

SUR LE CAS TRAITÉ PAR M^{me} KOWALEVSKI DE ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE PESANT AROUND D'UN POINT FIXE

PAR

FRITZ KÖTTER

à BERLIN.

Dans le 12 volume de ce journal M^{me} de KOWALEVSKI a publié un mémoire qui constitue un progrès important et réel dans l'étude du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Aux deux cas déjà connus de ce problème elle en ajoute un troisième dans l'hypothèse où les cosinus directeurs de la direction de la pesanteur, et les trois composantes de la vitesse de rotation s'expriment dans le voisinage d'une valeur finie du temps quelconque même complexe sous la forme

$$(t - t_0)^{-m} \mathfrak{P}(t - t_0).$$

Ce cas est caractérisé par ce fait que deux des moments principaux d'inertie sont égaux entre eux et doubles du troisième et que le centre de gravité est dans le plan de ces deux moments principaux. Dans un mémoire postérieur (tome 14 de ce journal), M^{me} de KOWALEVSKI a démontré que ce cas est le seul en dehors des deux précédemment connus qui jouit de la propriété annoncée. Dans ce cas en dehors des trois intégrales générales des six équations différentielles pour les composantes de la vitesse de rotation et les cosinus directeurs de la direction de la pesanteur, il existe une autre intégrale algébrique de manière que le problème est ramené aux quadratures. Au moyen de ces quatre intégrales il est possible

d'exprimer les six grandeurs en question au moyen de fonctions hyperelliptiques de deux arguments. Il résulte encore des équations différentielles du problème que ces arguments sont des fonctions linéaires du temps. Quant aux six cosinus qui manquent encore, M^{me} de KOWALEVSKI déclare qu'on peut les représenter aussi au moyen des fonctions théta, mais elle renonce à faire le calcul à cause des difficultés qu'elle prévoit.

On peut éviter ces difficultés en exprimant d'une manière convenable les trois cosinus de direction. Pour le cosinus directeur γ'' de l'axe principal d'inertie distinguée, M^{me} de KOWALEVSKI a déjà obtenu une expression relativement simple, à savoir une fraction dont les deux termes sont des fonctions linéaires homogènes de trois fonctions hyperelliptiques. Au contraire pour les cosinus γ et γ' qui relient les deux autres axes du corps avec la pesanteur, se présentent des fractions très compliquées dont le dénominateur est le carré du dénominateur de γ'' , et dont les numérateurs sont des fonctions homogènes du 2^d degré d'un grand nombre de fonctions hyperelliptiques. Ces expressions peuvent se mettre sous une forme beaucoup plus claire si on calcule $\gamma + i\gamma'$, $\gamma - i\gamma'$. Ces deux expressions sont des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont composés d'une manière relativement claire linéairement au moyen de six fonctions hyperelliptiques. Cette forme induit à étudier au lieu du mouvement des trois axes le mouvement d'un troisième système de coordonnées dont la position est bien déterminée à chaque instant par rapport au système de coordonnées précédent. Les cosinus directeurs des nouveaux axes et de la verticale sont des fractions dont les numérateurs comme le dénominateur commun sont des fonctions linéaires et homogènes de fonctions hyperelliptiques. Un examen attentif des coefficients de ces expressions montre qu'on peut les représenter plus simplement au moyen de fonctions hyperelliptiques de deux arguments dont les valeurs sont naturellement constantes. Indépendamment de la valeur des quatre arguments ainsi introduits, les trois fonctions de ces arguments satisfont à la condition caractéristique pour les trois cosinus directeurs d'une droite avec trois axes rectangulaires, en outre elles satisfont à certaines équations différentielles partielles, dont une autre solution est de grande importance pour l'étude du mouvement d'un corps solide dans un fluide. C'est cette circonstance qui dans ce cas comme dans l'autre fournit une détermination simple et naturelle des six cosinus directeurs restants.

Dans ce qui suit je développerai les résultats auxquels j'ai arrivé de cette manière, et même déduirai les quantités obtenues par M^{me} de KOWALEVSKI, pour les avoir sous la forme la plus commode pour les développements suivants.

§ 1. *Les équations différentielles et les quatre intégrales algébriques.*

A un instant donné la position d'un corps qui tourne autour d'un point fixe, est complètement déterminée par les cosinus directeurs de deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires dont l'un est fixe dans l'espace, et l'autre fixe dans le corps qui tourne. Le système d'axes fixes dans l'espace E, H, Z est choisi de manière que l'axe Z soit dans la direction de la pesanteur. Le système de coordonnées fixes dans le corps n'est pas encore déterminé par la condition de coïncider avec les axes principaux d'inertie, parce qu'ici deux axes principaux d'inertie sont égaux entre eux, et que par suite toutes les directions d'un certain plan peuvent être considérées comme axes principaux d'inertie. Nous supposons donc le système d'axes choisi de manière que l'axe Z coïncide avec le plus petit axe d'inertie, et que le centre de gravité du corps soit sur la partie positive de l'axe des X . Nous désignons avec KIRCHHOFF les moments principaux d'inertie et la masse du corps par P, Q, R et M et par x_0 la distance à l'origine du centre de gravité et par g l'accélération due à l'attraction de la terre. Les cosinus directeurs des trois axes du corps avec la verticale sont $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et les cosinus directeurs avec les deux axes horizontaux seront $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Dans notre cas on a donc

$$P = Q = 2R.$$

Par un choix convenable de l'unité de longueur on peut prendre

$$R = M$$

et par un choix convenable de l'unité du temps on peut faire que

$$gx_0 = 1$$

alors nous obtenons pour les composantes de la vitesse de rotation et pour les cosinus directeurs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} 2 \frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2 \frac{dq}{dt} &= -pr - r\gamma_3, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{dr}{dt} &= r\gamma_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned}$$

De ces équations différentielles on peut déduire quatre équations intégrales algébriques, à savoir d'abord la relation entre les cosinus directeurs

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

secondement l'expression du théorème des aires

$$2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l$$

troisièmement le théorème de la conservation de la force vive

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\gamma_1 + 6l_1$$

et quatrièmement une intégrale spéciale à laquelle on arrive de la manière suivante.

On reconnaît facilement que par suite des équations différentielles on a les équations

$$\frac{d}{dt}\{(p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\} = -ir\{(p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\},$$

et

$$\frac{d}{dt}\{(p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = +ir\{(p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\}.$$

D'où il résulte immédiatement

$$\{(p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\}\{(p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = k^2,$$

où k désigne une constante réelle.

§ 2. Représentation des six quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r$ au moyen de fonctions hyperelliptiques.

Déjà M^{me} de KOWALEVSKI a ramené les quatre équations intégrales à une autre forme en introduisant au lieu de γ_1, γ_2, p, q , les quatre quantités

$$\begin{aligned} x_1 &= p + iq, & x_2 &= p - iq, \\ \xi_1 &= (p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2, & \xi_2 &= (p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2; \end{aligned}$$

alors les équations intégrales deviennent

$$\begin{aligned} (1 a) \quad & \xi_1 \xi_2 = k^2, \\ (1 b) \quad & r^2 = 6l_1 + \xi_1 + \xi_2 - (x_1 + x_2)^2, \\ (1 c) \quad & r\gamma_3 = 2l - x_2 \xi_1 - x_1 \xi_2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2), \\ (1 d) \quad & \gamma_3^2 = 1 - k^2 + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2 - x_1^2 x_2^2. \end{aligned}$$

En éliminant de ces équations les quantités r und γ_3 nous obtenons l'équation

$$(2) \quad \xi_1 R(x_1) + \xi_2 R(x_2) + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0,$$

où on a posé pour abrégier

$$\begin{aligned} (3 a) \quad & R(x) = -x^4 + 6l_1 x^2 + 4lx + 1 - k^2, \\ (3 b) \quad & R_1(x_1, x_2) = -6l_1 x_1^2 x_2^2 - 4lx_1 x_2 (x_1 + x_2) - (1 - k^2)(x_1 + x_2)^2 \\ & \quad + 6l_1(1 - k^2) - 4l^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons évidemment convenir que k sera une valeur positive, et poser alors $\sqrt{\xi_1} \sqrt{\xi_2} = k$, si nous convenons aussi que $\sqrt{\xi_1}$ et $\sqrt{\xi_2}$ représentent des valeurs imaginaires conjuguées. De (1 a) et (2) nous tirons alors les équations

$$\left\{ \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right\}^2 = -\frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} \pm 2k \frac{\sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k^2.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
 & R(x_1)R(x_2) - R_1(x_1, x_2)(x_1 - x_2)^2 \\
 &= x_1^4 x_2^4 - 12l_1 x_1^3 x_2^3 + 36l_1^2 x_1^2 x_2^2 - 4lx_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + 24l_1 l x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\
 &\quad + 4l^2 (x_1 + x_2)^2 + 2(1 - k^2)x_1^2 x_2^2 + 12l_1(1 - k^2)x_1 x_2 \\
 &\quad + 4l(1 - k^2)(x_1 + x_2) + (1 - k^2)^2 \\
 &= (-x_1^2 x_2^2 + 6l_1 x_1 x_2 + 2l(x_1 + x_2) + (1 - k^2))^2
 \end{aligned}$$

ou si on pose pour abrégier

$$\begin{aligned}
 (3\text{ c}) \quad R(x_1, x_2) &= -x_1^2 x_2^2 + 6l_1 x_1 x_2 + 2l(x_1 + x_2) + 1 - k^2, \\
 R(x_1)R(x_2) - (x_1 - x_2)^2 R_1(x_1, x_2) &= R(x_1, x_2)^2.
 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\left\{ \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right\}^2 = \frac{R(x_1, x_2)^2 - R(x_1)R(x_2)}{(x_1 - x_2)^4} \pm 2k \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k^2.$$

Si nous posons

$$(4) \quad t_1 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \quad t_2 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \left\{ \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right\}^2 &= t_1 t_2 \mp k(t_1 - t_2) - k^2 \\
 &= (t_1 \pm k)(t_2 \mp k)
 \end{aligned}$$

et par suite

$$(5\text{ a}) \quad \sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} (\sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} + \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)}),$$

$$(5\text{ b}) \quad \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} (\sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} - \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)}).$$

En vertu de l'équation (4), on peut exprimer les quantités x_1, x_2 de la manière suivante au moyen de t_1, t_2 . Comme on le voit facilement, à chaque système de valeurs t_1, t_2 correspondent 8 systèmes de valeurs x_1, x_2 . Les grandeurs $x_1 x_2$ et $x_1 + x_2$ ont une relation ration-

nelle aussi bien avec $t_1 + t_2$ qu'avec $t_1 t_2$, et chacune de ces équations est du second degré en $x_1 x_2$ et $x_1 + x_2$. D'après l'équation (4) les grandeurs t sont les racines de l'équation

$$t^2 - 2 \frac{R(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} t - \frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(t - u)^2 - 2 \frac{R(x_1, x_2) - u(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} (t - u) + \frac{-R_1(x_1, x_2) - 2R(x_1, x_2)u + u^2(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0.$$

