V, espace de Hilbert, avec :

$$\mathcal{D}^{\chi} \subset Q \subset V \subset \mathcal{D}'^{\chi}, \tag{13.3}$$

$\mathcal{D}^{\chi}$ étant dense *ou non* dans V, toutes les injections étant continues; tout $\vec{u} \in V$ est de la forme : $\vec{u} = (u_i)$, $u_i \in \mathcal{D}'$; alors $\bar{\vec{u}} = (\bar{u}_i)$; on suppose que $\bar{\vec{u}} \in V$.

On donne maintenant une forme : $\vec{u}, \vec{v} \to ((\vec{u}, \vec{v}))$, sesqui-linéaire continue sur $V \times V$; on la décompose en partie hermitienne et anti-hermitienne :

$$((\vec{u}, \vec{v})) = ((\vec{u}, \vec{v}))_1 + i\,((\vec{u}, \vec{v}))_2. \tag{13.4}$$

La forme semi-linéaire : $\vec{\varphi} \to ((\vec{u}, \vec{\varphi}))$ sur $\mathcal{D}^{\chi}$ est continue donc du type :

$$((u, \vec{\varphi})) = \langle \Lambda \vec{u}, \bar{\vec{\varphi}} \rangle, \quad \Lambda \in \mathcal{L}(V; \mathcal{D}'^{\chi}). \tag{13.5}$$

On dit que Λ est défini par la forme $((u, v))$.

ESPACE N.

C'est l'espace des $\vec{u} \in V$ tels que $\Lambda \vec{u} \in Q'$, et qui vérifient

$$\langle \Lambda \vec{u}, \bar{\vec{v}} \rangle = ((\vec{u}, \vec{v})) \text{ pour tout } \vec{v} \in V. \tag{13.6}$$

On dira, comme à la définition 2.1, p. 25, que la forme $((\vec{u}, \vec{v}))$ est *elliptique* s'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $\vec{u} \in V$, on ait :

$$((\vec{u}, \vec{u}))_1 \geq a \, \| \vec{u} \|_V^2. \tag{13.7}$$

On démontre alors exactement comme au Théorème 2.1 le

THÉORÈME 13.1. *Si la forme $((\vec{u}, \vec{v}))$ est elliptique, l'opérateur Λ défini par cette forme, est un isomorphisme* (topologique) *de N sur Q'.*

PROBLÈMES AUX LIMITES.

Désignons par $\mathcal{H}$ l'espace des $\vec{u} \in V$ tels que $\Lambda \vec{u} \in Q'$, sans la condition (13.6). Supposons donné un espace vectoriel topologique $\mathcal{K}$, tel que : $\mathcal{D}^{\chi} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{D}'^{\chi}$, et un prolongement de Λ à $\mathcal{K}$, encore noté Λ, tel que $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{K}; Q')$. Comme on a posé le problème 3.1 on pose le

PROBLÈME 13.1. Trouver $\vec{U} \in \mathcal{K}$, solution de

$$\Lambda \vec{U} = \vec{F}, \qquad \vec{F} \text{ étant donné dans } Q', \tag{13.8}$$

avec les conditions aux limites :

$$\vec{U} - \vec{h} \in N \tag{13.9}$$

(problème inchangé si l'on remplace $\vec{h}$ par $\vec{h}+$ élément quelconque de N).

Sous les hypothèses du théorème 13.1, le problème 13.1 admet une solution unique.

Les théorèmes des N° 4.5, 6.7, se généralisent aussitôt au cas actuel.

EXEMPLE 13.1.

De façon générale, si $A \in \mathcal{L}(E; F)$, E et F étant deux espaces vectoriels topologiques quelconques, on définit un élément, encore noté A, de $\mathcal{L}(E^{\chi}; F^{\chi})$, en posant, pour tout

$$\vec{e} = (e_1, \dots, e_{\chi}) \in E^{\chi} :$$

$$A\vec{e} = (A e_1, \dots, A e_{\chi}) \in F^{\chi}.$$

On donne maintenant, comme au N° 8, un espace de Hilbert E, avec :

$$\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}', \tag{13.10}$$

et on donne A_0 isomorphisme de E sur L^2. Alors A_0 est un isomorphisme de E^{χ} sur $(L^2)^{\chi}$, et ${}^tA_0 \in \mathcal{L}((L^2)^{\chi}; (E')^{\chi})$. On donne encore les opérateurs A_i, avec (E 2) p. 38, donc :

$$A_i \in \mathcal{L}(E^{\chi}; \mathcal{D}'^{\chi}), \ \in \mathcal{L}(\mathcal{D}^{\chi}; (L^2)^{\chi}), \quad i = 1, \dots, \nu. \tag{13.11}$$

On donne maintenant les opérateurs

$$g_{ij}, g_0 \in \mathcal{L}((L^2)^{\chi}; (L^2)^{\chi}), \quad i, j = 1, \dots, \nu. \tag{13.12}$$

On considère l'opérateur D défini pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{\chi}$ par :

$$D\vec{\varphi} = \sum_{i,j=1}^{\nu} {}^tA_i (g_{ij} A_j \vec{\varphi}), \tag{13.13}$$

et l'opérateur M :

$$M = {}^tA_0 \, g_0 \, A_0. \tag{13.14}$$

On pose enfin : $\Lambda = D + M$. On introduit les espaces $(\mathcal{E}(A))^{\chi}$, $(\mathcal{D}(A))^{\chi}$, et V, sous-espace vectoriel formé de $\mathcal{E}(A)^{\chi}$, avec : $\mathcal{D}(A)^{\chi} \subset V \subset \mathcal{E}(A)^{\chi}$.

Pour $\vec{u}, \vec{v} \in V$, on pose :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{A,g} = \sum_{i,j=1}^{\nu} (g_{ij} A_j \vec{u}, A_i \vec{v})_{(L^2)^{\chi}} + (g_0 A_0 \vec{u}, A_0 \vec{v})_{(L^2)^{\chi}}. \tag{13.15}$$

L'opérateur D est V-elliptique si :

$$(13.16) \qquad \sum_{i,j=1}^{\nu} ((g_{ij}+g_{ji}^{*}) A_j \vec{u},\ A_i \vec{u})_{(L^2)^\chi} \geq a_1 \|\vec{u}\|_1, \text{ pour tout } \vec{u} \in V$$

où

$$\|\vec{u}\|_1^2 = \sum_{i=1}^{\chi} \|u_i\|_1^2, \quad \vec{u}=(u_i), \quad a_1>0.$$

L'opérateur M est dit de partie hermitienne strictement positive si

$$(13.17) \qquad ((g_0+g_0^{*}) A_0 \vec{u},\ A_0 \vec{u})_{(L^2)^\chi} \geq a_2 \|\vec{u}\|_0^2, \quad \|\vec{u}\|_0^2 = \sum_{i=1}^{\chi} \|u_i\|_0^2 = \|\vec{u}\|_{(L^2)^\chi}^2.$$

L'espace N est alors l'espace des $\vec{u} \in V$ tels que $\Lambda \vec{u} \in Q'$ et qui vérifient :

$$(13.18) \qquad \langle \Lambda \vec{u},\ \vec{v} \rangle = (\vec{u},\ \vec{v})_{A,g} \text{ pour tout } \vec{v} \in V.$$

Il résulte du théorème 13.1, le

THÉORÈME 13.2. *Si l'opérateur D donné par* (13.13) *est V-elliptique, si l'opérateur M est de partie hermitienne strictement positive, l'opérateur $\Lambda = D + M$ est un isomorphisme de N sur Q'.*

Ce théorème généralise le théorème 10.1, p. 44. Généralisations analogues pour les résultats des N° 11, 12. Exemple : on prend $E = L^2$, A_0 = application identiqué de L^2 sur lui-même, $A_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. On prend pour g_{ij} l'opérateur représenté par la matrice :

$$g_{ij} = \| g_{ij}^{lm} \|, \qquad l,\ m = 1, \dots, \chi,$$

où g_{ij}^{lm} est opérateur de multiplication par la fonction $g_{ij}^{lm} \in L^\infty(\Omega)$; de même on prend

$$g_0 = \| g_0^{lm} \|, \quad g_0^{lm} \in L^\infty(\Omega).$$

On a dans ces conditions :

$$\Lambda \vec{\varphi} = ((\Lambda \vec{\varphi})_1, \dots, (\Lambda \vec{\varphi})_\chi)$$

avec :

$$(\Lambda \vec{\varphi})_l = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{m=1}^{\chi} g_{ij}^{lm} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \right) + \sum_{m=1}^{\chi} g_0^{ln} \varphi_m .$$

REMARQUE 13.1.

On peut généraliser davantage, en introduisant des espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert quelconque, soit H; le cas précédent correspond au cas particulier où H est de dimension finie χ.

14. Plan général d'étude des problèmes aux limites

On suppose donné l'opérateur Λ, sous une forme quelconque. On suppose que cet opérateur peut être mis sous la forme : $\Lambda = D + M$, comme au N° 8. Si c'est possible, on étudiera les problèmes aux limites suivant le plan qui suit :

POINT 1.

On *choisit* une décomposition du type $D + M$; à cette décomposition correspond un espace $\mathcal{E}(A)$. On prendra ensuite *toutes* les décompositions possibles. Cf. aussi Aronszajn [2].

Il faut alors étudier l'espace $\mathcal{E}(A)$, et d'abord :

POINT 2.

L'espace $\mathcal{D}$ est-il, ou non, dense dans $\mathcal{E}(A)$? Si $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}(A)$, le seul problème aux limites à considérer (pour Λ écrit sous cette forme) est le problème de Dirichlet. Sinon, il faut construire des espaces V intermédiaires entre $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{E}(A)$. Pour cela est nécessaire l'étude des deux points qui suivent :

POINT 3.

Propriétés de sommabilité locale et globale des éléments de $\mathcal{E}(A)$. Exemple : cf. Chap. I, § 2, N° 1 ci-après.

POINT 4.

Définition d'opérateurs frontières, si possible à partir du prolongement des éléments de $\mathcal{E}(A)$, sur un morceau de la frontière de Ω (cf. déja, N° 1, exemple 1.2).

POINT 5.

Définition d'espaces V (on utilisera souvent essentiellement les propriétés du point 4).

POINT 6.

Propriétés de complète continuité : l'injection de V dans Q' est-elle complètement continue ?

POINT 7.

Formes sesqui-linéaires ; V-ellipticité.

POINT 8.

Exemples d'opérateurs de perturbation.

POINT 9.

Choix d'un espace $\mathcal{K}$ (pour la définition de $\mathcal{K}$, cf. N° 3).

POINT 10.

Conclusions : problèmes aux limites résolus

§ 2. Applications

1. Opérateurs différentiels du 2ème ordre a coefficients variables bornés

On suppose que l'on donne un opérateur différentiel D avec sa décomposition :

$$D = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{1.1}$$

où g_{ij} = fonction quelconque de $L^\infty(\Omega)$. On donne ensuite, une fonction M avec

$$M \in L^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$\sum_{i,j=1}^{n} (g_{ij}(x) + \bar{g}_{ji}(x))\, \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq a_1 |\zeta|^2, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \qquad a_1 > 0, \ \zeta_i \in C. \tag{1.3}$$

$$(M(x) + \overline{M(x)}) \geq a_2 > 0, \tag{1.4}$$

ces deux inégalités ayant lieu presque partout dans Ω.

Point 1

L'espace $\mathcal{E}(A)$ est l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ (cf. § 1, exemple 1.1) des fonctions de carré sommable sur Ω ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre 1; les notations sont :

$$\|u\|_0^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx, \ \|u\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right|^2 dx.$$

On pose souvent :

$$|||u|||_1^2 = \|u\|^2_{\mathcal{E}^1_{L^2}}.$$

Point 2

La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}_\Omega$ soit dense dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est que la frontière de Ω soit de capacité nulle (cf. Deny-Lions [1]). Exemple trivial : si $\Omega = R^n$, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(R^n)$ (régularisation et tronquature).

Point 3

Propriétés de sommabilité locale et globale.

On rappelle la définition suivante (cf. Deny-Lions [1]) :

Définition 1.1. Un ouvert Ω de R^n, $n \geq 3$, *connexe*, est dit ouvert de Soboleff si pour toute distribution T telle que $\frac{\partial}{\partial x_i} T$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout i (i.e. T est dans $BL(\Omega)$, espace de Beppo Levi sur Ω) il existe une constante C telle que $T + C \in L^q(\Omega)$, $1/q = 1/2 - 1/n$.

Notons que l'introduction de C est évidemment inutile si Ω est de mesure finie. Ceci posé on a la

Proposition 1.1. *Si Ω est un ouvert de Soboleff dans R^n, $n \geq 3$ toute fonction $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est dans $L^q(\Omega)$, $1/q = 1/2 - 1/n$.*

Demonstration.

a) Conséquence de la définition si Ω est de mesure finie.

b) Ω est de mesure infinie.

Soit $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; u est donc dans $BL(\Omega)$, donc il existe une constante c avec

$$v = u + c \in L^q(\Omega). \tag{1.5}$$

Soit Ω_R l'ouvert intersection de Ω et de la boule $|x| < R$. Soit v_R la mesure de Ω_R. On a :

$$\frac{1}{v_R}\left|\int_{\Omega_R} u(x)\,dx\right| \leq \| u \|_{L^2} v_R^{-1/2}$$

et

$$\frac{1}{v_R}\left|\int_{\Omega_R} v(x)\,dx\right| \leq \| v \|_{L^q} v_R^{-1/q}.$$

Or de (1.5) l'on déduit :

$$\frac{1}{v_R}\int_{\Omega_R} v(x)\,dx = \frac{1}{v_R}\int_{\Omega_R} u(x)\,dx + c,$$

d'où en faisant tendre R vers l'infini : $c = 0$, $v = u \in L^q(\Omega)$, c. q. f. d.

Signalons la propriété de sommabilité locale : toute fonction u de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est localement L^q si $n \geq 3$, localement L^p, p fini quelconque si $n < 3$.

Point 4. Propriétés de prolongement

Soit Γ_1 une portion de la frontière Γ de Ω; on suppose que Γ_1 est une variété à $n-1$ dimensions, une fois continûment différentiable par morceaux. Alors (cf. déjà le § 1, Exemple 1.2), on peut définir une application linéaire continue et une seule,

$$f \to \gamma_1 f$$

de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma_1)$ — espace des fonctions localement de carré sommable sur Γ_1, pour la mesure superficielle ds_1, espace muni de la topologie de la convergence dans L^2 sur tout compact, ce qui en fait un espace de Fréchet (i.e. métrisable et complet) — telle que $\gamma_1 f$ coincide presque partout sur Γ_1 avec les valeurs de f sur Γ_1 lorsque f est continue dans $\Omega \cup \Gamma_1$.

On dira dans ces conditions que *le prolongement en moyenne sur* Γ_1 *des fonctions de* $\mathcal{E}^1_{L^2}$ *est possible*, et que $\gamma_1 f$ est la prolongée en moyenne de f sur Γ_1. Pour plus de détails, cf. Deny-Lions [1], Soboleff [2], Nikolsky [1].

Si Γ_1 est borné, on prend $L^2(\Gamma_1)$ au lieu de $L^2_{\text{loc}}(\Gamma_1)$. Si l'on prend alors $F = L^2(\Gamma_1)$, on a ainsi défini un opérateur frontière γ_1. On a, pour tout $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}$;

$$\|\gamma_1 f\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq c\, |||f|||_1, \qquad c = \text{constante}. \tag{1.6}$$

Si Γ_1 est la frontière entière de Ω, tout élément u de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ vérifie $\gamma_1 u = 0$. Réciproquement si u est dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$ et vérifie $\gamma_1 u = 0$, alors u est dans $\mathcal{D}^1_{L^2}$ (pour un résultat plus précis, cf. Deny-Lions [1]).

REMARQUE 1.1.

En fait les fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sont de puissance $q^{\text{ème}}$ sommable au voisinage de Γ_1, $n \geq 3$, ce qui permet de prolonger les fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans un espace plus petit que $L^2(\Gamma_1)$ (au moins localement), à savoir l'espace $L^{q^*}(\Gamma_1)$, avec : $q^* = 2\dfrac{n-1}{n-2}$ (cf. Deny-Lions [1]). On ne peut utiliser directement l'espace $L^{q^*}(\Gamma_1)$ comme espace F car ce n'est pas un espace de Hilbert. Noter que l'application $u \to \gamma_1 u$ de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^{q^*}(\Gamma_1)$ *n'est pas sur.*

REMARQUE 1.2.

On a souvent une majoration meilleure que (1.6), à savoir :

$$\|\gamma_1 f\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq c_1 \|f\|_0 \, \|f\|_1 + c_2 \|f\|_0^2, \quad c_1, c_2 = \text{constantes}. \tag{1.7}$$

EXEMPLE : Ω ouvert de R^n dont le morceau Γ_1 de frontière est porté par l'hyperplan $x_n = 0$, et Ω contenant l'ouvert : $\overset{0}{\Gamma}_1 \times]0, \varepsilon[$, ε assez petit.

Point 5. Espaces V

ESPACE V_1 : $V_1 = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$. Ensuite on prend

ESPACE $V_2 = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

ESPACE V_3. On suppose que Ω possède un morceau de frontière Γ_1 tel que le prolongement en moyenne soit possible. On prend alors pour V_3 l'espace des fonctions $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ telles que $\gamma_1 u = 0$ (cet espace contient $\mathcal{D}^1_{L^2}$ et est fermé). Plus généralement : soit $\mathcal{V}_{L_1}$ un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Gamma_1)$; on prend pour espace V le sous-espace de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ formé des u tels que $\gamma u \in \mathcal{V}_{L_1}$.

ESPACE V_4. On prend pour Ω le cube $]0,1[^n$. On peut prolonger les fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur la face $x_n = 0$ (resp. $x_n = 1$); soit γ^0_n (resp. γ^1_n) l'opérateur de prolongement en moyenne. On prend alors pour V_4 l'espace des fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ qui vérifient : $\gamma^0_n(u) = \gamma^1_n(u)$. On peut faire la même chose avec les autres faces.

ESPACE V_5.

On suppose Ω non connexe : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 ouverts (connexes ou non), sans points communs, ayant une portion de frontière en commun soit Σ telle que le prolongement en moyenne des fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_1)$ et de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_2)$ sur Σ soit possible. On a alors un opérateur σ_1 (resp. σ_2) de prolongement des fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_1)$ (resp. $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_2)$) dans $L^2(\Sigma)$ (toujours pour la mesure superficielle sur Σ). Toute fonction $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ peut aussi être considérée comme un couple de fonctions : $u = (u_1, u_2)$, $u_i \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_i)$. On prend alors pour V_5 le sous-espace de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ formé des fonctions $u = (u_1, u_2)$ telles que : $\sigma_1(u_1) = a\,\sigma_2(u_2)$, $a =$ constante (plus généralement si $\mathfrak{V}_\Sigma$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Sigma)$ on prendra pour V le sous-espace des $u = (u_1, u_2)$ telles que $\sigma_1(u_1) - a\,\sigma_2(u_2) \in \mathfrak{V}_\Sigma$).

Point 6. Propriétés de complète continuité

On rappelle le théorème suivant, démontré dans Deny-Lions [1] :

THÉORÈME 1.1. *Si Ω est un ouvert de Soboleff borné, l'injection de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue.* Voir aussi Soboleff [2], Courant–Hilbert [1].

On voit facilement sur des contre exemples que pour que le théorème 1.1 soit vrai, il faut imposer à Ω deux conditions : l'une du genre « Ω borné » l'autre du genre « Ω a une frontière régulière ». Cette 2ème condition disparait si l'on veut seulement avoir la complète continuité de l'injection de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$:

THÉORÈME 1.2. (Cf. Gårding [4].) *Si Ω est un ouvert borné, l'injection de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue.*

A partir des théorèmes 1.1 et 1.2 on peut passer à d'autres cas. Exemple : Soit K un compact quelconque de R^n contenant l'origine, et B une boule ouverte $|x| < R$, contenant K ; on prend $\Omega = B \cap \complement K$, et pour espace V l'ádhérence dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$ de l'espace des fonctions continues dans Ω, nulles dans un voisinage (variable) de K. Alors l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue, l'injection de $\mathcal{E}^1_{L^2}$ dans L^2 pouvant ne pas l'être, si K a une frontière très irrégulière.

Point 7

Avec les notations du § 1, N° 10, p. 26, on a :

$$(u, v)_{A,g} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega M u \bar{v} \, dx. \tag{1.8}$$

La partie hermitienne de cette forme est :

(1.9) $$(u, v)_{A,g,1} = \sum \int_\Omega \frac{g_{ij} + \bar{g}_{ji}}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega \frac{m + \bar{m}}{2} u \bar{v} \, dx.$$

Grâce à (1.3) et (1.4) on a :

(1.10) $(u, u)_{A,g,1} \geq a \, |||u|||_1^2, \qquad a = \inf(a_1, a_2)$, pour tout u dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$.

FORMES SESQUI-LINÉAIRES ATTACHÉES À $D+M$.

Si γ_1 est un opérateur de prolongement en moyenne et B un élément quelconque de $\mathcal{L}(L^2(\Gamma_1);\ L^2(\Gamma_1))$, on peut prendre, comme au § 1, N° 11 :

(1.11) $$((u, v)) = (u, v)_{A,g} + \int_{\Gamma_1} (B \gamma_1 u) \overline{\gamma_1 v} \, d s_1 .$$

Pour voir si la forme (1.11) est elliptique, on utilisera la prop. 11.1, p. 45. Pour fixer les idées, on pourra supposer : $B + B^* \geq 0$.

Voici quelques remarques plus spéciales à ce sujet.

a) On suppose que Ω est un borné quelconque, et $V = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$. Alors une majoration élémentaire (cf. Gårding [4]) montre qu'il existe une constante c telle que :

$$\| u \|_0 \leq c \, \| u \|_1 \text{ pour tout } u \text{ dans } \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$$

(majoration inexacte sur $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; exemple : $u = 1$). Dans ces conditions $\| u \|_1$ et $|||u|||_1$ sont sur $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ des normes équivalentes et $((u, v))$ peut être $\mathcal{D}^1_{L^2}$-elliptique (évidemment il n'y a pas d'opérateur frontière à considérer) avec une fonction M telle que $M + \bar{M}$ soit négatif.

b) Supposons maintenant que Ω soit un ouvert de Nikodym, i.e. un ouvert connexe borné, tel que toute distribution $T \in BL(\Omega)$ soit dans $L^2(\Omega)$ (cf. Deny-Lions [1]). Supposons en outre défini un opérateur frontière γ_1. Pour u dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, posons

(1.12) $$\| u \|_s^2 = \| u \|_1^2 + \| \gamma_1 u \|^2_{L^2(\Gamma_1)} .$$

PROPOSITION 1.2. *Si Ω est un ouvert de Nikodym et si on a défini un opérateur de prolongement γ_1, $\| u \|_s$ défini par (1.12) est sur $\mathcal{E}^1_{L^2}$ une norme équivalente à $|||u|||_1$.*

DÉMONSTRATION.

Décomposons l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}$ en $\mathcal{E}^1_{L^2} = \{c\} \oplus V$, $\{c\}$ = espace des constantes, V = espace orthogonal pour la structure hilbertienne $(u, v)_0 + (u, v)_1$. Soit alors u dans

$\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; elle se décompose de façon unique en $u = c + v$, $c =$ constante, $v \in V$. Comme Ω est un ouvert de Nikodym, V est isomorphe à $BL^0(\Omega)$ — quotient de $BL(\Omega)$ par les constantes — donc $|||v|||_1 \leq c_1 \| u \|_1$, $c_i =$ constantes. Comme $\gamma_1 u = \gamma_1 c + \gamma_1 v = = c + \gamma_1 v$, on a :

$$|c| \leq \| \gamma_1 u \|_{L^2(\Gamma_1)} + \| \gamma_1 v \|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \| \gamma_1 u \|_{L^2(\Gamma_1)} + c_2 \| u \|_1,$$

donc :

$$|||u|||_1 \leq |||v|||_1 + |c| \leq \| \gamma_1 u \|_{L^2(\Gamma_1)} + (c_1 + c_2) \| u \|_1 \leq c_4 \| u \|_s$$

d'où le résultat, une inégalité de type inverse étant évidente.

Application.

Sous les hypothèses de la proposition 1.2, si $M = 0$, et si $B + B^*$ est strictement positif dans $\mathcal{L}(L^2(\Gamma_1); L^2(\Gamma_1))$, alors la forme sesqui-linéaire correspondante est $\mathcal{E}^1_{L^2}$-elliptique.

Point 8

On peut prendre comme opérateur de perturbation :

$$P = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $h_i \in L^\infty(\Omega)$. On applique les remarques du § 1, N° 12.

Point 9. Espace $\mathcal{K}$

Si les g_{ij} et M sont dans $\mathcal{E}$, on peut prendre pour $\mathcal{K}$ l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'$ telles que $(D + M)T$ (qui a un sens; il n'en est plus de même si $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$) soit dans $L^2(\Omega)$ (ou dans $\mathcal{D}'^1_{L^2}$, dans le cas du problème de Dirichlet).

Variantes évidentes dans le cas où les g_{ij} et M sont k fois continûment différentiables dans Ω.

Point 10. Problèmes aux limites résolus

On désigne par Γ la frontière de Ω. On donne d'abord une formule d'intégration par parties. On suppose pour cela que Γ est indéfiniment (ou suffisamment) différentiable; soit u, v dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$, les fonctions u et v étant en outre indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$. Soit $s \in \Gamma$, $n(s)$ le vecteur unitaire de la normale intérieure à Γ en s. On désigne par cos $(n(s), x_i)$ le cosinus de l'angle de $n(s)$ avec l'axe des x_i. On désigne par $\gamma_D(u)$ la fonction :

$$s \to \gamma_D u(s) = \sum_{i,j} g_{ij}(s) \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \cos(n(s), x_i) \tag{1.13}$$

(où l'on suppose les g_{ij} continues dans $\overline{\Omega}$). La fonction $\gamma_D u$ est dite : *dérivée normale de u par rapport à D sur* Γ. On a alors la formule :

$$(1.14)\qquad (D u, v)_{L^2} = \Sigma \int_\Omega g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v} ds$$

où $\gamma v =$ valeurs de v sur Γ.

Si maintenant $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, $v \in \mathcal{E}^1_{L^2}$, $Du \in L^2$, sans aucune hypothèse sur Γ, sans hypothèses supplémentaires sur les g_{ij} la formule (1.14) n'a pas de sens : γv n'a pas de sens, et $\gamma_D u$ encore moins; on peut seulement utiliser (1.14) pour obtenir des interprétations *formelles* des problèmes aux limites.

Grâce aux hypothèses faites, *tous les problèmes aux limites correspondants aux espaces ci-après admettent une solution unique.*

Espace V_1 (p. 54).

C'est le problème de Dirichlet au sens de Gårding.

Espace V_2 (p. 54).

a) $B=0$.

Alors, $u \in N$ signifie (formellement, on ne le répétera plus) $\int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v} ds = 0$ pour tout $v \in \mathcal{E}^1_{L^2}$ donc $\gamma_D u = 0$. Le problème aux limites correspondant est (cf. § 1, N° 3) : trouver U dans $\mathcal{H}$, solution de

$$(1.15)\qquad (D+M) U = F, \qquad F \text{ donné dans } L^2,$$

avec les conditions :

$$(1.16)\qquad U - h \in N,$$

où h est donné dans $\mathcal{H}$, i.e., grâce à l'interprétation ci-dessus :

$$(1.17)\qquad \gamma_D U = \gamma_D h,$$

c'est-à-dire que $\gamma_D U$, dérivée normale de U par rapport à D est *donné* sur Γ. C'est *le problème de Neumann*. La forme sous laquelle il est posé est celle indiquée en remarque dans Gårding [4]. C'est une généralisation des problèmes de Neumann sous la forme de Courant et Hilbert et Pleijel.

b) *B non nul.*

La condition $u \in N$ signifie alors :

$$\int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v} ds = \int_{\Gamma_1} B \gamma_1 u \overline{\gamma_1 v} ds$$

pour tout v dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$, donc :

$$\gamma_D u = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_1$$
$$\gamma_D u = B\gamma_1 u \text{ sur } \Gamma_1 .$$

Le problème aux limites correspondant revient à :

$$\begin{cases} \gamma_D U \text{ donné sur } \Gamma - \Gamma_1, \\ \gamma_D U - B\gamma_1 U \text{ donné sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Généralisation immédiate aux cas où l'on prolonge sur plusieurs morceaux de frontière.

ESPACE V_3 (p. 54).

On suppose $B=0$ pour simplifier. La condition $u \in N$ signifie :

$$\int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v}\, ds = 0 \text{ pour tout } v \text{ dans } V_3;$$

comme $\gamma_1 v = 0$ sur Γ_1 reste seulement la condition :

$$\int_{\Gamma-\Gamma_1} \gamma_D u \overline{\gamma v}\, ds = 0$$

et finalement, $u \in N(V_3)$ signifie :

$$\begin{cases} \gamma_D u = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_1 \\ \gamma_1 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Le problème aux limites correspondant revient à :

$\gamma_D U$ donné sur $\Gamma - \Gamma_1$, $\gamma_1 U$ donné sur Γ_1; c'est un problème aux limites *de type mêlé* (terminologie de M. Hadamard).

ESPACE V_4 (p. 54).

On prend $B=0$. La condition $u \in N$ signifie :

$$u\,|_{x_n=0} = u\,|_{x_n=1} \text{ et } \gamma_D u\,|_{x_n=0} = -\gamma_D u\,|_{x_n=1};$$

même chose pour les autres faces. (Cf. Minakshisundaram [1].)

ESPACE V_5 (p. 55).

La condition $u \in N$ signifie (on prend encore $B=0$) :

$$\begin{cases} \sigma_1 u_1 = a\,\sigma_2 u_2 \text{ sur } \Sigma \\ a\,\gamma_D u_1 + \gamma_D u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \gamma_D u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 - \Sigma \\ \gamma_D u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 - \Sigma \quad (\partial\Omega_i = \text{frontière de } \Omega_i). \end{cases}$$

Le problème aux limites correspondant est *un problème de transmission.*(1)

(1) *Note ajoutée à la correction des épreuves* : ceci ne résout pas les problèmes de dérivée oblique (Bouligand, Giraud); mais on peut adapter la méthode précédente de façon à résoudre ces problèmes : cf. LIONS, Sur les problèmes de dérivée oblique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 240 (1955), p. 266—268. (Article détailllé à paraître aux Annals of Math.)

Remarques particulières

1) On peut chercher à résoudre les problèmes aux limites relatifs à D, $M=0$. Pour cela, cf. Lions [4].

2) Considérons sur $\mathcal{E}^1_L$, la forme sesqui-linéaire :

$$((u, v)) = (u, v)_{A,g} + \mathfrak{L}(u, v) - \int_\Omega h\, u\, \bar{v}\, dx,$$

où

$$\mathfrak{L}(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega h_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\, \bar{v} - u \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v} \right) dx,$$

avec

$$h_i \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} h_i \in L^\infty(\Omega),$$

fonctions à valeurs réelles, et :

$$h(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x).$$

Cette forme définit l'opérateur : $\Lambda = D + M + P$, où :

$$P = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si l'hypothèse (1.3) p. 52, a lieu, la forme $((u, v))$ ci-dessus sera elliptique sur $\mathcal{E}^1_L$, si :

$$\tfrac{1}{2}(M + \overline{M}) - h \geq a_2 > 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Dans ces conditions la théorie générale s'applique. Cet exemple ne rentre pas tout à fait dans les exemples des opérateurs de perturbation; si en effet N est l'espace construit à partir de cette forme sur V, la condition $u \in N$ dépend non seulement de D mais aussi de P; il n'en est pas de même dans le cas d'opérateurs de perturbation.

3) On s'est donné l'opérateur D avec une décomposition fixée. On va donner au N° suivant un exemple simple d'opérateur du 2ème ordre avec plusieurs décompositions.

2. Nouveaux problèmes aux limites relatifs à Λ

On se place sur un ouvert Ω de R^2, $n=2$; Δ est le Laplacien. Si l'on pose :

(2.1) $$A_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad A_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \quad ({}^tA_2 = -A)_1$$

on peut écrire :

(2.2) $$-\Delta = a_1\, {}^tA_1 A_1 + a_2\, {}^tA_2 A_2, \qquad a_1, a_2 \geq 0, \ a_1 + a_2 = 1.$$

On prend $M =$ opérateur de multiplication par une fonction $M \in L^\infty$ avec $M(x) \geq \mu > 0$ presque partout dans Ω.

1^er^ cas : *a_1 et a_2 non nuls*

Point 1. Espace $\mathcal{E}(A)$.

C'est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $A_1 \cdot u$ et $A_2 \cdot u$ soient dans L^2, donc $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Les points 2 à 6 sont alors identiques à ceux du N° précédent.

Point 7. L'opérateur $-\Delta$ donné par (2.2) est $\mathcal{E}(A)$-elliptique. Diffère seulement de ce qui précède le

Point 11. Interprétation des problèmes aux limites.

On a la formule :

$$(2.3)\qquad (-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v)_{-\Delta} + \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u + i(a_2 - a_1) \frac{\partial}{\partial s} u\right) \bar{v}\, ds$$

$\dfrac{\partial}{\partial \nu} u =$ dérivée normale, $\dfrac{\partial}{\partial s} u =$ dérivée tangentielle.

Prenons $V = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; la condition $u \in N$ signifie alors

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u + i(a_2 - a_1) \frac{\partial}{\partial s} u = 0 \text{ sur } \Gamma ;$$

le problème aux limites correspondant est *différent* si $a_1 \neq a_2$ du problème de Neumann relatif à $-\Delta$ écrit sous la forme $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

2^ème^ cas : $a_2 = 0$.