Le numérateur du dernier terme de cette équation peut s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} & 2(u + 3l_1)x_1^2x_2^2 + 4lx_1x_2(x_1 + x_2) - 4u(u + 3l_1)x_1x_2 \\ & + (1 - k^2 + u^2)(x_1 + x_2)^2 - 4lu(x_1 + x_2) + 4l^2 - 6l_1(1 - k^2) - 2(1 - k^2)u \\ & = \left(\sqrt{2(u + 3l_1)}(x_1x_2 - u) + \frac{2l}{\sqrt{2(u + 3l_1)}}(x_1 + x_2) \right)^2 \\ & + [2(u^2 + (1 - k^2))(u + 3l_1) - 4l^2] \left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2(u + 3l_1)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Si nous posons maintenant $t + 3l_1 = s$, $u + 3l_1 = z$ et

$$z((z - 3l_1)^2 + (1 - k^2)) - 2l^2 = \varphi(z)$$

nous avons

$$(6) \quad (s - z)^2 - 2 \frac{R(x_1, x_2) - (z - 3l_1)(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} (s - z) + \left(\sqrt{2z} \frac{x_1x_2 - z + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2z}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 + 2 \frac{\varphi(z)}{(x_1 - x_2)^2} \left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2z} - 1 \right) = 0.$$

Si nous appelons e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation $\varphi(z)$ résolue par rapport à z , alors pour $z = e_a$ les produits $(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)$ deviennent les carrés de fonctions rationnelles de x_1 et x_2 nous obtenons les équations

$$\sqrt{2e_a} \frac{x_1x_2 - e_a + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2e_a}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}. \quad (a=1, 2, 3)$$

Et si nous les multiplions par $-\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}$, $\frac{2l}{\sqrt{2e_a}\varphi'(e_a)}$, $-\frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_\beta + e_\gamma)$ et si nous ajoutons

$$(7a) \quad \frac{2}{x_1 - x_2} = - \sum_{a=1,2,3} \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)},$$

$$(7b) \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sum_{a=1,2,3} \frac{2l}{\sqrt{2e_a}\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)},$$

$$(7c) \quad \frac{x_1 x_2 + 3l_1}{x_1 - x_2} = - \sum_{a=1,2,3} \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (e_\beta + e_\gamma) \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}.$$

Si les racines sont choisies convenablement, on peut poser

$$2l = \sqrt{2e_a}\sqrt{e_\beta e_\gamma};$$

nous obtenons alors

$$(7d) \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)},$$

où les signes des radicaux peuvent toujours et doivent être choisis de manière que $2\sqrt{e_\beta e_\gamma} = \sqrt{2e_\beta}\sqrt{2e_\gamma}$.

Nous obtenons très simplement les grandeurs $\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2}$ et $\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2}$ de la manière suivante. On a

$$\begin{aligned} s &= \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3l_1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{R(x_1) + R(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)^2 - 2\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right)^2 = 2s_1 - (x_1 + x_2)^2;$$

on a de même

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right)^2 = 2s_2 - (x_1 + x_2)^2.$$

Mais lorsque $s = s_1$ l'équation (6) a lieu pour toute valeur de z . Si on pose $z = s_1$ on obtient

$$\left(\sqrt{2s_1} \frac{x_1 x_2 - s_1 + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2s_1}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 + \frac{2\varphi(s_1)}{(x_1 - x_2)^2} \left(\frac{(x_1 + x_2)^2}{2s_1} - 1 \right) = 0$$

et par suite

$$2s_1 - (x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{2\varphi(s_1)} (2s_1(x_1 x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2))^2.$$

Par un choix convenable des signes des radicaux on peut donc écrire

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}} (2s_1(x_1 x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2)),$$

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}} (2s_2(x_1 x_2 + 3l_1 - s_2) + 2l(x_1 + x_2)).$$

Des signes des deux radicaux $\sqrt{\varphi(s_1)}$ et $\sqrt{\varphi(s_2)}$ l'un seulement est arbitraire, parce que $R(x_1)$ et $R(x_2)$ s'expriment rationnellement au moyen des quantités $\sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}$. En multipliant les deux équations nous obtenons

$$\frac{R(x_1) - R(x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{2s_1(x_1 x_2 + 3l_1 - s_1) + 2l(x_1 + x_2)}{\sqrt{\varphi(s_1)}} \frac{2s_2(x_1 x_2 + 3l_1 - s_2) + 2l(x_1 + x_2)}{\sqrt{\varphi(s_2)}}.$$

Si nous multiplions le premier membre par $x_1 - x_2$ et si nous donnons alors à x_1, x_2 la même valeur très-grande x , alors nous obtenons $-4x^3$. Si nous désignons par ε l'une des valeurs $+1$ ou -1 , on peut écrire

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sqrt{\varphi(s_2)} = \varepsilon \prod_{a=1,2,3} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}.$$

C'est pourquoi en opérant de même sur le second membre, nous obtenons la valeur $-4\varepsilon x^3$. Nous avons alors à poser pour ε la valeur $+1$, ou en d'autres termes, à choisir les radicaux $\sqrt{\varphi(s_1)}$ et $\sqrt{\varphi(s_2)}$, de manière que

$$\sqrt{\varphi(s_1)}\sqrt{\varphi(s_2)} = \prod_{a=1,2,3} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}.$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{\varphi(s)}} (2s(x_1 x_2 + 3l_1 - s) + 2l(x_1 + x_2)) &= \sqrt{\varphi(s)} \frac{2s(x_1 x_2 + 3l_1 - s) + 2l(x_1 + x_2)}{(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)} \\
 &= \sqrt{\varphi(s)} \sum_a \frac{2e_a(x_1 x_2 + 3l_1 - e_a) + 2l(x_1 + x_2)}{\varphi'(e_a)(s - e_a)} \\
 &= \sqrt{\varphi(s)} (x_1 - x_2) \sum \frac{\sqrt{2e_a} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\varphi'(e_a) s - e_a} \\
 &= -2 \sqrt{\varphi(s)} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\varphi'(e_a) s - e_a}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}.
 \end{aligned}$$

D'après cela nous obtenons

$$(8a) \quad \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} - \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_a} \right) \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}},$$

$$(8b) \quad \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} + \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_a} \right) \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}.$$

De plus on a

$$2 \frac{\sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} = -(s_1 - s_2),$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right)^{-1} = -\frac{2}{s_1 - s_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2},$$

$$\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right)^{-1} = -\frac{2}{s_1 - s_2} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2};$$

ainsi nous obtenons de (5 a) et (5 b) en posant

$$-k + 3l_1 = e_4, \quad +k + 3l_1 = e_5$$

$$\sqrt{\xi_1} = + \frac{I}{s_1 - s_2} \left\{ \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} + \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)} \right\} \\ \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} - \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_a} \right) \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}},$$

$$\sqrt{\xi_2} = - \frac{I}{s_1 - s_2} \left\{ \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} - \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)} \right\} \\ \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \left(\frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} + \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_a} \right) \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}{\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}}.$$

Nous déterminons les expressions $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)}$ et $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)}$ de manière que l'on ait

$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_5)} = \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}.$$

De plus nous déterminons $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}$ et $\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}$ au moyen des équations

$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} \sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} = (s_1 - e_4) \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)},$$

$$\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_4)} \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)} = (s_2 - e_4) \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}.$$

De plus nous posons

$$S_\beta = \sqrt{(s_\beta - e_4)(s_\beta - e_5)} \sqrt{\varphi(s_\beta)} = \sqrt{\prod_{\alpha=1}^5 (s_\beta - e_\alpha)}, \quad (\beta=1, 2)$$

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} \quad (\alpha=1, 2, 3, 4, 5)$$

de manière qu'on ait aussi

$$S_1 S_2 = \prod_{\alpha=1}^5 P_\alpha.$$

Enfin nous désignons par $P_{\alpha\beta}$ l'expression

$$\frac{P_\alpha P_\beta}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{S_1}{(s_1 - e_\alpha)(s_1 - e_\beta)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\alpha)(s_2 - e_\beta)} \right\}.$$

Cela posé, nous pouvons écrire

$$(9a) \quad \sqrt{\xi_1} = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$(9b) \quad \sqrt{\xi_2} = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Or, on a $\sqrt{\xi_1} \sqrt{\xi_2} = k$. D'où

$$2k \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right)^2 = \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right)^2 - \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \right)^2.$$

Les grandeurs ξ_1 et ξ_2 elles-mêmes peuvent s'exprimer par

$$(10a) \quad \xi_1 = k \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}},$$

$$(10b) \quad \xi_2 = k \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}.$$

Des grandeurs ξ et x on tire alors les grandeurs $y_1 = r_1 + ir_2$, $y_2 = r_1 - ir_2$ au moyen des équations $y_\beta = \xi_\beta - x_\beta^2$.

Or les expressions de x_β et x_β^2 peuvent être transformées de la manière suivante.

Des équations (7) il résulte

$$(11a) \quad x_1 = - \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a + 1}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$(11b) \quad x_2 = - \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a - 1}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Nous ajoutons aux dénominateurs et aux numérateurs de ces fractions respectivement le facteur

$$\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right) - \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \\ &= \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_\beta) \varphi'(e_\gamma)} (e_\beta - e_\gamma) P_\gamma P_{\beta 4} \\ &= - \sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_\beta P_\gamma P_4}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{S_1}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)(s_1 - e_4)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\beta)(s_2 - e_\gamma)(s_2 - e_4)} \right\}; \end{aligned}$$

et cela devient en vertu de $S_1 S_2 = \prod_{a=1}^5 P_a$

$$- \sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a P_b}{s_1 - s_2} \left(\frac{S_2}{(s_2 - e_a)(s_2 - e_b)} - \frac{S_1}{(s_1 - e_a)(s_1 - e_b)} \right) = \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}.$$

On a donc les deux équations

$$\begin{aligned} & \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right) - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} = \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right), \\ & \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \right) - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} = \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right). \end{aligned}$$

Par suite on peut séparer dans le numérateur de x_1 et de x_2 le facteur

$\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a$. Nous obtenons donc

$$(12a) \quad x_1 = - \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}},$$

$$(12b) \quad x_2 = - \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}.$$

Pour obtenir x_1^2 et x_2^2 nous multiplions les deux expressions de x_1 et celles de x_2 . Au numérateur s'introduit alors la somme et la différence des deux expressions

$$\begin{aligned} & \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \right) \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}, \\ & \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5} \right) \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) - \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}. \end{aligned}$$

Parce qu'on a

$$(e_\beta - e_\gamma) P_{a5} = - (P_\gamma P_{\beta 4} - P_\beta P_{\gamma 4}),$$

et par suite

$$\sum \frac{P_{a5} \sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} = \sum_{\beta \neq \gamma} P_\gamma P_{\beta 4} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma} (e_\beta - e_\gamma)}{\varphi'(e_\beta) \varphi'(e_\gamma)},$$

nous obtenons pour la première des deux expressions

$$\sum \frac{e_\beta e_\gamma}{\varphi'^2(e_a)} P_{a4} P_a + \sum_{\beta \neq \gamma} P_\gamma P_{\beta 4} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma} (e_a + e_\gamma - e_\beta)}{\varphi'(e_\beta) \varphi'(e_\gamma)}.$$

Mais on a encore

$$e_\beta e_\gamma = \varphi'(e_a) + e_a (e_\beta + e_\gamma - e_a)$$

et $e_\beta + e_\gamma - e_a = 2(3l_1 - e_a)$. De plus l'expression $\sum \frac{P_a P_{a4}}{\varphi'(e_a)}$ se réduit à zéro, et l'expression entière peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_a \frac{2e_a(3l_1 - e_a)}{\varphi'^2(e_a)} P_{a4} P_a + \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{2\sqrt{e_\beta e_\gamma} (3l_1 - e_\beta)}{\varphi'(e_\beta) \varphi'(e_\gamma)} P_\gamma P_{\beta 4} \\ & = \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (3l_1 - e_a) P_{a4} \right). \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (3l_1 - e_a) P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (3l_1 - e_a) P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}, \\ x_2^2 &= \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (3l_1 - e_a) P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (3l_1 - e_a) P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}; \end{aligned}$$

au moyen des valeurs données plus haut pour ξ_1, ξ_2 nous obtenons de plus

$$(13 a) \quad y_1 = \xi_1 - x_1^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_4)P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_5)P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a4} - \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a5}},$$

$$(13 b) \quad y_2 = \xi_2 - x_2^2 = \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_4)P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}(e_a - e_5)P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a4} + \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)}P_{a5}}.$$