L'espace $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A_1)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $A_1 \cdot u \in L^2(\Omega)$. Cet espace contient $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. On a : *l'adhérence $D(A_1)$ de D_Ω dans $\mathcal{E}(A_1)$ est identique à* $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$. En effet on voit directement que pour tout φ dans $\mathcal{D}_\Omega$ on a :

$$\| A_1 \cdot \varphi \|_{L^2} = \| \varphi \|_1,$$

d'où l'identité de $\mathcal{D}(A_1)$ et $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, complétés de $\mathcal{D}_\Omega$ pour la même norme.

Pour l'interprétation des problèmes aux limites on fait $a_2 = 0$ dans (2.3).

3. Opérateurs différentiels du 2^ème^ ordre dégénérés

On considère l'opérateur

$$(3.1)\qquad D = -\sum_{i,j=1}^{K} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad K < n, \text{ sur } \Omega \subset R^n,$$

où : $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, à valeurs réelles, $g_{ij} = g_{ji}$ (tout ceci pour un peu simplifier), et l'opérateur M, multiplication par $M \in L^\infty(\Omega)$ avec

$$M(x) \geq \mu > 0 \text{ presque partout dans } \Omega. \tag{3.2}$$

On suppose :

$$\sum_{i,j=1}^{K} g_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \alpha\, |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \Xi^n,\ \alpha > 0. \tag{3.3}$$

L'opérateur D est dit : opérateur elliptique dégénéré (ceci parce que $K < n$).

Point 1. Espace $\mathcal{E}(A)$.

C'est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \ldots, K$ $\left(\text{sans aucune hypothèse sur } \frac{\partial}{\partial x_{K+1}} u, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} u\right)$.

Point 2. Densité de $\mathcal{D}_\Omega$.

Désignons par R^K l'espace des $(x_1, \ldots, x_K)$ et R^{n-K} l'espace orthogonal dans R^n. Soit Ω_1 (resp. Ω_2) la projection de Ω sur R^K (resp. sur R^{n-K}). On a la

PROPOSITION 3.1. *Si la frontière de Ω_1 n'est pas de capacité nulle, l'espace $\mathcal{D}_\Omega$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}(A)$.*

DÉMONSTRATION.

On utilise le corollaire 9.1, § 1, p. 41 : il faut montrer qu'il existe u dans $\mathcal{E}(A)$ solution non nulle de

$$-\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u + u = 0. \tag{3.4}$$

On considère l'ouvert $\omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \supset \Omega$. Il existe $U \in L^2(\omega)$ avec $\frac{\partial U}{\partial x_i} \in L^2(\omega)$ pour $i \leq K$, non nul, solution de

$$-\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U + U = 0. \tag{3.5}$$

En effet la frontière de Ω_1 étant de capacité positive, il existe une fonction u_1 non nulle dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_1)$, telle que

$$-\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_1 + u_1 = 0.$$

Si alors u_2 est une fonction quelconque de $L^2(\Omega_2)$, la fonction $U = u_1 \otimes u_2$ vérifie (3.5). Soit u la restriction de U à Ω ; c'est un élément de $\mathcal{E}(A)$ non nul, qui vérifie (3.4) d'où le résultat.

Point 4. Prolongement des fonctions.

On peut suivre une méthode analogue à celle de Deny-Lions [1]; il faudra supposer que les directions des normales à Γ vérifient certaines hypothèses de façon à pouvoir majorer sans utiliser les dérivées en $x_{K+1}, \dots, x_n$.

Point 5. Espaces V. Exemples analogues à ceux du N° 1.

Point 6. Complète continuité.

L'injection de $\mathcal{E}(A)$ dans $L^2(\Omega)$ n'est jamais complètement continue; en effet il n'y a pas de condition de Lipschitz dans l'espace L^2 pour les translations parallèles aux axes $x_{K+1}, \dots, x_n$.

Point 7. Grâce à (3.3), D est $\mathcal{E}(A)$-elliptique.

Point 9. Interprétation des problèmes aux limites.

On opère comme au N° 1, en utilisant la formule :

$$(D \cdot u, v)_{L^2} = (u, v)_D + \int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v} \, ds \tag{3.6}$$

où

$$\gamma_D u = \sum_{i,j=1}^{K} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \cos.(n, x_i). \tag{3.7}$$

4. Opérateurs différentiels du 2ème ordre à coefficients variables irréguliers

On donne dans $\Omega \subset R^n$ l'opérateur

$$D = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij}\, a_i\, a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \tag{4.1}$$

où les fonctions g_{ij} sont réelles dans $L^\infty(\Omega)$, $g_{ij} = g_{ji}$ pour tout i, j, et où les $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sont des fonctions quelconques dans* Ω, *une fois continûment différentiables, à valeurs réelles.*

On donne ensuite l'opérateur M de multiplication par une fonction *localement sommable sur* Ω, *avec*

$$M(x) \geq \mu > 0 \text{ presque partout dans } \Omega. \tag{4.2}$$

On suppose que

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \qquad \alpha > 0, \ \xi \in \Xi^n. \tag{4.3}$$

Point 1. Espace $\mathcal{E}(A)$.

On pose :

$$m = \sqrt{M}, \tag{4.4}$$

fonction positive localement de carré sommable; la fonction $1/m$ est dans $L^\infty(\Omega)$: $0 \leq 1/m\,(x) \leq 1/\sqrt{\mu}$. On prend pour espace E (§ 1, N° 8) l'espace des fonctions f du type :

$$f = \frac{1}{m} g, \qquad \text{où } g \in L^2(\Omega), \tag{4.5}$$

muni de la norme :

$$\| f \|_E = \| g \|_{L^2}. \tag{4.6}$$

Alors E est un espace de Hilbert, contenu dans L^2 (c'est aussi l'espace des fonctions f telles que $mf \in L^2(\Omega)$). On prend pour A_0 l'opérateur $f \to mf$ de $E \to L^2$, isomorphisme sur (on a donc (E 1)). *Le dual* E' de E est l'espace des fonctions F du type

$$F = mG, \quad G \in L^2(\Omega) \left(\text{ou encore telles que } \frac{1}{m} F \in L^2\right). \tag{4.7}$$

On a : $E \subset L^2 \subset E'$; si $f \in E$, $F \in E'$, leur produit scalaire est :

$$\langle f, F \rangle = \int_\Omega (mf) \left(\frac{1}{m} F\right) dx. \tag{4.8}$$

On prend pour g_0 l'application identique.

OPÉRATEURS A_i :

On prend pour A_i l'opérateur $\varphi \to a_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$; on définit bien ainsi un élément de $\mathcal{L}(E; \mathcal{D}'_\Omega)$ (si $f \in E$ alors f est dans L^2, et $a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ est localement dans $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, donc est dans $\mathcal{D}'_\Omega$) et de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\Omega; L^2)$, donc on a (E 2), p. 38. L'opérateur ${}^tA_i$ est défini pour $f \in L^2(\Omega)$ par :

$${}^tA_i \cdot f = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i f).$$

Donc $\mathcal{E}(A)$ est l'espace des fonctions u telles que $mu \in L^2$ et $a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2$, muni de la norme dont le carré est

$$\| mu \|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\| a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2}.$$

Point 2. Densité de $\mathcal{D}_\Omega$.

On désigne par $d(x, \Gamma)$ la distance de $x \in \Omega$ à Γ frontière de Ω. On a la

PROPOSITION 4.1. *Si la fonction m est continue et si*

$$\left|\frac{a_i(x)}{d(x, \Gamma)\, m(x)}\right| \le c_1, \quad c_1 = \textit{constante},\ x \in \Omega, \tag{4.9}$$

alors $\mathcal{D}_\Omega$ est dense dans $\mathcal{E}(A)$. [1]

DÉMONSTRATION.

a) Soit $F = \complement\,\Omega$ et $F(\varepsilon)$ l'ensemble des points de R^n à distance $\le \varepsilon$ de F; on désigne par χ_ε la fonction caractéristique de $\complement\, F(2\varepsilon)$; si $\varrho \in \mathcal{D}_{R^n}$, $\varrho(x) \ge 0$ de support $|x| \le 1$, de masse totale 1, on note ϱ_ε la fonction $x \to \varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors $\varrho_\varepsilon \to \delta$ (= masse 1 à l'origine) dans $\mathcal{E}'_{R^n}$, lorsque $\varepsilon \to 0$. Posons : $b_\varepsilon = \chi_2 \ast \varrho_\varepsilon$, fonction de $\mathcal{E}_{R^n}$, $= 1$ sur $\complement\, F(3\varepsilon)$, nulle sur $F(\varepsilon)$ (donc nulle au voisinage de Γ). Soit u donnée dans $\mathcal{E}(A)$, et $u_\varepsilon = b_\varepsilon u$. On voit tout de suite que $m u_\varepsilon \to m u$ dans $L^2(\Omega)$. Pour montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{E}(A)$, il reste à montrer que $a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon \to a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui revient à montrer que

$$a_i\left(\frac{\partial}{x_i} b_\varepsilon\right) u = \left(\frac{1}{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} b_\varepsilon\right)(m u) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Or (on désigne par c_i des constantes diverses) :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} b_\varepsilon(x)\right| \le c_2/\varepsilon,$$

par conséquent :

$$\left|a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_\varepsilon\right) u\right| \le c_2 \left|\frac{1}{\varepsilon} d(x, \Gamma)\right| \left|\frac{a_i}{m\, d(x, \Gamma)}\right| |m u|,$$

et ceci pour $x \in$ support de $\frac{\partial}{\partial x_i} b_\varepsilon$, i.e. pour $d(x, \Gamma) \le 3\varepsilon$ donc grâce à l'hypothèse (4.9), $\left|a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_\varepsilon\right) u\right|$ est majoré par $c_3 |m u|$ et tend vers 0 presque partout dans Ω, donc $\to 0$ dans L^2 par le théorème de Lebesgue. Donc : *les fonctions de $\mathcal{E}(A)$ nulles au voisinage de Γ sont denses dans $\mathcal{E}(A)$.*

---

[1] Si $\Omega = R^n$, il faut remplacer (4.9) par : $\left|\frac{a_i(x)}{|x|\, m(x)}\right|$ est borné.

b) Désignons par c une fonction de $\mathcal{D}_{R^n}$, $=1$ pour $|x|<1$, et $=0$ pour $|x|>2$, $0 \leq c(x) \leq 1$ partout, et désignons par c_R la fonction : $x \to c_R(x) = c(x/R)$. Soit u donnée dans $\mathcal{E}(A)$; posons $u_R = c_R u$; $m u_R \to m u$ dans $L^2(\Omega)$; pour montrer que $a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_R \to a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u$ dans $L^2(\Omega)$, tout revient à montrer que

$$X = a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} c_R\right) u = \left(a_i \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} c_R\right)(m u) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Or $\left|\frac{\partial}{\partial x_i} c_R\right| \leq c_4 \frac{1}{R}$ et est nulle sauf pour $R < |x| < 2R$. En écrivant :

$$X = \left(a_i \frac{1}{m} \frac{1}{d(x, \Gamma)}\right) \left(\frac{d(x, \Gamma)}{|x|}\right) \left(|x| \frac{\partial}{\partial x_i} c_R\right)(m u),$$

on voit que $|X(x)| \leq c_5 |m u(x)|$ et donc $X \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ par le théorème de Lebesgue. Combinant avec le a), on a montré : *les fonctions de $\mathcal{E}(A)$ à supports compacts dans Ω sont denses dans $\mathcal{E}(A)$.*

c) Soit maintenant $u \in \mathcal{E}(A)$ de support compact dans Ω. On veut l'approcher dans $\mathcal{E}(A)$ par une suite de fonctions de $\mathcal{D}_\Omega$. Pour cela on va régulariser u. Soit $\varrho_\varepsilon \to \delta$ dans $\mathcal{E}'_{R^n}$. On identifie dans le reste de la démonstration une fonction f définie dans Ω avec son prolongement $\tilde{f}$ à R^n par 0 hors de Ω. Avec cette convention la régularisée de u par ϱ_ε est : $u_\varepsilon = u * \varrho_\varepsilon$ de support compact dans Ω pour ε assez petit. La proposition sera démontrée si l'on prouve que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{E}(A)$. Comme $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(\Omega)$ en gardant son support dans un compact fixe, $u_\varepsilon \to u$ dans E. Reste à montrer que

$$a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon \to a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u \quad \text{dans } L^2(\Omega),\ \varepsilon \to 0.$$

Or d'après le Lemme de Friedrichs sur les « Mollifiers » (cf. Friedrichs [1]) on sait que :

$$a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) * \varrho_\varepsilon - a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon\right) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

(puisque u est à support compact); comme

$$a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) * \varrho_\varepsilon \to a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

on a le résultat.

Voici maintenant un critère de non-densité.

PROPOSITION 4.2. *On suppose qu'il existe un ensemble Σ porté par Γ, de capacité positive, ayant un voisinage ω dans Ω sur lequel les fonctions $|a_i|$ sont bornées inférieurement. Alors $\mathcal{D}_\Omega$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}(A)$.*

DÉMONSTRATION.

Soit $F \in \mathcal{D}_{R^n}$, $=1$ sur un morceau de capacité positive de Σ, et soit f sa restriction à ω. Si $\mathcal{D}_\Omega$ était dense dans $\mathcal{E}(A)$, on pourrait approcher la restriction f_1 de F à Ω par une suite de fonctions de $\mathcal{D}_\Omega$ dans $\mathcal{E}(A)$; par restriction à ω et en utilisant le fait que les $|a_i|$ sont bornées inférieurement sur ω, on aurait : $f = \lim. \varphi_R$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\omega)$, où les φ_R sont dans $\mathcal{E}_\omega$, nulles au voisinage de Σ, ce qui est impossible.

Point 4. Prolongement des fonctions de $\mathcal{E}(A)$.

On se ramène à $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$: soit Γ_1 un morceau de Γ sur lequel le prolongement en moyenne est possible (cf. p. 53 et 54); on suppose en outre qu'il existe un voisinage ω de Γ_1 dans Ω sur lequel les fonctions a_i sont bornées inférieurement. Alors toute f dans $\mathcal{E}(A)$ a sa restriction à ω dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\omega)$, et prolonger les fonctions de $\mathcal{E}(A)$ sur Γ_1 revient à prolonger les fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\omega)$ sur Γ_1.

Point 5. Espaces V. Ici encore on a des exemples analogues à ceux du N° 1.

Point 6. Propriétés de complète continuité.

Considérons d'abord le cas $\Omega = R^n$. On a la

PROPOSITION 4.3. *On suppose que :*

(4.10) *Les fonctions a_i ne s'annullent jamais;*

(4.11) *La fonction $M(x)$ tend vers l'infini lorsque $|x| \to \infty$.*

Dans ces conditions l'injection de $\mathcal{E}(A)$ dans $L^2(R^n)$ est complètement continue.

DÉMONSTRATION.

Soit B la boule unité de $\mathcal{E}(A)$; il faut montrer qu'elle est relativement compacte dans $L^2(R^n)$ donc (cf. A. Weil [1]) :

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de R^n tel que

$$\int_{\complement K} |f(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon \text{ pour tout } f \in B.$$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre η tel que

$$\| \tau_h(f) - f \|_{L^2(R^n)} \leq \varepsilon \qquad \text{pour } |h| \leq \eta,\ f \in B$$

($\tau_h f =$ translatée de f du vecteur h).

Montrons a) ; on a :

$$\int_{\complement K} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\complement K} |m f|^2 \frac{1}{M} \, dx$$

donc

$$\leq \max 1/m, \ x \in \complement K,$$

d'où le a) grâce à l'hypothèse (4.11).

Comme le a) est démontré, pour démontrer le b), il suffit de montrer ceci : on donne un compact K et ε; montrer qu'il existe η tel que

$$\int_K |f(x-h) - f(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon \text{ pour } |h| \leq \eta \text{ et pour tout } f \in B.$$

Or grâce à (4.10) les fonctions f sont localement dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$, et demeurent dans un ensemble borné; l'inégalité résulte alors de Schwartz [2] théorème XVII, p. 42.

On peut généraliser la proposition 4.3 comme suit :

PROPOSITION 4.4. *On suppose que sur un ouvert Ω de R^n on a* (4.10) *ainsi que*

$$\text{(4.12)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{il existe une partition de l'unité sur } \Omega : \\ 1 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k + \beta, \ \alpha_k, \ \beta \in \mathcal{E}_\Omega, \geq 0, \end{array} \right.$$

les applications $u \to \alpha_k u$ étant compactes de $\mathcal{E}(A)$ dans $L^2(\Omega)$ et

(4.13) *si Γ_β est la portion de frontière de Ω en commun avec le support de β, $M(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty (x \in \Omega)$ ou si $x \to \Gamma_\beta$.*

Dans ces conditions, l'injection de $\mathcal{E}(A)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue (1).

DÉMONSTRATION.

Soit B la boule unité de $\mathcal{E}(A)$; il faut montrer qu'elle est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$, i.e. :

a) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K avec

$$\|f\|_{L^2(\complement K)} \leq \varepsilon \text{ pour tout } f \in B$$

et

b) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe η tel que

$$\|\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^2(R^n)} \leq \varepsilon \text{ pour } \|h\| \leq \eta \text{ et } f \in B,$$

$\tilde{f}$ désignant la fonction f prolongée à R^n par 0 hors de Ω.

Par utilisation de la partition de l'unité, on est ramené à démontrer des majorations analogues pour les fonctions $\alpha_k f$, et βf. Pour $\alpha_k f$ ces majorations sont vraies, puisque

(1) La partition de l'unité permet de passer du local au global.

les applications $f \to \alpha_k f$ sont compactes. Pour βf on opère exactement comme dans la proposition 4.3, grâce à (4.13).

Les points 7 à 9 sont analogues à ceux des N° précédents.

Point 10. Problèmes aux limites résolus.

On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\langle D \cdot u, \bar{v} \rangle = (u, v)_D + \int_\Gamma \gamma_D u \overline{\gamma v} \, d s,$$

où le premier membre désigne le produit scalaire (4.8), où

$$(u, v)_D = \sum \int g_{ij} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} a_i \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} d x,$$

et où

$$\gamma_D u = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a_i a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u \cos (n, x_i).$$

On a des résultats semblables à ceux du N° 1. Par contre les propositions 4.3 et 4.4 donnent des résultats de complète continuité différents de ceux du N° 1. Exemple : on considère sur R^1 l'opérateur $D = -\frac{d^2}{d x^2}$, et M donnée par $M(x) = x^2 + 1$. L'espace $\mathcal{E}(A)$ est donc l'espace des fonctions u telles que $\sqrt{x^2+1}\; u \in L^2$ ainsi que $\frac{d}{d x} u$. L'injection de $\mathcal{E}$(A) dans $L^2(R^1)$ est complètement continue, donc le système des fonctions propres :

$$-\frac{d^2}{d x^2} u_k + (x^2 + 1) u_k = \lambda_k u_k$$

forme un système *complet* dans $L^2(R^1)$ et même dans $\mathcal{E}(A)$ (cf. § 1, N° 5, p. 32). On retrouve ainsi le système complet des fonctions de Hermite (cf. Titchmarsh [1]). Les propositions 4.3 et 4.4 conduisent donc à de nombreux systèmes complets sur $L^2(R^1)$ ou sur $L^2(\Omega)$, Ω borné ou non. C'est une généralisation des résultats de Titchmarsh [1], [2].

5. Opérateurs différentiels d'ordre $2m$

On considère sur Ω ouvert quelconque de R^n l'opérateur défini pour $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ par

$$D \cdot \varphi = (-1)^m \sum_{|p|, |q| = m} D^p (g_{pq} D^q \varphi) \tag{5.1}$$

où p et q parcourent tous les indices $r=(r_1, \ldots, r_n)$ tels que

$$|r| = \sum_{i=1}^{n} r_i = m,$$

où

$$g_{pq} \in L^\infty(\Omega).$$

On donne ensuite M, opérateur de multiplication par une fonction $M \in L^\infty(\Omega)$, avec

(5.2) $$M(x) \geq \mu > 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Comparant avec les notations du § 1, on a: $A_i = D^p$ (en ordonnant les indices p).

Point 1. Espaces $\mathcal{E}(A)$.

On prend $E = L^2(\Omega)$. L'espace $\mathcal{E}(A)$ étant important on lui donne une notation spéciale :

ESPACE $E^m_{L^2}(\Omega)\,(=\mathcal{E}(A))$.

C'est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, telles que $D^p u \in L^2$ pour tout p avec $|p| = m$, *sans aucune hypothèse sur les dérivées intermédiaires.* On pose de façon générale :

$$\|u\|_k^2 = \Sigma \|D^p u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad |p| = k.$$

L'espace $E^m_{L^2}(\Omega)$ est muni de la norme :

(5.3) $$\|u\|_{E^m_{L^2}} = (\|u\|_0^2 + \|u\|_m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert (proposition 9.1, p. 40).

On désigne par $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ l'espace des fonctions u dont *toutes* les dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans $L^2(\Omega)$, avec la norme

(5.4) $$|||u|||_m = \left(\sum_{k=0}^{m} \|u\|_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les espaces $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ coincident *localement* (et coincident localement avec l'espace des *distributions* dont les dérivées d'ordre m sont localement L^2), *mais non globalement* (cf. point 3).

Point 2. Adhérence de $\mathcal{D}_\Omega$ dans $E^m_{L^2}(\Omega)$.

Les topologies induites sur $\mathcal{D}_\Omega$ par $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ sont identiques; en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, les normes $\|\varphi\|_{E^m_{L^2}}$ et $|||\varphi|||_m$ sont équivalentes (comme on voit par transformation de Fourier et utilisation du théorème de Plancherel). On en déduit :

THÉORÈME 5.1. *L'espace* $\mathcal{D}(A)$ *est identique à* $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, *adhérence de* $\mathcal{D}_\Omega$ *dans* $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

THÉORÈME 5.2. *Si la frontière de* Ω *est de capacité positive,* $\mathcal{D}_\Omega$ *n'est pas dense dans* $E^m_{L^2}(\Omega)$.

Point 3. Propriétés de sommabilité globale.

On peut très bien avoir pour certains ouverts Ω (de frontière irrégulière) l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ *strictement contenu dans* $E^m_{L^2}(\Omega)$ ce qui conduit à poser la

DÉFINITION 5.1. L'ouvert Ω est dit: *m-régulier* $m > 1$ si toute fonction $u \in E^m_{L^2}(\Omega)$ est dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ (autrement dit si les espaces $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ coincident, algébriquement).

Mais si les espaces $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ coincident algébriquement, comme le 2ème a une topologie plus fine que le 1er, ces topologies coincident (Théorème de Banach, cf. Bourbaki [1] p. 37, Cor. 2) et donc : si Ω est m-régulier, pour tout q avec $|q| < m$, il existe une constante A_q ne dépendant que de q, m, et Ω telle que

$$\|D^q u\|^2_{L^2} \leq A_q (\|u\|^2_0 + \|u\|^2_m) \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega). \tag{5.5}$$

Réciproquement, soit Ω donnant lieu aux inégalités (5.5). Nous ignorons si ceci entraîne l'identité des espaces $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$; la question se ramène à savoir si $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ est dense dans $E^m_{L^2}(\Omega)$ (voir des problèmes analogues dans Deny-Lions [1]).

Exemples d'ouverts m-réguliers (1)

On voit tout de suite par transformation de Fourier que $\Omega = R^n$ est un ouvert m-régulier, quel que soit m.

Tout ouvert de Nikodym (cf. p. 56) est un ouvert m-régulier; il y a même alors beaucoup plus : toute distribution T dont les dérivées d'ordre m sont dans L^2 est dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ (évident). Exemple : les boules (ouvertes) sont des ouverts m-réguliers.

Nous démontrons dans Lions [3] le

THÉORÈME 5.3. *Soit* Ω *un ouvert de* R^n *tel que toute parallèle à* ox_i *coupe* Ω *en un nombre fini ou non de segments ouverts, de longueur finie ou non mais* $\geq \varepsilon_i > 0$, *et ceci pour toutes les directions d'axes. Alors* Ω *est m-régulier.*

Exemple : les complémentaires des boules fermées sont des ouverts m-réguliers.

---

(1) La propriété de m-régularité est une propriété locale de la frontière.

Point 4. Prolongement des fonctions de $E^m_{L^2}(\Omega)$.

Soit Γ_1 un morceau de la frontière Γ de Ω, possédant un voisinage ω dans Ω tel que :

(5.6) ω est m-régulier et le prolongement en moyenne sur Γ_1 est possible (cf. p. 53 et 54).

Si U est dans $E^m_{L^2}(\Omega)$, sa restriction u à ω est dans $E^m_{L^2}(\omega)$ donc, ω étant m-régulier, est dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\omega)$; *on peut donc définir* $\gamma_1(u), \ldots, \gamma_1(D^p u)$ *pour* $|p| \leq m-1$, *éléments de* $L^2(\Gamma_1)$.

Point 5. Espaces V.

a) Soit Σ un morceau de frontière de capacité positive. On prend alors pour espace V l'adhérence dans $E^m_{L^2}(\Omega)$ des fonctions qui sont identiques à 0 (ou bien dont *certaines* dérivées d'ordre $\leq m-1$ sont nulles) dans un voisinage (variable) de Σ.

b) Soit Γ_1 un morceau de frontière, avec (5.6).

On peut alors prendre pour V le sous-espace vectoriel fermé de $E^m_{L^2}(\Omega)$ formé des fonctions v telles que :

$\gamma_1(D^p v) = 0$, pour p parcourant un ensemble d'indices H, avec $|p| \leq m-1$ (plus généralement, on prend des sous-espaces vectoriels fermés $\mathcal{V}_p$ de $L^2(\Gamma)$, $p \in H$, et pour V le sous-espace des fonctions v telles que $\gamma_1(D^p v) \in \mathcal{V}_p$ pour $p \in H$). Ce procédé donne évidemment de très nombreux espaces V; c'est la généralisation naturelle des espaces V_3 (p. 54); on généralisera de même les espaces V_5 (p. 55).

c) Voici un autre exemple important :

On suppose que l'ouvert Ω est m-régulier. On prend pour espace V *l'espace des fonctions* $u \in E^m_{L^2}(\Omega)$ *et appartenant à* $\mathcal{D}^k_{L^2}(\Omega)$, $k < m$ (pour $k = m$, c'est $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$); comme Ω est m-régulier, $E^m_{L^2}(\Omega)$ coincide avec $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et on définit bien ainsi un sous-espace vectoriel *fermé* de $E^m_{L^2}(\Omega)$; c'est l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre $\leq k-1$ sont nulles en moyenne sur la frontière de Ω.

Point 6. Complète continuité.

On suppose Ω est m-régulier. On est alors ramené à voir quand l'injection de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ (ou de ses sous-espaces V) dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue. On se ramène à $m=1$; exemple : si l'injection de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue, il en est de même de l'injection de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (évident). On utilise alors les critères des pages 54 et 55.

Point 7. V-ellipticité.

Explicitons pour ce cas particulier la définition générale de V-ellipticité : l'opérateur D est V-elliptique s'il existe une constante $\alpha_1 > 0$ telle que

$$(5.7) \qquad \sum_{|p|,|q|=m} \int_\Omega g_{pq}(x) D^q u \overline{D^p u}\, dx \geq \alpha_1 \| u \|_m^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V.$$

(Cf. déf. 10.2, p. 43).

Par application de la transformation de Fourier on a (Gårding, Visik) :

THÉORÈME 5.4. *Si D est à coefficients constants, la condition nécessaire et suffisante pour que D soit D_Ω-elliptique est que*

$$(5.8) \qquad \sum_{|p|,|q|=m} g_{pq} \xi^{p+q} \geq \alpha |\xi|^{2m}, \qquad \xi \in \Xi^n.$$

Montrons maintenant le

THÉORÈME 5.5. *Si D est à coefficients constants et si Ω est borné, la condition nécessaire et suffisante pour que D soit $E^m_{L^2}(\Omega)$-elliptique, est que pour tout ensemble de nombres complexes ζ_p, $|p|=m$, on ait :*

$$(5.9) \qquad \sum_{|p|,|q|=m} g_{pq} \overline{\zeta_q} \zeta_p \geq \alpha \sum_{|p|=m} |\zeta|^2.$$

DÉMONSTRATION.

Il est immédiat que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : si (5.9) n'a pas lieu, il existe un ensemble de nombres ζ_p^0 tels que

$$\sum_{|p|,|q|=m} g_{pq} \zeta_q^0 \overline{\zeta_p^0} \leq 0.$$

Soit alors P un polynome tel que $D^p P = \zeta_p^0$, $|p|=m$. Puisque Ω est borné, P est dans $E^m_{L^2}(\Omega)$ et $(P,P)_D \leq 0$, donc D n'est pas $E^m_{L^2}(\Omega)$-elliptique d'où le résultat.

REMARQUE 5.1.

En comparant les résultats des théorèmes 5.4 et 5.5, un voit que *la notion de V-ellipticité dépend effectivement de V.*

Point 8. Opérateurs de perturbation.

On peut prendre :

$$(5.10) \qquad P = \sum_{|p|=m} h_p D^p, \qquad h_p \in \mathcal{L}(L^2; L^2),$$

ou bien, si Ω est m-régulier :

$$(5.11) \qquad P = \sum_{|p|\leq m} h_p D^p, \qquad h_p \in \mathcal{L}(L^2; L^2).$$

On considère alors (cf. § 1, p. 46 et 47) :

$$((u, v)) = (u, v)_{D+N} + (B\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma_1)} + \langle P u, \tilde{v}\rangle$$

où

$$(u, v)_D = \Sigma \int g_{pq} D^q u \overline{D^p v} \, dx,$$

$$(u, v)_M = \int_\Omega M u \tilde{v} \, dx, \ (u, v)_{D+M} = (u, v)_D + (u, v)_M$$

et il faudra par exemple (prop. 12.1, p. 47 et déf. 12.2, p. 46) que P soit de partie hermitienne positive. On peut *définir* V, sous-espace de $\mathcal{E}^m_{L^2}$, par la condition :

$$(P u, u)_{L^2} + (u, P u)_{L^2} \geq 0$$

(et, éventuellement, des conditions supplémentaires). Il faut que V contienne $\mathcal{D}$, donc il faut, que pour tout φ dans $\mathcal{D}$, on ait :

$$(P \varphi, \varphi)_{L^2} + (\varphi, P \varphi)_{L^2} \geq 0. \tag{5.12}$$

Exemple.

$$P = (-1)^\gamma \sum_{|p|,|q|=\gamma} D^p (a_{pq} D^q), \quad a_{pq} = a_{qp} = \text{constantes réelles}, \quad 2\gamma \leq m.$$

Alors (5.12) a lieu si :

$$\sum_{p,q} a_{pq} \xi^{p+q} \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \Xi^n.$$

Point 9. Espace $\mathcal{K}$.

On suppose pour ce point que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'operateur } D \text{ est à coefficients indéfiniment différentiables et } M \\ \text{est indéfiniment différentiable.} \end{array} \right. \tag{5.13}$$

On prend alors pour $\mathcal{K}$ l'espace des distributions T telles que $(D+M)T$ soit dans $L^2(\Omega)$, ou dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}$ dans le cas du problème de Dirichlet.

Les propriétés locales des éléments de ces espaces ne sont pas connues. Signalons toutefois le résultat simple suivant, du à Friedrichs (1), Théorème 1 : Si T est une distribution localement dans $\mathcal{E}^m_{L^2}$ (sur Ω) telle que $D \cdot T$ soit localement de carré sommable, alors T est localement dans $\mathcal{E}^{2m}_{L^2}$. Ce résultat vaut en supposant seulement les coefficients de D m fois continûment différentiables. Pour des résultats voisins, voir Browder [1], [2], [3], [4] et John [2].

Rappelons également le résultat suivant : si $m > n/2$ les fonctions de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ sont (presque partout) égales à des fonctions continues (résultat immédiat en utilisant la transformation de Fourier).

Point 10. Problèmes aux limites résolus.

On va considérer un opérateur D particulier :

$$D = \Delta^2 = a \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{5.14}$$

où $a > 0$, $b \geq 0$, $a + b = 1$.

L'espace $\mathcal{E}(A)$ est $E^2_{L^2}(\Omega)$.

L'opérateur Δ^2 *sous la forme* (5.14) *est* $E^2_{L^2}(\Omega)$*-elliptique.* En effet, pour Δ^2 écrit comme çi-dessus, on a

$$(u, u)_{\Delta^2} = a \| u \|_2^2 + b \| \Delta u \|_{L^2}^2 \geq a \| u \|_2^2, \quad a > 0.$$

Donc tous les problèmes aux limites étudiés ci-après ont une solution unique.

Formule d'intégration par parties

On suppose pour l'instant que la frontière Γ de Ω est assez régulière, les fonctions u et v suffisamment différentiables et petites à l'infini pour que toutes les intégrales çi-après convergent. On note s le point générique de Γ, ds la mesure superficielle et $n(s)$ le vecteur unitaire de la normale intérieure à Γ en s. Si f est une fonction une fois continûment différentiable dans $\Omega \cup \Gamma$, on pose :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} f(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(s) \cos\,(n(s), x_i) \quad \text{(dérivée normale)}.$$

On a :

$$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = \int_\Gamma \frac{\partial \Delta}{\partial \nu} u \bar{v} \, ds - a I(u, v) - b \int_\Gamma (\Delta u) \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{v} \, ds + (u, v)_{\Delta^2} \tag{5.15}$$

où l'on a posé :

$$I(u, v) = \sum_{i,j=0}^{n} \int_\Gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \right) \cos\,(n, x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v} \, ds. \tag{5.16}$$

Transformons $I(u, v)$; on se ramène au cas où v est à support compact sur $\overline{\Omega}$, de façon à pouvoir prendre des coordonnées locales au voisinage de ce support : on prend dans une boule de R^n contenant ce support un système de coordonnées locales, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \nu$, de sorte que ν désigne la distance de x à Γ ; on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \nu(s) = \cos\,(n(s), x_i)$$

et on peut écrire :

$$I(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \cos\,(n, x_j) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \bar{v} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{v} \cos\,(n, x_i) \right) ds.$$

On intègre par parties en λ_k. Si l'on pose

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \cos(n, x_i) \cos(n, x_j) \tag{5.17}$$

et

$$S(u) = -\sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \cos(n, x_j) \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \right) \text{ (en coordonnées locales),} \tag{5.18}$$

il vient :

$$I(u, v) = \int_\Gamma S(u) \bar{v} \, ds + \int_\Gamma T(u) \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{v} \, ds.$$

On a finalement la formule :

$$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta u) - a S(u) \right) \bar{v} \, ds - \int_\Gamma (a T(u) + b \Delta u) \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{v} \, ds + (u, v)_{\Delta^2}. \tag{5.19}$$

Les fonctions $S(u)$ et $T(u)$ sont indépendantes des coordonnées curvilignes choisies à cause de l'unicité de la décomposition d'une distribution en somme de dérivées transversales.