Le cosinus directeur qui manque encore, et la composante de la vitesse angulaire qui reste à déterminer se tirent des équations (1 b), (1 c), (1 d). Si nous les multiplions par $x_1^2, 2x_1, 1$ et $x_2^2, 2x_2, 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (rx_1 + r_3)^2 &= R(x_1) + (x_1 - x_2)^2 \xi_1, \\ (rx_2 + r_3)^2 &= R(x_2) + (x_1 - x_2)^2 \xi_2, \end{aligned}$$

tandis qu'on obtient en les multipliant par $x_1 x_2, x_1 + x_2, 1$

$$(rx_1 + r_3)(rx_2 + r_3) = R(x_1, x_2).$$

Par suite de ces équations le signe de l'une des grandeurs est déterminé par celui de l'autre. Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{rx_1 + r_3}{\sqrt{R(x_1)}}\right)^2 &= 1 + \frac{(x_1 - x_2)^4 \xi_1 R(x_2)}{R(x_1)R(x_2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= 1 + \frac{(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} + \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)})^2}{(s_1 - s_2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{rx_2 + r_3}{\sqrt{R(x_2)}}\right)^2 &= 1 + \frac{(x_1 - x_2)^4 \xi_2 R(x_1)}{R(x_1)R(x_2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= 1 + \frac{(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)} - \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)})^2}{(s_1 - s_2)^2}, \end{aligned}$$

tandis qu'on a

$$\frac{(rx_1 + r_3)(rx_2 + r_3)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \frac{R(x_1, x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \frac{s_1 + s_2 - 6l_1}{s_1 - s_2} = \frac{s_1 + s_2 - e_4 - e_5}{s_1 - s_2}.$$

Il va de soi qu'ici tous les radicaux ont la signification donnée plus haut. Les seconds membres des deux premières équations peuvent encore s'écrire

$$\frac{(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} + \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)})^2}{(s_1 - s_2)^2}$$

et

$$\frac{(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)})^2}{(s_1 - s_2)^2}.$$

Nous n'avons rien fixé de plus pour le signe de P_5 et de P_4 , si ce n'est que leur produit fût égal à $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}\sqrt{(s_2 - e_4)(s_1 - e_5)}$. En disposant convenablement du signe de ces grandeurs nous pouvons poser

$$\frac{rx_1 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_1)}} = \frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} + \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2};$$

alors il vient

$$\frac{rx_2 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_2)}} = -\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2}.$$

De ces équations on tire

$$r = \frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}\sqrt{R(x_1)} + \sqrt{R(x_2)}}{s_1 - s_2} + \frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{s_1 - s_2},$$

$$\gamma_3 = -\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}x_2\sqrt{R(x_1)} + x_1\sqrt{R(x_2)}}{s_1 - s_2}$$

$$-\frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}x_2\sqrt{R(x_1)} - x_1\sqrt{R(x_2)}}{s_1 - s_2}.$$

Au moyen des équations (8 a), (8 b) on tire ensuite

$$r = \sqrt{2} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a}{s_1 - s_2} \left(\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_2 - e_a} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)} \frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} \right)}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Or, on a

$$\sqrt{\varphi(s_2)} = \frac{P_a P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_1)}}{(s_1 - e_a)(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)}, \quad \sqrt{\varphi(s_1)} = \frac{P_a P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_2)}}{(s_2 - e_a)(s_2 - e_\beta)(s_2 - e_\gamma)}$$

et par suite

$$\begin{aligned} & \frac{P_a}{s_1 - s_2} \left(\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}}{s_2 - e_a} \frac{\sqrt{\varphi(s_2)}}{s_1 - e_a} - \frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - e_a} \frac{\sqrt{\varphi(s_1)}}{s_1 - e_a} \right) \\ &= \frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - s_2} \left(\frac{S_1}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)} - \frac{S_2}{(s_2 - e_\beta)(s_2 - e_\gamma)} \right) = P_{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

de manière qu'il vient

$$(13) \quad r = \sqrt{2} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

On a de plus

$$\begin{aligned} 2 \frac{x_2 \sqrt{R(x_1)} - x_1 \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} &= (x_1 - x_2) \left\{ \frac{x_1 + x_2 \sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} - \frac{\sqrt{R(x_1)} + \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right\} \\ &= -\sqrt{2} \frac{(x_1 - x_2)}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a} \left\{ \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a}{s_1 - e_a} \right) \sqrt{\varphi(s_1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a}{s_2 - e_a} \right) \sqrt{\varphi(s_2)} \right\}. \end{aligned}$$

Le second terme dans la parenthèse peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_1)}}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)} &= -\sum_a \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} \frac{P_\beta P_\gamma \sqrt{\varphi(s_1)} (e_\beta - e_\gamma)^2}{(s_1 - e_\beta)(s_1 - e_\gamma)} \\ &= -\sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_a} (e_\beta - e_\gamma)}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} \frac{P_\gamma P_\beta}{s_1 - e_\beta} \sqrt{\varphi(s_1)}, \end{aligned}$$

tandis que le premier terme devient égal à

$$\sqrt{\varphi(s_1)} \sum \frac{\sqrt{2e_a} \sqrt{e_\beta e_\gamma}}{(\varphi'(e_a))^2} \frac{P_a^2}{s_1 - e_a} + \sqrt{\varphi(s_1)} \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{e_a e_\beta} \sqrt{2e_\beta}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} \frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - e_\beta},$$

de manière qu'on a pour la somme dans la parenthèse l'expression

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varphi(s_1)} \sum \frac{\sqrt{2e_a} \sqrt{e_\beta e_\gamma}}{(\varphi'(e_a))^2} \frac{P_a^2}{s_1 - e_a} + \sqrt{\varphi(s_1)} \sum_{\beta \neq \gamma} \frac{\sqrt{2e_\gamma} \sqrt{e_a e_\gamma}}{\varphi'(e_\beta)\varphi'(e_\gamma)} \frac{P_\beta P_\gamma}{s_1 - e_\beta} \\ &= \sqrt{\varphi(s_1)} \left(\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a \right) \left(\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} \frac{P_a}{s_1 - e_a} \right). \end{aligned}$$

Si on remplace enfin $x_1 - x_2$ par sa valeur, on obtient définitivement

$$(14 a) \quad \frac{x_2 \sqrt{R(x_1)} - x_1 \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{2} \sqrt{\varphi(s_1)} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma} P_a}{\varphi'(e_a) s_1 - e_a}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a} P_a}{\varphi'(e_a)}}.$$

D'une manière toute semblable on obtient

$$(14 b) \quad \frac{x_2 \sqrt{R(x_1)} + x_1 \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} = -\sqrt{2} \sqrt{\varphi(s_2)} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma} P_a}{\varphi'(e_a) s_2 - e_a}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a} P_a}{\varphi'(e_a)}}.$$

En se servant de ces valeurs, on obtient, de la même manière qu'en déterminant r ,

$$(15) \quad r_3 = \sqrt{2} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma} P_{\beta\gamma}}{\varphi'(e_a)}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a} P_a}{\varphi'(e_a)}}.$$

Pour la détermination des grandeurs s_1 et s_2 comme fonctions du temps nous procéderons comme il suit. On a, comme il est facile de le voir,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} &= + 2 \sqrt{2} \frac{\frac{\partial x_1}{\partial s_1} - \frac{\partial x_2}{\partial s_1}}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi(s_1)}, \\ \frac{\sqrt{R(x_1)} + \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} &= - 2 \sqrt{2} \frac{\frac{\partial x_1}{\partial s_2} - \frac{\partial x_2}{\partial s_2}}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi(s_2)}, \\ \frac{x_2 \sqrt{R(x_1)} - x_1 \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} &= - 2 \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right) \frac{x_1 - x_2}{2} \sqrt{\varphi(s_1)} \\ &= + 2 \sqrt{2} \frac{x_2 \frac{\partial x_1}{\partial s_1} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial s_1}}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi(s_1)}, \\ \frac{x_2 \sqrt{R(x_1)} + x_1 \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} &= + 2 \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right) \frac{x_1 - x_2}{2} \sqrt{\varphi(s_2)} \\ &= - 2 \sqrt{2} \frac{x_2 \frac{\partial x_1}{\partial s_2} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial s_2}}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi(s_2)} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} &= \sqrt{R(x_1)}, & 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_1)}\frac{\partial x_2}{\partial s_1} &= \sqrt{R(x_2)}, \\ 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}\frac{\partial x_1}{\partial s_2} &= -\sqrt{R(x_1)}, & 2\sqrt{2}\sqrt{\varphi(s_2)}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} &= \sqrt{R(x_2)}. \end{aligned}$$

Par suite entre x_1 et x_2 d'un côté, s_1 et s_2 de l'autre existent les deux équations différentielles

$$(16 a) \quad 2\sqrt{2}\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} - \frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}},$$

$$(16 b) \quad 2\sqrt{2}\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}}.$$

Mais on a de plus d'après les équations différentielles du problème

$$\begin{aligned} 2\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} &= -i\frac{rx_1 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_1)}} dt = -i\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} + \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2} dt, \\ 2\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= +i\frac{rx_2 + \gamma_3}{\sqrt{R(x_2)}} dt = -i\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)} - \sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2} dt. \end{aligned}$$

En nous servant de ces deux équations, nous tirons

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{S_1} &= -i\sqrt{2}\frac{dt}{s_1 - s_2}, \\ \frac{ds_2}{S_2} &= +i\sqrt{2}\frac{dt}{s_1 - s_2} \end{aligned}$$

et par suite

$$(17 a) \quad \frac{s_1 ds_1}{S_1} + \frac{s_2 ds_2}{S_2} = -i\sqrt{2} dt,$$

$$(17 b) \quad \frac{ds_1}{S_1} + \frac{ds_2}{S_2} = 0.$$

§ 3. Décomposition du mouvement.

Si on désigne par $u + iv$ une grandeur complexe de module 1, alors les grandeurs γ'_1 et γ'_2 qu'on tire de

$$\gamma'_1 + i\gamma'_2 = (\gamma_1 + i\gamma_2)(u + iv)$$

et la grandeur γ_3 peuvent être considérées comme les cosinus directeurs de la verticale par rapport à un nouveau système de coordonnées dont le 3^e axe se confond avec l'axe des Z fixe dans le corps. Le premier axe du nouveau système forme avec les axes des X et les Y les cosinus directeurs u et $-v$, pendant que le second a les cosinus directeurs v et u .

Le mouvement relatif du nouveau système de coordonnées par rapport à celui qui est fixe dans le corps est donc une rotation autour de l'axe des Z de ce dernier avec la vitesse angulaire

$$\rho = -i \frac{d \ln(u - iv)}{dt} = i \frac{d \ln(u + iv)}{dt}.$$

Les composantes de la vitesse de rotation du nouveau système par rapport aux axes fixes dans le corps sont donc

$$p, q, r + \rho.$$

De là résulte que les composantes de la vitesse de rotation du nouveau système par rapport à ses propres axes se déduisent des équations

$$p' + iq' = (p + iq)(u + iv),$$

$$r' = r + \rho.$$

Nous savons que $\sqrt{\xi_1}$ et $\sqrt{\xi_2}$ sont deux grandeurs conjuguées dont le module est k . Nous pouvons donc considérer

$$u + iv = \frac{\sqrt{\xi_2}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad u - iv = \frac{\sqrt{\xi_1}}{\sqrt{k}}$$

comme des grandeurs qui satisfont aux conditions requises. Comme on a $2k = e_5 - e_4$, on tire en se servant des équations (9 a), (9 b)

$$(18) \quad u \pm iv = \frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \mp \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}$$

et encore

$$(19) \quad \gamma'_1 \pm i\gamma'_2 = \frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (e_a - e_4) P_{a4} \mp \sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} (e_a - e_5) P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$(20) \quad p' \pm iq' = -\frac{1}{\sqrt{e_5 - e_4}} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4} \mp \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Nous avons déduit plus haut

$$\frac{d \ln \xi_2}{dt} = ir.$$

Par suite on a

$$\rho = i \frac{d \ln(u + iv)}{dt} = \frac{i}{2} \frac{d \ln \xi_2}{dt} = -\frac{r}{2}$$

et encore

$$(21) \quad r' = r + \rho = \frac{1}{2} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{2e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

De là se déduit l'ensemble suivant de formules

$$\gamma'_1 = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} (e_a - e_4) P_{a4}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}, \quad \gamma'_2 = i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} (e_a - e_5) P_{a5}}{\sqrt{(e_5 - e_4)} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$\gamma'_3 = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$p' = -\frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}}{\sqrt{2} \sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}, \quad q' = -i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{2} \sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$r' = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma}}{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a},$$

$$u = \frac{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a4}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}, \quad v = i \frac{\sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{a5}}{\sqrt{e_5 - e_4} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_a}.$$

Ces grandeurs satisfont aux équations différentielles suivantes qu'on déduit facilement des équations différentielles du problème

$$(22 \text{ a}) \quad \frac{d\gamma'_1}{dt} = r'\gamma'_2 - q'\gamma'_3,$$

$$(22 \text{ b}) \quad \frac{d\gamma'_2}{dt} = p'\gamma'_3 - r'\gamma'_1,$$

$$(22 \text{ c}) \quad \frac{d\gamma'_3}{dt} = q'\gamma'_1 - p'\gamma'_2,$$

$$(23 \text{ a}) \quad 2 \frac{dp'}{dt} = \gamma'_3 v,$$

$$(23 \text{ b}) \quad 2 \frac{dq'}{dt} = -\gamma'_3 u,$$

$$(23 \text{ c}) \quad 2 \frac{dr'}{dt} = \gamma'_2 u - \gamma'_1 v,$$

$$(24 \text{ a}) \quad \frac{du}{dt} = -r'v,$$

$$(24 \text{ b}) \quad \frac{dv}{dt} = r'u.$$

§ 4. Représentation des coefficients de $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, p', q', r'$ au moyen de fonctions hyperelliptiques.

Pour la détermination des cosinus directeurs du nouveau système par rapport aux deux axes horizontaux du système fixe dans l'espace il est d'une extrême importance que les coefficients constants dans les expressions précédentes puissent s'exprimer au moyen de fonctions hyperelliptiques.

Cette représentation dépend essentiellement de l'équation

$$(25) \quad \varphi(z) \equiv z(z^2 - 6l_1z + 9l_1^2 + 1 - k^2) - 2l^2 = 0,$$

dont les racines sont les grandeurs e_1, e_2, e_3 . Nous pouvons l'écrire aussi

$$\varphi(z) = z(z - e_4)(z - e_5) + z - 2l^2 = 0,$$

de manière que pour une valeur quelconque de z on a

$$2l^2 - z = z(z - e_4)(z - e_5) - (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Si nous posons $z = e_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), nous obtenons

$$2l^2 - e_\alpha = e_\alpha(e_\alpha - e_4)(e_\alpha - e_5). \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

Mais si on a $z = e_\delta$, δ désignant l'un des indices 4 ou 5, nous obtenons

$$2l^2 - e_\delta = -(e_\delta - e_1)(e_\delta - e_2)(e_\delta - e_3) = (e_1 - e_\delta)(e_2 - e_\delta)(e_3 - e_\delta).$$

Si nous attribuons aux grandeurs $\sqrt{e_1}, \sqrt{e_2}, \sqrt{e_3}$ la même signification que précédemment, et si de plus nous déterminons les radicaux $\sqrt{e_\alpha - e_4}$ et $\sqrt{e_\alpha - e_5}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), nous pouvons définir de nouveaux radicaux par les égalités

$$(26) \quad \sqrt{2l^2 - e_\alpha} = \sqrt{e_\alpha} \sqrt{e_\alpha - e_4} \sqrt{e_\alpha - e_5}, \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

$$(27) \quad \sqrt{2l^2 - e_\delta} = \sqrt{e_1 - e_\delta} \sqrt{e_2 - e_\delta} \sqrt{e_3 - e_\delta}. \quad (\delta=4, 5)$$

Et comme $\sqrt{e_\alpha} \sqrt{e_\beta} \sqrt{e_\gamma} = l\sqrt{2}$, nous en tirons l'égalité

$$(28) \quad \sqrt{2l^2 - e_1} \sqrt{2l^2 - e_2} \sqrt{2l^2 - e_3} = l\sqrt{2} \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5}.$$

Nous poserons encore

$$R(z) = \varphi(z)(z - e_4)(z - e_5)$$

et définissons alors les radicaux $\sqrt{R'(e_a)}$ par les égalités suivantes

$$(29 \text{ a}) \quad \sqrt{R'(e_a)} = \sqrt{\varphi'(e_a)}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}, \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

$$(29 \text{ b}) \quad \sqrt{R'(e_4)} = \sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{-\varphi'(e_4)} = \sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_4},$$

$$(29 \text{ c}) \quad \sqrt{R'(e_5)} = i\sqrt{e_5 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}.$$

Les radicaux $\sqrt{\varphi'(e_a)}$ doivent être déterminés de manière que, si α, β, γ désigne une permutation circulaire des nombres 1, 2, 3, on ait

$$\sqrt{\varphi'(e_a)}\sqrt{\varphi'(e_\beta)}\sqrt{\varphi'(e_\gamma)} = -i(e_a - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_a) = i\varphi'(e_a)(e_\beta - e_\gamma).$$

Enfin la signification de $\sqrt{e_4 - e_a}$ et $\sqrt{e_5 - e_a}$ doit être prise telle que l'on ait

$$\sqrt{e_4 - e_a}\sqrt{e_5 - e_a} = \sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}.$$

Si dans $P(s_1, s_2)_a$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$) nous prenons pour s_1, s_2 une paire de valeurs $s'_1 = \frac{1}{\tau^2}, s'_2$, on peut développer P_a suivant les puissances de τ . Nous obtenons

$$(30) \quad P\left(s'_2, \frac{1}{\tau^2}\right)_a = \frac{1}{\tau}P(s'_2)_a^{(-1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m P(s'_2)_a^{(m)}.$$

Il vient

$$(30 \text{ a}) \quad P(s'_2)_a^{(-1)} = \sqrt{s'_2 - e_a}, \quad (30 \text{ b}) \quad P(s'_2)_a^{(0)} = 0,$$

$$(30 \text{ c}) \quad P(s'_2)_a^{(+1)} = -\frac{1}{2}e_a\sqrt{s'_2 - e_a}, \dots$$

On peut développer de même $P\left(\frac{1}{\tau^2}, s'_2\right)_{a\beta}$ et on obtient

$$(31 \text{ a}) \quad P(s'_2)_{a\beta}^{(-1)} = \sqrt{s'_2 - e_a}\sqrt{s'_2 - e_\beta},$$

$$(31 \text{ b}) \quad P(s'_2)_{a\beta}^0 = -\sqrt{s'_2 - e_\gamma}\sqrt{s'_2 - e_\delta}\sqrt{s'_2 - e_\varepsilon},$$

$$(31 \text{ c}) \quad P(s'_2)_{a\beta}^{(1)} = \left(s'_2 - \frac{1}{2}(e_\gamma + e_\delta + e_\varepsilon)\right)\sqrt{s'_2 - e_a}\sqrt{s'_2 - e_\beta}, \dots$$

Nous posons encore

$$(32 \text{ a}) \quad Q(s_1, s_2)_a = \frac{P(s_1, s_2)_a}{\sqrt[4]{R'(e_a)}}; \quad (32 \text{ b}) \quad Q(s_2)_a^{(\mu)} = \frac{P(s_2)_a^{(\mu)}}{\sqrt[4]{R'(e_a)}},$$

$$(33 \text{ a}) \quad Q(s_1, s_2)_{a\beta} = \frac{\sqrt{e_a - e_\beta}}{\sqrt[4]{R'(e_a)}\sqrt[4]{R'(e_\beta)}} P(s_1, s_2)_{a\beta},$$

$$(33 \text{ b}) \quad Q(s_2)_{a\beta}^{(\mu)} = \frac{\sqrt{e_a - e_\beta} P(s_2)_{a\beta}^{(\mu)}}{\sqrt[4]{R'(e_a)}\sqrt[4]{R'(e_\beta)}}.$$

Nous considérons les grandeurs $Q(s_1, s_2)_\mu$ comme des fonctions de

$$(34) \quad v_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_{a_1}^{s_1} \frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_2}^{s_2} \frac{ds_2}{S_2} \right),$$

$$v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_{a_1}^{s_1} \frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_2}^{s_2} \frac{ds_2}{S_2} \right),$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. Si nous prenons maintenant pour s_1, s_2 la paire de valeurs $s'_2, \frac{1}{\tau^2}$ nous obtenons

$$\bar{v}'_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_{a_1}^{s'_2} \frac{ds_2}{S_2} + \int_{a_2}^{\infty} \frac{ds_1}{S_1} \right) - i\tau\sqrt{2} \mathfrak{P}(\tau^2)$$

$$= v'_1 - i\tau\sqrt{2} \left(1 + \frac{e}{3}\tau^2 + \dots \right),$$

$$\bar{v}'_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_{a_1}^{s'_2} \frac{ds_2}{S_2} + \int_{a_2}^{\infty} \frac{ds_1}{S_1} \right) - i\tau\sqrt{2} \mathfrak{P}(\tau^2)$$

$$= v'_2 - i\sqrt{2} \left(\frac{\tau^3}{3} + \frac{e}{5}\tau^5 + \dots \right),$$

où nous avons écrit e pour $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$. En regardant maintenant la fonction $Q(s_1, s_2)_\mu$ comme fonction de v_1, v_2 nous pouvons la poser égale à

$$\frac{R(v_1, v_2)_\mu}{R(v_1, v_2)},$$

où $R(v_1, v_2)$ doit devenir infiniment petit de premier ordre, quand $\tau = s_1^{-\frac{1}{2}}$ est infiniment petit.