On va maintenant interpréter quelques-uns des problèmes aux limites relatifs à $\Delta^2 + M$, $M(x) \geq \mu > 0$, résolus par la théorie générale, en utilisant *formellement* (5.19).

Exemple 1. $V = E^2_{L^2}(\Omega)$ (problème de Neumann).

La condition $u \in N$ signifie :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta u) - a S(u) = 0 \quad \text{et} \quad a T(u) + b \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le problème aux limites correspondant est : trouver U dans $\mathcal{H}$, solution de

$$(\Delta^2 + M) U = F,$$

F donné dans L^2, avec les conditions aux limites : $U - h \in N$, h donné dans $\mathcal{H}$, soit :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta U) - a S(U) = \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta h) - a S(h) \quad \textit{donné} \text{ sur } \Gamma$$

et

$$a T(U) + b \Delta U = a T(h) + b \Delta h, \quad \textit{donné} \text{ sur } \Gamma$$

(par la suite nous n'interprétons plus les problèmes aux limites mais seulement les conditions aux limites).

Les conditions aux limites actuelles généralisent celles de Pleijel [1]. Notons toutefois que cette théorie sous sa forme actuelle ne marche pas pour $M = 0$, cas étudié par M. Pleijel (pour $M=0$ notre méthode marche en utilisant une généralisation de la notion d'ouvert de Soboleff).

On peut ensuite faire varier a dans $0<a\leq 1$, $(b=1-a)$. On ne peut pas faire $a=0$, de sorte que le problème aux limites avec les conditions : $\Delta u=0$, $\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta u=0$ sur Γ n'est pas résolu pour l'instant; cette lacune est comblée au Nº suivant.

EXEMPLE 2.

On suppose donné un morceau Γ_1 de la frontière avec (5.6). On utilise alors les espaces V du point 5, b), p. 72.

1) $v\in V$ équivaut à $\gamma_1(v)=0$.

Alors $u\in N$ signifie :

$$\gamma_1(u)=0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u)-a S(u)=0 \text{ sur } \Gamma-\Gamma_1, \text{ et } a T(u)+b\Delta u=0 \text{ sur } \Gamma.$$

2) $v\in V$ equivaut à $\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)=0$ pour $i=1, \ldots, n$.

Alors $u\in N(N)$ signifie :

$$\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)=0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ pour tout } i,$$

$$a T(u)+b\Delta u=0 \text{ sur } \Gamma-\Gamma_1,\ \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u)-a S(u)=0 \text{ sur } \Gamma.$$

On peut donner des variantes évidentes à ces exemples.

EXEMPLE 3.

On donne Γ_1, avec (5.6) et sur Γ_1 les fonctions: c_0 continue positive, c_i une fois continûment différentiables, ≥ 0. Pour u, v dans $E^2_{L^2}(\Omega)$ on pose :

$$J(u,v)=\int_\Gamma c_0\gamma_1(u)\gamma_1(\bar v)\,ds+\sum_{i=1}^n\int_\Gamma c_i\gamma_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bar v\right)ds. \tag{5.20}$$

On a :

$$J(u,v)=(B\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma_1)} \tag{5.21}$$

ce qui définit $B\in\mathcal{L}(L^2(\Gamma_1); L^2(\Gamma_1))$, ≥ 0, donc $((u,v))=(u,v)_{\Delta_2+M}+J(u,v)$ est elliptique.

Interprétons alors l'espace N. Pour cela transformons $J(u,v)$. Ecrivons pour simplifier v au lieu de $\gamma_1 v$. On pose :

$$R(u) = -\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\left(c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i}\right) + c_0 u \quad \text{(en coordonnées locales)} \tag{5.22}$$

$$Q(u) = \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i} u \cos(n, x_i). \tag{5.23}$$

Alors :

$$J(u, v) = \int_{\Gamma_1} R(u)\,\bar{v}\,ds + \int_{\Gamma_1} Q(u)\frac{\partial}{\partial \nu}\bar{v}\,ds. \tag{5.24}$$

La condition $u \in N$ qui est par définition :

$$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = (u, v)_{\Delta^2} + (B\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma_1)} \quad \text{pour tout} \quad v \in E^2_{L^2}(\Omega))$$

signifie, en utilisant (5.19) et (5.24) :

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) - a\,S(u) = \begin{cases} R(u) & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}$$

et

$$a\,T(u) + b\,\Delta u = \begin{cases} Q(u) & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1. \end{cases}$$

EXEMPLE 4.

On prend $V = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \cap E^2_{L^2}(\Omega)$ (Ω étant supposé 2-régulier; cf. p. 63). La condition $u \in N$ signifie alors :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad a\,T(u) + b\,\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

C'est la généralisation des conditions aux limites du problème II de Pleijel [1].

REMARQUE 5.1.

Si l'on prend pour V l'espace de la page 72, c), on peut prendre pour espace Q (cf. § 1, N° 1 et suivants) l'espace $\mathcal{D}^k_{L^2}$ au lieu de L^2; alors $Q' = \mathcal{D}'^k_{L^2}$, et sous les conditions d'ellipticité précédentes, $D + M$ est un isomorphisme de N sur $\mathcal{D}'^k_{L^2}$.

REMARQUE 5.2.

On peut considérer sur $\mathcal{E}^m_{L^2}$ la forme :

$$((u, v)) = \sum_{\varrho=0}^{m} \sum_{|p|,|q|=\varrho} (g^{\varrho}_{p,q} D^q u, D^p v)_{L^2}.$$

Si l'ouvert Ω est *m-régulier,* cette forme sera elliptique sur V sous les conditions suivantes :

$$\sum_{|p|,|q|=m} ((g^m_{pq} + g^{m*}_{qp}) D^q u, D^p u)_{L^2} \geq a_1 \|u\|^2_m$$

$$\sum_{\varrho=1}^{m-1} \sum_{|p|,|q|=\varrho} ((g_{pq}^{\varrho} + g_{qp}^{*}) D^q u, D^p u)_{L^2} \geq 0$$

$$((g_0 + g_0^{*}) u, u)_{L^2} \geq a_2 \| u \|_0^2, \quad \text{pour tout} \quad u \in V.$$

On peut alors appliquer la théorie générale. L'opérateur Λ défini par cette forme est :

$$\Lambda = \sum_{\varrho=0}^{m} (-1)^{\varrho} \sum_{|p|,|q|=\varrho} D^p (g_{pq}^{\varrho} D^q).$$

REMARQUE 5.3.

On peut considérer l'opérateur D d'ordre $2m$, de même nature que (5.1) p. 70, défini pour $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ par

$$D \cdot \varphi = (-1)^m \sum_{|p|,|q|=m} D^p (g_{pq}\, a_p\, a_q\, D^q \varphi) \tag{5.29}$$

les fonctions g_{pq} étant les mêmes que précédemment, et les fonctions a_p étant réelles, m fois continûment différentiables sur Ω, pouvant être non bornées ou d'inverses non bornées. On prend par exemple M comme précédemment. L'espace $\mathcal{E}(A)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $a_p D^p u$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout p. Tout ceci est la généralisation du N° 4 de ce paragraphe.

6. Autres problèmes aux limites relatifs a $\Delta^2 + M$

On étudie plus complètement dans ce N° les problèmes aux limites relatifs à $\Delta^2 + M$; au lieu d'écrire Δ^2 sous la forme (5.14), p. 75, on l'écrit simplement

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta. \tag{6.1}$$

Comme ${}^t(\Delta) = \Delta$, cet opérateur entre dans la forme générale du § 1, N° 8.

Point 1. Espace $\mathcal{E}(A)$.

On prend $E = L^2(\Omega)$; $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(1, \Delta)$ *est l'espace des fonctions* u *dans* $L^2(\Omega)$ *telles que* $\Delta \cdot u \in L^2(\Omega)$, avec la norme dont le carré est $\| u \|_0^2 + \| \Delta u \|_0^2$.

Point 2. Espace $\mathcal{D}(A)$.

Sur $\mathcal{D}_\Omega$, les normes $|||\varphi|||_2$ et $(\| \varphi \|_0^2 + \| \Delta \varphi \|_0^2)^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes (transformation de Fourier et théorème de Plancherel), donc $\mathcal{D}(A)$ coincide avec $\mathcal{D}_{L^2}^2(\Omega)$, adhérence de $\mathcal{D}_\Omega$ dans $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$. Si la frontière de Ω est de capacité positive, l'espace $\mathcal{D}_\Omega$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}(A)$.

Point 5. Espaces V.

Soit W un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, soit γ un opérateur frontière, $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega); F)$, nul sur $\mathcal{D}^1_{L^2}$, et B un opérateur hermitien dans $\mathcal{L}(F; F)$. On fait l'hypothèse suivante :

(6.2) il existe $s > 0$ assez grand tel que

$$(u, u)_{-\Delta} + (B\gamma u, \gamma u)_F + s\|u\|_0^2 \geq \varepsilon \||u\||_1^2,$$

$$\varepsilon > 0, \quad \text{pour tout } u \text{ dans } W, \quad (u, u)_{-\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}$$

(voir aussi pour des considérations de ce genre le Chapitre II, § 2).

On considère alors *l'espace* $N(W, B, -\Delta)$ des fonctions $u \in W$, telles que $\Delta \cdot u \in L^2$ et qui vérifient

$$(-\Delta u, w)_{L^2} = (u, w)_{-\Delta} + (B\gamma u, \gamma w)_F \quad \text{pour tout } w \in W. \tag{6.3}$$

On a la

Proposition 6.1. *L'espace* $N(W, B, -\Delta)$ *est fermé dans* $\mathcal{E}(1, \Delta)$. (On peut donc prendre $V = N(W, B, -\Delta)$ comme sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(A)$, contenant $\mathcal{D}(A)$).

Démonstration.

Soit w_k une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}(1, \Delta)$, $w_k \in N(W, B, -\Delta)$. Donc $w_k \to w$ dans $L^2(\Omega)$ et $\Delta \cdot w_k \to \Delta \cdot w$ dans $L^2(\Omega)$. Donc $-\Delta w_k + s w_k = f_k \to -\Delta w + s w = f$ dans $L^2(\Omega)$. Mais il résulte de (6.2) que $-\Delta + s$ *est un isomorphisme de* $N(W, B, -\Delta)$ *sur* $L^2(\Omega)$, soit $G(s)$ son inverse.

On a alors : $w_k = G(s) \cdot f_k$, et comme $f_k \to f$ dans $L^2(\Omega)$, on a : $G(s) \cdot f_k \to G(s) \cdot f$ dans $N(W, B, -\Delta)$, et nécessairement : $G(s) \cdot f = w$, d'où le résultat.

Exemples.

Espace V_1 : $V_1 = N(\mathcal{E}^1_{L^2}, -\Delta)$ $(B = 0)$. C'est donc l'espace des fonctions $v \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ telles que $\Delta v \in L^2$ et $\dfrac{\partial}{\partial \nu} v = 0$ (notation de la page 75).

Espace V_2 : $V = N(\mathcal{D}^1_{L^2}, -\Delta)$. La condition aux limites est : $v = 0$ sur Γ.

Espace V_3. Soit γ un opérateur de prolongement en moyenne sur Γ_1, morceau de frontière (p. 54); $B =$ opérateur de multiplication par une fonction $b \in L^\infty(\Gamma_1)$, de sorte que (6.2) ait lieu (si on a l'inégalité (1.7), p. 54, la fonction b peut être de signe et de norme quelconques dans $L^\infty(\Gamma_1)$, cf. Chap. II, § 2). On prend alors : $V_3 = N(\mathcal{E}^1_{L^2}, B, -\Delta)$. Conditions aux limites :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} v = b v \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} v = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_1.$$

Point 7. L'opérateur Δ^2 sous la forme (6.1) est $\mathcal{E}(A)$-elliptique. *Tous les problèmes aux limites ci-après admettent une solution unique.*

Point 10. Problèmes aux limites résolus.

On designe par $N(V, \Delta^2)$ l'espace N défini à partir de la forme

$$((u, v)) = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (M u, v)_{L^2}.$$

C'est l'espace des $u \in V$ avec $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$ et

(6.3) $$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} \quad \text{pour tout } v \text{ dans } V.$$

Pour les interprétations on utilise la formule classique :

(6.4) $$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \bar{v} \, ds - \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{v} \, ds + (\Delta u, \Delta v)_{L^2}$$

(ce qui suffit pour les interprétations formelles).

On interprète seulement dans la suite les conditions aux limites. On passe de là aux problèmes aux limites comme déja vu.

ESPACE $N(\mathcal{E}(A), \Delta^2)$.

La condition $u \in N(\mathcal{E}(A), \Delta^2)$ signifie, en utilisant (6.4) :

(a) $$\Delta u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Pour les autres espaces V_1, V_2, V_3 signalés ci-dessus, on peut de même donner une interprétation à partir de (6.4). On peut toutefois préciser. Nous aurons besoin du

LEMME 6.1. *Si* $V = N(W, B, -\Delta)$ (cf. proposition 6.1) *et si u est une fonction dans $L^2(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, avec*

(6.5) $$(u, \Delta v)_{L^2} = (\Delta u, v)_{L^2} \quad \textit{pour tout } v \textit{ dans } V,$$

alors u est dans V.

DÉMONSTRATION.

Soit $u_0 \in N(W, B, -\Delta)$ la solution de $-\Delta u_0 + s u_0 = -\Delta u + s u$. Si donc w est quelconque dans W, on a :

$$(u_0, w)_{-\Delta} + s(u_0, w)_{L^2} + (B\gamma u_0, \gamma w)_F = (-\Delta u, w)_{L^2} + s(u, w)_{L^2}. \tag{6.6}$$

Prenons $w = v \in V$. Grâce à (6.5) le $2^{\text{ème}}$ membre de (6.6 vaut : $(u, -\Delta v + s v)_{L^2}$. Par ailleurs, v étant dans V, le 1^{er} membre de (6.6) vaut : $(u_0, -\Delta v)_{L^2} + s(u_0, v)_{L^2}$, et donc :

$$(u_0 - u, (-\Delta + s) v)_{L^2} = 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{6.7}$$

Comme $-\Delta + s$ est un isomorphisme de V sur $L^2(\Omega)$, (6.7) équivaut à $(u_0 - u, f)_{L^2} = 0$ pour tout f dans L^2, donc $u_0 = u$, u est dans V, c. q. f. d.

On peut maintenant montrer la

PROPOSITION 6.2. *Soit* $V = N(W, B, -\Delta)$ (proposition 6.1). *Soit* $\mathcal{N}$ *l'espace des fonctions* $u \in V$ *telles que* $\Delta u \in V$, *muni de la norme* $\|u\|_{\mathcal{N}} = \|u\|_V^2 + \|\Delta u\|_V^2)^{\frac{1}{2}}$ (c'est un espace de Hilbert). *Les espaces* $N(V, \Delta^2)$ *et* $\mathcal{N}$ *coincident.*

DÉMONSTRATION.

Soit $u \in \mathcal{N}$. Posons $\Delta u = u_0$. La fonction u_0 est dans V, donc si v est quelconque dans V (il suffirait même pour l'égalité ci-après de $v \in W$) :

$$(-\Delta u_0, v)_{L^2} = (u_0, v)_{-\Delta} + (B\gamma u_0, \gamma v)_F.$$

Mais u_0 est dans V donc dans W, et v est dans V, donc par définition de

$$V (= N(W, B, -\Delta))$$

on a :

$$(-\Delta v, u_0)_{L^2} = (v, u_0)_{-\Delta} + (B\gamma v, \gamma u_0)_F,$$

donc

$$(-\Delta u_0, v)_{L^2} = (u_0, -\Delta v)_{L^2},$$

i.e. $(\Delta^2 u, v)_{L^2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2}$ pour tout $v \in V$, donc

$$\mathcal{N} \subset N(V, \Delta^2), \tag{6.8}$$

et avec une topologie plus fine (ce dernier point est évident).

Mais soit maintenant u dans $N(V, \Delta^2)$; posons $\Delta u = u_0$. On a

$$(\Delta u_0, v)_{L^2} = (u_0, \Delta v)_{L^2}$$

pour tout $v \in V$, donc par le lemme 6.1, u_0 est dans V, donc $\mathcal{N}$ *et* $N(V, \Delta^2)$ *coincident algébriquement.* Mais ce sont deux espaces de Banach, dont le premier a une topologie plus fine, donc ils coincident *topologiquement* (théorème de Banach, cf. Bourbaki [1], Cor. 2 p. 37).

Comme conséquence immédiate :

$u \in N(V_1, \Delta^2)$ signifie

(b) $$\frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma;$$

$u \in N(V_2, \Delta^2)$ signifie

(c) $$u = 0 \quad \text{et} \quad \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma;$$

$u \in N(V_3, \Delta^2)$ signifie

(d) $$\frac{\partial}{\partial \nu} u = b u \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_1, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = b \Delta u \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{et}$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_1.$$

Remarque 6.1.

Il reste deux problèmes non résolus; ce sont ceux correspondants aux conditions aux limites :

(e) $$u = 0, \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{et}$$

(f) $$\frac{\partial}{\partial \nu} u = 0, \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Pour ces problèmes voir Lions [4].

7. Nouvelles conditions aux limites

On considère un ouvert Ω de R^n, de frontière X qui est supposée une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$; on munit X de sa structure naturelle d'espace de Riemann. On considère sur Ω l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, et W sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$:

(7.1) $$\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \subset W \subset \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega).$$

Pour $u, v \in W$, on pose :

(7.2) $$(u, v)_W = (u, v)_1 + c\,(u, v)_{L^2}, \quad c > 0$$

où

$$(u, v)_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur X et par $\mathcal{D}'(X)$ l'espace des distributions sur X. On a une application linéaire continue (prolongement en moyenne) de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$. Soit enfin W_1 un espace de Hilbert avec :

$$\mathcal{D}(X) \subset W_1 \subset \mathcal{D}'(X), \tag{7.3}$$

et sur W_1 *une forme sesqui-linéaire elliptique :*

$$((\varphi, \psi))_{W_1}, \ \varphi, \psi \in W_1. \tag{7.4}$$

On définit alors l'espace V comme étant l'espace des $u \in W$ tels que $\gamma u \in W_1$; cet espace contient $\mathcal{D}_\Omega$ (car si $u \in \mathcal{D}_\Omega$ alors $\gamma u = 0$) ; pour $u, v \in V$, on pose :

$$(u, v)_V = (u, v)_W + (\gamma u, \gamma v)_{W_1};$$

muni de cette structure V est un espace de Hilbert (immédiat).

On considère maintenant sur V la forme sesqui-linéaire :

$$((u, v)) = (u, v)_W + ((\gamma u, \gamma v))_{W_1} \tag{7.5}$$

et il est évident que *cette forme est elliptique.*

L'opérateur défini par la forme (7.5) est

$$\Lambda = -\Delta + c. \tag{7.6}$$

L'espace N est l'espace des $u \in V$ tels que $\Delta u \in L^2$ et qui vérifient :

$$(-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v)_1 + ((\gamma u, \gamma v))_{W_1} \quad \text{pour tout} \quad v \in V, \tag{7.7}$$

L'opérateur $\Lambda = -\Delta + c$ *est un isomorphisme de* N *sur* L^2.

INTERPRÉTATION DE L'ESPACE N.

Formellement on peut écrire :

$$((\gamma u, \gamma v))_{W_1} = \int_X \Lambda_1 \gamma u \cdot \overline{\gamma v} \, d s$$

où Λ_1 est l'opérateur defini par $((\varphi, \psi))_{W_1}$ — donc Λ_1 *est par exemple un opérateur différentiel elliptique d'ordre quelconque, aussi élevé qu'on veut* — et, toujours formellement, la condition (7.7) s'écrit :

$$\int_X \frac{\partial}{\partial n} u \overline{\gamma v} \, d s = \int_X \Lambda_1 \gamma u \overline{\gamma v} \, d s \quad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{7.8}$$

EXEMPLE 7.1.

$W = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Alors $u \in N$ signifie : $\dfrac{\partial}{\partial n} u = \Lambda_1 \gamma u$.

EXEMPLE 7.2.

Soit Γ un morceau de X. On considère alors pour W l'espace des $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ tels que $\gamma u = 0$ sur Γ. Alors $u \in N$ signifie :

$$\gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \frac{\partial}{\partial n} u = \Lambda_1 \gamma u \quad \text{sur} \quad X - \Gamma.$$

Ces conditions peuvent être évidemment considérablement variées. Par ailleurs on peut remplacer $-\Delta + c$ par l'un quelconque des opérateurs différentiels considérés jusqu'ici. On obtient ainsi une généralisation et une simplification du travail de Shapiro [1].

CHAPITRE II

Problèmes aux limites de type mixte

§ 1. Préliminaires

1. Distributions à valeurs vectorielles

ESPACE $\mathcal{D}'(t, L)$.

On désigne par t une variable de temps; $t \in R^1$. On désigne par L un espace de Banach (hypothèse qui nous suffira) et par $\mathcal{D}'(t, L)$, *espace des distributions en t à valeurs dans L*, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}(t); L)$ (on rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, $\mathcal{L}(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F, avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de E); $\mathcal{D}(t)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts sur l'axe des t, avec la topologie de Schwartz. Si $L = C =$ corps des complexes, on retrouve les distributions usuelles (pour toutes ces notions, voir Schwartz [6]). Les notions usuelles relatives aux distributions scalaires se généralisent aux distributions à valeurs vectorielles (et sans difficulté, lorsque, comme c'est le cas ici, L est un espace de Banach). Signalons notamment :

— le support en t des distributions à valeurs dans L se définit comme dans le cas scalaire.

— si $T \in \mathcal{D}'(t, L)$, sa dérivée en t, $\frac{d}{dt} T$ est définie dans $\mathcal{D}'(t, L)$ par:

$$\frac{d}{dt} T(\varphi) = -T\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(t). \tag{1.1}$$

(Même chose pour les dérivées d'ordre supérieur.)

— toute distribution $T \in \mathcal{D}'(t, L)$ est sur tout intervalle borné de l'axe des t, de la forme :

$$T = \frac{d^p f}{dt^p}. \tag{1.2}$$

où $t \to f(t)$ est une application continue de t dans L (dérivée au sens (1.1)).

— si $a \in \mathcal{E}(t)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables en t à supports quelconques), aT est défini par

$$aT(\varphi) = T(a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(t). \tag{1.3}$$

REMARQUE 1.1.

Si L est lui-même un espace de distributions (exemple : $L = L^2(\Omega)$) donc muni de dérivations, on écrira $\frac{\partial}{\partial t} T$ au lieu de $\frac{d}{dt} T$, $T \in \mathcal{D}'(t, L)$.

ESPACE $\mathcal{S}'(t, L)$.

C'est le sous-espace de $\mathcal{D}'(t, L)$ formé des *distributions à croissance lente en* t, espace noté $\mathcal{S}'(t, L)$, défini par :

$$\mathcal{S}'(t, L) = \mathcal{L}(\mathcal{S}(t); L) \tag{1.4}$$

où $\mathcal{S}(t)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide (voir Schwartz [2]). Pour $L = C$, on retrouve l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions ordinaires à croissance lente, Schwartz [2].

L'espace suivant joue un rôle essentiel dans la suite :

ESPACE $\mathcal{D}'_+(t, L)$.

On désigne par $\mathcal{D}_-(t)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentielles, *de support limité à droite,* muni de la topologie de limite inductive de Schwartz ($\varphi \in \mathcal{D}_-(t)$ signifie : φ est nulle pour $t < a$, a dépendant de φ). Le dual de cet espace est l'espace $\mathcal{D}'_+(t)$ *des distributions* (scalaires) *de support limité à gauche.* On désigne alors par $\mathcal{D}'_+(t, L)$ *l'espace des distributions en* t *à valeurs dans* L, *de support limité à gauche*; on peut le définir par

$$\mathcal{D}'_+(t, L) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_-(t); L) \tag{1.5}$$

ce qui a l'avantage de munir $\mathcal{D}'_+(t, L)$ d'une topologie plus intéressante que la topologie induite par $\mathcal{D}'(t, L)$; T est dans $\mathcal{D}'_+(t, L)$ si elle est nulle pour $t < a$, a dépendant de T.

Produits tensoriels

Considérons le produit tensoriel $\mathcal{D}' \otimes L$, et désignons par $\mathcal{D}' \underset{\pi}{\otimes} L$ cet espace muni de la topologie « produit tensoriel projectif » de Grothendieck (voir Grothendieck [1], [2] et Schwartz [7]); on désigne par $\mathcal{D}' \hat{\otimes} L$ le complété de cet espace. On démontre que :

(1.6) $$\mathcal{D}' \hat{\otimes} L = \mathcal{D}'(t, L),$$

algébriquement et topologiquement.

De même :

(1.7) $$\mathcal{S}' \hat{\otimes} L = \mathcal{S}'(t, L), \qquad \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} L = \mathcal{D}'_+(t, L).$$

Ces résultats sont très commodes. Voici un exemple qui nous sera utile. On donne deux espaces de Banach E, E' et un élément

(1.8) $$M \in \mathcal{L}(E; E').$$

On donne aussi :

(1.9) $$K \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_+; \mathcal{D}'_+).$$

Ces applications définissent :

(1.10) $$K \otimes M \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} E; \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} E'),$$

(application *produit tensoriel* des applications K et M), de la façon suivante : en considère $\mathcal{D}'_+ \otimes E$; si $T = S \otimes e$, $S \in \mathcal{D}'_+$, $e \in E$, on pose : $K \otimes M(T) = (K \cdot S) \otimes (M \cdot e)$, élément de $\mathcal{D}'_+ \otimes E'$, et ceci définit une application *continue* de $\mathcal{D}'_+ \underset{\pi}{\otimes} E$ dans $\mathcal{D}'_+ \underset{\pi}{\otimes} E'$, donc qui se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} E$ dans $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} E'$; c'est l'application (1.10).

2. Produit de composition

On donne maintenant trois espaces de Banach, L, M, N, et une application bilinéaire B de $L \times M$ dans N continue.

Considérons les distributions :

$$S = e \otimes l, \ e \in \mathcal{D}'_+, \ l \in L; \ T = f \otimes m, \ f \in \mathcal{D}'_+, \ m \in M.$$

Pour e et f dans $\mathcal{D}'_+$, on sait définir *leur produit de composition* $e * f$, ce qui définit une application bilinéaire : $e, f \to e * f$, hypocontinue de $\mathcal{D}'_+ \times \mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$ (Schwartz [2]). On pose alors :

(2.1) $$S * T = (e * f) \otimes B(l, m), \text{ élément de } \mathcal{D}'_+ \otimes N;$$

on a donc défini une application bilinéaire

$$S,\ T \to S * T \text{ de } (\mathcal{D}'_+ \otimes L) \times (\mathcal{D}'_+ \otimes M) \to \mathcal{D}'_+ \otimes N; \tag{2.2}$$

on montre alors le

LEMME 2.1. *L'application* (2.2) *se prolonge en une application bilinéaire séparément continue, notée encore* « $S,\ T \to S * T$ » *de* $\mathcal{D}'_+ (t,\ L) \times \mathcal{D}'_+ (t,\ M)$ *dans* $\mathcal{D}'_+ (t,\ N)$. *Cette application est hypocontinue.*

La distribution $S * T$ est le produit de composition des distributions S et T; *relativement à* B. On notera parfois $S \underset{t,\,B}{*} T$, pour rappeler que l'on compose en t et par rapport à B.

EXEMPLE 2.1.

Soit Q et R, deux espaces de Banach. Prenons $L = \mathcal{L}(Q;\ R)$, $M = \mathcal{L}(R;\ Q)$, $N = \mathcal{L}(Q;\ Q)$ et $B(l,\ m) = m \circ l$, composée des applications l et m, $\in N$. Cette application bilinéaire est continue, le lemme 2.1 s'applique. On pose :

$$S \underset{t,\,B}{*} T = T * S.$$

Explicitons le résultat en raison de son importance pour la suite

LEMME 2.2. *On peut définir une application bilinéaire hypocontinue et une seule,*

$$S,\ T \to T * S \tag{2.3}$$

de

$$\mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(Q;\ R)) \times \mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(R;\ Q)) \to \mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(Q;\ Q)),$$

telle que

$$T * S = (e * f) \otimes (m \circ l), \qquad S = e \otimes l, \qquad T = f \otimes m. \tag{2.4}$$

Prenons maintenant $N = \mathcal{L}(R;\ R)$ et $B(l,\ m) = l \circ m \in N$, on a le

LEMME 2.3. *On peut définir une application bilinéaire hypocontinue et une seule,*

$$S,\ T \to S * T \tag{2.5}$$

de

$$\mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(Q;\ R)) \times \mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(R;\ Q)) \to \mathcal{D}'_+ (t,\ \mathcal{L}(R;\ R)),$$

telle que

$$S * T = (e * f) \otimes (l \circ m), \qquad \text{si } S = e \otimes l, \qquad T = f \otimes m. \tag{2.6}$$

EXEMPLE 2.2.

L'espace L étant donné on prend $M = \mathfrak{L}(L; N)$ et $B(l, m) = m(l)$, image de l par m; B est continue, le lemme 2.1 s'applique donc encore et on a le

LEMME 2.4. *On peut définir une application bilinéaire hypocontinue et une seule,*

$$S, T \to T * S \tag{2.7}$$

de

$$\mathcal{D}'_+(t, L) \times \mathcal{D}'_+(t, \mathfrak{L}(L; N)) \to \mathcal{D}'_+(t, N),$$

telle que

$$T * S = (e * f) \otimes (m(l)) \text{ si } S = e \otimes l,\ T = f \otimes m. \tag{2.8}$$

3. Transformation de Laplace

On désigne par $\mathcal{S}'_{\xi_0}$ l'espace des distributions (scalaires) T telles que

$$\exp - \xi t \cdot T \in \mathcal{S}'$$

pour tout $\xi > \xi_0$, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $T \to \exp - \xi t \cdot T$ soient continues de $\mathcal{S}'_{\xi_0}$ dans $\mathcal{S}'$. (Voir Schwartz [4].)

On désigne par $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L)$ l'espace des distributions en t à valeurs dans L, telles que $\exp - \xi t \cdot T \in \mathcal{S}'(t, L)$ pour tout $\xi > \xi_0$ (le produit de $\exp - \xi t$ par T est défini en (1.3)), topologie analogue au cas scalaire. On démontre que

$$\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L) = \mathcal{S}'_{\xi_0} \hat{\otimes} L \text{ (algébriquement et topologiquement).} \tag{3.1}$$

On peut alors former : $S(\exp - (pt))$, $p = \xi + i\eta$, $\xi > \xi_0$, $\gamma \in R^1$, ce qui définit un élément de L. On pose :

$$S(\exp - (pt)) = \mathfrak{L} S(p). \tag{3.2}$$

On a le

LEMME 3.1. *L'application $p \to \mathfrak{L} S(p)$ est holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans L* (pour la notion de fonction holomorphe à valeurs dans un espace de Banach, voir Hille [1]); *la fonction $\eta \to \mathfrak{L} T(\xi + i\eta)$ est dans $\mathcal{S}'(\eta, L)$ pour $\xi > \xi_0$.*

DÉFINITION 3.1. La fonction $p \to \mathfrak{L} S(p)$ est *la transformée de Laplace de S* (si $L = C$ on retrouve la notion usuelle).

Le lemme 3.1 admet une réciproque :

LEMME 3.2. *Si une fonction $p \to F(p)$ est holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans L, la fonction $\eta \to F(\xi + i\eta)$ étant dans $\mathcal{S}'(\eta, L)$ pour tout $\xi > \xi_0$ et demeurant dans un ensemble* *borné de cet espace lorsque ξ parcourt un compact, alors il existe une distribution S dans $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L)$ et une seule telle que $\mathfrak{L}\, S(p) = F(p)$. On pose :*

$$S = \mathfrak{L}^{-1}(F) \text{ (transformée de Laplace inverse).} \tag{3.3}$$

On a des formules d'inversion analogues au cas scalaire.

Produit multiplicatif

Soit $F = \mathfrak{L}\, S$, $S \in \mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L)$, et $G = \mathfrak{L}\, T$, $T \in \mathcal{S}'_{\xi_1}(t, M)$, avec une application bilinéaire B comme au N° 2. La fonction : $p \to B(F(p), G(p))$ est holomorphe de $\xi > \xi_2 = \sup(\xi_0, \xi_1)$ dans N, à croissance lente en η pour $\xi > \xi_2$ fixé. On désigne par $F \cdot G$ la fonction considérée :

$$F \cdot G(p) = B(F(p), G(p)). \tag{3.4}$$

C'est *le produit multiplicatif* des fonctions F et G.

La fonction $F \cdot G$ est transformée de Laplace d'une distribution; on montre par ailleurs que le produit de composition $S * T$ *a encore un sens*, et on a les importantes formules :

$$\mathfrak{L}^{-1}(F \cdot G) = S * T, \quad \mathfrak{L}(S * T) = \mathfrak{L}\, S \cdot \mathfrak{L}\, T. \tag{3.5}$$

La distribution $S * T$ est dans $\mathcal{S}'_{\xi_2}(t, N)$.

Lemme sur les supports.

Le lemme qui suit est fondamental pour la suite. Il se démontre exactement comme dans le cas scalaire (voir alors Schwartz [4]).

Lemme 3.3. *La condition nécessaire et suffisante pour que T, élément de $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L)$ soit nulle pour $t < a$, est que pour tout nombre $b < a$ on ait :*

$\exp b\,\xi \cdot F(\xi + i\eta)$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{S}'(\eta, L)$ lorsque $\xi \to +\infty$.