Nous prendrons pour v_1, v_2 les valeurs \bar{v}'_1, \bar{v}'_2 et nous allons développer suivant les puissances de τ . Si nous posons pour abrégé

$$(35 a) \quad \frac{i}{\sqrt{2} \frac{\partial R(v'_1, v'_2)}{\partial v'_1}} = \lambda, \quad (35 b) \quad \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 R(v'_1, v'_2)}{\partial v_1'^2}}{\frac{\partial R(v'_1, v'_2)}{\partial v'_1}} = m,$$

$$(35 c) \quad \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{\partial^3 R(v'_1, v'_2)}{\partial v_1'^3} - \frac{\partial R}{\partial v'_2}}{\frac{\partial R}{\partial v'_1}} - e \right) = n,$$

nous obtenons

$$Q(s_2)_\mu^{(-1)} = \lambda R(v'_1, v'_2)_\mu,$$

$$Q(s_2)_\mu^{(0)} = -i \sqrt{2} \lambda \left(\frac{\partial R(v'_1, v'_2)_\mu}{\partial v'_1} - m R(v'_1, v'_2)_\mu \right),$$

$$Q(s_2)_\mu^{(1)} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 R(v'_1, v'_2)_\mu}{\partial v_1'^2} - 2m \frac{\partial R(v'_1, v'_2)_\mu}{\partial v'_1} + (2m^2 - n) R(v'_1, v'_2)_\mu \right).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} &= \frac{\sqrt{e_a}(e_a - e_4)(e_a - e_5)}{R'(e_a)} = \frac{\sqrt{e_a} \sqrt{e_a - e_4} \sqrt{e_a - e_5} \sqrt{e_a - e_4} \sqrt{e_a - e_5}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4} \\ &= \frac{\sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{e_a - e_4} \sqrt{e_a - e_5}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4}. \end{aligned}$$

D'après cela nous obtenons pour le dénominateur commun

$$\sum P_a \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} = \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_a^{(-1)} Q(s_1, s_2)_a.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4} \varphi'(e_a)} &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{2l^2 - e_4} (e_a - e_4) (e_a - e_5) \sqrt{e_a}}{R'(e_a) \sqrt[4]{R'(e_4)}} \\ &= \frac{(\sqrt{e_a - e_4})^2 \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{(\sqrt[4]{R'(e_a)})^4 (\sqrt[4]{R'(e_4)})^2} \end{aligned}$$

et par suite

$$\sum \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4}\varphi'(e_a)} P_{a4} = \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{a4}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{a4}.$$

D'où il résulte

$$i \sum \frac{(e_a - e_5)\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4}\varphi'(e_a)} P_{a5} = \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{a5}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{a5}.$$

Pour trouver le numérateur du 3^{me} cosinus, nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma)\sqrt{e_\beta}\sqrt{e_\gamma}\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_\beta - e_4}\sqrt{e_\beta - e_5}\sqrt{e_\gamma - e_4}\sqrt{e_\gamma - e_5}}{\sqrt{R'(e_a)}\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}} \\ &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}}{\sqrt{R'(e_\beta)}\sqrt{R'(e_\gamma)}} \frac{\sqrt{e_4 - e_a}\sqrt{e_5 - e_a}}{\sqrt{R'(e_a)}}. \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a)} P_{\beta\gamma} = i \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{(-1)} Q(s_1, s_2)_{\beta\gamma}.$$

Les numérateurs de p' , q' , r' s'expriment aussi de cette manière. On a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\sqrt{e_5 - e_4}\varphi'(e_a)} &= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_\beta e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_4}(e_a - e_5)}{\sqrt{R'(e_4)}R'(e_a)} \\ &= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{\sqrt{R'(e_4)}R'(e_a)} \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{e_a - e_5}}{\sqrt{e_a - e_4}}. \end{aligned}$$

Nous multiplions les deux termes du dernier facteur par $\sqrt{e_a}\sqrt{e_a - e_5}$ et obtenons alors

$$\begin{aligned} &\frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}R'(e_a)} \frac{l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}(e_a - e_5)}{\sqrt{2l^2 - e_a}} \\ &= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}R'(e_a)} \left\{ \frac{l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}(2l^2 - e_5)}{\sqrt{2l^2 - e_a}} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_a} \right\} \\ &= \frac{(e_a - e_4)\sqrt{e_a - e_5}\sqrt{e_a - e_4}}{\sqrt{R'(e_4)}R'(e_a)} \left\{ \sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_a} \right\}. \end{aligned}$$

D'après cela les numérateurs de p' et q' deviennent

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a) \sqrt{e_5 - e_4}} P_{a4} \\ &= \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} \left\{ \frac{Q(2l^2)_{a4}^{(0)}}{\sqrt{2}} + l Q(2l^2)_{a4}^{(-1)} \right\} Q(s_1, s_2)_{a4}, \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum \frac{\sqrt{e_\beta e_\gamma}}{\varphi'(e_a) \sqrt{e_5 - e_4}} P_{a5} \\ &= \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} \left\{ \frac{Q(2l^2)_{a5}^0}{\sqrt{2}} + l Q(2l^2)_{a5}^{(-1)} \right\} Q(s_1, s_2)_{a5}. \end{aligned}$$

Les coefficients du numérateur de r' ont la forme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma) \sqrt{e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5}}{\sqrt{R'(e_a)} \sqrt{R'(e_\beta)} \sqrt{R'(e_\gamma)}} \\ &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma) \sqrt{e_a - e_4} \sqrt{e_a - e_5}}{\sqrt{R'(e_a)} \sqrt{R'(e_\beta)} \sqrt{R'(e_\gamma)}} \frac{e_a \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5}}{\sqrt{2l^2 - e_a}} \\ &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{\sqrt{R'(e_a)} \sqrt{R'(e_\beta)} \sqrt{R'(e_\gamma)}} \left\{ -\sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5} + \frac{2l^2 \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5}}{\sqrt{2l^2 - e_a}} \right\} \\ &= i \frac{(e_\beta - e_\gamma) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{\sqrt{R'(e_a)} \sqrt{R'(e_\beta)} \sqrt{R'(e_\gamma)}} \left\{ -\sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \sqrt{2l^2 - e_5} + l \sqrt{2} \sqrt{2l^2 - e_\beta} \sqrt{2l^2 - e_\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

D'après cela le numérateur de r' devient égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} P_{ar} = i \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} \left\{ \frac{Q(2l^2)_{\beta\gamma}^0}{\sqrt{2}} + l Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{-1} \right\} Q(s_1, s_2)_{\beta\gamma}.$$

Enfin pour transformer encore les numérateurs de u et v , nous divisons l'égalité obtenue plus haut

$$\frac{\sqrt{e_a}}{\varphi'(e_a)} = \frac{\sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{\sqrt{R'(e_a)}} \sqrt{2l^2 - e_a}$$

par $\sqrt{e_5 - e_4} = \sqrt{R'(e_4)} : \sqrt{2l^2 - e_4}$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4} \varphi'(e_a)} &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)} e_a - e_4} \\ &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)}} \frac{(e_\beta - e_4)(e_\gamma - e_4) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4}}{2l^2 - e_4} \\ &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)}} \left\{ (2l^2 - e_4 - (2l^2 - e_\beta + 2l^2 - e_\gamma)) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2l^2 - e_\beta)(2l^2 - e_\gamma) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4}}{2l^2 - e_4} \right\} \\ &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)}} \left\{ - (2l^2 - (e_\beta + e_\gamma - e_4)) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right. \\ &\quad \left. + l \sqrt{2} \sqrt{2l^2 - e_\beta} \sqrt{2l^2 - e_\gamma} \sqrt{2l^2 - e_5} \right\} \\ &= \frac{(e_a - e_4) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)}} \left\{ - 2 \left(2l^2 - \frac{1}{2} (e_\beta + e_\gamma + e_5) \right) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right. \\ &\quad \left. + l \sqrt{2} \sqrt{2l^2 - e_\beta} \sqrt{2l^2 - e_\gamma} \sqrt{2l^2 - e_5} \right. \\ &\quad \left. + (2l^2 - (e_4 + e_5)) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right\}. \end{aligned}$$

Nous déduisons de la même manière

$$\begin{aligned} \frac{i \sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4} \varphi'(e_a)} &= \frac{(e_a - e_5) \sqrt{e_4 - e_a} \sqrt{e_5 - e_a}}{R'(e_a) \sqrt{R'(e_4)}} \left\{ - 2 \left(2l^2 - \frac{1}{2} (e_\beta + e_\gamma + e_5) \right) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right. \\ &\quad \left. + l \sqrt{2} \sqrt{2l^2 - e_\beta} \sqrt{2l^2 - e_\gamma} \sqrt{2l^2 - e_5} \right. \\ &\quad \left. + (2l^2 - e_4 - e_5) \sqrt{2l^2 - e_a} \sqrt{2l^2 - e_4} \right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons par suite

$$\begin{aligned} \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4} \varphi'(e_a)} P_{a4} &= \\ - \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} \{ 2 Q(2l^2)_{a4}^{(+1)} + l \sqrt{2} Q(2l^2)_{a4}^{(0)} - (2l^2 - e_4 - e_5) Q(2l^2)_{a4}^{(-1)} \} Q(s_1, s_2)_{a4}, \\ i \sum \frac{\sqrt{e_a}}{\sqrt{e_5 - e_4} \varphi'(e_a)} P_{a5} &= \\ - \sum Q(e_4)_a^{(-1)} Q(e_5)_a^{(-1)} \{ 2 Q(2l^2)_{a5}^{(+1)} + l \sqrt{2} Q(2l^2)_{a5}^{(0)} - (2l^2 - e_4 - e_5) Q(2l^2)_{a5}^{(-1)} \} Q(s_1, s_2)_{a5}. \end{aligned}$$

Il est remarquable qu'une grandeur qui se compose avec le numérateur de γ'_3 de la même manière que les deux expressions précédentes avec les numérateurs de γ'_1, γ'_2 , a la valeur zéro. C'est

$$\begin{aligned}
& 2Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{(+1)} + l\sqrt{2}Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{(0)} - (2l^2 - e_4 - e_5)Q(2l^2)_{\beta\gamma}^{(-1)} \\
&= (4l^2 - (e_a + e_4 + e_5))\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_a} \\
&\quad - (2l^2 - e_4 - e_5)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} \\
&= (2l^2 - e_a)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - l\sqrt{2}\sqrt{2l^2 - e_4}\sqrt{2l^2 - e_5}\sqrt{2l^2 - e_a} \\
&= (2l^2 - e_a)\sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma} - \sqrt{2l^2 - e_\beta}\sqrt{2l^2 - e_\gamma}(2l^2 - e_a) = 0.
\end{aligned}$$

Si nous désignons de plus par v''_1, v''_2 et v'''_1, v'''_2 les couples de valeurs que prennent v_1, v_2 lorsque $s_1 = e_4, s_2 = \infty$ et $s_1 = e_5, s_2 = \infty$, nous obtenons immédiatement

$$(36 \text{ a}) \quad \gamma'_1 = \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_{a4} R(v_1, v_2)_{a4}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a},$$

$$(36 \text{ b}) \quad \gamma'_2 = \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_{a5} R(v_1, v_2)_{a5}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a},$$

$$(36 \text{ c}) \quad \gamma'_3 = i \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_{\beta\gamma} R(v_1, v_2)_{\beta\gamma}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a}.$$

Si nous désignons par $\Delta F(v'_1, v'_2)$ le résultat de l'opération

$$(l + im)F(v'_1, v'_2) - i \frac{\partial F(v'_1, v'_2)}{\partial v'_1},$$

nous obtenons

$$(37 \text{ a}) \quad p' = \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a (\Delta R(v'_1, v'_2)_{a4}) R(v_1, v_2)_{a4}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a},$$

$$(37 \text{ b}) \quad q' = \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a (\Delta R(v'_1, v'_2)_{a5}) R(v_1, v_2)_{a5}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a},$$

$$(37 \text{ c}) \quad r' = i \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a (\Delta R(v'_1, v'_2)_{\beta\gamma}) R(v_1, v_2)_{\beta\gamma}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a}.$$

Pour la suite il est essentiel que les expressions précédentes puissent s'écrire un peu autrement. Comme il est facile de le voir, on a pour un indice simple $Q(s')_\mu^0 = 0$ et par suite

$$\frac{\partial R(v'_1, v'_2)_\mu}{\partial v'_1} = mR(v'_1, v'_2)_\mu.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v'_1} (\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a) \\ &= m \{ \Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a \}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$(39 \text{ a}) \quad p' = l\gamma'_1 - i \frac{\partial \gamma'_1}{\partial v'_1},$$

$$(39 \text{ b}) \quad q' = l\gamma'_2 - i \frac{\partial \gamma'_2}{\partial v'_1},$$

$$(39 \text{ c}) \quad r' = l\gamma'_3 - i \frac{\partial \gamma'_3}{\partial v'_1}.$$

Si on pose pour abréger

$$(40) \quad \begin{aligned} \nabla F(v'_1, v'_2) &= \Delta \Delta F(v'_1, v'_2) - l \Delta F(v'_1, v'_2) \\ &+ \left(n - m^2 - l^2 + \frac{e_4 + e_5}{2} \right) F(v'_1, v'_2), \end{aligned}$$

les grandeurs u et v deviennent

$$(41 \text{ a}) \quad u = -2 \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a \nabla R(v'_1, v'_2)_{a4} R(v_1, v_2)_{a4}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a},$$

$$(41 \text{ b}) \quad v = -2 \frac{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a \nabla R(v'_1, v'_2)_{a5} R(v_1, v_2)_{a5}}{\Sigma R(v''_1, v''_2)_a R(v'''_1, v'''_2)_a R(v'_1, v'_2)_a R(v_1, v_2)_a}.$$

§ 5. Introduction des fonctions *théta*.

Les fonctions employées dans le chapitre précédent $R(v_1, v_2)$ peuvent se représenter facilement au moyen des fonctions θ . Pour introduire

ces fonctions, nous avons d'abord à rechercher la position relative des zéros de S et des limites d'intégration.

Les deux zéros e_4 et e_5 sont réels et $e_5 > e_4$. Des trois zéros e_1 , e_2 , e_3 qui sont les racines de l'équation

$$s(s - e_4)(s - e_5) + s - 2l^2 = 0$$

il y en a un ou trois réels. Dans le 1^{er} cas au moyen du terme indépendant de s on reconnaît le signe de la racine réelle; dans l'autre cas la plus grande racine est certainement positive, tandis que les deux autres sont en même temps positives ou négatives. Nous pouvons donc distinguer trois cas.

I) Toutes les racines réelles

$$1) \quad e_1 > e_2 > e_3 > 0,$$

$$2) \quad e_1 > 0 > e_2 > e_3.$$

II) Une racine réelle, les 2 autres imaginaires

$$3) \quad e_1 > 0; \quad e_2 \text{ et } e_3 \text{ conjugués.}$$

De l'équation

$$\sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} = \sqrt{2e_\alpha} \frac{x_1 x_2 - e_\alpha + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2l}{\sqrt{2e_\alpha}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$$

qui a lieu pour $\alpha = 1, 2, 3$, on peut très facilement déduire la position des grandeurs s_1, s_2 par rapport aux zéros. D'après les équations qui définissent s_1 et s_2 , ces deux grandeurs sont réelles, et parce que $\sqrt{R(x_1)}$ et $\sqrt{R(x_2)}$ doivent être conjuguées, on a $s_1 > s_2$. Comme x_1 et x_2 sont aussi des grandeurs conjuguées, le second membre de l'équation écrite plus haut est imaginaire si e_α est positif, et réel si e_α est négatif. Ainsi les racines positives sont toujours situées entre les deux valeurs s_1 et s_2 , tandis que les racines négatives occupent la même position par rapport à s_1 et s_2 . On a donc

$$\text{dans le premier cas} \quad s_1 > e_1 > e_2 > e_3 > s_2,$$

$$\text{dans le second cas} \quad s_1 > e_1 > s_2 > e_2 > e_3,$$

$$\text{dans le troisième cas} \quad s_1 > e_1 > s_2.$$

Des équations précédentes (5 a et 5 b)

$$\sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} + \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{(t_1 + k)(t_2 - k)} = \sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)},$$

$$\sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} - \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} = \sqrt{(t_1 - k)(t_2 + k)} = \sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}$$

on déduit que $\sqrt{(s_1 - e_4)(s_2 - e_5)}$ est purement imaginaire et $\sqrt{(s_1 - e_5)(s_2 - e_4)}$ réel. Comme $(s_1 - e_4) - (s_2 - e_5)$ est certainement positif, parce que $s_1 > s_2$, $e_5 > e_4$, il résulte de la première condition que l'on a

$$s_1 > e_4, s_2 < e_5$$

tandis que de la seconde condition il résulte que ou bien

$$s_1 > e_5, s_2 > e_4$$

ou

$$s_1 < e_5, s_2 < e_4.$$

On a donc ou bien

$$s_1 > e_5 > s_2 > e_4$$

ou

$$e_5 > s_1 > e_4 > s_2.$$

Mais on avait

$$dt = dv_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{s_1 ds_1}{S_1} + \frac{s_2 ds_2}{S_2} \right),$$

$$0 = dv_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{ds_1}{S_1} + \frac{ds_2}{S_2} \right).$$

Donc S_1 et S_2 sont de pures imaginaires de manière que toujours un nombre impair de zéros doit être supérieur aux arguments. D'après cela nous obtenons dans les trois cas spécifiés plus haut

$$\text{I. } e_5 > s_1 > e_1 > e_2 > e_3 > s_2,$$

$$s_1 > e_4 > s_2,$$

$$\text{II. } e_5 > s_1 > e_1 > s_2 > e_2 > e_3,$$

$$s_1 > e_4 > s_2,$$

$$\text{III. } e_5 > s_1 > e_1 > s_2, \\ s_1 > e_4 > s_2.^1$$

Nous appelons maintenant les zéros a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et quand ils sont tous réels, nous choisissons les indices de manière qu'on ait

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Dans le cas où deux zéros sont imaginaires conjugués, on désignera par a_1 celui dont la partie imaginaire est positive et par a_2 celui dont la partie imaginaire est négative, et on aura

$$a_0 < a_3 < a_4.$$

Comme limites inférieures nous prenons les zéros a_1 et a_3 , alors les intégrales

$$v_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{a_3} \frac{s_1 ds_1}{S_1} + \int_{a_1} \frac{s_2 ds_2}{S_2} \right\}, \\ v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{a_3} \frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_1} \frac{ds_2}{S_2} \right\}$$

se distinguent de grandeurs réelles au plus par un système de demi-périodes simultanées. Au contraire v'_1, v'_2 sont de pures imaginaires sauf des demi-périodes simultanées. Les limites supérieures sont ici $2l^2$ et ∞ . Mais

$$(2l^2 - e_1)(2l^2 - e_2)(2l^2 - e_3)(2l^2 - e_4)(2l^2 - e_5) = 2l^2(2l^2 - e_4)^2(2l^2 - e_5)^2$$

est positif d'où résulte immédiatement l'exactitude de notre assertion.

Nous introduisons maintenant au lieu de la grandeur S la grandeur

$$\mathfrak{S} = \frac{S\sqrt{2}}{i} = \sqrt{-2(s - a_0)(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4)}$$

¹ De ces trois cas le second doit être rejeté, puisque on a $e_5 + e_4 = e_1 + e_2 + e_3$ et $e_3 < 0$. Car il s'ensuit $e_5 + e_4 < e_1 + e_2$, tandis que les conditions du deuxième cas exigeraient $e_5 + e_4 > e_1 + e_2$.

et nous posons $F(s)_1 = s$, $F(s)_2 = 1$. Ainsi que nous avons fixé la désignation des zéros, les demi-périodes

$$K_{a_1} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{F(s)_a}{\mathfrak{E}} ds \quad \text{et} \quad K_{a_2} = \int_{a_3}^{a_4} \frac{F(s)_a}{\mathfrak{E}} ds$$

sont toujours réelles, si nous choisissons convenablement les chemins d'intégration. Dans le cas où tous les zéros sont réels nous prenons comme chemin d'intégration pour les deux intégrales la droite qui joint les deux limites et alors nous donnons à \mathfrak{E} de a_1 à a_2 des valeurs positives et de a_3 à a_4 des valeurs négatives.

Mais si a_1 et a_2 sont des valeurs imaginaires conjuguées il en sera pour l'intégrale K_{a_2} comme précédemment, mais au contraire nous prendrons l'intégrale K_{a_1} le long d'un arc de cercle joignant a_1 et a_2 et coupant la droite $a_0 a_4$ en un point b situé entre a_0 et a_3 . Le signe de la grandeur \mathfrak{E} qui doit varier d'une manière continue sur le chemin d'intégration, sera choisi de manière que \mathfrak{E} soit en b une imaginaire négative. Comme \mathfrak{E} est évidemment en b purement imaginaire, \mathfrak{E} ne prend pas des valeurs conjuguées en deux points conjugués du chemin, mais les parties imaginaires coïncident tandis que les parties réelles sont de signes contraires. De là il résulte immédiatement que les deux parties de l'intégrale qui s'étendent de a_1 à b et de b à a_2 sont conjuguées de manière que l'intégrale entière

$$K_{a_1} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{E}}$$

est réelle.

Nous définissons de plus deux nouvelles demi-périodes par les équations

$$i\bar{K}_{a_1} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{E}}, \quad i\bar{K}_{a_2} = \int_{a_2}^{a_3} \frac{F(s)_a ds}{\mathfrak{E}}.$$

Dans le cas où toutes les racines sont réelles il faut encore prendre des chemins d'intégration rectilignes et \mathfrak{E} doit être imaginaire négatif entre a_0 et a_1 , imaginaire positif entre a_2 et a_3 , ces intégrales deviennent alors

purement imaginaires. Si a_1 et a_2 sont imaginaires, le chemin pour la première intégrale doit se composer du segment rectiligne de a_0 à b et de l'arc de cercle ba_1 , et le chemin de la seconde intégrale doit se composer de l'arc a_2b et du segment de droite ba_2 . Ici encore la grandeur \mathfrak{S} doit varier d'une manière continue, le signe devant être choisi de sorte que \mathfrak{S} soit en b imaginaire négatif dans la première intégrale et imaginaire positif dans la seconde.

Alors les intégrales $i\bar{K}_{a_1}$ et $i\bar{K}_{a_2}$ ne sont plus imaginaires pures, mais prennent une partie réelle qui est égale pour la première à $-\frac{1}{2}K_{a_1}$ et pour la seconde à $+\frac{1}{2}K_{a_1}$.

Nous posons de plus

$$iK'_{a_1} = i\bar{K}_{a_1} \quad \text{et} \quad iK'_{a_2} = i\bar{K}_{a_1} + i\bar{K}_{a_2}$$

de manière que toujours iK'_{a_2} soit purement imaginaire. Nous appelons périodes primitives les valeurs ainsi définies $2K_{a_1}$, $2K_{a_2}$, $2iK'_{a_1}$, $2iK'_{a_2}$. En place de v_1 et v_2 nous introduisons maintenant les grandeurs u_1 et u_2 qui satisfont aux équations

$$v_1 = 2K_{11}u_1 + 2K_{12}u_2,$$

$$v_2 = 2K_{21}u_1 + 2K_{22}u_2.$$

Leur résolution nous donne

$$u_1 = g_{11}v_1 + g_{21}v_2,$$

$$u_2 = g_{12}v_1 + g_{22}v_2,$$

alors u_1 et u_2 ont immédiatement les périodes simultanées

$$1, 0 \quad \text{et} \quad 0, 1;$$

aux autres systèmes de périodes primitives correspondent alors les périodes

$$\tau_{\alpha\beta} = 2i(g_{1\alpha}K'_{1\beta} + g_{2\alpha}K'_{2\beta}); \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}.$$

Si nous posons

$$G(s)_\alpha = g_{1\alpha}F(s)_1 + g_{2\alpha}F(s)_2,$$

les intégrales

$$\int_{\infty}^{a_{\lambda}} \frac{G(s)_a}{\mathfrak{E}} ds = \omega_a^{\lambda}$$

sont des demi-périodes de u_a de la forme

$$\frac{1}{2} m_a^{\lambda} + \frac{1}{2} (n_1^{\lambda} \tau_{a1} + n_2^{\lambda} \tau_{a2})$$

et on a

		m_1^{λ}	m_2^{λ}	n_1^{λ}	n_2^{λ}
pour	$\lambda = 0$	— 1	— 1	0	0
	$\lambda = 1$	— 1	— 1	1	0
	$\lambda = 2$	0	— 1	1	0
	$\lambda = 3$	0	— 1	0	1
	$\lambda = 4$	0	0	0	1.