(Il s'agit en réalité des fonctions $\eta \to \exp b\,\xi \cdot F(\xi + i\eta)$.)

4. Lemmes

On va maintenant donner quelques lemmes qui nous seront utiles.

Lemme 4.1. *Soit E et F deux espaces de Banach et $p \to a(p)$ une application holomorphe d'un ouvert O du plan complexe dans l'espace $\mathfrak{L}(E; F)$. On suppose que pour tout $p \in O$, $a(p)$ admet un inverse bilatère $a^{-1}(p)$,* i.e. :

$$a(p) \cdot a^{-1}(p) = 1, \ 1 \in \mathfrak{L}(F; F) \text{ et } a^{-1}(p) \cdot a(p) = 1, \ 1 \in \mathfrak{L}(E; E),$$

et on suppose aussi que $\|a^{-1}(p)\|$ *(norme dans* $\mathcal{L}(E; E)$*) est borné sur tout compact de* O*. Dans ces conditions l'application* $p \to a^{-1}(p)$ *est holomorphe de* O *dans* $\mathcal{L}(F; E)$*.*

DÉMONSTRATION.

1) On va d'abord démontrer que l'application $p \to a^{-1}(p)$ est *continue* de O dans $\mathcal{L}(F; E)$. Soit $p_0 \in O$ et supposons que p tende vers p_0 en demeurant dans un compact de O. On a :

$$a^{-1}(p) - a^{-1}(p_0) = -a^{-1}(p)(a(p) - a(p_0))\, a^{-1}(p_0),$$

d'où :

$$\|a^{-1}(p) - a^{-1}(p_0)\|_{\mathcal{L}(F;\, E)} \leq C\, \|a(p) - a(p_0)\|_{\mathcal{L}(E;\, F)}, \quad C = \text{constante},$$

d'où le résultat.

2) Montrons maintenant que l'application $p \to a^{-1}(p)$ *est holomorphe*. On part de l'identité :

$$\frac{a^{-1}(p) - a^{-1}(p_0)}{p - p_0} = -a^{-1}(p)\frac{(a(p) - a(p_0))}{p - p_0}\, a^{-1}(p_0),$$

d'où résulte que, lorsque $p \to p_0$, le premier membre a une limite, qui vaut :

$$-a^{-1}(p_0)\, a'(p_0)\, a^{-1}(p_0),$$

d'où le lemme.

LEMME 4.2. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert,* $H_1, H_2, \dots, H_k$*,* k *opérateurs hermitiens positifs dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ *et* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$*,* k *nombres,* $\in [0, 2]$*. Alors l'opérateur*

$$A(p) = 1 + \sum_{i=1}^{k} p^{\alpha_i} H_i$$

est inversible pour $\xi > 0$*; soit* $A^{-1}(p)$ *son inverse. On a les majorations suivantes :*

$$\|A^{-1}(p)\| \leq c_1, \quad \xi > 0, \ \textit{si } \alpha_i < 2 \textit{ pour tout } i; \tag{4.1}$$

$$\|A^{-1}(p)\| \leq \begin{cases} c_2 & , |\vartheta| \leq \pi/4 \\ c_3 \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{\xi |\eta|}, & |\vartheta| \geq \pi/4 \end{cases} \tag{4.2}$$

si certains α_i *sont égaux à* 2 ($p = r \exp(i\vartheta)$). Les c_i désignent diverses constantes dépendant seulement des H_i et des α_i).

DÉMONSTRATION.

Soit $x \in \mathcal{H}$, avec $\|x\| = 1$. Posons : $h_i(x) = (H_i \cdot x, x)$. On a :

$$\| A(p) \cdot x \| \geq | (A(p) \cdot x, x) | \geq$$
$$\geq \sup \left(\left| 1 + \sum_{i=1}^{k} r^{\alpha_i} \cos(\alpha_i \vartheta) h_i(x) \right|, \left| \sum_{i=1}^{k} r^{\alpha_i} \sin(\alpha_i \vartheta) h_i(x) \right| \right).$$

Lorsque ϑ varie dans $[-\pi/2, \pi/2]$ les $\sin(\alpha_i \vartheta)$ sont tous de même signe,

$$\left| \sum_{i=1}^{k} r^{\alpha_i} \sin(\alpha_i \vartheta) h_i(x) \right| = \pm \left(\sum_{i=1}^{k} r^{\alpha_i} \sin(\alpha_i \vartheta) h_i(x) \right)$$

et on peut supposer $\vartheta \geq 0$.

Distinguons deux cas :

1) $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 = \inf(\pi/2\,\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Alors $\cos(\alpha_i \vartheta) \geq 0$ pour tout i, et les H_i étant positifs,

$$\left| 1 + \sum_{i=1}^{k} r^{\alpha_i} \cos(\alpha_i \vartheta) h_i(x) \right| \geq 1.$$

Donc

$$\| A(p) \cdot x \| \geq 1 \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}, \text{ avec } \| x \| = 1.$$

2) $\vartheta_0 \leq \vartheta < \pi/2$ (ce qui n'a de sens que s'il existe des $\alpha_i > 1$). On suppose p et x fixés.

a) Il existe i tel que : $r^{\alpha_i} h_i(x) \geq 1/2\,k$. On a alors :

$$\| A(p) \cdot x \| \geq \frac{\sin \alpha_i \vartheta}{2\,k}. \tag{4.3}$$

b) On a : $r^{\alpha_i} h_i(x) \leq 1/2\,k$ pour tout i. On a alors :

$$\| A(p) \cdot x \| \geq 1 - k/2\,k = 1/2. \tag{4.4}$$

Les mêmes majorations ont lieu pour l'adjoint de $A(p)$. Il en résulte comme il est bien connu (cf. par exemple Stone [1] ou Riesz-Nagy [1], p. 264) la première partie du lemme.

Démontrons pour finir les majorations.

Si tous les α_i sont < 2, on a dans le cas 2), $\sin(\alpha_i \vartheta) \geq c_4 > 0$ d'où (4.1).

Supposons maintenant certains α_i égaux à 2. Pour $|\vartheta| \geq \pi/4$, (4.3) donne :

$$\| A(p) \cdot x \| \geq c_5 \, |\sin(2\vartheta)| = c_5 \frac{2\,\xi\,|\eta|}{\xi^2 + \eta^2} \quad \text{si } \alpha_i = 2,$$

et $\| A(p) \cdot x \| \geq c_6 > 0$ si $\alpha_i < 2$, d'où (4.2).

Les deux lemmes suivants sont des variantes immédiates du lemme précédent.

LEMME 4.3. *On donne les opérateurs H_i et les nombres α_i comme au lemme précédent; en outre $0 < \alpha_1 \leq 2$, et on donne $\sigma_0 > 0$. Alors l'opérateur*

$$A(p) = 1 + (p^{\alpha_1} - \sigma_0) H_1 + \sum_2^k p^{\alpha_i} H_i$$

est inversible pour $\xi > (2\sigma_0)^{1/\alpha_1}$ (ce qui n'est pas la meilleure constante) *et si* $A^{-1}(p)$ *est son inverse on a des majorations analogues à* (4.1), (4.2), *en remplacant* $\xi > 0$ *par* $\xi > (2\sigma_0)^{1/\alpha_1}$ (1).

LEMME 4.4. *On donne les H_i et α_i commé précédemment, avec : $0 < \alpha_i \leq 2$ pour tout i, et on donne $\sigma_0 > 0$. Alors l'opérateur $A(p) = 1 + \sum_{i=1}^k (p^{\alpha_i} - \sigma_0) H_i$ est inversible pour $\xi \geq \sup_i (2\sigma_0)^{1/\alpha_i}$ et on a des majorations analogues à* (4.1) *et* (4.2) *pour $\xi > \sup_i (2\sigma_0)^{1/\alpha_i}$.*

LEMME 4.5. *On donne encore k opérateurs positifs, $H_1, \ldots, H_k$; on donne également un opérateur hermitien quelconque, K et un nombre positif, σ_0. On pose :*

$$A(p) = 1 + iK + (p^{\alpha_1} - \sigma_0) H_1 + \sum_{j=2}^k p^{\alpha_j} H_j$$

où $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $\alpha_1 > 0$. Il existe ξ_0 tel que $A(p)$ soit inversible pour $\xi \geq \xi_0$, son inverse vérifiant :

$$\|A^{-1}(p)\| \leq 1, \quad \xi \geq \xi_0. \tag{4.5}$$

---

(1) On a pour $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| = 1$:

$$\|A(p)x\| \geq \sup\left(\left|1 + r^{\alpha_1}\left(\cos(\alpha_1\vartheta) - \frac{\sigma_0}{r^{\alpha_1}}\right) h_1(x) + \sum_{i=2}^k r^{\alpha_i} \cos(\alpha_i \vartheta) h_i(x)\right|,\right.$$
$$\left.\left|\sum_{i=1}^k r^{\alpha_i} \sin(\alpha_i\vartheta) h_i(x)\right|\right).$$

On prend $\vartheta_0 = \inf. \pi/3\alpha_i$.

Pour $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$, $\cos(\alpha_1\vartheta)$ est $\geq 1/2$, donc puisque $\xi > (2\sigma_0)^{1/\alpha_1}$ on a : $r^{\alpha_1} \geq 2\sigma_0$ donc : $\cos(\alpha_1\vartheta) - \frac{\sigma_0}{r^{\alpha_1}} \geq 0$ et donc $\|A(p)x\| \geq 1$. Si $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, ou bien il existe i tel que $r^{\alpha_i} h_i(x) \geq 1/2k$ et alors, $\|A(p)x\| \geq \sin(\alpha_i\vartheta) \cdot 1/2k$, ou bien $r^{\alpha_i} h_i(x) \leq 1/2k$ pour tout i; or : $|\cos(\alpha_1\vartheta) - \sigma_0/r^{\alpha_1}| \leq 3/2$ et

$$\left|1 + r^{\alpha_i}\left(\cos(\alpha_i\vartheta) - \frac{\sigma_0}{r^{\alpha_1}}\right) h_1(x) + \sum_{i=2}^k r^{\alpha_i}\cos(\alpha_i\vartheta) h_i(x)\right| \geq 1/4,$$

d'où le lemme, car on a des évaluations analogues pour $\|A(p)^* x\|$.

Méthode analogue pour le lemme 4.4.

DÉMONSTRATION.

Soit $x \in \mathcal{H}$, avec $\|x\| = 1$. On a :

$$|(A(p)\,x, x)| \geq \left| 1 + (r^{\alpha_1} \cos(\alpha_1 \vartheta) - \sigma_0)\, h_1(x) + \sum_{j=2}^{k} r^{\alpha_j} \cos(\alpha_j \vartheta)\, h_j(x) \right|.$$

On peut choisir $\xi_0 > 0$ tel que pour $\xi \geq \xi_0$ on ait : $r^{\alpha_1} \cos(\alpha_1 \vartheta) - \sigma_0 \geq 0$ (et si $\xi > 0$, $r^{\alpha_j} \cos(\alpha_j \vartheta) \geq 0$, car les ϑ_j sont ≤ 1). Il en résulte que pour $\xi \geq \xi_0$ on a :

$$|(A(p)\,x, x)| \geq 1, \text{ donc } \|A(p)\,x\| \geq 1 \text{ si } \|x\| = 1.$$

Majoration analogue pour $(A(p))^*$, d'où le lemme.

LEMME 4.6. *Soit H_1, H_2, H_3, trois opérateurs hermitiens; on suppose : $h_1(x) \geq 0$, $h_2(x)| \leq c^2 h_1(x)$, $|h_3(x)| \leq c_3 h_1(x)$ pour tout x dans $\mathcal{H}$. On pose :*

$$A(p) = 1 + (p^2 - \sigma_0)\, H_1 + p\, H_2 + H_3, \qquad \sigma_0 > 0.$$

L'opérateur $A(p)$ est inversible pour $\xi > \xi_0$ et vérifie alors :

$$\|A(p)^{-1}\| \leq c \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi}.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $x \in \mathcal{H}$, avec $\|x\| = 1$. On a : $|(A(p)\,x, x)| \geq \sup(|X|, |Y|)$ avec : $X = 1 + (\xi^2 - \eta^2 - \sigma_0)\, h_1(x) + \xi\, h_2(x) + h_3(x)$ et $Y = 2\,\xi\,\eta\, h_1(x) + \eta\, h_2(x)$.

1^{er} cas : $|\eta| \leq \eta_0$, $\eta_0 > 0$ fixé quelconque.

On a : $|\xi\, h_2(x) + h_3(x)| \leq (c_2\, \xi + c_3)\, h_1(x)$.

Or, il existe ξ_1, tel que pour $\xi \geq \xi_1$, et $|\eta| \leq \eta_0$ on ait : $(\xi^2 - \eta^2 - \sigma_0 - c_2\,\xi - c_3) \geq 0$. Alors : $|X| \geq 1$ pour $\xi \geq \xi_1$.

$2^{ème}$ *cas* : $|\eta| \geq \eta_0$.

On pose : $r^2 = \xi^2 + \eta^2$. Distinguons encore deux cas :

a) $(r^2 + \sigma_0)\, h_1(x) \geq 1/4$.

On a : $|h_2(x)| \leq c_2\, h_1(x) \leq 2\,\xi\, h_1(x)$ pour $\xi \geq c_2/2$, donc :

$$|Y| \geq |\eta|\,(2\,\xi - c_2)\, h_1(x)$$

donc :

$$|Y| \geq \frac{(2\,\xi - c_2)\,|\eta|}{4\,(\Omega^2 + \sigma_0)} \text{ pour } \xi > c_2/2.$$

b) $(r^2 + \sigma_0)\, h_1(x) \leq 1/4$.

On a alors :

$$|(\xi^2-\eta^2-\sigma_0)\,h_1(x)+\xi\,h_2(x)+h_3(x)|\le 1/4+\frac{c_2\,\xi+c_3}{4\,(\Omega^2+\sigma_0)}$$

et ceci est $\le 1/2$ pour $\xi\ge\xi_2$, donc $|X|\ge 1/2$ pour $\xi\ge\xi_0$.

On a des majorations analogues pour $A\,(p)^*$, d'où le lemme en prenant ξ_0 assez grand.

§ 2. Problèmes mixtes

1. Position des problèmes mixtes

On donne comme au Chap. I, N° 1 du § 1, les espaces V et Q avec : $\mathcal{D}\subset V\subset\subset Q\subset\mathcal{D}'$. Pour éviter toute difficulté relative aux espaces vectoriels que l'on va introduire, on *supposera toujours que Q est un espace de Banach.* Sur $V\times V$, on donne une forme sesqui-linéaire $((u,\,v))$ — sans aucune hypothèse supplémentaire pour l'instant.

Soit $\mathcal{H}$ et N les espaces (de Banach) associés à cette forme, Λ l'opérateur qu'elle définit, élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H};\,Q')$.

On considère alors l'opérateur produit tensoriel :

$$1\otimes\Lambda,\ \text{élément de}\ \mathcal{L}(\mathcal{D}'_+\hat{\otimes}\mathcal{H};\ \mathcal{D}'_+\hat{\otimes}Q').$$

La définition directe de cet opérateur (sans produits tensoriels) est la suivante : soit $T\in\mathcal{D}'_+(t\,\mathcal{H})$; pour tout $\varphi\in\mathcal{D}_-$, $T(\varphi)$ est dans $\mathcal{H}$ et $\Lambda\,T(\varphi)\in Q'$; $\varphi\to\Lambda\,T(\varphi)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_-$ dans Q', donc définit $\Lambda\cdot T$, élément de $\mathcal{D}'_+(t,\,Q')$, $\Lambda\,T=(1\otimes\Lambda)\,T$. En effet il en est ainsi si $T=e\otimes u$, $e\in\mathcal{D}'_+$, $u\in\mathcal{H}$. *Sur les exemples nous utiliserons la notation $\Lambda\cdot T$, mais pour la théorie nous conserverons la notation* $(1\otimes\Lambda)\,T$.

On donne ensuite une distribution :

$$K\in\mathcal{D}'_+(t,\ \mathcal{L}(\mathcal{H};\,Q')). \tag{1.1}$$

Cette distribution définit une application linéaire continue, notée K^*, soit $T\to K*T$, de $\mathcal{D}'_+(t,\,\mathcal{H})$ dans $\mathcal{D}'_+(t,\,Q')$.

PROBLÈME 1.1. *Pour quelles distributions K, l'opérateur*

$$1\otimes\Lambda+K^* \tag{1.2}$$

est-il un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t,\,N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t,\,Q')$?

Problèmes mixtes correspondants

Au problème 1.1 est attaché le

PROBLÈME 1.2. Trouver U dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H})$ [1], solution de

$$(1.3) \qquad (1 \otimes \Lambda + K^*)\, U = S,$$

où S est donné dans $\mathcal{D}'_+(t, Q')$, avec *les conditions aux limites*

$$(1.4) \qquad h - U \in \mathcal{D}'_+(t, N),$$

où h est donné dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H})$.

DÉFINITION 1.1. Le problème 1.2 est dit : *problème mixte attaché à l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$, *relativement à la forme* $((u, v))$.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, alors $V = Q = N$, $Q' = V'$, le problème 1.2 est dit : *problème mixte avec les conditions aux limites de Dirichlet.*

On voit immédiatement que si pour K donné le problème 1.1 est résolu par l'affirmative, alors le problème mixte 1.2 admet une solution unique dépendant continûment des données.

Les problèmes mixtes fins

On a rappelé dans l'introduction la définition des problèmes mixtes au sens de M. Hadamard. On peut maintenant préciser le problème comme suit :

PROBLÈME 1.3. Trouver une application $t \to U(t)$, une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t > 0$ dans $\mathcal{H}$, solution de

$$(1.5) \qquad \Lambda U(t) + \frac{\partial}{\partial t} U(t) \left(\text{resp. } + \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t) \text{ au lieu de } + \frac{\partial}{\partial t} U(t)\right) = S(t)$$

où les dérivées en t sont prises *au sens usuel*, où $t \to S(t)$ est une application continue de $t > 0$ dans Q', avec *les conditions aux limites* :

$$(1.6) \qquad U(t) - h(t) \in N \text{ pour tout } t > 0,$$

où $t \to h(t)$ est une application une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t > 0$ dans $\mathcal{H}$, avec *les conditions initiales* :

$$(1.7) \qquad U(t) \to U_0 \text{ dans } \mathcal{H} \text{ lorsque } t \to 0$$

(resp. et en outre

$$(1.8) \qquad \frac{d}{dt} U(t) \to U_1 \text{ dans } \mathcal{H} \text{ lorsque } t \to 0), \qquad (U_0 - h(0) \in N \text{ et } U_1 - \frac{d}{dt} h(0) \in N).$$

---

[1] On peut remplacer $\mathcal{H}$ par $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ étant défini p. 28.

Définition 1.2. Le problème 1.3 est dit : *problème mixte fin* attaché à l'opérateur $\Lambda + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\text{resp. } + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$, relativement à la forme $((u, v))$.

Transformons le problème 1.3. On pose $u(t) = U(t) - h(t)$ et $S(t) - \Lambda h(t) - \dfrac{\partial}{\partial t} h(t)\left(\text{resp. } - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} h(t)\right) = T(t)$. Alors le problème 1.3 équivaut à trouver $t \to u(t)$ une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t > 0$ dans N, solution de

$$\Lambda u(t) + \frac{\partial}{\partial t} u(t) \quad \left(\text{resp. } + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t)\right) = T(t) \quad t > 0 \tag{1.9}$$

avec les conditions initiales :

$$u(t) \to u_0 \text{ dans } N \left(\text{resp. et en outre } \frac{d}{dt} u(t) \to u_1 \text{ dans } N\right), \; t > 0.$$

On utilise maintenant la méthode de Schwartz pour le problème de Cauchy (cf. Schwartz [1], p. 131 et sq.) : *on fait passer les conditions initiales au* $2^{\text{ème}}$ *membre.* Pour cela on considère la distribution $\tilde{u}$ dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$, égale à 0 pour $t < 0$ et à $u(t)$ pour $t > 0$. Dans ces conditions si u est solution de (1.9) avec les conditions initiales voulues, $\tilde{u}$ est solution dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de :

$$(1 \otimes (\Lambda))\, \tilde{u} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \quad \left(\text{resp. } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}\right) = \tilde{T} + \delta \otimes u_0 \quad (\text{resp. } + \delta' \otimes u_0 + \delta \otimes u_1) \tag{1.10}$$

où $T \in \mathcal{D}'_+(t, Q')$ est nulle pour $t < 0$ et $= T(t)$ pour $t > 0$, les dérivées en t étant prises cette fois *au sens des distributions*.

Sous la forme (1.10) *on peut laisser tomber toute condition de continuité en t*; on est donc amené à *remplacer* le problème 1.3 par le

Problème 1.4. Trouver $\tilde{u}$ dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$, nulle pour $t < 0$, solution de

$$(1 \otimes \Lambda)\, \tilde{u} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \quad \left(\text{resp. } + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}\right) = T_1, \tag{1.11}$$

où T_1 est dans $\mathcal{D}'_+(t, Q')$ nulle pour $t < 0$.

Mais les conditions « nulles pour $t < 0$ » sont secondaires; on peut les remplacer par « de support en t limité à gauche », donc : trouver u dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ solution de

$$(1 \otimes \Lambda) u + \frac{\partial}{\partial t} u \quad \left(\text{resp. } \frac{\partial^2}{\partial t^2} u\right) = T, \; T \text{ donné dans } \mathcal{D}'_+(t, Q').$$

Sous cette forme les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial t}$ ou $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ n'interviennent pas de façon essentielle (au moins pour *poser* le problème); on peut donc les remplacer par des opérateurs beaucoup plus généraux de composition en t par des distributions K comme on a vue et finalement on a remplacé le problème 1.3 par le

PROBLÈME 1.5. Trouver u dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$, solution de

$$(1\otimes\Lambda)\, u + K * u = T, \tag{1.12}$$

où $T \in \mathcal{D}'_+(t, Q')$.

Ce dernier problème revient au problème 1.2 avec $h=0$.

En resumé : en théorie des distributions on voit que l'on est amené à remplacer le problème mixte fin 1.3 par le problème mixte 1.1. Si le problème mixte fin admet une solution elle est donnée par la solution du problème mixte. Par contre si l'on prend dans (1.11) $\tilde{u}$ solution du problème mixte, elle n'est pas forcément solution du problème mixte fin. Il y a donc tout avantage à s'attaquer d'abord au problème mixte 1.1; le problème mixte fin pourra être étudié ensuite.

2. Théorème d'isomorphisme

La méthode de résolution que l'on va utiliser est d'effectuer une transformation de Laplace en t — ce qui suppose au moins pour commencer, que K admet une transformée de Laplace en t. On suppose donc :

$$\exp(-\xi t)\, K \in \mathcal{S}'(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')) \text{ pour } \xi > \xi_K. \tag{2.1}$$

On désigne par $\hat{K}(p)$ la transformée de Laplace en t de K :

$$\hat{K}(p) = K(\exp(-pt)), \qquad \xi > \xi_K. \tag{2.2}$$

On a : $\hat{K}(p) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$.

Notons maintenant que l'opérateur $1\otimes\Lambda + K^*$ n'est autre que l'opérateur de composition en t par la distribution :

$$\delta\otimes\Lambda + K, \text{ élément de } \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')), \tag{2.3}$$

distribution qui admet une transformée de Laplace en t, donnée par :

$$\Lambda + \hat{K}(p), \text{ élément de } \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q'). \tag{2.4}$$

On fait alors les hypothèses suivantes :

$$\text{(H 1)} \quad \begin{cases} \text{Il existe } \xi_0 \text{ tel que pour tout } \xi > \xi_0\ (\xi_0 > \xi_K), \\ \Lambda + \hat{K}(p) \text{ soit un isomorphisme de } N \text{ sur } Q', \text{ d'inverse } G(p); \end{cases}$$

(2.5) $$(\Lambda + \hat{K}(p))\, G(p) = 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q'),$$

et

(2.6) $$G(p)\,(\Lambda + \hat{K}(p)) = 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N).$$

(H 2) $$\begin{cases} \text{Il existe un nombre } b \text{ tel que} \\ \exp(-b\,\xi)\, \| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)} \leq \text{pol}(|p|) \ (^1). \end{cases}$$

On a alors le

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *il existe une distribution et une seule, soit* $\mathcal{G}$, *dans l'espace* : $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, *admettant une transformée de Laplace en* t, *telle que*

(2.7) $$(\delta \otimes \Lambda + K) * \mathcal{G} = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q').$$

On a alors :

(2.8) $$\mathcal{G} * (\delta \otimes \Lambda + K) = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N).$$

Démonstration.

Soit $\tilde{G}(p)$ la transformée de Laplace de $\mathcal{G}$, supposée exister. On a alors : $(\Lambda + \hat{K}(p))\, \tilde{G}(p) = 1$, et donc, grâce à (H 1), on a : $G(p) = \tilde{G}(p)$. Il reste à vérifier :

a) que la fonction $p \to G(p)$ est holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans $\mathcal{L}(Q'; N)$ et est transformée de Laplace d'une distribution $\in \mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(Q'; N))$.

b) que $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$.

Si a) et b) sont vérifiés on aura (2.7), et (2.8) résultera de (2.6).

Vérification de a).

On a, grâce à (H 2) :

(2.9) $$\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)} \leq \exp(b\,\xi)\, \text{pol}(|p|),$$

donc $\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)}$ est borné sur tout compact du demi plan $\xi > \xi_0$; alors par le lemme 4.1, § 1, p. 90 et 91, l'application $p \to G(p)$ est holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans $\mathcal{L}(Q'; N)$. Il résulte de (2.9) que $G(p)$ est transformée de Laplace de $\mathcal{G}$.

Vérification de b).

De (2.9) et du lemme 3.3, § 1, p. 90, résulte que $\mathcal{G}$ *est nulle pour* $t < -b$, ce qui achève la démonstration du théorème.

On déduit aussitôt du théorème 2.1 le

---

(1) On désigne par pol $(|p|)$ divers polynomes en $|p|$ à coefficients positifs.

THÉORÈME 2.2. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), p. 98 et 99, *l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

COROLLAIRE 2.1. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *le problème mixte* 1.2, *admet une solution unique dépendant continûment des données.*

DÉFINITION 2.1.

a) La distribution $\mathcal{G}$, donnée par le théorème 2.1 est *la distribution de Green* de l'opérateur $1 \otimes \Lambda + K^*$, relativement à la forme $((u, v))$.

b) La distribution $\mathcal{G}$ définit une application linéaire continue : $T \to \mathcal{G} * T$ de $\mathcal{D}'_+(t, Q')$ dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$; soit $\mathcal{G}^*$ cette application; c'est *l'opérateur de Green* de $1 \otimes \Lambda + K^*$.

c) L'opérateur $\mathcal{G}^*$ définit en particulier une application linéaire continue de $\mathcal{D}_{\Omega \times (t)}$ dans $\mathcal{D}'_{\Omega \times (t)}$, $(t) =$ axe des t; cette application est définie par un noyau distribution (théorème des noyaux de Schwartz), soit $\mathcal{G}_{x, y, t-\tau}$ ce noyau; c'est le *noyau de Green de* $1 \otimes \Lambda + K^*$.

De ce qui précède, dégageons également, en raison de son importance pour les applications (voir notamment les travaux de Garnir, cités dans la bibliographie) le

THÉORÈME 2.3. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *la distribution de Green peut être obtenue par transformation de Laplace en* t.

REMARQUE 2.1.

Sous les hypothèses (H 1) et (H 2), la solution du problème 1.2 (p. 96) est donnée par :

$$U = h + \mathcal{G} * (S - T), \quad T = (1 \otimes \Lambda + K^*)\, h. \tag{2.10}$$

Cette solution U *ne peut pas* en général être calculée par transformation de Laplace en t; en effet dans (2.10), h, S, T peuvent être à croissance quelconque en t; seule $\mathcal{G}$ peut être calculé par transformation de Laplace; dans (2.10) les produits de composition en t ont un sens pour des raisons de support, non pour des raisons de croissance à l'infini en t.

Notons maintenant le

THÉORÈME 2.4. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *si dans le problème* 1.2, p. 96, S *et* h *sont indéfiniment différentiables en* t (i.e. $S \in \mathcal{D}_+(t, Q')$, $h \in \mathcal{D}_+(t, \mathcal{H})$) *alors* U *est indéfiniment différentiable en* t.

DÉMONSTRATION.

Conséquence de la formule (2.10) et des propriétés générales des produits de composition en t.

REMARQUE 2.2.

Comme $\mathcal{G}$ est dans l'espace $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, elle est d'ordre fini en t. Cet ordre est facile à préciser dans chaque cas particulier.

3. Premier exemple général d'application du théorème d'isomorphisme

On donne cette fois :

$$K \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; Q')) \text{ avec :} \tag{3.1}$$

$$\text{(M 1)} \quad \begin{cases} K \text{ admet une transformée de Laplace en } t, \ \hat{K}(p), \text{ avec} \\ \|\hat{K}(p)\|_{\mathcal{L}(V; Q')} \leq \text{pol}(|p|), \quad \xi > \xi_1. \end{cases}$$

On donne Λ défini par $((u, v))$ sur V, et l'on considère la forme sesqui-linéaire :

$$((u, v))(p) = ((u, v)) + \langle \hat{K}(p) u, \bar{v} \rangle. \tag{3.2}$$

Soit :

$$((u, v))(p) = ((u, v))_1(p) + i\,((u, v))_2(p)$$

la décomposition en partie hermitienne et anti-hermitienne :

$$((u, v))_1(p) = ((u, v))_1 + 1/2\,(\langle \hat{K}(p) u, \bar{v} \rangle + \langle u, \overline{\hat{K}(p) v} \rangle).$$

On fait l'hypothèse :

$$\text{(M 2)} \quad \begin{cases} \text{Il existe } \xi_0 > \xi_1 \text{ tel que pour } \xi > \xi_0 \text{ on ait :} \\ ((u, u))_1(p) \geq \dfrac{1}{\text{pol}\,|p|}\ \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V. \end{cases}$$

On a alors la

PROPOSITION 3.1. *Sous les hypothèses* (M 1) *et* (M 2), *les hypothèses* (H 1) *et* (H 2) (p. 98 et 99) *ont lieu avec* $b = 0$.

DÉMONSTRATION.

On cherche l'inverse de $\Lambda + \hat{K}(p)$. Soit donc à résoudre

$$(\Lambda + \hat{K}(p))\, u = f, \quad u \in N, \ f \in Q'. \tag{3.3}$$

Si (3.3) admet une solution, alors, pour tout v dans V, on a :

$$(3.4) \qquad ((u, v))(p) = \langle f, \bar{v} \rangle.$$

Réciproquement, si u est dans V, et vérifie (3.4) pour tout $v \in V$, alors, (3.4) a lieu en particulier pour tout $v = \varphi$ dans $\mathcal{D}$, donc on a (3.3), puis l'on constate que u est dans N. Tout revient donc à résoudre (3.4).

Or si f est fixé dans Q', la forme semi-linéaire $v \to \langle f, \bar{v} \rangle$ est continue sur V, donc :

$$(3.5) \qquad \langle f, \bar{v} \rangle = ((J(p) f, v))_1 (p),$$

ce qui définit $J(p)$ élément de $\mathcal{L}(Q'; V)$ [1].

De même si u est fixé dans V, la forme $v \to ((u, v))_2 (p)$ est continue sur V, donc :

$$(3.6) \qquad ((u, v))_2 (p) = ((H(p) u, v))_1 (p),$$

ce qui définit $H(p) \in \mathcal{L}(V; V)$, hermitien, et (3.4) équivaut à : $(1 + i H(p)) u = J(p) f$, qui admet une solution unique : si

$$(3.7) \qquad G(p) = (1 + i H(p))^{-1} J(p),$$

elle est donnée par : $u = G(p) f$. Majorons maintenant $\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)}$. On déduit de 3.5

$$((J(p) f, J(p) f))_1 (p) = \langle f, \overline{J(p) f} \rangle$$

donc, grâce à (M 2),

$$\| J(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; V)} \leq \text{pol}(|p|).$$

Par ailleurs :

$$\| (1 + i H(p))^{-1} \| \leq 1, \text{ donc } \| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; V)} \leq \text{pol}(|p|).$$

Il reste à majorer $G(p)$ dans $\mathcal{L}(Q'; N)$. Or si $f \in Q'$, et si $u = G(p) f$, on a :

$$\Lambda u = f - \hat{K}(p) u,$$

donc :

$$\| \Lambda u \|_{Q'} \leq \| f \|_{Q'} + \text{pol}(|p|) \; \| u \|_V$$

(grâce à (M 1)) d'où l'on déduit : $\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)} \leq \text{pol}(|p|)$ d'où la proposition.

On a donc tous les résultats du N° 2, et notamment le

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* (M 1) *et* (M 2), *l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

L'opérateur inverse est $\mathcal{G}^*$, opérateur de Green, la distribution de Green $\mathcal{G}$ étant obtenue par transformation de Laplace en t.

---

[1] Grâce à (M 2), $((u, v))_1 (p)$ est pour $\xi > \xi_0$ un produit scalaire hilbertien sur V, de norme correspondante équivalente à $\| u \|_V$.

Etude de la stabilité

On donne Λ et K comme précédemment, avec (M 1) et (M 2); on précise les polynomes en p :

$$\|\hat{K}(p)\|_{\mathcal{L}(V;\,Q')} \leq P_1(|p|),$$

$$\|((u,u))_1(p)\| \geq \frac{1}{P_2(|p|)}\|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V.$$

On donne alors une suite des distributions : $K^k \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; Q'))$ (V et Q' sont fixes), et une suite de formes sur $V \times V$: $((u, v))^k$, qui définit Λ^k. On suppose que les hypothèses suivantes ont lieu :

(SM 1) $$\|\hat{K}^k(p)\|_{\mathcal{L}(V;\,Q')} \leq P_1(|p|),$$

(SM 2) $$((u,u))_1^k(p) \geq \frac{1}{P_2(|p|)}\|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V,\ \xi < \xi_0,$$

(SM 3) $$\begin{cases} |((u,v))^k(p) - ((u,v))(p)| \leq \varepsilon_k P_3(|p|)\,\|u\|_V\,\|v\|_V \ {}^{(1)}, \\ \text{où } \varepsilon_k \to 0 \text{ si } k \to \infty,\ P_3(|p|) \text{ indépendant de } k. \end{cases}$$

De (SM 1) et (SM 2) résulte en vertu du théorème 3.1; $1 \otimes \Lambda^k + K^{k*}$ *est une isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$. Soit $\mathcal{G}^k$ la distribution de Green de cet opérateur. On a : $\mathcal{G}^k \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N^k))$, donc en particulier : $\in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; V))$. On a alors le

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses* (M 1), (M 2), (SM 1), (SM 2) *et* (SM 3), *la distribution de Green* $\mathcal{G}^k$ *de* $1 \otimes \Lambda^k + K^k$ *tend, dans l'espace* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; V))$, *vers la distribution de Green* $\mathcal{G}$ *de* $1 \otimes \Lambda + K^*$.

DÉMONSTRATION.

Toutes les distributions $\mathcal{G}^k$ sont nulles pour $t < 0$. On aura donc montré davantage que le théorème si l'on montre que $\mathcal{G}^k \to \mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(Q'; V)$.

Or il résulte du Chap. I, § 1, N° 7, qui si $G^k(p) f = u^k$ (2) et $G(p) f = u$, alors :

$$\|u^k - u\|_V \leq \varepsilon_k P_2(|p|)\,P_3(|p|)\ \|u\|_V,$$

d'où l'on déduit facilement le résultat.

4. Deuxième exemple général d'application du théorème d'isomorphisme

On donne, comme au Chap. I, § 1, N° 8, un opérateur D avec sa décomposition :

(4.1) $$D = \sum_{i,j=1}^{\nu} {}^t A_i\, g_{ij}\, A_j\,.$$

---

(1) $((u, v))^k(p) = ((u, v))^k + \langle \hat{K}^k(p)\, u, \bar{v} \rangle$.

(2) $G^k(p)$ = transformée de Laplace $\mathcal{G}^k$.

On suppose en outre qu'est donné A_0, isomorphisme de E sur L^2, de sorte que $\mathcal{E}(A)$ est bien déterminé (cf. p. 38 et 39). On suppose donné V, contenu dans $\mathcal{E}(A)$, et contenant $\mathcal{D}(A)$, et P, opérateur de perturbation :

$$P \in \mathcal{L}(V; E') \text{ si } V \text{ est différent de } \mathcal{D}(A);$$

$$P = P_1 + P_2,\ P_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A); E'),\ P_2 \in \mathcal{L}(E; \mathcal{D}'(A)) \text{ si } V = \mathcal{D}(A).$$

On prend alors :

$$\Lambda = D + P. \tag{4.2}$$

Il n'y a pas en général (dans la pratique) de terme en M (avec les notations de la page 39) dans les problèmes mixtes.

Exemple 4.1.

On considère les problèmes mixtes relatifs à $-\Delta + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, donc $K = \delta''$, $\Lambda = -\Delta$, $M = P = 0$.

Sur $V \times V$, on considère alors la forme :

$$((u, v)) = \sum_{i,j=1}^{\nu} (g_{ij} A_j u, A_i v)_{L^2} + \langle P u, \bar{v} \rangle + (B \gamma u, \gamma v)_F \tag{4.3}$$

(on prend $B = 0$ si l'on ne peut définir d'opérateur frontière raisonnable $u \to \gamma u$, de $\mathcal{E}(A)$ dans l'espace de Hilbert F). L'opérateur défini par cette forme est $\Lambda = D + P$.

On prend $Q = E$ si $V \neq \mathcal{D}(A)$ et $Q = \mathcal{D}(A)$ si $V = \mathcal{D}(A)$. Dans tous les cas, Q est un espace de Hilbert.

Pratiquement, il serait trop restrictif de supposer la forme $((u, v))$ elliptique.

Exemple 4.2.

On considère le même opérateur que dans l'exemple 4.1. On prend

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega),$$

et

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u,\ \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2},$$

et l'on n'a pas *en général*

$$((u, u))_1 = ((u, u)) \geq a \, \|u\|^2_{\mathcal{E}^1_{L^2}}, \qquad a > 0,$$

pour tout $u \in V$ [1].

---

[1] C'est toutefois vrai si par exemple V est égal à l'espace $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ et Ω étant borné (Gårding).

Par contre l'hypothèse suivante est très fréquemment vérifiée dans les problèmes de la Physique Mathématique:

$$\text{(A 1)} \qquad \begin{cases} \text{Il existe un nombre } \sigma_0 > 0 \text{ tel que} \\ ((u, u))_1 + \sigma_0 (A_0 u, A_0 u)_{L^2} \geq a \| u \|_V^2, \quad a > 0, \text{ pour tout } u \in V \text{ [1]}. \end{cases}$$

EXEMPLE 4.3.

On reprend l'opérateur de l'exemple 4.2. Alors A_0 = opérateur identique de L^2 sur lui-même; tout nombre $\sigma_0 > 0$ convient.

REMARQUE 4.1.

Sous l'hypothèse (A 1) la quantité $((u, v))_1 + \sigma_0 (A_0 u, A_0 v)_{L^2}$ définit sur V un produit scalaire hilbertien de norme correspondante équivalente à $\| u \|_V$. Il y aura souvent intérêt, pour simplifier quelques calculs, à considérer le produit scalaire $((u, v))_1 + \sigma_0 (g_1 A_0 u, A_0 v)_{L^2}$, où $g_1 \in \mathcal{L}(L^2; L^2)$ est un opérateur strictement positif, i.e.

$$(g_1 f, f)_{L^2} \geq c_1 \| f \|_{L^2}^2, \quad c_1 > 0, \text{ pour tout } f \in L^2.$$

Au sujet de (A 1), on a la

PROPOSITION 4.1. *On suppose que l'opérateur D, sous la forme* (4.1) *est V-elliptique* (cf. p. 43) *et que l'on a :*

$$\text{(4.4)} \qquad \| \gamma u \|_F^2 \leq c_1 \| u \|_0 \| u \|_1 + c_2 \| u \|_0^2 \textit{ pour tout } u \textit{ dans } \mathcal{E}(A) \text{ [2]}.$$

Alors (A 1) *a lieu, quels que soient les opérateurs B et P.*

DÉMONSTRATION.

On a en effet :

$$((u, u))_1 = \Sigma \left(\frac{g_{ij} + g_{ji}^*}{2} A_j u, A_i u \right)_{L^2} + \left(\frac{B + B^*}{2} \gamma u, \gamma u \right)_F + \tfrac{1}{2} (\langle P u, \bar{u} \rangle + \langle u, \overline{P u} \rangle).$$

Le 1er terme est $\geq a_1 \| u \|_1^2$.

Le 2ème terme est majoré en module par :

$$c_3 \| u \|_0 \| u \|_1 + c_4 \| u \|_0^2.$$

Majorons maintenant $| \langle P u, \bar{u} \rangle |$.

---

[1] Voir note 2, p. 21.

[2] Ceci a souvent lieu lorsque γ est un opérateur de prolongement en moyenne (cf. Deny-Lions [1]).

Si $P \in \mathcal{L}(V; E')$, on a : $|\langle Pu, \bar{u}\rangle| \leq c_5 \|u\|_V \|u\|_E$,

d'où :

$$\tfrac{1}{2}|\langle Pu, \bar{u}\rangle + \langle u, \overline{Pu}\rangle| \leq c_6(\|u\|_0^2 + \|u\|_0 \|u\|_1).$$

Même majoration si $P = P_1 + P_2$, dans le cas $V = \mathcal{D}(A)$.

Dans tous les cas on a donc :

$$\left|\left(\frac{B+B^*}{2}\gamma u, \gamma u\right)_F + \frac{1}{2}(\langle Pu, \bar{u}\rangle + \langle u, \overline{Pu}\rangle)\right| \leq c_7(\|u\|_0^2 + \|u\|_0\|u\|_1).$$

Or pour σ_0 assez grand,

$$a_1\|u\|_1^2 + \sigma_0\|u\|_0^2 - c_7(\|u\|_0^2 + \|u\|_0\|u\|_1)$$

est $\geq a_2\|u\|_1^2$ d'où le résultat.

On donne maintenant $K \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; Q'))$, admettant une transformée de Laplace en t, et avec (M 1), que l'on écrit :

(A 2) $$\|\hat{K}(p)\|_{\mathcal{L}(V, Q')} \leq \text{pol}(|p|), \ \xi > \xi_1.$$

Cherchons des conditions suffisantes pour que $\Lambda + \hat{K}(p)$ soit un isomorphisme de N sur Q'. On a à résoudre :

(4.5) $\Lambda u + \hat{K}(p) u = f$, f donné dans Q', u cherché dans N;

si u est solution de (4.5), alors pour tout v dans V, on a :

(4.6) $$((u, v)) + \langle \hat{K}(p) u, \bar{v}\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle$$

et réciproquement, si u est dans V, et vérifie (4.6), on montre par le procédé habituel, que u est dans N et vérifie (4.5). Donc tout revient à résoudre (4.6). Or on peut écrire (4.6) sous la forme :

(4.7) $$((u, v))_1 + \sigma_0(A_0 u, A_0 v)_{L^2} + i((u, v))_2 + \\ + \langle \hat{K}(p) u, \bar{v}\rangle - \sigma_0(A_0 u, A_0 v)_{L^2} = \langle f, \bar{v}\rangle.$$

On pose :

(4.8) $$((u, v))_{1,\sigma_0} = ((u, v))_1 + \sigma_0(A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Si (A 1) a lieu, on a les formules suivantes :

(4.9) $$\langle f, \bar{v}\rangle = ((J(\sigma_0) f, v))_{1,\sigma_0},$$

ce qui définit $J(\sigma_0)$, élément de $\mathcal{L}(Q'; V)$, puis :

(4.10) $$((u, v))_2 = ((H(\sigma_0) u, v))_{1,\sigma_0},$$

ce qui définit $H(\sigma_0)$ élément de $\mathcal{L}(V; V)$, opérateur hermitien pour la structure $((u, v))_{1,\sigma_0}$; on a enfin :

$$\langle \hat{K}(p)\, u, \bar{v} \rangle - \sigma_0 (A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((L(p, \sigma_0)\, u, v))_{1,\sigma_0}. \tag{4.11}$$

Dans ces conditions, l'équation (4.6) équivaut à :

$$X(p, \sigma_0)\, u = J(\sigma_0)\, f, \tag{4.12}$$

où

$$X(p, \sigma_0) = 1 + i\, H(\sigma_0) + L(p, \sigma_0). \tag{4.13}$$

On peut multiplier les deux membres de (4.12) par $(1 + i\, H(\sigma_0))^{-1}$ mais cette opération n'est pas utile pratiquement. On est donc conduit à l'hypothèse suivante :

(A 3) Il existe $\xi_0 > \xi_1$, tel que pour $\xi > \xi_0$, l'opérateur $X(p, \sigma_0)$ soit inversible dans $\mathcal{L}(V; V)$, et vérifie :

$$\| X(p, \sigma_0)^{-1} \|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq \text{pol}\,(|p|)\text{ [1]}.$$

On peut maintenant démontrer la

Proposition 4.2. *Si les hypothèses* (A 1), (A 2) *et* (A 3) *ont lieu, alors les hypothèses* (H 1) *et* (H 2) (p. 98 et 99) *ont lieu* (avec $b = 0$).

Démonstration.

On vient de voir que (4.5) équivaut à (4.12), donc, si (A 3) a lieu, (4.5) admet une solution unique :

$$u = G(p)\, f, \text{ pour } \xi > \xi_0, \tag{4.14}$$

avec :

$$G(p) = X(p, \sigma_0)^{-1}\, J(\sigma_0). \tag{4.15}$$

De plus $G(p)$ est dans l'espace $\mathcal{L}(Q'; N)$. On a donc déja (H 1).

Il reste à majorer $\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q', N)}$. Or, par (A 3), on sait déja que : $\| G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; V)} \leq$ $\leq \text{pol}\,(|p|)$. En outre si $u = G(p)\, f$, alors $Du + Pu + \hat{K}(p)\, u = f$, donc :

$$\| Du \|_{Q'} \leq \| f \|_{Q'} + \| \hat{K}(p)\, u \|_{Q'} + \| Pu \|_{Q'} \leq \| f \|_{Q'} + \text{pol}\,(|p|)\, \| u \|_V$$

d'où le résultat.

---

[1] On pourrait prendre plus généralement :

$$\| X(p, \sigma_0)^{-1} \|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq \exp(b\, \xi)\, \text{pol}\,(|p|).$$

REMARQUE 4.2.

La condition (A 3) a notamment lieu si :

$$|((X(p, \sigma_0) u, u))| \geq \frac{1}{\text{pol}\,|p|} \| u \|_V^2,$$

et si on a une majoration analogue pour $X(p, \sigma_0)^*$. Ceci a notamment lieu si

$$((u, u))_1 + \text{Re} \langle \hat{K}(p) u, \bar{u} \rangle \geq \frac{1}{\text{pol}\,|p|} \| u \|_V^2 \quad (1)$$

ce qui n'est autre que (M 2), p. 101.

Il résulte de la proposition 4.2 et du théorème 2.2, le :

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèses* (A 1), (A 2) *et* (A 3), *l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

Ce théorème est le plus important pour les applications pratiques. La vérification de (A 1) étant généralement triviale, et (A 2) étant une simple constatation, *la seule difficulté pour passer du Théorème* 4.1 *aux applications pratiques est la vérification de* (A 3), *qui est un problème d'inversion d'opérateurs dans un espace de Hilbert.* Pour cela, on appliquera les lemmes du § 1, N° 4, p. 90 et suivantes (ou au besoin des résultats semblables).

Stabilité

On donne une suite d'opérateurs Λ^k, définis par des formes $((u, v))^k$ sur $V \times V$. On fait l'hypothèse :

(SA 1) $\begin{cases} ((u, v))^k \to ((u, v)) \text{ uniformément lorsque } u \text{ et } v \text{ demeurent dans un en-} \\ \text{semble borné de } V. \end{cases}$

Si (A 1) a lieu, il en résulte :

$$(4.16) \quad \begin{cases} \text{il existe } \sigma_0 > 0 \text{ tel que} \\ \qquad ((u, u))_1^k + \sigma_0 (A_0 u, A_0 u)_{L^2} \geq a \| u \|_V^2 \\ \text{pour tout } u \in V \text{ et pour tout } k. \end{cases}$$

On donne ensuite une suite de distributions K^k, éléments de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; Q'))$, admettant des transformées de Laplace en t soit $\hat{K}^k(p)$, holomorphe pour $\xi > \xi_1$, ξ_1 indépendant de k, et on suppose que

$$\text{(SA 2)} \qquad \| \hat{K}^k(p) - \hat{K}(p) \|_{\mathcal{L}(V; Q')} \leq \eta_k P_1(|p|), \quad \eta_k \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

On considère alors l'opérateur

$$X^k(p, \sigma_0) = 1 + iH^k + L^k(p, \sigma_0), \tag{4.17}$$

construit à partir de $((u, v))^k$ et K^k comme $X(p, \sigma_0)$ l'est à partir de $((u, v))$ et K. On suppose que

(SA 3) $\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe } \xi_0 \text{ indépendant de } k \text{ tel que pour } \xi > \xi_0,\ X^k(p, \sigma_0) \text{ soit inversible} \\ \text{dans } \mathcal{L}(V; V), \text{ et que son inverse vérifie :} \\ \qquad\qquad \| X^k(p, \sigma_0)^{-1} \|_{\mathcal{L}(V;\, V)} \leq \varrho_2(|p|). \end{array}\right.$

On a le

THÉORÈME 4.2. *Sous les hypothèses* (A 1), (SA 1), (SA 2), (SA 3), *la distribution de Green* $\mathcal{G}^k$ *de* $1 \otimes \Lambda^k + K^{k*}$ *tend, dans l'espace* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; V))$ *vers la distribution de Green* $\mathcal{G}$ *de* $1 \otimes \Lambda + K^*$.

DÉMONSTRATION.

Comme les $\mathcal{G}^k$ sont nulles pour $t < 0$, on aura démontré davantage que le théorème si l'on montre que $\mathcal{G}^k \to \mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(Q'; V))$.

Or, si $G^k(p) =$ transformée de Laplace de $\mathcal{G}^k$, et si l'on pose $G^k(p) f = u^k$, $G(p) f = u$, alors u^k (resp. u) est la solution dans N^k (resp. dans N) de

$$\Lambda^k u^k + \hat{K}^k(p) u^k = f$$

(resp. de

$$\Lambda u + \hat{K}(p) u = f)$$

d'où l'on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} ((u^k - u, v)) + \langle \hat{K}(p)(u^k - u), \bar{v} \rangle \\ \qquad = ((u^k, v)) - ((u^k, v))^k + \langle (\hat{K}(p) - \hat{K}^k(p)) u^k, \bar{v} \rangle \end{array}\right. \tag{4.18}$$

pour tout $v \in V$.

Or le 1^er^ membre vaut : $((X(p, \sigma_0)(u^k - u), v))_{1, \sigma_0}$. On introduit maintenant deux opérateurs, Y^k et Z^k, définis par

$$((u, v)) - ((u, v))^k = ((Y^k u, v))_{1, \sigma_0} \tag{4.19}$$

et

$$\langle (\hat{K}(p) - \hat{K}^k(p)) u, \bar{v} \rangle = ((Z^k u, v))_{1, \sigma_0} \tag{4.20}$$

de sorte que (4.18) donne :

$$u^k - u = X(p, \sigma_0)^{-1} (Y^k + Z^k) u^k, \qquad \xi > \xi_0. \tag{4.21}$$

Par ailleurs :

$$u^k = X^k(p, \sigma_0)^{-1} J^k f, \tag{4.22}$$

où

$$\langle f, \bar{v} \rangle = ((J^k f, v))^k_{1,\sigma_0} \tag{4.23}$$

définit J^k.

On déduit de (4.23) et avec (4.16), que $\| J^k f \|_V$ est borné lorsque f parcourt un borné de Q', de sorte que (4.22), avec (SA 3) donne :

$$\| u_k \|_V \leq \text{pol}\,(|p|)\, \| f \|_{Q'}, \qquad \text{pol}\,(|p|) \text{ étant indépendant de } k. \tag{4.24}$$

Alors (4.21), en utilisant (SA 3), donne :

$$\| u^k - u \|_V \leq \text{pol}\,(|p|)\, (\| Y^k \| + \| Z^k \|)\, \| f \|_{Q'}. \tag{4.25}$$

Or par (SA 1), on a :

$$|((u, v)) - ((u, v))^k| \leq \varepsilon_k \, \| u \|_V \, \| v \|_V, \quad \varepsilon_k \to 0 \text{ si } k \to \infty,$$

donc

$$\| Y^k \|_{\mathcal{L}(V; V)} \leq \varepsilon'_k, \quad \varepsilon'_k \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

Ensuite, par (SA 2), on a :

$$|\langle (\hat{K}(p) - \hat{K}^k(p)), u, \bar{v} \rangle| \leq \eta_k \, P_1(|p|)\, \| u \|_V \, \| v \|_Q$$

donc

$$\| Z^k \|_{\mathcal{L}(V; V)} \leq \eta_k \, \text{pol}\,(|p|)$$

et donc :

$$\| u^k - u \|_V \leq \text{pol}\,(|p|)\, (\varepsilon'_k + \eta_k)\, \| f \|_{Q'}$$

donc :

$$\| G^k(p) - G(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; V)} \leq (\varepsilon'_k + \eta_k)\, \text{pol}\,(|p|),$$

d'où l'on déduit le théorème.

5. Applications (I) : Problèmes mixtes non auto-adjoints

On introduit les distributions en t suivantes :

$$K_\alpha = \mathcal{L}^{-1}(p^\alpha), \quad \xi > 0. \tag{5.1}$$

On a :

$$K_\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\, Pf\,(x^{-\alpha-1})_{\alpha>0}, \text{ pour } \alpha \text{ non entier} \tag{5.2}$$

et

$$K_\alpha = \delta^{(\alpha)} \text{ pour } \alpha \text{ entier (Schwartz [1], p. 43).} \tag{5.3}$$

L'opératur K_α^* : $T \to K_\alpha \ast T$, de $\mathcal{D}'_+ \to \mathcal{D}'_+$, est dit *opérateur de dérivation d'ordre* α; pour α entier, c'est un opérateur de dérivation usuel.

On donne maintenant une famille d'opérateurs :

(5.4) $$g_j \in \mathcal{L}(L^2;\, L^2),\ j=1, \ldots, \mu,\ g_j \geq 0,$$

et g_1 étant strictement positif, i.e. :

(5.5) $$(g_1 f, f)_{L^2} \geq c_1 \| f \|_{L^2}^2, \quad c_1 > 0, \text{ pour tout } f \in L^2.$$

On pose :

(5.6) $$R_j = {}^t A_0\, g_j\, A_0,$$

et l'on prend :

(5.7) $$K = \sum_{j=1}^{\mu} K_{\alpha_j} \otimes R_j,$$

où l'on suppose :

(5.8) $$0 \leq \alpha_j \leq 1,\ j=1, \ldots, \mu,\ \alpha_1 > 0.$$

PROPOSITION 5.1. *On donne un opérateur* $\Lambda = D + P$ *comme au* N° 4, *et l'on suppose que* (A 1) *a lieu. On donne* K *par* (5.7) *avec* (5.4), (5.5) *et* (5.8). *Alors* (A 2) *et* (A 3) (p. 106 et 107) *ont lieu.*

DÉMONSTRATION.

Comme $\hat{K}(p) = \Sigma\, p^{\alpha_j} R_j$, (A 2) est vrai. Il reste à montrer (A 3). On prend ici (cf. remarque 4.1, p. 105) :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v))_1 + \sigma_0 (g_1 A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Prenons alors la définition de $X(p, \sigma_0)$. On a :

$$\langle \hat{K}(p)\, u, \bar{v} \rangle = \sum_{j=1}^{\mu} p^{\alpha_j} (g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Or : $(g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H_j u, v))_{1, \mu_0}$ (H_j dépend de σ_0), ce qui définit $H_j \in \mathcal{L}(V;\, V)$, opérateur hermitien positif; si $H(\sigma_0)$ est défini par (4.10), p. 106, on a :

(5.9) $$X(p, \sigma_0) = 1 + iH(\sigma_0) + (p^{\alpha_1} - \sigma_0) H_1 + \sum_{j=2}^{\mu} p^{\alpha_j} H_j$$

et alors (A 3) est conséquence du lemme 4.5, p. 93, d'où la proposition.

Il en résulte que *tous les théorèmes du* N° 2 *sont valables*; en particulier :

THÉORÈME 5.1 *Sous l'hypothèse* (A 1), *la distribution* K *étant donnée par* (5.7), *avec* (5.4), (5.5) *et* (5.8), *l'opérateur* $1 \otimes (D + P) + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

A chaque exemple du Chap. I, § 2, le théorème 5.1 fait correspondre un théorème d'isomorphisme, ce qui résout déjà de très nombreux problèmes mixtes. Signalons notamment :

Exemple 5.1.

On considère l'opérateur :

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0 + \frac{\partial}{\partial t} g_1$$

où l'on suppose :

— $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ avec :

$$\sum_{i,j} (g_{ij}(x) + \overline{g_{ij}(x)})\, \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq a\,|\zeta|^2, \quad a > 0,\ \zeta_i \in C, \text{ presque partout dans } \Omega.$$

— a_i, a_0 fonctions quelconques de $L^\infty(\Omega)$,

— $g_1 \in L^\infty(\Omega)$, avec $g_1(x) \geq c_1 > 0$ presque partout dans Ω.

Soit V un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}$ (pour des exemples, cf. Chap. I, § 2, N° 1); si $D = -\Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, on prendra pour N l'espace des $u \in V$, tels que $Du \in L^2$, et tels que :

$$(Du, v)_{L^2} = \Sigma \left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u, \frac{\partial}{\partial x_i}v\right)_{L^2} + (B\gamma u, \gamma v)_F$$

où $F = L^2(\Gamma)$, γ = opérateur de prolongement en moyenne, B opérateur quelconque si (4.4), p. 105, a lieu, et sinon, opérateur tel que $B + B^* \geq 0$, ou bien de norme assez petite. *Dans ces conditions, A est un isomorphisme de $D'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ (et aussi de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}^1_{L^2})$ sur $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'^1_{L^2})$).*

Exemple 5.2.

On considère l'opérateur

$$A = (-1)^m \sum_{|p|, |q| = m} D^p (g_{pq} D^q) + \sum_{|r| = m} a_r D^r + \frac{\partial}{\partial t} g_1$$

où l'on suppose :

— les fonctions $g_{p,q}$ sont dans $L^\infty(\Omega)$; si V est un sous-espace vectoriel fermé de $E^m_{L^2}(\Omega)$, on suppose que la forme

$$(u, v)_g = \sum_{|p|, |q| = m} (g_{p,q} D^q u, D^p v)_{L^2}$$

est elliptique sur V.

— les fonctions a_r sont quelconques dans L^∞,

— $g_1 \in L^\infty(\Omega)$, $g_1(x) \geqq c_1 > 0$ presque partout dans Ω.

Dans ces conditions A est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$. Notons que si l'ouvert Ω est m-régulier (cf. p. 71), on peut remplacer l'opérateur $\sum_{|r|=m} a_r D^r$ par $\sum_{|r|\leq m} a_r D^r$ où cette fois la sommation est faite pour $|r| \leq m$ et non plus seulement pour $|r| = m$; les fonctions a_r sont quelconques dans L^∞.

Remarque 5.1.

On peut donner de nombreuses variantes du théorème 5.1. Par exemple on pourra remplacer K_α par :

$$K' = \mathcal{L}^{-1}(\sqrt{p^2+1}, \xi > 0).$$

La démonstration est en tous points analogue.

Cas du problème de Dirichlet

On donne $\Lambda = D + P$ comme au début de ce N°, mais l'on prend pour espace V l'espace $\mathcal{D}(A)$. On considère alors une familles d'operateurs :

$$h_{i,j} \in \mathcal{L}(L^2; L^2), \quad i, j = 0, 1, \ldots, \nu, \tag{5.10}$$

avec

$$h_{ij} \geq 0, \; h_{0,0} \text{ strictement positif.} \tag{5.11}$$

On pose alors :

$$R_{ij} = {}^t A_j (h_{ij} A_j), \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A); \mathcal{D}'(A)). \tag{5.12}$$

On prend maintenant :

$$K = \sum_{i,j=0}^{\nu} K_{\alpha_{ij}} \otimes R_{ij}, \tag{5.13}$$

où

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq 1, \quad \alpha_{00} > 0. \tag{5.14}$$

La formule (5.13) définit un élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; Q'))$, car $V = \mathcal{D}(A)$, $Q' = \mathcal{D}'(A)$.

On a la

Proposition 5.2 *On donne $\Lambda = D + P$ comme à la proposition 5.1 et l'on donne K par (5.13), avec (5.11) et (5.14), $V = \mathcal{D}(A)$. Alors les hypothèses* (A 2) *et* (A 3) *ont lieu.*

Démonstration.

On a : $\hat{K}(p) = \sum_{i,j} p^{\alpha_{ij}} R_{ij}$, (A 2) a lieu. On pose cette fois :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v))_1 + \sigma_0 (h_{00} A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Si alors

$$(h_{ij} A_j u, A_j v)_{L^2} = ((H_{ij} u, v))_{1, \sigma_0},$$

ce qui définit H_{ij} élément de $\mathcal{L}(V; V)$, hermitien positif, pour la structure $((u, v))_{1, \sigma_0}$; on a :

$$X(p, \sigma_0) = 1 + i H(\sigma_0) + (p^{\alpha_{00}} - \sigma_0) H_{00} + \sum_{i, j \neq 0} p^{\alpha_{ij}} H_{ij} \tag{5.15}$$

et alors (A 3) a lieu, par application du lemme 4.5, p. 93.

Comme conséquence :

THÉORÈME 5.2 *Sous les hypothèses de la proposition* 5.2, *l'opérateur* $1 \otimes (D + P) + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+ (t, \mathcal{D}(A))$ *sur* $\mathcal{D}'_+ (t, \mathcal{D}'(A))$.

Signalons maintenant un cas spécial au problème de Dirichlet :

PROPOSITION 5.3 *On prend* $V = \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, Ω *ouvert quelconque de* R_n. *Sur* V *on donne la forme* :

$$((u, v)) = \sum_{|p|, |q| = m} (g_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2} + \sum_{\substack{|r| + |s| \leq 2m - 1 \\ |r| \leq m, |s| \leq m}} (a_{rs} D^s u, D^r v)_{L^2} \tag{5.16}$$

où $g_{pq} \in \mathcal{L}(L^2; L^2)$, *avec*

$$(u, u)_{g, 1} = \Sigma ((g_{pq} + g^*_{pq}) D^q u, D^p u)_{L^2} \geq a_1 \| u \|^2_m, \tag{5.17}$$

$a_1 > 0$, *pour tout* $u \in \mathcal{D}^m_{L^2}$, *et* $a_{rs} \in \mathcal{L}(L^2; L^2)$, *quelconques. Alors* (A 1) *a lieu.*

DÉMONSTRATION.

On a :

$$((u, u))_1 = (u, u)_{g, 1} + \Sigma ((a_{rs} + a^*_{sr}) D^s u, D^r u)_{L^2},$$

et le 2ème terme est majoré en module par

$$c_1 ||| u |||_m \, ||| u |||_{m-1} \; (||| u |||_k \text{ norme de } u \text{ dans } \mathcal{E}^k_{L^2}).$$

Or, on voit facilement par transformation de Fourier, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda(\varepsilon)$ tel que

$$||| u |||_{m-1} \leq \varepsilon ||| u |||_m + \lambda(\varepsilon) \| u \|_0 \tag{5.18}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}^m_{L^2}$

On prend ε tel que $c_1 \varepsilon < a_1$. Il existe alors $\sigma_0 > 0$ tel que :

$$a_1 \| u \|^2_m + \sigma_0 \| u \|^2_0 - c_1 ||| u |||_m (\varepsilon ||| u |||_m + \lambda(\varepsilon) \| u \|_0) \text{ soit } \geq a_2 \; ||| u |||^2_m, \; a_2 < a_1 - c_1 \varepsilon.$$

Si σ_0 est ainsi choisi, on a :

$$((u, u))_1 + \sigma_0 \| u \|^2_0 \geq a_2 \; ||| u |||^2_m \quad \text{c. q. f. d.}$$

EXEMPLE 5.3.

Considérons l'opérateur :

$$A = (-1)^m \sum_{|p|, |q| = m} D^p (g_{pq} D^q) + \sum_{\substack{|r|+|s| \leq 2m-1 \\ |r|, |s| \leq m}} (-1)^{|r|} D^r (a_{rs} D^s) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} g_1 + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{|r| \leq m} (-1)^r D^r (h_r D^r)$$

où l'on suppose :

— les $g_{p,q} \in L^\infty(\Omega)$, avec (5.17),

— les $a_{r,s} \in L^\infty(\Omega)$ quelconques,

— la fonction g_1 est dans $L^\infty(\Omega)$, avec $g_1(x) \geq c_1 > 0$ presque partout dans Ω,

— les fonctions h_r sont dans $L^\infty(\Omega)$, $h_r(x) \geq 0$ presque partout. De la proposition 5.3 et du théorème 5.2 résultent que, *sous les conditions ci-dessus, A est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}^m_{L^2})$ sur $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'^m_{L^2})$.*

Stabilité

On donne une suite de formes $((u, v))^k$ sur V fixe, $((u, v))^k$ définissant Λ^k, avec (S A 1), p. 108. On suppose que l'on donne :

(5.19) $$g_j^k \in \mathcal{L}(L^2; L^2), \ g_j^k \geq 0, \ g_1^k \text{ strictement positif,}$$

avec :

(5.20) $$g_j^k \to g_j \text{ dans } \mathcal{L}(L^2; L^2) \text{ pour la norme;}$$

on donne ensuite, les nombres

(5.21) $$\alpha_j^k \in \{0, 1\}, \ \alpha_1^k > 0,$$

avec

(5.22) $$\alpha_j^k \to \alpha_j \quad \text{si } k \to \infty.$$

On pose :

(5.23) $$R_j^k = {}^t A_0 \, g_j^k \, A_0$$

et

(5.24) $$K^k = \Sigma \, K_{\alpha_j^k} \otimes R_j^k.$$

On désigne alors par

(5.25) $$\mathcal{G}^k = \text{distribution de Green de } 1 \otimes \Lambda^k + K^{k*}.$$

Sous les hypothèses ci-dessus, on montre que (S A 2) et (S A 3), p. 109, ont lieu, donc : *$\mathcal{G}^k$ tend vers $\mathcal{G}$ dans l'espace $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; V))$.*

REMARQUE 5.2.

Le théorèmes 5.1 et 5.2 sont en général faux si certains des α_i sont >1. Donnons un contre-exemple.