Tout autre système de demi-périodes simultanées de u_1 et u_2 peuvent se former au moyen d'une période entière et d'une ou deux des demi-périodes introduites plus haut.

La fonction $\vartheta(u_1, u_2)$ est alors définie par l'équation

$$\vartheta(u_1, u_2) = \sum_{n_1, n_2} e^{[n_1(2u_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}) + n_2(2u_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22})]\pi i}$$

De plus on pose

$$\vartheta(u_1, u_2 | n_1, n_2) = \vartheta(u_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}, u_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22}) e^{\sum_a n_a (2u_a + \tau_a)\pi i},$$

où l'on a posé pour abrégé

$$\tau_a = n_1\tau_{a1} + n_2\tau_{a2}$$

et cette définition ne s'applique pas seulement pour les nombres n entiers. A l'aide des nombres $m_a^{\lambda}, n_a^{\lambda}$ nous définissons maintenant les fonctions théta à indice simple

$$\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda} = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2} m_1^{\lambda}, u_2 + \frac{1}{2} m_2^{\lambda} \left| \frac{1}{2} n_1^{\lambda}, \frac{1}{2} n_2^{\lambda} \right.\right).$$

Si λ et μ sont deux indices différents, on doit avoir

$$m_a^{\lambda\mu} \equiv m_a^\lambda + m_a^\mu \quad \text{et} \quad n_a^{\lambda\mu} \equiv n_a^\lambda + n_a^\mu \pmod{2},$$

$$-1 \leq m_a^{\lambda\mu} \leq 0, \quad 1 \geq n_a^{\lambda\mu} \geq 0$$

et

$$\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\mu} = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2}m_1^{\lambda\mu}, u_2 + \frac{1}{2}m_2^{\lambda\mu} \mid \frac{1}{2}n_1^{\lambda\mu}, \frac{1}{2}n_2^{\lambda\mu}\right).$$

De la même manière nous définissons les fonctions théta dont l'indice est formé de plusieurs indices simples. Si un indice simple devient double, il disparaît. S'il y a plus de deux indices simples on peut réduire l'indice parce que l'on a

$$\sum_{\lambda=0,1,2,3,4} m_a^\lambda \equiv 0 \quad \text{et} \quad \sum n_a^\lambda \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dès lors que λ soit un indice simple ou composé et que

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(m_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22}),$$

soit une demi-période quelconque, qui après augmentation d'un certain nombre de périodes entières puissent se ramener à la demi-période appartenant à l'indice μ . Alors il vient

$$\begin{aligned} & \vartheta(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2)_\lambda \\ &= \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\mu} e^{-\frac{\pi i}{2} \sum n_a (2u_a + \omega_a + \frac{1}{2}m_a)} e^{\frac{\pi i}{2} \sum [-n_a m_a^\lambda + n_a^{\lambda\mu} (m_a^\lambda + m_a - m_a^{\lambda\mu})]}. \end{aligned}$$

Si dans le ω_1 et ω_2 , m_a et n_a sont des nombres pairs, on obtient une autre égalité

$$\begin{aligned} & \vartheta(u_1 + m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}, u_2 + m_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22})_\lambda \\ &= \vartheta(u_1, u_2)_\lambda e^{-\pi i \sum n_a (2u_a + n_1\tau_{a1} + n_2\tau_{a2})} e^{\pi i (\sum n_a^\lambda m_a - m_a^\lambda n_a)}. \end{aligned}$$

Si λ et μ sont deux indices simples alors $\sum n_a^\lambda m_a^\mu$ est congruent à 0 ou 1 suivant que λ est plus petit ou plus grand que μ . Si $\lambda = \mu$ alors la

dite expression est paire ou impaire suivant que l'indice lui-même est pair ou impair. De plus on a toujours pour deux indices simples différents

$$\sum (n_a^\lambda m_a^\mu - n_a^\mu m_a^\lambda) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Entre les fonctions théta et les limites supérieures des intégrales on a les relations suivantes où 2λ représente un indice simple pair

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^\lambda (s_1 - a_{2\lambda})(s_2 - a_{2\lambda})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\lambda})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda-1}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^{\lambda-1} (s_1 - a_{2\lambda-1})(s_2 - a_{2\lambda-1})}}{\sqrt[4]{-R'(a_{2\lambda-1})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2) \vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda\mu}}{\vartheta(u_1, u_2)_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_\mu} = \frac{1}{s_1 - s_2} \sqrt{\frac{\pm (a_\lambda - a_\mu)}{A_0}} \left(\frac{\mathfrak{E}_1}{(s_1 - a_\lambda)(s_1 - a_\mu)} - \frac{\mathfrak{E}_2}{(s_2 - a_\lambda)(s_2 - a_\mu)} \right).$$

$(A_0 = -2)$

(Dans la dernière formule on a le signe + ou - suivant que λ est inférieur ou supérieur à μ .)

Nous posons les grandeurs e_1, e_2, e_3 égales aux grandeurs $a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3}$ et les grandeurs e_4, e_5 égales aux grandeurs a_λ, a_μ . Alors il vient

$$Q(s_1, s_2)_1 = \frac{\sqrt{(s_1 - e_1)(s_2 - e_1)}}{\sqrt[4]{R'(e_1)}} = \varepsilon_{x_1} (-1)^{\frac{\nu_{x_1}}{4}} \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{x_1}}{\vartheta(u_1, u_2)}$$

formule où ν_{x_1} est un nombre entier dépendant de l'indice, qui est pair ou impair en même temps que l'indice; ε_{x_1} signifie + 1 ou - 1 suivant le choix de $\sqrt{(s_1 - e_a)(s_2 - e_a)}$. Comme $\vartheta(u_1, u_2)$ a la propriété que nous imposons à $R(v_1, v_2)$, nous pouvons poser $R(v_1, v_2) = \vartheta(u_1, u_2)$. Alors nous obtenons pour le dénominateur commun

$$\sum_{x=x_1, x_2, x_3} (-1)^{\nu_x} \varepsilon_x \varepsilon'_x \varepsilon''_x \varepsilon'''_x \vartheta(u''_1, u''_2)_x \vartheta(u'''_1, u'''_2)_x \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x.$$

De plus on a

$$\frac{Q(s_1, s_2)_{14}}{\sqrt{e_1 - e_4}} \frac{\sqrt{2}}{i} = \frac{Q_1 Q_4}{\sqrt{\frac{\pm (a_{x_1} - a_\lambda)}{A_0}}} \frac{\vartheta(u_1, u_2) \vartheta(u_1, u_2)_{x_1 \lambda}}{\vartheta(u_1, u_2)_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_{x_1}}$$

Et comme $e_1 - e_4 = a_{x_1} - a_\lambda$, $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = A_0$, nous obtenons

$$R(v_1, v_2)_{14} R(v'_1, v'_2)_{14} = \pm \varepsilon_{x_1} \varepsilon'_{x_1} \varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda (-1)^{\frac{\nu_{x_1} + \nu_\lambda}{2}} \vartheta(u_1, u_2)_{x_1 \lambda} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x_1 \lambda}.$$

Il faut prendre ici le signe $+$ si l'indice $x_1 < \lambda$, ou autrement le signe $-$. Dans le premier cas $\sum n^\lambda m^x \equiv 1$ et dans le second $\equiv 0 \pmod{2}$. Nous pouvons donc toujours au lieu de \pm écrire aussi

$$-(-1)^{\sum n^\lambda m^x}.$$

Nous obtenons d'une manière analogue

$$\begin{aligned} & R(v_1, v_2)_{23} R(v'_1, v'_2)_{23} \\ &= -(-1)^{\sum n^{x_2} m^{x_3}} \varepsilon_{x_2} \varepsilon'_{x_2} \varepsilon_{x_3} \varepsilon'_{x_3} (-1)^{\frac{\nu_{x_2} + \nu_{x_3}}{2}} \vartheta(u_1, u_2)_{x_2 \lambda \mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x_2 \lambda \mu}. \end{aligned}$$

Comme évidemment dans les fractions n'entrent que les rapports des grandeurs $\vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u''_1, u''_2)_x$ nous pouvons les multiplier par un même facteur quelconque sans altérer l'exactitude des formules. Mais les grandeurs u''_a, u'''_a par un choix convenable du chemin d'intégration sont évidemment les demi-périodes $\omega_a^{13\lambda}, \omega_a^{13\mu}$ et par suite en place de la grandeur

$$(-1)^{\nu_x} \varepsilon_x \varepsilon'_x \varepsilon''_x \varepsilon'''_x \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u''_1, u''_2)_x$$

on peut poser l'expression

$$(-1)^{\mu_{x_1}} \varepsilon_{x_1} \varepsilon'_{x_1} \varepsilon''_{x_1} \varepsilon'''_{x_1} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu}.$$

Les signes des termes des fractions à déterminer dépendent du chemin suivant lequel on détermine les grandeurs u_1, u_2, u'_1, u'_2 et peuvent être changés d'une manière certaine parce que nous pouvons aussi changer ces chemins le cas échéant. Nous voulons déterminer les grandeurs u_1, u_2 de manière que si s_2 est situé entre deux zéros a_1 et a_2 , u_1 et u_2 sont réels, mais si s_2 est situé entre a_0 et $-\infty$, u_a doit se composer d'une partie réelle et de la demi-période

$$-\varepsilon_{a_1} = - \int_{a_0}^{a_1} \frac{G(s)_a ds}{\mathfrak{E}}.$$

En augmentant u'_1 et u'_2 d'un nombre convenable de périodes, nous pouvons faire que tous les nombres μ_x soient congrus les uns aux autres suivant le module 2, et de plus, s'il le faut changer le signe de γ_1 et de γ_2 . Nous pouvons toujours supposer que deux des quantités μ_x soient égales l'une à l'autre; si la 3^e, par exemple μ_{x_1} , est différente nous augmentons u'_a de la période $2\omega_a^{x_2 x_3}$. On change ainsi le signe des termes dont l'indice est différent du troisième, pendant que les termes de l'indice x_1 conservent leur signe. Maintenant les nombres μ_x sont congrus les uns aux autres, et égaux à zéro, parce qu'ici cela ne dépend que des fractions. Pour changer le signe des deux grandeurs γ'_1, γ'_2 , ou celui de γ'_1 seul ou celui de γ'_2 seul nous avons à ajouter aux grandeurs u'_a les périodes $2\omega_a^{\lambda\mu}$, $2\omega_a^\mu$ ou $2\omega_a^\lambda$. Le signe de γ'_3 est déterminé par celui des deux grandeurs γ'_1, γ'_2 .