On prend $\Omega = R^n$, $n \geq 1$ quelconque, $D = -(1+i)\Delta$, Δ = Laplacien, $A_0 = 1$, $Q = 0$. On a : $E = L^2 = E'$, $N = \mathcal{E}^2_{L^2}$. Montrons que $-(1+i)(1 \otimes \Delta) + K^*_\alpha \otimes 1$ *n'est pas un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$, *pour* $\alpha > 1$. Pour simplifier on prend $\alpha = 2$. Soit a une fonction donnée dans L^2; cherchons u dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{E}^2_{L^2})$ solution de

$$-(1+i)\Delta u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta \otimes a. \tag{5.26}$$

Effectuons une transformation de Fourier en x, y = variable duale; soit $\mathfrak{F}$ la transformation de Fourier; c'est un isomorphisme de L^2_x sur L^2_y et de $\mathcal{E}^2_{L^2}$ sur $\mathcal{H}^2$ = espace des fonctions $\in L^2_y$ qui sont encore dans L^2_y après multiplication par $|y|^2$. Soit $v = \mathfrak{F} u$ élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}_y)$; (5.26) équivaut à :

$$4\pi^2 (1+i) |y|^2 v + \frac{d^2}{dt^2} v = \delta \otimes A, \qquad A = \mathfrak{F}(a). \tag{5.27}$$

Résolvons (5.27) dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'_y) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_-(t); \mathcal{D}'_y)$:

1) il y a dans cet espace une solution :

$$v(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ y \to v(y,t) = \dfrac{A(y)}{2\pi |y| (1+i)^{1/2}} \sin(2\pi (1+i)^{1/2} |y|\, t) \text{ si } t > 0 \\ \text{presque partout en } y,\ (1+i)^{1/2} = \sqrt[4]{2} \exp(i\pi/8). \end{cases} \tag{5.28}$$

2) Cette solution est unique.

Cherchons en effet les solutions dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'_y)$ de $|y|^2 v + \dfrac{d^2}{dt^2} v = 0$ (on supprime le facteur $4\pi^2(1+i)$). Soit ϱ dans $\mathcal{D}(t)$, $v_\varrho = v \ast \varrho$ est alors dans $\mathcal{D}_+(t, \mathcal{D}'_y)$, solution de $|y|^2 v_\varrho(t) + \dfrac{d^2}{dt^2} v_\varrho(t) = 0$, et comme v_ϱ est nulle pour t assez petit, on a : $v_\varrho(t_0) = 0$, $\dfrac{d}{dt} v_\varrho(t_0) = 0$ pour t_0 convenable, donc, par Schwartz [9], p. 26, on a $v_\varrho = 0$, donc $v = 0$, c. q. f. d.

Donc si (5.27) admet une solution elle est donnée par (5.28). On aura donc démontré le contre-exemple si l'on montre que v définie par (5.28), n'est pas dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H}^2)$. Soit donc φ dans $\mathcal{D}_{-1}(t)$. On a :

$$v(\varphi) = \text{« } y \to A(y) \frac{1}{2\pi |y| (1+i)^{1/2}} \int_0^c \varphi(t) \sin(2\pi (1+i)^{1/2} |y|\, t)\, dt \text{ »}$$

et, $y \to \sin(2\pi(1+i)^{1/2}|y|t)$ étant à croissance exponentielle en $|y|$, cette fonction n'est pas en général dans $\mathcal{H}^2$, c. q. f. d.

6. Applications (II) : Problèmes mixtes auto-adjoints

On donne l'opérateur $\Lambda = D + P$ comme au N° 5, mais on le suppose cette fois défini par une forme $((u, v))$ hermitienne. On suppose que (A 1) a lieu. Résumons ces hypothèses dans :

$$\text{(6.1)} \quad \begin{cases} \text{la forme } ((u, v)) \text{ est hermitienne, et il existe } \sigma_0 \text{ tel que} \\ \qquad ((u, u)) + \sigma_0 (A_0 u, A_0 u)_{L^2} \geq c_1 \|u\|_V^2 \, (c_1 > 0) \quad \text{pour tout } u \in V. \end{cases}$$

On donne ensuite :

$R_j = {}^t A_0 g_j A_0$ comme dans (5.6), avec (5.4) et (5.5) (cf. p. 111), et l'on prend :

$$K = \sum_{j=1}^{\mu} K_{\alpha_j} \otimes R_j, \tag{6.2}$$

où :

$$0 \leq \alpha_j \leq 2, \ \alpha_1 > 0. \tag{6.3}$$

On a la

PROPOSITION 6.1. *On donne $\Lambda = D + P$, défini par $((u, v))$ avec* (6.1), *et K avec* (6.2) *et* (6.3). *Alors* (A 2) *et* (A 3) (p. 106 et 107) *ont lieu.*

DÉMONSTRATION.

On a : $\hat{K}(p) = \sum_{j=1}^{\mu} p^{\alpha_j} R_j$, donc (A 2) a lieu. Il reste à montrer (A 3). On prend cette fois :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v)) + \sigma_0 (g_1 A_0 u, A_0 v)_{L^2}$$

avec σ_0 assez grand pour avoir ainsi un produit scalaire hilbertien de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$. On a : $(g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H_j u, v))_{1, \sigma_0}$, ce qui définit H_j opérateur hermitien positif de $\mathcal{L}(V; V)$, pour la structure $((u, v))_{1, \sigma_0}$; on a alors :

$$X(p, \sigma_0) = 1 + (p^{\alpha_1} - \sigma_0) H_1 + \sum_{2}^{\mu} p^{\alpha_j} H_j$$

et (A 3) résulte du lemme 4.6, § 1, p. 94.

Il en résulte que tous les théorèmes du N° 2 sont valables et notamment :

THÉORÈME 6.1. *Sous les hypothèses de la proposition* 6.1, *l'opérateur* $1 \otimes (D + P) + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

REMARQUE 6.1.

Supposons que l'on ait, outre les hypothèses précédentes,

$$\hat{K}(p) = \hat{K}(-p). \tag{6.4}$$

Exemple : $K = \delta'' \otimes R_1$.

Alors $X(p, \sigma_0) = X(-p, \sigma_0)$, donc $X(p, \sigma_0)$ est inversible pour $\xi < -\xi_0$, et avec les mêmes majorations pour l'inverse. On peut donc définir deux fonctions $p \to G(p)$, holomorphes respectivement dans $\xi > \xi_0$ et $\xi < -\xi_0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(Q'; N)$. La 1re est transformée de Laplace de la distribution $\mathcal{G}$, élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, considérée jusqu'ici, la 2ème est transformée de Laplace d'une distribution $\mathcal{G}_-$, élément de $\mathcal{D}'_-(t, \mathcal{L}(Q'; N))$ (1), nulle pour $t > 0$. On a donc le :

THÉORÈME 6.2. *Sous les hypothèses du théorème* 6.1 *avec en outre* : $\hat{K}(p) = \hat{K}(-p)$, *l'opérateur* $1 \otimes (D + P) + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *(resp. de* $\mathcal{D}'_-(t, N)$*) sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$ *(resp. sur* $\mathcal{D}'_-(t, Q')$*).*

EXEMPLE 6.1. (Analogue à l'exemple 5.1, p. 112.)

On considère l'opérateur

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_1 + \frac{\partial}{\partial t} g_2 \quad \text{où}$$

— $g_{ij} = \bar{g}_{ji}$ pour tout i, j, et

$$\sum_{i,j} g_{ij}\,\zeta_i\,\bar{\zeta}_j \geq a\,|\zeta|^2,\ \zeta_i \in C,$$

— $g_1(x) \geq c_1 > 0$ presque partout dans Ω, $g_2(x) \geq 0$ presque partout.

Dans ces conditions, A *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ *(ou de* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}^1_{L^2})$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'^1_{L^2})$*).*

EXEMPLE 6.2.

On considère l'opérateur

$$A = (-1)^m \sum_{|p|,\,|q| = m} D^p(g_{pq}\,D^q) + (-1)^\nu \sum_{|p|,\,|q| = \nu} D^p(a_{pq}\,D^q) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_1 + \frac{\partial}{\partial t} g_2$$

où l'on suppose :

— les fonctions g_1 et g_2 sont comme dans l'exemple 6.1,

(1) Si E est un espace vectoriel topologique, on a : $\mathcal{D}'_-(t, E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_+(t); E)$ = espace des distributions en t à valeurs dans E, de support en t limité à droite, où $\mathcal{D}_+(t)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables en t, de support limité à gauche, muni de la topologie de Schwartz.

— on prend $Q = \mathcal{D}^{\nu}_{L^2}$; pour espace V l'espace des $u \in E^{m}_{L^2}(\Omega)$, en supposant que Ω est un ouvert m-régulier, et u étant en outre dans $\mathcal{D}^{\nu}_{L^2}$ (cf. Chap. I, 2 N° 5, p. 72),

— la forme :

$$(u, v)_s = \sum_{p,q} (g_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2} + \sum (a_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2}$$

est hermitienne, et on a (A 1).

Dans ces conditions A *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'^{\nu}_{L^2})$.

Exemple 6.3.

Si dans les deux exemples précédents, $g_2 = 0$, on peut remplacer $\mathcal{D}'_+$ par $\mathcal{D}'_-$ (Théorème 6.2).

Remarque 6.2.

Prenons $Q = L^2$, et $D + P$ comme au théorème 6.1. On montre alors par la même méthode que précédemment que

$$1 \otimes (D+P) + \left(a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} + c\right) \otimes 1,$$

où $a > 0$, b *et* c *constantes réelles, est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$.

Remarque 6.3.

On remplace les hypothèses $g_j \geq 0$, $g_1 > 0$, faites jusqu'ici par :

(6.5) $$g_j \geq 0, \sum_{j=1} g_j > 0,$$

et les hypothèses $\alpha_j \in [0,2]$, $\alpha_1 > 0$, par

(6.6) $$\alpha_j \in]0,2] \text{ pour tout } j = 1, \ldots, \mu.$$

On a alors le

Théorème 6.3. *On donne* $\Lambda = D + P$ *défini par* $((u, v))$ *avec* (6.1), *et* K *par* (6.2) *avec* (6.5) *et* (6.6). *Alors l'opérateur* $1 \otimes (D + P) + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.

Démonstration.

On prend cette fois :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v)) + \sigma_0 \sum_{j=1}^{\mu} (g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

Ceci définit bien, si (A 1) et (6.5) ont lieu, un produit scalaire hilbertien de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$ en choisissant σ_0 assez grand. Si l'on pose : $(g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H_j u, v))_{1,\sigma_0}$, on a alors :

$$X(p, \sigma_0) = 1 + \sum_{j=1}^{\mu} (p^{\alpha_j} - \sigma_0) H_j$$

et (A 3) a lieu, grâce au lemme 4.4, p. 93.

EXEMPLE 6.4.

On donne dans R^n un ouvert Ω du type $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 étant sans points commun, leurs frontières ayant en commun un morceau Σ, « régulier » (cf. Chap. I, § 2, p. 55). On donne dans Ω l'opérateur

$$D = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

où $g_{ij} = \bar{g}_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, $\in L^\infty(\Omega)$, avec

$$\Sigma g_{ij}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq a |\zeta|^2,\ \zeta_i \in C, \text{ presque partout dans } \Omega.$$

La donnée de g_{ij} équivaut à la donnée de $g_{ij,1} \in L^\infty(\Omega_1)$, et de $g_{ij,2} \in L^\infty(\Omega_2)$, donc, avec des notations évidentes, la donnée de D équivaut à la donnée de D_1 dans Ω_1, D_2 dans Ω_2, D_1 et D_2 étant élliptiques et auto-adjoints. On prend pour espace Q l'espace $L^2(\Omega)$ et pour espace V l'espace V_5, p. 55. Toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ est du type : $f = (f_1, f_2)$, $f_i \in L^2(\Omega_i)$; on considère les opérateurs g_1 et g_2, $\in \mathcal{L}(L^2; L^2)$ suivants : $g_1(f) = (f_1, 0)$, et $g_2(f) = (0, f_2)$. On a donc $g_1 + g_2 = 1$, donc (6.5) a lieu. Il en résulte, par le théorème 6.3 que $D + \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_1 + \frac{\partial}{\partial t} g_2$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ ou encore : on donne $T_1 \in \mathcal{D}'_+(t, L^2(\Omega_1))$, $T_2 \in \mathcal{D}'_+(t, L^2(\Omega_2))$; il existe une distribution $u = (u_1, u_2)$, $\in \mathcal{D}'_+(t, N)$, et une seule telle que :

$$D_1 u_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 = T_1, \quad D_2 u_2 + \frac{\partial}{\partial t} u_2 = T_2.$$

L'interprétation de l'espace N est donnée p. 60. *Ce théorème résout un problème mixte avec conditions aux limites de transmission.*

Cas du problème Dirichlet

Les hypothèses sur l'opérateur $\Lambda = D + P$ sont les mêmes que précédemment, mais avec $V = \mathcal{D}(A) (= Q)$. On peut alors prendre K comme à la page 113, avec en outre $0 \leq \alpha_{ij} \leq 2$ (au lieu de (5.14)) ; on a alors un théorème d'isomorphisme analogue au théorème 5.2, p. 114).

REMARQUE 6.4.

On a des résultats de stabilité analogues à ceux de la page 115.

7. Applications (III): Systèmes différentiels

On adopte les notations du chap. I, § 1, N° 13, et pour simplifier on considère seulement le cas de l'exemple 13.1, p. 49. On donne donc A_0 isomorphisme de $L^2(\Omega)$ sur lui-même et $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D}; L^2)$ et $\in \mathcal{L}(L^2; \mathcal{D}')$, puis les opérateurs g_{ij} avec $g_{ij} \in \mathcal{L}((L^2)^\chi; (L^2)^\chi)$, et

$$D = \sum_{i,j} {}^t A_i g_{ij} A_j . \tag{7.1}$$

On donne également V, sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{E}(A))^\chi$ et

$$P \in \mathcal{L}(V; (L^2)^\chi). \tag{7.2}$$

On suppose que $D+P$ *est défini par la forme* $((u, v))$ *sur* V, qui est supposée avoir les propriétés :

$$\begin{cases} ((u, v)) \text{ est hermitienne et il existe } \sigma_0 \text{ tel que} \\ ((u, u)) + \sigma_0 \| A_0 u \|^2_{(L^2)^\chi} \geqq a \| u \|^2_V \text{ pour tout } u \in V. \end{cases} \tag{7.3}$$

(le 2ème point généralise de façon évidente (A 1), p. 105).

On donne maintenant la distribution :

$$K \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(V; (L^2)^\chi)), \tag{7.4}$$

du type suivant :

$$K = \sum_{j=1}^{\mu} K_{\alpha_j} \otimes R_j \tag{7.5}$$

où

$$R = {}^t A_0 g_j A_0 \tag{7.6}$$

avec :

$$\begin{cases} g_j \in \mathcal{L}((L^2)^\chi; (L^2)^\chi), \text{ opérateur hermitien positif,} \\ j = 1, \ldots, \mu, \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\mu} g_j > 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

On suppose enfin que les nombres α_j sont dans $]0.2[$.

On a alors le

THÉORÈME 7.1. *Sous les hypothèses* (7.3), (7.5), (7.6) *et* (7.7), *l'opérateur*

$$1 \otimes (D+P) + K^*$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, (L^2)^\chi)$.

DÉMONSTRATION.

Pour $u, v \in V$, on prend (en choisissant σ_0 assez grand) :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v)) + \sigma_0 \sum_{j=1}^{\mu} (g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2}.$$

On a alors les formules : $(g_j A_0 u, A_0 v) = ((H_j u, v))_{1, \sigma_0}$, qui définissent les opérateurs H_j hermitiens dans $\mathcal{L}(V; V)$ pour la structure $((u, v))_{1, \sigma_0}$, et par conséquent :

$$X(p, \sigma_0) = 1 + \sum_{j=1}^{\mu} (p^{\alpha_j} - \sigma_0) H_j$$

d'où le théorème, par application du lemme 4.4, p. 93.

Le théorème 7.1 résout des problèmes aux limites de type mixte pour *des systèmes différentiels*. On a bien entendu un théorème analogue au théorème 5.1, dans le cas où la forme $((u, v))$ n'est pas hermitienne (cas non auto-adjoint).

8. Applications (IV): Equation des télégraphistes généralisée

On donne l'opérateur Λ, défini par la forme $((u, v))$, que l'on suppose hermitienne; on donne A_0, et des opérateur $g_1, g_2, g_3, \in \mathcal{L}(L^2; L^2)$. On suppose :

(8.1) $\begin{cases} \text{(A 1) a lieu, donc } ((u, u)) + \sigma_0 \| A_0 u \|_{L^2}^2 \geq a \| u \|_V^2 \\ \text{pour tout } u \in V,\ a > 0, \end{cases}$

(8.2) $\begin{cases} g_1 \text{ est strictement positif, } g_2 \text{ et } g_3 \text{ sont des} \\ \text{opérateurs hermitiens quelconques.} \end{cases}$

On pose :

(8.3) $$R_j = {}^t A_0 g_j A_0, \qquad j = 1, 2, 3,$$

et on considère :

(8.4) $$K = \delta'' \otimes R_1 + \delta' \otimes R_2 + \delta \otimes R_3.$$

PROPOSITION 8.1. *Sous les hypothèses* (8.1), (8.2), *les hypothèses* (A 2) *et* (A 3), p. 106 et 107, *ont lieu, relativement à l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$.

DÉMONSTRATION.

On pose :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v)) + \sigma_0 (g_1 A_0 u, A_0 v)_{L^2}, \quad \sigma_0 \text{ assez grand.}$$

On a : $\hat{K}(p) = p^2 R_1 + p R_2 + R_3$, donc (A 2) a lieu. Reste à vérifier (A 3).

Or :

$$(g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H_j u, v))_{1, \sigma_0}, \quad j = 1, 2, 3,$$

de sorte que

$$X(p, \sigma_0) = 1 + (p^2 - \sigma_0) H_1 + p H_2 + H_3,$$

où H_j est un opérateur hermitien dans $\mathcal{L}(V; V)$, pour la structure $((u, v))_{1, \sigma_0}$, $H_1 \geq 0$; en outre :

$$|((H_j u, u))_{1, \sigma_0}| = |(g_2 A_0 u, A_0 u)'_{L^2}| \leq c'_2 \|A_0 u\|^2_{L^2} \leq c_2 ((H_1 u, u))_{1, \sigma_0}$$

car g_1 est strictement positif; majoration analogue pour $((H_3 u, u))_{1, \sigma_0}$; on est dans les conditions d'application du lemme 4.6, p. 94, d'où (A 3) et la proposition.

Comme conséquence :

THÉORÈME 8.1. *Sous les hypothèses* (8.1) *et* (8.2), *l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$.

EXEMPLE 8.1.

On considère l'opérateur

$$A = (-1)^m \sum_{|p|, |q| = m} D^p g_{pq} D^q) + g_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g_2 \frac{\partial}{\partial t} + g_3$$

où l'on suppose :

— $(u, v)_g = \sum (g_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2} = \overline{(v, u)_g}$, $(u, u)_g \geq a \|u\|^2_m$ l'ouvert Ω étant m-régulier,

— $g_1(x) \geq c_1 > 0$, presque partout dans Ω, g_2 et $g_3 \in L^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles.

Dans ces conditions, A est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ (ou de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}^m_{L^2})$ sur $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'^m_{L^2})$ [1]).

9. Applications (V)

On donne Λ défini par $((u, v))$ sur V, $\subset \mathcal{E}(A)$, (A_0 étant donné), et on suppose :

(9.1) $\begin{cases} \text{la forme } ((u, v)) \text{ est hermitienne, et } ((u, u)) \geq a \|u\|^2_V \text{ pour tout } u \in V \\ \text{(autrement dit la forme } ((u, v)) \text{ est hermitienne et elliptique sur } V). \end{cases}$

On donne également :

(9.2) $$g \in \mathcal{L}(L^2; L^2), \text{ opérateur hermitien quelconque.}$$

On pose :

(9.3. $$R = {}^t A_0 g A_0$$

et

---

[1] L'hypothèse « Ω est m-régulier » est alors inutile.

$$A = 1 \otimes \Lambda + i \frac{\partial}{\partial t} \otimes R. \tag{9.4}$$

On a la

PROPOSITION 9.1. *Relativement à* A, *défini par* (9.4), *avec* (9.1), (9.2), (9.3), *les hypothèses* (A 2) *et* (A 3), p. 106 et 107 *ont lieu.*

DÉMONSTRATION.

On a : $K(p) = i p R$, donc (A 2) a lieu. On prend ici : $((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v))$, indépendant de σ_0. Si : $(g A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H u, v))$, ce qui définit H hermitien dans $\mathcal{L}(V; V)$, on a :

$$X(p, \sigma_0) = X(p) = 1 + i p H.$$

L'opérateur $X(p)$ est inversible pour $\xi > 0$ (*resp. pour* $\xi < 0$) et son inverse est majoré par

$$\| X^{-1}(p) \|_{\mathcal{L}(V; V)} \leq 1 + \left| \frac{\eta}{\xi} \right|, \quad \xi > 0 \quad ou \quad \xi < 0.$$

On a donc démontré la proposition. Il en résulte le

THÉORÈME 9.1. *Sous les hypothèses de la proposition* 9.1, *l'opérateur* A *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ (*resp. de* $\mathcal{D}'_-(t, N)$) *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$ (*resp. sur* $\mathcal{D}'_-(t, Q')$).

REMARQUE 9.1.

Le théorème 9.1 est généralement faux si l'on remplace $\frac{\partial}{\partial t}$ par $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ dans A.

10. Applications (VI)

On donne l'opérateur $\Delta^2 = {}^t\Delta \Delta$ (chap. I, § 2, N° 6), et on considère l'opérateur

$$A = 1 \otimes \Delta^2 - K_{\alpha_1} \otimes \Delta + K_{\alpha_2} \otimes 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \left]0, 2\right[. \tag{10.1}$$

Les problèmes mixtes attachés à des opérateurs de ce genre sont en général, comme on verra dans un article prochain, des problèmes mixtes avec conditions aux limites dépendant du temps. Voici toutefois un exemple qui entre dans le cadre de la théorie actuelle.

L'espace $\mathcal{E}(A)$ est l'espace des $u \in L^2$ tels que $\Delta u \in L^2$.

L'espace V est le suivant : on donne W, sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; on suppose défini un opérateur frontière : $u \to \gamma u$ de W dans F $(= L^2(\Gamma))$; on donne B, opérateur hermitien positif dans $\mathcal{L}(F; F)$; pour u, v dans $\mathcal{E}^1_{L^2}$, on pose

$$(u, v)_1 = (u, v)_{-\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2}.$$

Alors V est l'espace des $u \in W$, tels que $\Delta u \in L^2$, et qui vérifient :

$$(-\Delta u, w)_{L^2} = (u, w)_1 + (B\gamma u, \gamma w)_F \quad \text{pour tout} \quad w \in W.$$

On définit ainsi un sous-espace vectoriel *fermé* de $\mathcal{E}(A)$, par la prop. 6.1, p. 80.

L'espace N est alors le suivant : c'est l'espace des $u \in V$ tels que $\Delta^2 u \in L^2$ et

$$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Ceci posé, on a la :

PROPOSITION 10.1. *L'espace N étant défini comme ci-dessus, les hypothèses* (A 2) *et* (A 3), p. 106 et 107), *relativement à l'opérateur A, défini par* (10.1), *ont lieu.*

DÉMONSTRATION.

On a : $K(p) = -p^{\alpha_1}\Delta + p^{\alpha_2}$, donc (A 2) a lieu. On pose :

$$((u, v))_{1, \sigma_0} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + \sigma_0 (u, v)_{L^2}, \; \sigma_0 > 0 \quad \text{quelconque}.$$

Ceci définit sur V un produit scalaire hilbertien de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$. On a :

$$(\hat{K}(p) u, v)_{L^2} - \sigma_0 (u, v)_{L^2} = p^{\alpha_1} ((u, v))_1 + (B\gamma u, \gamma v)_F + (p^{\alpha_2} - \sigma_0)(u, v)_{L^2}.$$

On introduit alors les opérateurs H_1 et H_2 définis par :

$$(u, v)_1 + (B\gamma u, \gamma v)_F = ((H_1 u, v))_{1, \sigma_0}$$

et

$$(u, v)_{L^2} = ((H_2 u, v))_{1, \sigma_0};$$

les opérateurs H_1 et H_2 sont hermitiens positifs. On a :

$$X(p, \sigma_0) = 1 + p^{\alpha_1} H_1 + (p^{\alpha_2} - \sigma_0) H_2$$

donc (A 3) a lieu par application du lemme 4.3, p. 93, d'où la proposition. On en déduit le

THÉORÈME 10.1. *Sous les hypothèses de la proposition* 10.1, *l'opérateur A, défini par* (10.1) *est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$.*

11. Sur une hypothèse de M. Hadamard

Ce N° généralise et précise les considérations faites dans Hadamard [1], p. 484, 485.

Du lemme 4.1, p. 90, résulte le

LEMME 11.1. *Soit* $\omega \to L(\omega)$ *une application continue d'un espace topologique* X $(\omega \in X)$ *dans* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; Q'))$. *On suppose que pour tout* $\omega \in X$ *il existe* $\mathcal{G}(\omega)$ *élément de* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, *avec :*

$$L(\omega) * \mathcal{G}(\omega) = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q'), \tag{11.1}$$

et

$$\mathcal{G}(\omega) * L(\omega) = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N). \tag{11.2}$$

Si $\mathcal{G}(\omega)$ *demeure dans un ensemble borné de* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$ *lorsque* ω *parcourt un compact quelconque de* X, *l'application* $\omega \to \mathcal{G}(\omega)$ *est continue de* X *dans* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$.

Application

On donne Λ défini par la forme $((u, v))$ sur V, et on suppose :

(Ha 1) la forme $((u, v))$ est elliptique sur V.

Il en résulte (Théorème 2.1, p. 26) que Λ est un isomorphisme de N sur Q'; soit G son inverse, opérateur de Green de la forme $((u, v))$; $G \in \mathcal{L}(Q; N)$.

On donne ensuite K, élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q'))$, et on pose :

$$L(\omega) = \delta \otimes \Lambda + \frac{1}{\omega} K, \quad \omega \geq 1. \tag{11.3}$$

On suppose que

(Ha 2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \omega \geq 1, \text{ il existe } \mathcal{G}(\omega) \text{ (distribution de Green) avec (11.1) et} \\ \text{(11.2), et } \mathcal{G}(\omega) \text{ demeure dans un ensemble borné de } \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N)) \\ \text{pour } \omega \geq 1.\end{array}\right.$

On a alors le

THÉORÈME 11.1. *Sous les hypothèses* (Ha 1) et (Ha 2), *lorsque* $\omega \to \infty$, *la distribution de Green* $\mathcal{G}(w)$ *de* $L(\omega)$ *tend dans* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$ *vers* $\delta \otimes G$, G *étant l'opérateur de Green de* Λ.

DÉMONSTRATION.

Si $\omega \to \infty$, $L(\omega)$ tend vers $\delta \otimes \Lambda$, et il est immédiat de voir que :

$$(\delta \otimes \Lambda) * (\delta \otimes G) = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q'),$$

et

$$(\delta \otimes G) * (\delta \otimes \Lambda) = 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N)$$

donc

$$\mathcal{G}(\infty) = \delta \otimes G,$$

d'où le théorème.

EXEMPLE 11.1.

On donne

$$\Lambda = D + M,\ D = \sum_{i,j=1}^{\nu} {}^tA_i g_{ij} A_j,\ M = {}^tA_0 g A_0,$$

avec (Ha 1), et

$$K = \sum_{j=1}^{\mu} K_{\alpha_j} \otimes R_j,$$

où

$$R_j = {}^tA_0 g_j A_0,$$

avec :

$$g_j \in \mathcal{L}(L^2; L^2),\quad j = 1, \ldots, \mu,\ g_j \geq 0,\ g_1 > 0\ \text{(cf. p. 111)}\ \text{ et }\ \alpha_j \in (0,1),\ \alpha_1 > 0.$$

Alors $\frac{1}{\omega} K = \Sigma K_{\alpha_j} \otimes \frac{1}{\omega} R_j$ et $R_j/\omega = {}^tA_0 \left(\frac{g_j}{\omega}\right) A_0$, et comme $\frac{g_j}{\omega}$ a les mêmes propriétés que g_j, il résulte du Théorème 5.1, p. 111, qu'il existe $\mathcal{G}(\omega)$ avec (11.1) et (11.2).

Montrons que l'on a (Ha 2), i.e. que les $\mathcal{G}(\omega)$ demeurent dans un ensemble borné de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$ lorsque $\omega \geq 1$.

Les distributions $\mathcal{G}(\omega)$ sont nulles pour $t < 0$. On aura donc démontré davantage que (Ha 2) si l'on montre que les $\mathcal{G}(\omega)$ demeurent dans un ensemble borné de $\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(Q'; N))$. Pour cela, on va majorer les transformées de Laplace $G_\omega(p)$ des $\mathcal{G}(\omega)$, dans l'espace $\mathcal{L}(Q'; N)$.

On prend ici : $((u, v))_{1, \sigma_0} = ((u, v))_1$, puisque par (Ha 1), la forme $((u, v))$ est elliptique.

En se conformant aux notations du N° 5, p. 111, on a : $H(\sigma_0) = H$ défini par : $((u, v))_2 = ((Hu, v))_1$, H_j défini par $(g_j A_0 u, A_0 v)_{L^2} = ((H_j u, v))_1$, et, avec des notations évidentes, on a alors :

$$X_\omega(p, \sigma_0) = X_\omega(p) = 1 + iH + \sum_{j=1}^{\mu} p^{\alpha_j} H_j/\omega$$

et

$$G_\omega(p) = X_\omega(p)^{-1} J, \qquad \xi > \xi_0 = 0.$$

Du lemme 4.5, p. 93, résulte :

$$\| X_\omega^{-1}(p) \|_{\mathcal{L}(V; V)} \leq 1,$$

d'où l'on déduit :

$$\| G_\omega(p) \|_{\mathcal{L}(Q'; N)} \leq \text{pol}(|p|),$$

polynome indépendant de k, d'où aussitôt le résultat. Le théorème 11.1 est donc applicable.

On établira par la même méthode des résultats analogues pour les exemples des N° 6 à 10.

12. Un résultat général d'inversibilité

Soit $\mathcal{A}$ une distribution dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q'))$. On désigne par $\mathcal{A}^*$ l'opérateur : $T \to \mathcal{A} * T$ de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H})$ dans $\mathcal{D}'_+(t, Q')$. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé N de $\mathcal{H}$ tel qu'il existe $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(E'; N))$ avec

(12.1) $$\mathcal{A} * \mathcal{G} = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q')$$

et

(12.2) $$\mathcal{G} * \mathcal{A} = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N)$$

et enfin

(12.3) $$\mathcal{G} \text{ est nulle pour } t < 0.$$

Des exemples d'une telle situation sont donnés par les résultats des N° 2 à 10.

On donne maintenant une distribution L dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q'))$ et on désigne par L^* l'opérateur

$$T \to L * T \quad \text{de} \quad \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H}) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+(t, Q').$$

Ceci posé on va montrer le

THÉORÈME 12.1. *Sous les hypothèses* (12.1), (12.2), (12.3), *et si L est nulle pour $t < a$, $a > 0$, l'opérateur $\mathcal{A}^* + L^*$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, Q')$.*

DÉMONSTRATION.

Cherchons un inverse à droite R et un inverse à gauche S de $\mathcal{A} + L$, donc R, S éléments de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, avec

(12.4) $$(\mathcal{A} + L) * R = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(Q'; Q')$$

et

(12.5) $$S * (\Lambda + L) = \delta \otimes 1, \quad 1 \in \mathcal{L}(N; N).$$

Composons à gauche les deux membres de (12.4) par $\mathcal{G}$. Si l'on pose :

(12.6) $$\mathcal{G} * L = X, \quad \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; N))$$

on a

(12.7) $$(\delta \otimes 1 + X) * R = \mathcal{G}.$$

Or X est nulle pour $t<a$, donc $X^{*k}=X*X*\cdots*X$ (k facteurs) est nulle pour $t<ka$, et comme $a>0$, $ka\to+\infty$ avec k, ce qui assure la convergence dans

$$\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; N))$$

de la série

$$\tilde{X}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k X^{*k} \qquad (X^{*0}=\delta\otimes 1). \tag{12.8}$$

On a :

$$(\delta\otimes 1+X)*\tilde{X}=\delta\otimes 1, \qquad \tilde{X}*(\delta\otimes 1+X)=\delta\otimes 1. \tag{12.9}$$

Alors (12.7) donne :

$$R=\tilde{X}*\mathcal{G}. \tag{12.10}$$

Si maintenant l'on compose les deux membres de (12.5) par $\mathcal{G}$ à droite, en posant

$$L*\mathcal{G}=Y, \qquad Y\in\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; Q')), \tag{12.11}$$

on a :

$$S*(\delta\otimes 1+Y)=\mathcal{G}. \tag{12.12}$$

Mais Y est nulle pour $t<a$, ce qui assure la convergence dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(Q'; Q'))$ de la série :

$$\tilde{Y}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k Y^{*k}, \tag{12.13}$$

d'où

$$S=\mathcal{G}*\tilde{Y}. \tag{12.14}$$

Comme $X^{*k}*\mathcal{G}=\mathcal{G}*Y^{*k}$ on a $R=S$.

On a donc le théorème, avec en outre un procédé de calcul de l'inverse de $\mathcal{A}+L$, une fois connu l'inverse de $\mathcal{A}$.

Remarque 12.1.

Soit $\mathcal{G}(L)\,(=R=S)$ l'inverse de $\mathcal{A}+L$. C'est *la distribution de Green de* $\mathcal{A}+L$. Cette distribution ne peut en général être calculée par transformation de Laplace en t, puisque L peut être à croissance quelconque en t. Pour inverser $\mathcal{A}+L$ seul intervient le comportement de L (nulle pour $t<0$) au voisinage de $t=0$.

Exemple 12.1.

On prend : $L=\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{n_i}(a_i)\otimes C_i$ où :

— $\delta^{n_i}(a_i)$ = dérivée d'ordre n_i de la distribution en t, masse $+1$ au point a_i, avec $a_i \geq a > 0$ pour tout i, $a_i \to +\infty$,

— C_i = élément quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$.

13. Problèmes mixtes « explosifs »

On adopte les mêmes notations qu'au N° 12 : $\mathcal{A}$ est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; E'))$, nulle pour $t<0$, et il existe N tel que

$$\begin{cases} \mathcal{A} * \mathcal{G} = \delta \otimes 1, & 1 \in \mathcal{L}(E'; E') \\ \mathcal{G} * \mathcal{A} = \delta \otimes 1, & 1 \in \mathcal{L}(N; N), \end{cases} \tag{13.1}$$

la distribution de Green $\mathcal{G}$ étant nulle pour $t<0$.

Soit a un nombre positif donné, L un espace de Banach. On désigne par

$$\mathcal{D}'_+(t<a, L) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_-(t<a); L)) \tag{13.2}$$

l'espace des distributions T en t *dans l'ouvert* $t<a$, nulles pour $t<b(T)$ (quantité finie dépendant de T) à valeurs dans L; $\mathcal{D}_-(t<a)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $t<a$, nulles au voisinage de a, muni de la topologie de Schwartz usuelle.

Si T est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t, L)$, elle définit par restriction un élément noté T_a de $\mathcal{D}'_+(t<a, L)$. Mais réciproquement, une distribution T de $\mathcal{D}'_+(t<a, L)$ n'est pas en général la restriction à $t<a$, d'une distribution définie sur l'axe entier. Toutefois, si α est donnée dans $\mathcal{D}_-(t<a)$, et T dans $\mathcal{D}'_+(t<a, L)$, αT se prolonge à l'axe entier, en une distribution notée $(\alpha T)^\sim$, définie pour $\varphi \in \mathcal{D}_-(t)$, par $(\alpha T)^\sim(\varphi) = T(\alpha\varphi)$.

Soit maintenant T dans $\mathcal{D}'_+(t<a, Q')$, et φ dans $\mathcal{D}_-(t<a)$. La fonction :

$$t \to \langle \mathcal{G}_s, \varphi(t+s)\rangle = f(t)$$

est dans $\mathcal{D}_-(t, \mathcal{L}(Q'; N))$, et elle est nulle pour $t \geq a_\varphi$ si φ est nulle pour $t \geq a_\varphi$, ce qui a lieu avec $a_\varphi < a$. On peut donc trouver $\alpha \in \mathcal{D}_-(t<a)$, $\alpha = 1$ au voisinage du support en t de f, et l'on peut poser :

$$\langle T, f\rangle = \langle (\alpha T)^\sim, f\rangle$$

le $2^{\text{ème}}$ membre ayant un sens et définissant un élément de N (cf. Schwartz [6]). On a donc défini une application $\varphi \to \langle T, f\rangle$ linéaire continue de $\mathcal{D}_-(t<a)$ dans N, donc une distribution de $\mathcal{D}'_+(t<a, N)$, notée $\mathcal{G}^a_* T$; on a la formule :

$$\langle \mathcal{G}^a_* T, \varphi\rangle = \langle T_t, \langle \mathcal{G}_s, \varphi(t+s)\rangle\rangle.$$

L'application $T \to \mathcal{G}_*^a T$ est continue de $\mathcal{D}'_+(t < a, Q')$ dans $\mathcal{D}'_+(t < a, N)$; on la note : $\mathcal{G}^{*,a}$.

Soit maintenant α_k une suite de fonctions de $\mathcal{D}_-(t<a)$, α_k étant définie avec les conditions :

$$\alpha_k = 1 \quad \text{si} \quad t < a - 1/k, \quad \alpha_k(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > a - 1/2k.$$

Il résulte de la définition de $\mathcal{G}_*^a T$ que :

$$\mathcal{G}_*^a T = \lim_{k\to\infty} (\mathcal{G} * (\alpha_k T)^\sim)_a \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+(t<a, N), \tag{13.3}$$

et que si T est dans $\mathcal{D}'_+(t, Q')$, on a :

$$\mathcal{G}_*^a(T_a) = (\mathcal{G} * T)_a. \tag{13.4}$$

On en déduit (pour $u \in \mathcal{D}_-(t<a, N)$, $\mathcal{A}_*^a u$ est défini par le même procédé que ci-dessus) :

$$\mathcal{A}_*^a \mathcal{G}_*^a T = T \quad \text{pour tout } T \text{ dans } \mathcal{D}'_+(t<a, Q'). \tag{13.5}$$

En effet :

$$\mathcal{A}_*^a \mathcal{G}_*^a T = \lim \mathcal{A}_*^a (\mathcal{G} * (\alpha_k T)^\sim)_a \quad \text{par (13.3).}$$

Mais par (13.4), avec Λ, on a :

$$\mathcal{A}_*^a (\mathcal{G} * (\alpha_k T)^\sim)_a = (\mathcal{A} * \mathcal{G} * (\alpha_k T)^\sim)_a = (\alpha_k T)_a^\sim = \alpha_k T$$

(l'avant dernière égalité grâce à la 1ère relation (13.1)), d'où le résultat.

De même, pour tout u dans $\mathcal{D}'_+(t<a, N)$ on a :

$$\mathcal{G}_*^a \mathcal{A}_*^a u = u. \tag{13.6}$$

On a donc les relations :

$$\mathcal{A}^{*,a} \cdot \mathcal{G}^{*,a} = 1,$$

1 = application identique de $\mathcal{D}'_+(t<a, Q')$ dans lui-même et

$$\mathcal{G}^{*,a} \cdot \mathcal{A}^{*,a} = 1,$$

1 = application identique de $\mathcal{D}'_+(t<a, N)$ dans lui-même.

On a en particulier le

THÉORÈME 13.1. *Sous les hypothèses* (13.1), $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{G}$ *étant nulles pour* $t<0$, $\mathcal{A}^{*,a}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t<a, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t<a, Q')$, $a>0$ *quelconque.*

Ce théorème d'isomorphisme résout le

PROBLÈME 13.1. Trouver U dans $\mathcal{D}'_+(t<a, \mathcal{H})$, solution de

$$\mathcal{A}_*^a U = S \tag{13.7}$$

($\mathcal{A}_*^a U$ est toujours défini de la même façon que ci-dessus), où S est donné dans $\mathcal{D}'_+ a(t<a, Q')$, avec *les conditions aux limites* :

$$h - U \in \mathcal{D}'_+(t<a, N), \tag{13.8}$$

où h est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t<a, \mathcal{H})$.

Définition 13.1. Le problème 13.1 est dit problème mixte « explosif », relativement à l'espace N.

Il résulte aussitôt du théorème 13.1 que l'on a le

Théorème 13.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 13.1, *le problème* 13.1 *admet une solution unique, fournie par* $U = h - \mathcal{G}_*^a T$, *avec* $T = \mathcal{A}_*^a h - S$.

Définition 13.2. L'opérateur $\mathcal{G}^{*,a}$ est dit *opérateur de Green* de l'opérateur $\mathcal{A}^{*,a}$.

14. Problèmes mixtes et semi-groupes

On fait les hypothèses suivantes :

$$Q = L^2 = Q' \tag{S G 1}$$

$$\begin{cases} \text{la forme } ((u, v)) \text{ étant donnée sur } V, \text{ il existe } \sigma_0 > 0 \text{ tel que} \\ ((u, u))_1 + \sigma_0 \|u\|_{L^2}^2 \geq a \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V \text{ et } \mathcal{D}_\Omega \subset N. \end{cases} \tag{SG 2}$$

Soit Λ l'opérateur défini par $((u, v))$. Pour u dans N, on pose :

$$\mathcal{A} u = -\Lambda u, \tag{14.1}$$

et on considère $\mathcal{A}$ comme opérateur non continu de domaine de définition N, muni de la topologie induite par L^2, à valeurs dans L^2. Le domaine N est dense dans L^2 (car $N \supset \mathcal{D}_\Omega$) et l'opérateur $\mathcal{A}$ est *fermé* c'est-à-dire : si $u_k \to u$ dans L^2, $u_k \in N$, et $\mathcal{A} u_k \to v$ dans L^2 alors $u \in N$ et $\mathcal{A} u = v$; pour cela notons d'abord qu'il résulte de (SG 2), que $\Lambda + s$ est pour s assez grand, un isomorphisme de N sur L^2; soit $G(s)$ son inverse; alors $(\Lambda + s) u_k = s u_k - \mathcal{A} u_k = f_k \to s u - v$ dans L^2, donc $u_k = G(s) f_k$ tend vers $w = G(s)(s u - v)$ dans N; nécessairement $u = w$, d'où le résultat.

De façon générale si X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques quelconques, on désigne par $\mathcal{L}_s(X; Y)$ l'espace $\mathcal{L}(X; Y)$ muni de la topologie de la convergence simple forte.

Ceci posé on a le

THÉORÈME 14.1. *Sous les hypothèses* (SG 1) *et* (SG 2), *l'opérateur* $\mathcal{A}$ *défini par* (14.1) *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* : $t \to X(t)$, *représentation continue de* $t \geq 0$ *dans* $\mathcal{L}_s(L^2; L^2)$ *et* $\mathcal{L}_s(N; N)$.

DÉMONSTRATION.

Comme on vient de le signaler, $\lambda - \mathcal{A}$ est un isomorphisme de N sur L^2 pour σ assez grand ($\lambda = \sigma + i\tau$); soit $R(\lambda)$ son inverse, élément de $\mathcal{L}(L^2; N)$. On majore $R(\lambda)$ dans $\mathcal{L}(L^2; L^2)$. Soit pour cela f donnée dans L^2; $R(\lambda) f = u$ est la solution dans N de $(\Lambda + \lambda) u = f$ d'où l'on tire

$$((u, u))_1 + \sigma \| u \|_0^2 = \operatorname{Re} (f, u)_{L^2}$$

d'où en choisissant $\sigma > \sigma_0$ assez grand :

$$a \| u \|_V^2 + (\sigma - \sigma_0) \| u \|_0^2 \leq \| f \|_0 \| u \|_0$$

d'où

$$\| R(\lambda) \|_{\mathcal{L}(L^2;\, L^2)} \leq \frac{1}{\sigma - \sigma_0} \quad \text{pour} \quad \sigma > \sigma_0 . \tag{14.2}$$

Ceci montre par application du théorème de Hille-Yosida (cf. Hille [1], Yosida [1], Philipps [1]) que $\mathcal{A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \to X(t)$ représentation continue de $t \geq 0$ dans $\mathcal{L}_s(L^2; L^2)$, une fois continûment différentiable de $t > 0$ dans $\mathcal{L}_s(N; L^2)$ (on note en effet que sur l'espace N, la norme $\| u \|_0 + \| \mathcal{A} u \|_0$ est équivalente à la norme initiale); on en déduit que $t \to X(t)$ est continue de $t \geq 0$ dans $\mathcal{L}_s(N; N)$ d'où le théorème.

On a la relation, pour $f \in N$:

$$\frac{d}{dt} X(t) f = \mathcal{A} X(t) f, \qquad t > 0. \tag{14.3}$$

Considérons l'application

$$\varphi \to \int_0^\infty X(t) \varphi(t)\, dt \ \text{ de } \mathcal{D}_- \text{ dans } \mathcal{L}(L^2; L^2) \text{ et } \mathcal{L}(N; N).$$

Chacune de ces applications est continue, donc définit une distribution $\tilde{X} \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2; L^2))$ et $\in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; N))$. Si f est dans N la distribution $u = \tilde{X} \ast (\delta_t(a) \otimes f)$ est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ et vérifie (conséquence de (14.3)) :

$$-(1 \otimes \mathcal{A}) u + \frac{\partial}{\partial t} u = \delta_t(a) \otimes f$$

donc

$$\tilde{X} * (\delta_t(a) \otimes f) = \mathcal{G} * (\delta_t(a) \otimes f)$$

si $\mathcal{G}$ est la distribution de Green pour V et B de $1 \otimes \Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \otimes 1$. Donc $\tilde{X} = \mathcal{G}$ sur $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} N$ donc $\tilde{X} = \mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(N; N))$ donc aussi dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2; L^2))$, ce qui montre que $\tilde{X}$ est dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2; N))$ et le

THÉORÈME 14.2. *Sous les hypothèses* (SG 1) *et* (SG 2) *la distribution de Green de l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \otimes 1$ *relativement à* V *et* B *est presque partout égale à une représentation continue* $t \to \mathcal{G}(t) (= X(t))$ *de* $t \geq 0$ *dans* $\mathcal{L}_s(L^2; L^2)$ *et dans* $\mathcal{L}_s(N: N)$.

Notons également ceci qui peut être utile :

$$\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2; L^2)} \leq \exp(\sigma_0 t).$$

15. Problèmes mixtes fins (I)

Comme dans le N° précédent, on suppose que

(F 1) $$Q = L^2 (= Q')$$

(F 2) $$\begin{cases} \text{on donne } \Lambda = D + P \text{ (cf. Chap. I, p. 47), défini par } ((u, v)), \text{ sur } V, \\ \text{sous-espace vectoriel fermé de } \mathcal{E}(A) \text{ et il existe } \sigma_0 > 0 \text{ tel que} \\ ((u, u))_1 + \sigma_0 \|u\|^2_{L^2} \geq a \|u\|^2_V \text{ pour tout } u \in V, a > 0 \text{ [1]}. \end{cases}$$

Il résulte de (F 2) que pour $\sigma \geq \sigma_0$, $D + P + \sigma$ est un isomorphisme de N sur L^2.

On considère l'opérateur

(15.1) $$1 \otimes (D + P) + \frac{\partial}{\partial t} \otimes 1.$$

On sait que c'est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ (Théorème 5.1); soit $\mathcal{G}$ la distribution de Green; si donc f est donné dans L^2 il existe une solution unique dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de l'équation :

(15.2) $$(1 \otimes (D + P)) u + \frac{\partial}{\partial t} u = \delta \otimes f.$$

On va montrer sans utilisation des semi-groupes (ce qui a l'avantage de permettre, comme on va voir, des généralisations) le :

THÉORÈME 15.1. *Sous les hypothèses* (F 1) *et* (F 2), *et si* f *est dans* N, *la solution dans* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *de l'équation* (15.2) *est (presque partout) égale à une fonction*

[1] On pourrait remplacer (F 2) par (SG 2); on a pris (F 2) parce que c'est peut-être plus commode sous cette forme pour les applications.

continue, $t \to u(t)$ de $t \geq 0$ dans V. Lorsque $t \to 0$, $u(t) \to f$ dans V et lorsque $t \to \infty$, $\exp(-\xi t)\, u(t) \to 0$ dans V pour tout $\xi \geq \sigma_0$.

DÉMONSTRATION.

On désigne par Y la fonction de Heaviside en t ($=1$ pour $t > 0$ nulle pour $t < 0$). On introduit la distribution

$$v = Y \otimes f, \quad \in \mathcal{D}'_+(t, N). \tag{15.3}$$

On pose $w = u - v$; c'est un élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ qui vérifie :

$$(1 \otimes (D+P))\, w + \frac{\partial}{\partial t} w = Y \otimes h \tag{15.4}$$

où

$$h = -(D+P) f, \quad \text{élément de } L^2(\Omega). \tag{15.5}$$

La solution de (15.4) est : $w = \mathcal{G} * (Y \otimes h)$ mais, comme $Y \otimes h$ admet une transformée de Laplace en t, la *solution* peut être calculée par transformation de Laplace; soit alors $\hat{w}(p)$ la transformée de Laplace de w. Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\hat{w}(p) = g. \tag{15.6}$$

On a donc :

$$(D+P) g + p g = h/p, \qquad g \in N,\ \xi \text{ assez grand}, \tag{15.7}$$

d'où l'on déduit, en prenant le produit scalaire des deux membres avec g dans L^2 et séparant les parties réelles et imaginaires :

$$((g, g))_1 + \xi \| g \|_0^2 = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{p}(h, g)_{L^2}\right), \tag{15.8}$$

$$((g, g))_2 + \eta \| g \|_0^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{p}(h, g)_{L^2}\right). \tag{15.9}$$

Grâce à (F 2) on peut choisir σ_0 tel que

$$((g, g))_1 + \sigma_0 \| g \|_0^2 \geq c_0 ||| g |||_1^2, \quad c_0 > 0, \text{ [1]}$$

donc (15.8) donne pour $\xi > \sigma_0$:

$$c_0 ||| g |||_1^2 + (\xi - \sigma_0) \| g \|_0^2 \leq \frac{1}{|p|} \|h\|_0 \|g\|_0$$

d'où

[1] On rappelle que $||| u |||_1^2 = \| u \|_0^2 + \| u \|_1^2$.

$$\text{(15.10)} \qquad |||g|||_1^2 \leq \frac{c_1}{|p|} \|h\|_0 \|g\|_0, \qquad \xi > \sigma_0$$

(c_i désigne toujours une constante). Il en résulte que : $|((g, g))_2| \leq c_2 \dfrac{1}{|p|} \|h\|_0 \|g\|_0$ et (15.9) donne $|\eta| \|g\|_0^2 \leq c_2 \dfrac{1}{|p|} \|h\|_0 \|g\|_0 + \dfrac{1}{|p|} \|h\|_0 \|g\|_0$ donc $\|g\|_0 \leq \dfrac{c_3}{|\eta||p|} \|h\|_0$. A l'aide de (15.10) on en déduit :

$$\text{(15.11)} \qquad |||g|||_0 \leq \frac{c_4}{|\eta|^{\frac{1}{2}} |p|} \|h\|_0$$

donc : la fonction $\eta \to |||\hat{w}(\xi + i\eta)|||_1 (= |||g|||_1)$ est pour $\xi > \sigma_0$ dans l'espace $L^1(\eta, V)$ (on a évidemment une majoration sans terme en $1/|\eta|$ au voisinage de $\eta = 0$) des classes de fonctions sommables en η à valeurs dans V; par transformation de Fourier en η, il en résulte que la distribution $\exp(-\xi t) w$ est en réalité une fonction : $t \to \exp(-\xi t) w(t)$, continue de $t \in R_t$ (axe des t) dans V, nulle pour $t \to +\infty$, $\xi > \sigma_0$, et nulle pour $t < 0$.

Comme $v(t) = f$ pour $t \geq 0$, et que $w = u - v$, on en déduit le théorème.

COROLLAIRE 1. *On suppose que* (F 1) *et* (F 2) *ont lieu et qu'en outre*

(F 3) $\left\{\begin{array}{l} D + P \textit{ est un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment} \\ \textit{différentiables.} \end{array}\right.$

Sous ces hypothèses, si f est donné dans $\mathcal{D}_\Omega$, la solution du (15.2) *est une fonction indéfiniment différentiable de $t > 0$ à valeurs dans N; lorsque $t \to 0$,*

$$\frac{d^k}{dt^k} u(t) \to (-1)^k (D + P)^k f$$

dans N.

DÉMONSTRATION.

Si l'on pose $u_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} u$, élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$, u_1 est solution de :

$$(1 \otimes (D + P)) u_1 + \frac{\partial}{\partial t} u_1 = \delta' \otimes f.$$

Si alors l'on pose : $v_1 = \delta \otimes f$ (élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$) et $w_1 = u_1 - v_1$ élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ qui vérifie

$$(1 \otimes (D + P)) w_1 + \frac{\partial}{\partial t} w_1 = \delta \otimes -(D + P) f,$$

équation du type (15.2) et où $(D + P) f$ est dans $\mathcal{D}_\Omega$ (car f est dans $\mathcal{D}_\Omega$, et on a (F 3)); donc en particulier $(D + P) f$ est dans N; d'après le théorème 15.1, w_1 est fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans V, et $w_1(t) \to -(D+P)f$ dans V si $t \to 0$.

Or $u_1(t) = w_1(t)$ pour $t > 0$, donc u_1 est continue en $t(>0)$ à valeurs dans V; or $(D+P)u(t) = -u_1(t)$ pour $t>0$; on en déduit que $u(t)$ est continue en $t(t>0)$ à valeurs dans N.

On pose maintenant : $u_2 = \frac{\partial}{\partial t} u_1$; u_2 est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ solution de

$$(1 \otimes (D+P))\, u_2 + \frac{\partial}{\partial t} u_2 = \delta'' \otimes f;$$

on pose : $v_2 = \delta' \otimes f$, et $w_2 = u_2 - v_2$; d'après le théorème 15.1, w_2 est continue en t à valeurs dans V, d'où résulte que $(D+P)u_1$ est continue en $t(t>1)$ à valeurs dans V, et donc que u_1 est continue en $t(t>0)$ à valeurs dans N.

On opère de même pour les dérivées suivantes d'où le résultat.

Corollaire 15.2. *On suppose que les hypothèses* (F 1) *et* (F 2) *ont lieu, avec en outre* (dans (F 2)) *la possibilité de prendre* $\sigma_0 < 0$. *Il en résulte que* $D+P$ *est un isomorphisme de* N *sur* L^2; *soit* G *son inverse. La solution dans* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *de*

$$(1 \otimes (D+P))\, u + \frac{\partial}{\partial t} u = \delta \otimes f + Y \otimes g, \qquad f \in N,\ g \in L^2$$

est alors une fonction continue de $t>0$ *à valeurs dans* V, *et lorsque* $t \to +\infty$, $u(t) \to u_0 = G(g)$ *dans* V.

Démonstration.

Posons : $w = u - Y \otimes u_0$. Alors $(1 \otimes (D+P))\, w + \frac{\partial}{\partial t} w = \delta \otimes (f - u_0)$, donc par le théorème 15.1, $(f-u_0)$ étant dans N, $t \to w(t)$ est continue de $t>0$ dans V et puisque $\sigma_0 < 0$, on a : $w(t) \to 0$ dans V lorsque $t \to +\infty$; comme $u(t) = w(t) + u_0(t)$ pour $t>0$, on a le résultat.

16. Problèmes mitxes fins (II)

On suppose encore dans ce N° que (F 1) a lieu; rappelons cette hypothèse :

(F′ 1) $$Q = L^2\,(=Q').$$

On fait ensuite l'hypothèse :

(F′ 2) $$\left\{\begin{array}{l} \text{On donne } \Lambda = D + P, \text{ défini par la forme } ((u, v)) \text{ sur } V \subset \mathcal{E}(A); \\ \text{on suppose que } ((u, v)) \text{ est hermitienne et qu'il existe } \sigma_0 > 0 \text{ tel que :} \\ ((u, u)) + \sigma_0 \|u\|^2_{L^2} \geq a \|u\|^2_V \text{ pour tout } u \in V,\ a > 0. \end{array}\right.$$

Dans ces conditions l'opérateur

$$1 \otimes (D+P) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1 \tag{16.1}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$ (cas particulier du théorème 6.1, p. 117). On va successivement étudier le comportement en t de la solution des équations :

$$(1 \otimes (D+P))\, u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta' \otimes f_0, \quad f_0 \text{ donné dans } N, \tag{16.2}$$

$$(1 \otimes (D+P))\, u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta \otimes f_1, \quad f_1 \text{ donné dans } N. \tag{16.3}$$

On commence par (16.3). On a le

THÉORÈME 16.1. *Sous les hypothèses* (F′ 1) *et* (F′ 2), *f étant donné dans N, la solution dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de* (16.3) *est* (presque partout) *égale à une fonction une fois continûment différentiable de $t > 0$ dans L^2, continue de $t \geq 0$ dans V; lorsque $t \to 0$, $u(t) \to 0$ dans V, et $\dfrac{d}{dt} u(t) \to f$ dans L^2.*

DÉMONSTRATION.

On désigne par Y_1 la fonction de t, égale à t pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$; on pose : $v = Y_1 \otimes f_1$ et $w = u - v$; w est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ et vérifie :

$$1 \otimes (D+P)\, w + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = Y_1 \otimes h_1 \quad \text{où} \quad h_1 = -(D' + Q) f_1 .$$

On peut calculer w par transformation de Laplace en t; on pose encore $\hat{w}(p) = g$. On a donc, pour ξ assez grand : $(D+P) g + p^2 g = h_1 / p^2$. On prend le produit scalaire des deux membres avec g dans L^2 et on sépare les parties réelles et imaginaires :

$$((g, g)) + (\xi^2 - \eta^2) \| g \|_0^2 = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{p^2} (h_1, g)_{L^2} \right), \tag{16.4}$$

$$2 \xi \eta \| g \|_0^2 = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{p^2} (h_1, g)_{L^2} \right) \cdot \tag{16.5}$$

De (16.5) l'on déduit :

$$\| g \|_0 \leq \frac{1}{2 \xi |\eta| |p|^2} \| h_1 \|_0$$

ce qui en utilisant (16.4) donne :

$$\| | g | \|_1 \leq c_1 \frac{1}{|p|^2} \| h_1 \|_0$$

donc : $\eta \to |||\hat{w}(\xi + i\eta)|||_1$ est dans $L^1(\eta, V)$ d'où suit que $\exp(-\xi t) w$ est continue en t, à valeurs dans V, et est nulle pour $t < 0$ (lemme sur les supports); on en déduit déjà que u est continue pour $t > 0$, à valeurs dans V, et $u(t) \to 0$ dans V si $t \to 0$.

On a par ailleurs la majoration :

$$|\eta| \, \|\hat{w}(\xi + i\eta)\|_{L^2} \leq c_2 \frac{1}{|p|^2} \|h_1\|_0$$

donc : $\dfrac{d}{dt}(\exp(-\xi t) w)$ est continue en t à valeurs dans L^2, d'où le théorème.

Passons maintenant à (16.2). On a le

Théorème 16.2. *Sous les hypothèses* (F′ 1) *et* (F′ 2), *si* f_0 *est dans* N *ainsi que* $(D+P) f_0$, *la solution dans* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *de* (16.2) *est* (presque partout) *égale à une fonction une fois continûment différentiable de* $t > 0$ *dans* V; $u(t) \to f_0$ *dans* V *et* $\dfrac{d}{dt} u(t) \to 0$ *dans* V *si* $t \to 0$.

Démonstration.

a) On pose : $v = Y \otimes f_0$, $Y =$ fonction de Heaviside, et $w = u - v$, d'où résulte que w est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ et solution de

$$1 \otimes (D + P) w + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = Y \otimes h_0, \qquad h_0 = -(D^1 + Q) f_0, \in N.$$

On peut encore calculer w par transformation de Laplace en t; si l'on pose : $\hat{w}(p) = g$, on a :

$$(D + P) g + p^2 g = h_0 / p,$$

d'où l'on tire :

$$((g, g)) + (\xi^2 - \eta^2) \|g\|_0^2 = \operatorname{Re} \frac{1}{p} (h_0, g)_{L^2}$$

et

$$2 \xi \eta \|g\|_0^2 = \operatorname{Im} \frac{1}{p} (h_0, g)_{L^2},$$

d'où l'on déduit :

$$\|g\|_0 \leq \frac{1}{2 \xi |\eta| |p|} \|h_0\|_0$$

donc : $\eta \to \|\hat{w}(\xi + i\eta)\|_{L^2}$ est dans $L^1(\eta, L^2(\Omega))$, donc w est continue en t à valeurs dans $L^2(\Omega)$, nulle pour $t < 0$, d'où résulte que u est continue en t, $t > 0$, à valeurs dans L^2 et tend vers f_0 dans L^2 lorsque $t \to 0$.

b) Posons maintenant : $\frac{d}{dt}u = u_1$; c'est un élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ qui vérifie :

$$(D+P)\,u_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 = \delta''\otimes f_0;$$

si l'on pose : $v_1 = \delta\otimes f_0$ et $w_1 = u_1 - v_1$ on a : $(D+P)\,w_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}w_1 = \delta\otimes(-(D+P)f_0)$ et comme par hypothèse $(D+P)f_0$ est dans N, on est dans le cas du théorème 16.1. Donc w_1 est continue pour $t>0$, à valeurs dans V, une fois continûment différentiable de $t>0$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit le même résultat pour u_1 d'où le théorème.

Corollaire 16.1. *On suppose que* (F′ 1) *et* (F′ 2) *ont lieu; on suppose en outre*

(F′ 3) $\begin{cases} \textit{$D+P$ est un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment} \\ \textit{différentiables.} \end{cases}$

Alors si f_0 et f_1 sont donnés dans $\mathcal{D}_\Omega$, les solution des équations (16.2) *et* (16.3) *sont fonctions indéfiniment différentiables de $t>0$ à valeurs dans N.*

Démonstration.

1) Prenons l'équation (16.2).

On pose : $u_1 = \frac{\partial}{\partial t}u$; alors u_1 est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ solution de

$$(1\otimes(D+P))\,u_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 = \delta''\otimes f_0.$$

Si l'on pose : $v_1 = \delta\otimes f_0$ et $w_1 = u_1 - v_1$, w_1 est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ et est solution de

$$(1\otimes(D+P))\,w_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}w_1 = \delta\otimes -(D+P)f_0.$$

Puisque f_0 est dans $\mathcal{D}_\Omega$ et $(D+P)$ à coefficients indéfiniment différentiables, $(D+P)f_0$ est dans N, donc le théorème 16.1 donne :

u_1 est fonction une fois continûment différentiable de $t>0$ à valeurs dans V.

On pose ensuite : $u_2 = \frac{\partial}{\partial t}u_1$; c'est toujours un élément de $\mathcal{D}'_+(t, N)$, solution de

$$(1\otimes(D+P))\,u_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2 = \delta'''\otimes f_0.$$

On pose $v_2 = \delta'\otimes f_0$ et $w_2 = u_2 - v_2$. On a :

$$(1\otimes(D+P))\,w_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}w_2 = -\delta'\otimes(D+P)f_0,$$

et comme $(D+P)f_0$ est dans $\mathcal{D}_\Omega$, $(D+P)(D+P)f_0$ est dans $\mathcal{D}_\Omega$ donc en particulier dans N, et on peut appliquer le théorème 16.2, donc : u_2 est une fois continûment différentiable en t à valeurs dans V, donc u est trois fois continûment différentiable en t, $t>0$, à valeurs dans V. Comme pour $t>0$: $(D+P)u=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$, on voit que u est continue en t, $t>0$, à valeurs dans N.

On peut continuer par la même méthode pour les dérivées successives.

2) On suit une méthode analogue pour l'équation (16.3).

17. Régularité des noyaux de Green

On aura besoin dans ce N° de l'espace $(\mathcal{E}^k_{L^2})_{\mathrm{loc}}$ défini comme suit :

Soit Ω un ouvert quelconque de R^n, Ω_k une suite de compacts contenus dans Ω de réunion Ω; on désigne par $(L^2)_{\mathrm{loc}}$ l'espace des fonctions u sur Ω de carré sommable sur tout compact, muni des semi-normes : $\left(\int_{\Omega_k}|u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$; c'est un espace de Fréchet (métrisable et complet); on désigne alors par $(\mathcal{E}^k_{L^2})_{\mathrm{loc}}$, k entier positif quelconque, l'espace des fonctions $u\in(L^2)_{\mathrm{loc}}$ dont les dérivées distributions $D^p u$, sont dans $(L^2)_{\mathrm{loc}}$ pour $|p|\le k$, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $u\to D^p u$ soient continues de $(\mathcal{E}^k_{L^2})_{\mathrm{loc}}$ dans $(L^2)_{\mathrm{loc}}$; c'est un espace de Fréchet. Notons par $\mathcal{E}^s$ l'espace des fonctions sur Ω qui sont s fois continûment différentiables, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de chacune de leurs dérivées d'ordre $\le s$; $\mathcal{E}^\infty=\mathcal{E}$. On désigne par $L^2+\mathcal{E}'$ l'espace dual de $L^2\cap\mathcal{E}$ (toutes les intersections sont munies des topologies borne supérieure) (cf. Chap. I, § 1, N° 11) : toute distribution de $L^2+\mathcal{E}'$ est somme d'une fonction de L^2 et d'une distribution $\in\mathcal{E}'$. Notons le

LEMME 17.1 (Soboleff). *Si* $k>n+s/2$ ($n=$dimension de l'espace) *alors* $(\mathcal{E}^k_{L^2})_{\mathrm{loc}}$ *est contenu dans* $\mathcal{E}^s$ *avec une topologie plus fine.* (Une démonstration facile de ce lemme est donnée par transformation de Fourier.)

On se borne pour simplifier à l'étude de l'opérateur suivant :

$$1\otimes D+K^*_\alpha\otimes M^1 \tag{17.1}$$

où

$$\begin{cases} D=\sum_{i,j=1}^{\nu}{}^tA_i\,g_{ij}\,A_j \ \text{(cf. Chap. I, § 1, N° 8)},\ M^1=\text{opérateur de multiplication} \\ \text{par une fonction } M^1(x)\in L^\infty(\Omega),\ M^1(x)\ge\mu>0 \text{ presque partout.}\end{cases} \tag{17.2}$$

Il en résulte que A_0 est l'opérateur identique de L^2 sur lui-même :

$$Q = L^2. \tag{17.3}$$

On suppose que

$$\text{(R 1)} \quad \begin{cases} \text{on donne } V \text{ sous-espace vectoriel fermé de } \mathcal{E}(A) \text{ et soit} \\ ((u,\, v)) \text{ une forme attachée à } D\text{; on suppose qu'il existe} \\ \sigma_0 > 0 \text{ tel que } ((u,\, u))_1 + \sigma_0 (M^1 u,\, u)_{L^2} \geq a \| u \|_V^2,\ a > 0 \\ \text{pour tout } u \in V. \end{cases}$$

Il résulte de cette hypothèse que $D + \sigma_0 M^1$ est un isomorphisme de N sur L^2; *soit* G_0 *son inverse.*

On suppose toujours que $0 < \alpha \leq 1$ si $((u,\, v))$ n'est pas hermitienne, et que $0 < \alpha \leq 2$ si $((u.\, v))$ est hermitienne. Donc, *l'opérateur* (12.1) *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t,\, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t,\, L^2)$, soit $\mathcal{G}$ sa distribution de Green. De plus :

$$\begin{cases} D + p^\alpha M^1 \text{ est un isomorphisme de } N \\ \text{sur } L^2 \text{ pour } \xi > \xi_0, \text{ d'inverse } G(p). \end{cases} \tag{17.4}$$

On fait maintenant les hypothèses fondamentales suivantes :

$$\text{(R 2)} \quad \begin{cases} M^1 \text{ est une fonction indéfiniment différentiable et } D \text{ est un} \\ \text{opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables.} \end{cases}$$

On se propose dans ces conditions de donner quelques propriétés supplémentaires pour la distribution de Green $\mathcal{G}$.

Notons d'abord qu'il résulte de John [1] et Friedrichs [1] que si u est dans N, avec $(D + \lambda M)\, u \in \mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\in \mathcal{E}^k_{L^2}(\Omega)_{\text{loc}}$) ($\lambda$ paramètre complexe quelconque) alors u est dans $N \cap \mathcal{E}_\Omega$ (resp. dans $N \cap (\mathcal{E}^{k+m}_{L^2})_{\text{loc}}$ si D est d'ordre $2m$).

Il en résulte, en utilisant le théorème du graphe fermé, que G_0 et $G(p)$, $\xi > \xi_0$, sont dans les espaces $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E};\, N \cap \mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(L^2 \cap (\mathcal{E}^k_{L^2})_{\text{loc}};\, N \cap (\mathcal{E}^{k+m}_{L^2})_{\text{loc}})$ pour tout $k \geq 0$. On pose

$$G_0 M^1 = -C; \ C \text{ a les mêmes propriétés.} \tag{17.5}$$

Donc C^ν est dans $\mathcal{L}(L^2 \cap (\mathcal{E}^m_{L^2})_{\text{loc}};\, N \cap (\mathcal{E}^{(\nu,H)\,m}_{L^2})_{\text{loc}})$ et comme (faire $k=0$) N est contenu dans $(\mathcal{E}^m_{L^2})_{\text{loc}}$, on a, grâce au lemme 17.1 le

LEMME 17.2. *Pour* $(\nu+1)\,m > s + n/2$, C^ν *est dans l'espace* $\mathcal{L}(N;\, N \cap \mathcal{E}^s)$.

Montrons maintenant le

LEMME 17.3. *Lorsque p parcourt un compact K quelconque du demi-plan $\xi > \xi_0$, $G(p)$ est borné dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})$.*

DÉMONSTRATION.

L'espace $L^2 \cap \mathcal{E}$ étant tonnelé, il suffit de montrer que $G(p)$ est borné dans $\mathcal{L}_s(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})$ (i.e. pour la convergence simple forte), donc ceci : soit f donné dans $L^2 \cap \mathcal{E}$, fixé; il suffit de montrer que $G(p) f = u$ est borné dans $N \cap \mathcal{E}$ lorsque p parcourt K. Or u est la solution dans N de $(D + p^\alpha M^1) u = f$, donc

$$(D + \sigma_0 M^1) u + (p^\alpha - \sigma_0) M^1 u = f,$$

d'où :

$$u = G_0 f + (p^\alpha - \sigma_0) C u$$

donc

$$u = X_\mu(p) f + (p^\alpha - \sigma_0)^\mu C^\mu \cdot u \tag{17.6}$$

où

$$X_\mu(p) f = G_0 f + (p^\alpha - \sigma_0) C G_0 f + \cdots + (p^\alpha - \sigma_0)^{\mu-1} C^{\mu-1} G_0 f. \tag{17.7}$$

Lorsque p parcourt K, $X_\mu(p) f$ demeure dans un ensemble borné de $N \cap \mathcal{E}$. Pour $(\mu + 1) m > s + n/2$, $(p^\alpha - \sigma_0)^\mu C^\mu u$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{E}^s(\Omega)$ lorsque p parcourt K; donc u demeure dans un ensemble borné de $N \cap \mathcal{E}^s$ lorsque p parcourt K et ceci quel que soit s (en prenant μ assez grand) d'où le lemme.

COROLLAIRE 17.1. *La fonction $p \to G(p)$ est holomorphe dans le demi-plan $\xi > \xi_0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})$.*

DÉMONSTRATION.

L'application $p \to D + p^\alpha M^1$ est holomorphe dans tout le plan, à valeurs dans $\mathcal{L}(N \cap \mathcal{E}; L^2 \cap \mathcal{E})$ et son inverse est borné sur tout compact; la démonstration du lemme 4.1, p. 90 s'applique, d'où le résultat.

Soit maintenant $\xi > \xi_0$ fixé; on désigne par G_ξ la fonction $\eta \to G(\xi + i\eta)$ de R_η (axe des η) dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})$. On a le

LEMME 17.4. *Pour ξ fixé, $> \xi_0$, G_ξ est dans $\mathcal{S}'(\eta, \mathcal{L}(L^2 \cap \xi; N \cap \mathcal{E}))$ et demeure dans un ensemble borné de cet espace lorsque ξ parcourt un compact $(\xi > \xi_0)$.*

DÉMONSTRATION.

Montrons d'abord que G_ξ est dans $\mathcal{S}'(\eta, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E}))$. Soit φ donné dans $\mathcal{D}(\eta)$; on pose :

$$G_\xi(\varphi) = \int G(\xi + i\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \text{élément de } \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E};\, N \cap \mathcal{E}).$$

Il faut montrer que l'application $\varphi \to G_\xi(\varphi)$ est continue de $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ (= espace $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}$) dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E};\, N \cap \mathcal{E})$. Comme la topologie de $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ est métrisable, il suffit de montrer que si φ demeure dans un ensemble B de $\mathcal{D}$, borné dans $\mathcal{S}$, alors $G_\xi(\varphi)$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E};\, N \cap \mathcal{E})$. Comme l'espace $L^2 \cap \mathcal{E}$ est tonnelé, il suffit pour cela que $G_\xi(\varphi)$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{L}_s(L^2 \cap \mathcal{E};\, N \cap \mathcal{E})$, c'est-à-dire : soit f fixé dans $L^2 \cap \mathcal{E}$; il faut voir si $G_\xi(\varphi) \cdot f$ demeure dans un ensemble borné de $N \cap \mathcal{E}$. On sait qu'il demeure dans un ensemble borné de N (car $G_\xi \in \mathcal{S}'(\eta, \mathcal{L}(L^2; N))$ — et ceci uniformément lorsque ξ parcourt un compact. Reste donc seulement à montrer ceci :

(a) $G_\xi(\varphi) f$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{E}$.

Pour cela on va démontrer :

(b) Pour tout entier s il existe un entier $k = k(s)$ tel que $\dfrac{G(\xi + i\eta)}{(1+\eta^2)^k} \cdot f$ demeure dans un ensemble borné de $\mathcal{E}^s$ lorsque η varie sur R_η.

Voyons tout de suite que (b) entraîne (a) : puisque les fonctions φ demeurent dans B borné dans $\mathcal{S}$,

$$G_\xi(\varphi) f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\xi + i\eta)}{(1+\eta^2)^k} f\,((1+\eta^2)^k\,\varphi(\eta))\,d\eta$$

est dans un ensemble borné de $\mathcal{E}^s$; ceci (en changeant $k(s)$) est valable pour tout s, on aura donc (a).

Reste à montrer (b). On sait qu'il existe un entier k_1 tel que (avec les notations du lemme 17.3) $u(p)(1+\eta^2)^{-k_1}$ demeure dans un ensemble borné de N. On déduit de (17.6) que :

$$\frac{u(p)}{(1+\eta^2)^{k_1}(1+|p|^{\alpha})^{\mu}} = \frac{X_\mu(p) f}{(1+|p|^{\alpha})^{\mu}(1+\eta^2)^{k_1}} + \frac{(p^\alpha - \sigma_0)^\mu}{(1+|p|^{\alpha})^{\mu}}\, C^\mu\left(\frac{u}{(1+\eta^2)^{k_1}}\right).$$

Le 1[er] terme est borné dans $N \cap \mathcal{E}$; le 2[ème] dans $\mathcal{E}^s$ si : $(\mu+1)\,m > s + n/2$, d'où le lemme.

Considérons maintenant la distribution de Green $\mathcal{G}$, élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2; N))$; elle définit par restriction un élément (encore noté $\mathcal{G}$) de l'espace $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N))$, de la façon suivante :

Si φ est donnée dans $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{G}(\varphi)$ restreint à $L^2 \cap \mathcal{E}$ définit un élément de $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N)$ et l'application $\varphi \to \mathcal{G}(\varphi)$ est continue de $\mathcal{D}_-$ dans cet espace d'où le résultat. Evidemment $\mathcal{G}$ considérée dans $D'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N))$ est nulle pour $t < 0$, et admet une transformée de Laplace en t. Ceci posé on a le

THÉORÈME 17.1. *Sous les hypothèses* (R 1) *et* (R 2), *la distribution de Green* $\mathcal{G}$ *de l'opérateur* (17.1), *relativement à* V *et* B, *définit par restriction à* $L^2 \cap \mathcal{E}$ *un élément noté encore* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E}))$.

DÉMONSTRATION.

Considérons $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N))$. Elle a pour transformée de Laplace en t, la fonction $p \to G(p)$, holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N)$. Mais $G(p)$ est dans $\mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})$, l'application $p \to G(p)$ est holomorphe de $\xi > \xi_0$ dans cet espace (Corollaire 17.1) et par le lemme 17.4 admet une transformée de Laplace inverse en p, soit $\mathcal{G}_1$, élément de

$$\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})),$$

donc $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ est dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E}))$, c. q. f. d.

Il résulte du théorème précédent que l'on peut en particulier considérer $\mathcal{G}$ comme élément de $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; L^2 \cap \mathcal{E}))$.

Considérons maintenant la forme adjointe (cf. p. 29) $((u, v))^*$ de $((u, v))$, qui définit D^*, adjoint de D. Si N^* est l'espace construit à partir de $((u, v))^*$ et D^* comme N à partir de $((u, v))$ et D, l'opérateur $1 \otimes D^* + K_\alpha \otimes M^1$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N^*)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, L^2)$; soit $\mathcal{G}^*$ la distribution de Green de cet opérateur. L'opérateur D^* est évidemment encore un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables, donc on a encore :

$$\mathcal{G}^* \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N^* \cap \mathcal{E}))$$

et en particulier :

$$\mathcal{G}^* \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; L^2 \cap \mathcal{E})), \text{ et } \in \mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; L^2 \cap \mathcal{E})).$$

Considérons alors pour $\varphi \to \mathcal{D}_-$ fixée, $T \in L^2 + \mathcal{E}'$ fixé, la forme semi-linéaire

$$u \to \langle T, \overline{\mathcal{G}^*(\bar{\varphi})\, u} \rangle$$

sur $L^2 \cap \mathcal{E}$. Elle est continue, donc définit

$${}^t\mathcal{G}^*(\varphi)\, T \text{ élément de } L^2 + \mathcal{E}',$$

avec :

$$\langle {}^t\mathcal{G}^*(\varphi)\, T, \bar{u} \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{G}^*(\bar{\varphi})\, u} \rangle.$$

L'application : $T \to {}^t\mathcal{G}^*(\varphi)\, T$ est continue de $L^2 + \mathcal{E}'$ dans lui-même, et l'application $\varphi \to {}^t\mathcal{G}^*(\varphi)$ est linéaire continue de $\mathcal{D}_-$ dans $\mathcal{L}(L^2 + \mathcal{E}'; L^2 + \mathcal{E}')$, donc définit : ${}^t\mathcal{G}^*$ élément de

$$\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 + \mathcal{E}'; L^2 + \mathcal{E}')),$$

et également élément de

$$\mathcal{S}'_{\xi_0}(t, \mathcal{L}(L^2+\mathcal{E}'; L^2+\mathcal{E}')).$$

Cherchons la transformée de Laplace $G_1(p)$ de ${}^t\mathcal{G}^*$:

$$\langle {}^t\mathcal{G}^*(\exp(-pt))T, \bar{u}\rangle = \langle T, \overline{\mathcal{G}^*(\exp(-\bar{p}t)u}\rangle = \langle T, \overline{G^*(\bar{p})u}\rangle,$$

où $G^*(p)$ est la transformée de Laplace de $\mathcal{G}^*$.

Ceci posé on va montrer que :

$$(17.9)\qquad \begin{cases} \text{pour tout } f \text{ dans } L^2 \cap \mathcal{E}, \text{ on a : } \mathcal{G} f = {}^t\mathcal{G}^* f \text{ dans} \\ \mathcal{D}'_+(t, L^2+\mathcal{E}') \text{ et dans } \mathcal{S}'_{\xi_0}(t, L^2+\mathcal{E}'). \end{cases}$$

En effet, il suffit de montrer que, pour $\xi > \xi_0$, on a : $G(p)f = G_1(p)f$. Or, pour tout g dans $L^2 \cap \mathcal{E}$, on a :

$$\langle G_1(p)f, \bar{g}\rangle = \langle f, \overline{G^*(\bar{p})g}\rangle.$$

Si donc : $G(p)f = u$, $G^*(\bar{p})g = v$, il faut montrer que

$$(17.10)\qquad (f, v)_{L^2} = (u, g)_{L^2}.$$

Or u (resp. v) est la solution dans N (resp. N^*) de

$$(D + p^\alpha M^1)\ u = f \qquad (\text{resp. de } (D^* + \bar{p}^\alpha M^1)\, v = g),$$

d'où résulte :

$$(f, v)_{L^2} = ((u, v)) + p^\alpha (M^1 u, v)_{L^2}$$

et

$$(g, u)_{L^2} = ((v, u))^* + \bar{p}^\alpha (M^1 v, u)_{L^2},$$

d'où le résultat.

Soit alors φ dans $\mathcal{D}_-(t)$, on a : $\mathcal{G}(\varphi)\cdot f = {}^t\mathcal{G}^*(\varphi)\cdot f$, pour tout f dans $L^2 \cap \mathcal{E}$; donc l'application $f \to \mathcal{G}(\varphi)\cdot f$ est continue de $L^2 \cap \mathcal{E}$ muni de la topologie induite par $L^2+\mathcal{E}'$ dans $L^2+\mathcal{E}'$ (puisqu'il en est ainsi pour l'application $f \to {}^t\mathcal{G}^*(\varphi)\cdot f$); comme $L^2 \cap \mathcal{E}$ est dense dans $L^2+\mathcal{E}'$, cette application se prolonge par continuité en une application notée encore $f \to \mathcal{G}(\varphi)\cdot f$, continue de $L^2+\mathcal{E}'$ dans lui-même (et coincidant avec ${}^t\mathcal{G}^*(\varphi)$); l'application $\varphi \to \mathcal{G}(\varphi)$ de $\mathcal{D}_-$ dans $\mathcal{L}(L^2+\mathcal{E}'; L^2+\mathcal{E}')$ est continue car elle coincide avec $\varphi \to {}^t\mathcal{G}(\varphi)$, donc :

THÉORÈME 17.2. *Sous les hypothèses* (R 1) *et* (R 2), *la distribution de Green de l'opérateur* $1 \otimes D + K_\alpha^* \otimes M^1$, *soit* $\mathcal{G}$, *relativement à* V *et* B, *définit par prolongement par continuité, une distribution* $\mathcal{G}$ *élément de* $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2+\mathcal{E}'; L^2+\mathcal{E}'))$.

En résumé : on pourra considérer $\mathcal{G}$ comme élément des trois espaces suivants :

$$\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2; N)),\ \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2 \cap \mathcal{E}; N \cap \mathcal{E})),\ \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(L^2+\mathcal{E}'; L^2+\mathcal{E}')).$$

Considérons la distribution $\delta_t(s) \otimes \delta_x(y)$, produit tensoriel de la distribution en t masse 1 au point s et de la distribution en x masse 1 au point y, $y \in \Omega$; l'application $(s, y) \to \delta_t(s) \otimes \delta_x(y)$ est indéfiniment différentiable de $R_s \times \Omega$ dans $\mathcal{D}'_+(t) \hat{\otimes} (L^2 + \mathcal{E}')$ et donc

COROLLAIRE 17.2. *Le noyau* (au sens de Schwartz) *de l'application définie par* $\mathcal{G}*$ [1] (noyau de Green) *est* :

$$\mathcal{G} * (\delta_t(s) \otimes \delta_x(y)) = \mathcal{G}_t(s)_x(y),$$

(on met les indices en bas pour les distributions, en haut pour les distributions-fonctions) *ou encore* $\mathcal{G}_{t-s;\,x}(y)$; *l'application* $s, y \to \mathcal{G}_{t-s,\,x}(y)$ *est indéfiniment différentiable de* $R_s \times \Omega$ *dans* $\mathcal{D}'_+(t, L^2 + \mathcal{E}')$.

REMARQUE 17.1.

On a des résultats voisins pour les conditions aux limites de Dirichlet.

REMARQUE 17.2.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$; on a :

$$(\delta \otimes D + K_\alpha \otimes M^1) * \mathcal{G} * (\delta\,(0) \otimes \varphi) = \delta_t(0) \otimes \varphi.$$

Si l'on prend une suite de φ tendant vers $\delta_x(y)$ on a, à la limite :

$$(\delta \otimes D + K_\alpha \otimes M^1) \underset{(t)}{*} \mathcal{G}_{t,\,x}(y) = \delta_t(0) \otimes \delta_x(y).$$

18. Hyperbolicité; réflexion des ondes

On se borne dans ce N° à l'étude du classique opérateur des ondes : $-1 \otimes \Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1$, que nous écrirons simplement $-\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Soit f_1 donné dans un espace N choisi, et soit u *la* solution dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de

$$-\Delta u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta \otimes f_1. \tag{18.1}$$

Comme on a vu au N° 16, u est (presque partout) égale à une fonction $t \to u(t)$ continue de $t \geq 0$ dans $L^2(\Omega)$ (et même une fois continûment différentiable). On veut étudier le *support* de $u(t)$ pour $t > 0$ fixé quelconque. On a le

---

[1] $\mathcal{G}^*$ est ici l'application $T \to \mathcal{G} * T$; à ne pas confondre avec la distribution de Green de $1 \otimes D^* + K_\alpha \otimes M'$.

THÉORÈME 18.1. *On suppose que la fonction f_1 a son support contenu dans la boule $|x-x_0|\leq a$, contenue dans Ω. On désigne par $d_0=d(x_0, \Gamma)$ la distance du point x_0 à la frontière Γ de Ω et par u la solution de* (18.1). *On a :*

a) *pour $t<d_0-a$, le support de $u(t)$ est contenu dans la boule $|x-x_0|\leq a+t$.*

b) *pour $t\geq d_0-a$, le support $u(t)$ est contenu dans la réunion des ensembles :*

$$E_1=\{x\in\Omega,\ |x-x_0|\leq a+t\}$$
$$E_2=\{x\in\Omega,\ d(x,\Gamma)\leq a+t-d_0\}.$$

DÉMONSTRATION.

a) Soit $\mathcal{G}^\infty$ la distribution de Green de $-\Delta+\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ pour $\Omega=R^n$ (voir son expression explicite dans Schwartz [8]), soit $\tilde{f}_1$ le prolongement de f_1 à R^n par 0 hors de Ω; $\tilde{f}_1$ est dans $\mathcal{E}^2_{L^2}(R^n)$. Posons :

$$U=\mathcal{G}^\infty \ast (\delta\otimes\tilde{f}_1);$$

on obtient ainsi une fonction $t\to U(t)$ continue de $t\geq 0$ dans $\mathcal{E}^2_{L^2}(R^n)$ et ayant son support dans $|x-x_0|\leq a+t$ pour tout t.

Il en résulte que la restriction U_Ω de U à Ω et pour $t<d_0-a$ est dans $\mathcal{D}'_+(t<d_0-a, N)$, donc en vertu du théorème 13.1, on a : $u=U_\Omega$ pour $t<d_0-a$, d'où le résultat.

b) Soit $t=t_1$ fixé, $\geq d_0-a$, et $y\notin E_1\cup E_2$ donc :

(18.2) $$|y-x_0|>a+t_1$$

et

(18.3) $$d(y,\Gamma)>a+t-d_0=r.$$

On choisit $\varepsilon>0$ assez petit pour avoir

(18.4) $$d(y,\Gamma)>r+2\varepsilon$$

et

(18.5) $$|y-x_0|>a+t_1+2\varepsilon$$

puis l'on prend ε_1 avec $0<\varepsilon_1<\varepsilon$.

On considère maintenant la boule :

$$B:|x-y|\leq r+2\varepsilon.$$

Grâce à (18.4) cette boule est contenue dans Ω. Posons :

(18.6) $$t_0=d_0-a-\varepsilon_1.$$

Reprenons la fonction U du a). La fonction $U(t_0)$ a son support dans $|x-x_0|\leq a+t_0=$ $=d_0-\varepsilon_1$ et il en est de même pour la fonction $\left(\frac{d}{dt}U\right)(t_0)=U_1(t_0)$ (qui est encore dans N). Dans ces conditions, *B ne rencontre pas le support* $U_1(t_0)$ (car $|y-x_0|>$ $>r+2\varepsilon+d_0-\varepsilon_1=a+t_1+2\varepsilon-\varepsilon_1$ d'après (18.5)).

Soit alors v la solution dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de

$$-\Delta v+\frac{\partial^2}{\partial t^2}v=\delta_t(t_0)\otimes U_1(t_0). \tag{18.7}$$

Comme u, considérée dans $t>t_0$ et prolongée par 0 pour $t<t_0$ vérifie aussi (18.7), on a : $u(t)=v(t)$ pour $t>t_0$ et tout revient à montrer que

$$v(t_1)=0 \text{ au voisinage de } y. \tag{18.8}$$

Or soit $\alpha\in\mathcal{D}_\Omega$, $\alpha=1$ pour $|x-y|\leq r+\varepsilon$, $=0$ hors de B, la fonction αv est dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$, et $\alpha U_1(t_0)=0$ (les supports de α et $U_1(t_0)$ ne se rencontrant pas). Donc :

$$-\Delta(\alpha v)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha v)=R, \tag{18.9}$$

où

$$R=-\Sigma\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}-(\Delta\alpha)v,$$

donc R peut être considérée dans $\mathcal{D}'_+(t, D'_x)$, dépendant continûment de t, à valeurs dans $L^2(R^n)$, nulle pour $t<t_0$ et nulle pour $|x-y|\leq r+\varepsilon$ (car $\alpha=1$ dans cette boule), et

$$\alpha v=\mathcal{G}^\infty * R, \tag{18.10}$$

fonction continue de $t\geq t_0$ à valeurs dans $L^2(R^n)$.

Donc (18.8) revient à montrer que

$$\mathcal{G}^\infty * R(t_1)=0 \text{ au voisinage de } y, \tag{18.11}$$

i.e.

$$\int \mathcal{G}^\infty_{t_1-\tau,\,x,\,\xi}R_{\tau,\,\xi}\,d\tau\,d\xi=0 \text{ au voisinage de } y. \tag{18.12}$$

On va montrer que l'expression donnée par (18.12) est nulle dans la boule $|x-y|<$ $<\varepsilon-\varepsilon_1$, ce qui achèvera le théorème.

Or cherchons le domaine d'intégration; on doit avoir : $t_1-\tau\geq 0$, $|x-\xi|\leq t_1-\tau$ et $\tau\geq t$, $|\xi-y|\geq r+\varepsilon$. Il en résulte :

$$|x-y|\geq r+\varepsilon-(t_1-\tau)\geq t_0+r+\varepsilon-t_1=\varepsilon-\varepsilon_1,$$

ce qui fait que si $|x-y|\leq\varepsilon-\varepsilon_1$ on intègre sur un ensemble vide d'où le résultat.

COROLLAIRE 18.1. *Le support en* x *et* t *de* $\mathcal{G}_{t,x}(x_0)$ *est contenu dans le réunion des ensembles*

$$F_1 = \{x \in \Omega,\ |x - x_0| \leq t\},$$
$$F_2 = \{x \in \Omega,\ d(x, \Gamma) \leq t - d_0,\ d_0 = d(x_0, \Gamma)\}.$$

DÉMONSTRATION.

On prend une suite f^k de fonctions de $\mathcal{D}_\Omega$, f^k ayant son support dans $|x - x_0| \leq \leq 1/k$ (k assez grand); on suppose que $f^k \to \delta(x_0)$ dans $\mathcal{E}'_\Omega$ lorsque $k \to +\infty$. Alors :

$$u^k = \mathcal{G} \ast (\delta \otimes f^k) \to \mathcal{G}_{t,x}(x_0) \text{ dans } \mathcal{D}'_{\Omega \times R_t}$$

et u^k, solution de

$$-\Delta u^k + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^k = \delta \otimes f^k \text{ dans } \mathcal{D}'_+(t, N),$$

a son support donné par le théorème 18.1.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{\Omega \times R_t}$, de support dans $\complement(F_1 \cup F_2)$; il existe k tel que φ ait son support dans le complémentaire de la réunion des deux ensembles :

$$F_1^k = \{x \in \Omega,\ |x - x_0| \leq t + 1/k\},$$
$$F_2^k = \{x \in \Omega,\ d(x, \Gamma) \leq t - d_0 + 1/k\}.$$

Par le théorème 18.1, $u^{k'}$ est nul dans ce complémentaire pour tout $k' > k$, donc $u^{k'}(\varphi) = 0$ pour tout $k' > k$ donc

$$\mathcal{G}_{t,x}(x_0)(\varphi) = 0,$$

c. q. f. d.

REMARQUE 18.1.

Le corollaire 18.1 *ne peut en général être amélioré.* Considérons en effet le cas très simple : $\Omega =]0,1[$ sur R, $n = 1$. On prend V = espace des fonctions $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ *telles que* $u(0) = u(1)$ et pour N l'espace des $u \in V$ telles que

$$\frac{d^2}{dx^2} u \in L^2 \text{ et que } -\int \left(\frac{d^2}{dx^2} u\right) \bar{v}\, dx = \left(\frac{d}{dx} u, \frac{d}{dx} v\right)_{L^2}$$

pour tout $v \in V$. On va montrer que dans ces conditions le support de $\mathcal{G}_{t,x}(x_0)$ est *exactement* l'ensemble $F_1 \cup F_2$, F_i défini comme au corollaire 18.1.

Ce résultat peut être obtenu par un calcul direct de $\mathcal{G}_{t,x}(x_0)$ en effectuant une transformation de Laplace en t — ou plus naturellement : soit f donnée dans $\mathcal{D}_\Omega$ et u la solution dans $\mathcal{D}'_+(t, N)$ de $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta \otimes f$.

La fonction u est indéfiniment différentiable de $t>0$ à valeurs dans N (cf. N° 16); or $u(t) \in N$ signifie : $u(0, t) = u(1, t)$ et $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1, t)$; donc si l'on désigne par $\tau_k u(t)$ la fonction $x \to u(x-k, t)$, $k =$ entier positif, et si l'on pose :

$$\tilde{u}(t) = \sum_k \tau_k u(t), \quad \tilde{f} = \sum \tau_k f,$$

la fonction $\tilde{u}$ est solution dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{D}'_x)$ de

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u} = \delta \otimes \tilde{f}$$

donc

$$\tilde{u} = \mathcal{G}^\infty * (\delta \otimes \tilde{f}).$$

Si maintenant f tend vers $\delta_x(x_0)$ dans $\mathcal{E}'_\Omega$, $\tilde{f} \to \sum \tau_k \delta_x(x_0)$ dans $\mathcal{D}'_x$, et

$$\tilde{u} \to \sum_k \tau_{x_0+k} (\mathcal{G}^\infty_{t,x})$$

donc, si l'on désigne par $(\mathcal{G}^\infty_{t,x})_\Omega$ la restriction de $\mathcal{G}^\infty_{t,x}$ à Ω, u tend vers

$$\sum_k \tau_{x_0+k} (\mathcal{G}^\infty_{t,x})_\Omega$$

et vers $\mathcal{G}_{t,x}(x_0)$ d'où

$$\mathcal{G}_{t,x}(x_0) = \sum_k \tau_{x_0+k} (\mathcal{G}^\infty_{t,x})_\Omega$$

d'où le résultat.

Bibliographie

ARONSZAJN [1]. Applied functional Analysis, *Proceedings of the International Congress of Math.*, II (1950), 123–127.

——, [2]. *Studies in eigen value problems*. Technical Reports. University of Kansas, Lawrence.

BOURBAKI [1]. *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, Hermann, 1953.

BRELOT [1]. La théorie moderne du potentiel, *Annales Institut Fourier* (1954), 113–140.

BROWDER [1]. The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38, N° 3 (1952), 230–235.

——, [2]. The Dirichlet and vibration problems for linear elliptic differential equations of arbitrary order, *ibid.*, 38 N° 8 (1952), 230–235.

——, [3]. Assumption of boundary values and the Green's function, *ibid.*, 39, N° 3 (1953), 179–184.

——, [4]. Linear parabolic differential equations of arbitrary order, *ibid.*, 39, N° 3 (1953), 185–190.

BUREAU [1]. Les séries de fonctions fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, *Acta Math.*, 89 (1953), 1–43.

Courant et Hilbert [1]. *Methoden der mathematischen Physik.* Berlin. II, 1937.

Deny [1]. Les potentiels d'énergie finie. *Acta Math.*, 82 (1950), 107–183.

Deny-Lions [1]. Les espaces du type de Beppo Levi, *Annales de l'Institut Fourier*, V (1953–1954), 305, 370.

Doetsch [1]. *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.* Berlin, Springer, 1937.

Friedrichs [1]. On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Comm. on Pure and Applied Math.*, VI (1953), 299–325.

——, [2]. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, *Math. Annalen*, 109 (1934).

Gårding [1). Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), 1030–1032.

——, [2). Elliptic partial differential equations with constant coefficients, *Proc. of the Symposion on Spectral Theory and Differential Problem*, Stillwater, Okl., 1951, 291–299.

——, [3]. Le problème de Dirichlet ..., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 233 (1951), 1554–1556.

——, [4]. Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), 55–72.

Garnir [1]. Fonctions de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet et Neumann dans un angle ou un dièdre, *Bull. Soc. R. Sci. Liège*, N° 3, 4, 5 (1952), 119–140 et 207–231.

——, [2]. Sur la propagation de l'onde ..., *ibid.*, N° 8, 9, 10 (1952), 328–344.

——, [3]. Propagation de l'onde ..., *ibid.*, N° 3, 4 (1953), 85–100 et 148–162.

——, [4]. Fonctions de Green ..., *ibid.*, N° 1 (1953), 29–46.

Grothendieck [1]. Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensorielles topologiques et des espaces nucléaires. *Annales de l'Institut Fourier*, IV (1952), 73–112.

——, [2). Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

Hadamard [1]. *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris, 1932.

Hille [1]. Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* XXXI, New York, 1948.

Jennings [1]. Operators in reproducing kernel spaces, *Technical Reports, University of Kansas*, N° 11, 1954.

John [1]. Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations, *Comm. on Pure and Applied Math.*, VI (1953), 327–335.

Krein [1]. The theory of self adjoint extensions of semi bounded Hermitian transformations and its applications, *Mat. Sbornik*, 20 (1947), 431–495.

Lions [1]. Problèmes aux limites (I), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236, p. 2373: (II), *ibid.*, p. 2470, (III) *ibid.*, 237, p. 12; (IV) Problèmes aux limites et conditions à l'infini, *ibid.*, 237 (1953), p. 1617.

——, [2]. Supports dans la transformation de Laplace, *Journal d'analyse math. Israel*, II (1952/53), 369–380.

——, [3]. Ouverts m-réguliers. *A paraître dans l'ouvrage en hommage à M. Beppo Levi.*

——, [4]. Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques. *Bulletins de la Soc. Math. de France* (1955).

——, [5]. Problèmes aux limites du type mixte, *2ème Colloque sur les Equations aux dérivées partielles.* Bruxelles, 1954.

Michlin [1]. *Problèmes de minimum de fonctionnelles quadratiques.* Moscou, 1952.

Minakshisundaram [1]. A generalization of Epstein zeta functions (with a supplementary note by H. Weyl), *Canadian J. of Math.*, 1, N° 4 (1949), 320–327.

Nikolsky [1]. Propriétés de certaines classes de fonctions ..., *Mat. Sbornik*, 33 (75) (1953), 261.

PETROWSKY [1]. *Leçons sur les équations aux dérivées partielles.* Moscou, 1950.

PLEIJEL [1]. Quelques problèmes de vibrations et les méthodes directes du calcul des variations, *Arkiv för Math. Astr. och Fysik*, 29 A (1943), 1–17.

——, [2]. Sur les opérateurs différentiels de type elliptique, *ibid.*, 32 A (1945), 1–14.

——, [3]. On Green's functions for elastic plates ..., *Proc. of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problem*, Stillwater, Okl., 1951, p. 413.

PHILLIPS [1]. Perturbation theory for semi groups of linear operators, *Trans of the Amer. Math. Soc.*, 74 (1953), p. 199.

F. RIESZ et B. ST. NAGY [1]. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Budapest, 1952.

SCHWARTZ [1]. *Théorie des distributions*, T. 1. Paris, Hermann, 1950.

——, [2]. *Id.*, T. 2, 1951.

——, [3]. Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet, *Sém. Bourbaki*, Mai 1952.

——, [4]. *Transformation de Laplace des distributions.* Lund, Tome suppl., 1952, 196–205.

——, [5]. Théorie des noyaux, *Proceedings of the International Congress of Math.*, I (1950), 220–230.

——, [6]. Distributions à valeurs vectorielles. A paraître au *Journal d'analyse mathématique d'Israel.*

——, [7]. *Séminaire* (I). Paris, 1953–54.

——, [8]. Les équations d'évolution liées au produit de composition, *Annales de l'institut Fourier*, 1952, 19–49.

SHAPIRO [1]. Sur des problèmes aux limites généralisés pour des équations de type elliptique. *Istveszia*, 17 (1953), 530–562.

SOBOLEFF [1]. Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, *Mat. Sbornik*, 4 (46) (1938), p. 472.

——, [2]. *Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique.* Léningrad, 1950.

STONE [1]. *Linear transformations in Hilbert space.* New York, 1932.

TITCHMARSH [1]. *Eigenfunctions expansion associated with second order differential equations.* Oxford, 1946.

——, [2]. On the discreteness of the spectrum ..., *Annali di Mat.* (4) 28 (1949), 141–147.

VISIK [1]. Systèmes fortement elliptiques ..., *Mat. Sbornik*, 29 (71), 3 (1951), 615–676.

——, [2]. *Sur les problèmes aux limites généraux pour des équations différentielles elliptiques.* Moscou, 1 (1952), 187–246.

WEIL [1]. *L'intégration dans les groupes topologiques.* Paris, Hermann, 1940.

WEYL [1]. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. Journal*, 7 (1940), 411–444.

YOSIDA [1]. On the differentiability and the representation of one parameter semi group of linear operators, *Journal of the Math. Soc. of Japan*, 1 (1948), 15–21.

——, [2]. On Cauchy's problem in the large for Wave Equation, *Proc. of the Japan Acad.* 28 (1952), 396–403.