D'après ce qui a été dit, le terme du dénominateur relatif à l'indice x devient

$$i^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x.$$

Les termes correspondants des numérateurs deviennent

$$- \varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda (-1)^{\frac{\nu_\lambda}{2} + \sum n^{\lambda\mu} m^x} i^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda},$$

$$- \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu (-1)^{\frac{\nu_\mu}{2} + \sum n^{\lambda\mu} m^x} i^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu},$$

$$- \varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} \varepsilon_{x_3} \varepsilon'_{x_1} \varepsilon'_{x_2} \varepsilon'_{x_3} (-1)^{\sum x \frac{\nu_x}{2} + \sum n^{\alpha\beta} m^x \gamma} i^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} (-1)^{\nu_x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}.$$

On peut encore transformer un peu les coefficients de ces expressions. On a en effet

$$\begin{aligned} (-1)^{\sum n^{\alpha\beta} m^x \gamma + \nu_x} &= (-1)^{\sum n^{\alpha\beta} m^x \gamma + \sum n^x m^x} \\ &= (-1)^{\sum n^{\alpha\beta} m^x \gamma + \sum n^{\lambda\mu} m^x + \sum n^{\alpha\beta\gamma} m^x} \\ &= (-1)^{\sum (n^{\alpha\beta} m^x + n^{\alpha\beta} m^x + n^{\alpha\beta} m^x)} (-1)^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} = \pm (-1)^{\sum n^{\lambda\mu} m^x}. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\nu_\lambda + \nu_\mu + \sum_x \nu_x \equiv 0 \pmod{2},$$

et par conséquent

$$(-1)^{\sum x \frac{\nu_x}{2}} = \pm (-1)^{\frac{\nu_\lambda + \nu_\mu}{2}}.$$

Si nous désignons maintenant par $|n|$ une quantité qui a la valeur 0 ou ± 1 suivant que l'indice n est pair ou impair, alors d'après les développements précédents on peut poser

$$\begin{aligned} -\varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda (-1)^{\frac{\nu_\lambda}{2}} &= i^{|\lambda|}, \\ -\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu (-1)^{\frac{\nu_\mu}{2}} &= i^{|\mu|} \end{aligned}$$

Mais comme on a

$$|\lambda| + |\mu| + |\lambda\mu| \equiv 1 \pmod{2}$$

on peut poser pour le coefficient de la troisième expression

$$\pm i^{|\lambda\mu| + \Sigma n^{\lambda\mu} m^x} (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x}.$$

Et il faut prendre simultanément pour tous les termes le signe supérieur ou inférieur. Si nous définissons donc $|\lambda\mu|$ d'une manière convenable on peut prendre le signe $+$.

D'après cela nous obtenons les expressions suivantes pour les grandeurs $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, p', q', r', u, v$

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= i^{|\lambda|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}, \\ \gamma'_2 &= i^{|\mu|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}, \\ \gamma'_3 &= i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}, \\ p' &= i^{|\lambda|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}, \\ q' &= i^{|\mu|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}, \\ r' &= i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}. \end{aligned}$$

$$u = -2i^{|\lambda|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} i^{\Sigma n^{\lambda} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\lambda} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$v = -2i^{|\mu|} \frac{\sum_x (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^x} i^{\Sigma n^{\mu} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\sum_x i^{\Sigma n^{\mu} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x}.$$

Ainsi d'après cela les cosinus directeurs avec la verticale de même que que les vitesses de rotations pour notre système de coordonnées sont déterminés; on trouve les grandeurs correspondantes pour le système de coordonnées fixe dans le corps au moyen des formules

$$\begin{aligned} \gamma_1 + i\gamma_2 &= \frac{\gamma'_1 + i\gamma'_2}{u + iv}, & p + iq &= \frac{p' + iq'}{u + iv}, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 &= \frac{\gamma'_1 - i\gamma'_2}{u - vi}, & p - iq &= \frac{p' - iq'}{u - iv}, \\ \gamma_3 &= \gamma'_3, & r &= 2r'. \end{aligned}$$

§ 6. Les cosinus directeurs pour les axes horizontaux et les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux axes fixes dans l'espace.

Si une ligne quelconque forme avec les axes fixes dans le corps les cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, alors on trouve les angles de la même ligne avec les axes du nouveau système de coordonnées au moyen des équations

$$\alpha'_1 + i\alpha'_2 = (\alpha_1 + i\alpha_2)(u + iv), \quad \alpha'_1 - i\alpha'_2 = (\alpha_1 - i\alpha_2)(u - iv), \quad \alpha'_3 = \alpha_3.$$

Inversement si les derniers sont données, on trouve aussi facilement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Si maintenant une direction dont les cosinus avec les axes du 3^e système sont $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ est perpendiculaire à la direction $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, on doit avoir

$$\gamma'_1 \beta'_1 + \gamma'_2 \beta'_2 + \gamma'_3 \beta'_3 = 0.$$

Une troisième direction perpendiculaire aux deux premières a alors pour cosinus directeurs

$$\alpha'_1 = \beta'_2 \gamma'_3 - \beta'_3 \gamma'_2,$$

$$\alpha'_2 = \beta'_3 \gamma'_1 - \beta'_1 \gamma'_3,$$

$$\alpha'_3 = \beta'_1 \gamma'_2 - \beta'_2 \gamma'_1.$$

Or, si l'on a un système quelconque de grandeurs a_x, b_x qui satisfait à ces quatre conditions, on trouve les cosinus directeurs de deux lignes perpendiculaires entre elles et sur la direction γ au moyen des égalités

$$\begin{aligned} \alpha'_x + i\beta'_x &= K(a_x + ib_x), \\ \alpha'_x - i\beta'_x &= K'(a_x - ib_x), \end{aligned} \quad (x=1, 2, 3)$$

où K et K' sont deux grandeurs à déterminer de sorte que l'on ait

$$KK'\Sigma(a_x^2 + b_x^2) = \Sigma(\alpha_x'^2 + \beta_x'^2) = 2.$$

On peut donc poser

$$\alpha'_x \pm i\beta'_x = \frac{\sqrt{2}(a_x \pm ib_x)}{\sqrt{\Sigma(a_x^2 + b_x^2)}} e^{\pm iu_3}.$$

La grandeur u_3 se détermine alors au moyen de la condition que la vitesse de rotation du corps relative à l'axe vertical, c'est à dire l'expression

$$\alpha'_1 \frac{d\beta'_1}{dt} + \alpha'_2 \frac{d\beta'_2}{dt} + \alpha'_3 \frac{d\beta'_3}{dt} = \frac{i}{2} \sum (\alpha'_x + i\beta'_x) \frac{d(\alpha'_x - i\beta'_x)}{dt},$$

ait la valeur déjà connue

$$p'\gamma'_1 + q'\gamma'_2 + r'\gamma'_3.$$

Il importe encore qu'on puisse supprimer les facteurs communs des grandeurs $(a_x + ib_x)$ en les rejetant sur K . La même chose se fera pour $(a_x - ib_x)$.

Les quantités u_1 et u_2 étaient seulement dépendantes de t , en tant qu'elles sont des fonctions linéaires de v_1 qui est lui-même égal à t . On a donc

$$\frac{d\gamma'_x}{dt} = \frac{\partial \gamma'_x}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'_x}{\partial u_2} g_{12}. \quad (x=1, 2, 3)$$

Les composantes de la vitesse de rotation étaient

$$p' = l\gamma_1 - i \frac{\partial \gamma_1}{\partial v_1'} = l\gamma_1 - i \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2'} g_{12} \right),$$

$$q' = l\gamma_2 - i \frac{\partial \gamma_2}{\partial v_1'} = l\gamma_2 - i \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2'} g_{12} \right),$$

$$r' = l\gamma_3 - i \frac{\partial \gamma_3}{\partial v_1'} = l\gamma_3 - i \left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial u_1'} g_{11} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial u_2'} g_{12} \right).$$

Si on introduit ces expressions dans les équations différentielles pour r'_1, r'_2, r'_3 (24 a, 24 b, 24 c), on arrive aux relations suivantes

$$\left(\frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_2} g_{12} \right) = i \left(\frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_3 - i \left(\frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_2,$$

$$\left(\frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_2} g_{12} \right) = i \left(\frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_1 - i \left(\frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_3,$$

$$\left(\frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_3'}{\partial u_2} g_{12} \right) = i \left(\frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_1'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_2 - i \left(\frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma_2'}{\partial u_2} g_{12} \right) r'_1.$$

Nous remarquons ici que ces équations ne sont établies que pour les systèmes spéciaux de valeurs de u_1, u_2, u_1', u_2' considérées ici, mais elles sont vraies pour des valeurs quelconques. Les quantités g_{11}, g_{12} peuvent aussi être remplacées par deux valeurs absolument arbitraires. Enfin les coefficients

$$C_x = i^{\sum n^{\lambda\mu} m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu}$$

peuvent être remplacés par d'autres grandeurs C_x qui satisfont à la condition caractéristique

$$\sum_x (-1)^{|x|} C_x^2 = 0$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude pour les grandeurs ici considérées.

Mais comme ce qui a été démontré jusqu'ici suffit pour la continuation du calcul, nous réservons pour une autre occasion l'extension des formules en question.

Si maintenant dans l'intégrale qui représente le théorème des aires pour un plan horizontal

$$2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l$$

nous exprimons toutes les quantités au moyen des quantités correspondantes dans le nouveau système de coordonnées, nous obtenons

$$2(p'\gamma'_1 + q'\gamma'_2 + r'\gamma'_3) = 2l$$

et, en remplaçant p' , q' , r' par leurs valeurs,

$$i\left(\frac{\partial\gamma'_1}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma'_1}{\partial u_2}g_{12}\right)\gamma'_1 + i\left(\frac{\partial\gamma'_2}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma'_2}{\partial u_2}g_{12}\right)\gamma'_2 + i\left(\frac{\partial\gamma'_3}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma'_3}{\partial u_2}g_{12}\right)\gamma'_3 = 0.$$

Par conséquent les quantités

$$\frac{\partial\gamma'_x}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma'_x}{\partial u_2}g_{12} \quad \text{et} \quad i\left(\frac{\partial\gamma'_x}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\gamma'_x}{\partial u_2}g_{12}\right)$$

remplissent les conditions supposées pour a_x , b_x .

Pour calculer ces expressions, nous déduisons quelques formules dans lesquelles x représente l'un quelconque des indices x_1, x_2, x_3 ; de plus soit $x_4 = \lambda\mu$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \lambda\mu$; enfin dans les formules qui suivent λ désigne l'un quelconque des indices $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. L'expression

$$\begin{aligned} & (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} \vartheta(u')_{x\lambda} \vartheta(u')_x \left\{ \vartheta(u)_x \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \vartheta(u)_{x\lambda} \right. \\ & \quad \left. - \vartheta(u)_{x\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \vartheta(u)_x \right\} \\ & + (-1)^{|x|+|x_4\lambda|+\Sigma n^{\lambda} m^{x_4}+\Sigma n^{13} m^{13\lambda}} \vartheta(u')_{x_4\lambda} \vartheta(u')_{x_4} \left\{ \vartheta(u)_{x_4\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \vartheta(u)_{x_4} \right. \\ & \quad \left. - \vartheta(u)_{x_4} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \vartheta(u)_{x_4\lambda} \right\}^1 \end{aligned}$$

peut s'écrire comme fonction de u

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}\vartheta(u+u')_{13x\lambda} \vartheta(u-u')_{13x} + \mathfrak{A}'\vartheta(u+u')_{13x} \vartheta(u-u')_{13x\lambda} \\ & + \mathfrak{B}\vartheta(u+u')_{13x_4\lambda} \vartheta(u-u')_{13x_4} + \mathfrak{B}'\vartheta(u+u')_{13x_4} \vartheta(u-u')_{13x_4\lambda}. \end{aligned}$$

¹ Pour plus de simplicité $\vartheta(u)_\mu$ est écrit en place de $\vartheta(u_1, u_2)_\mu$, ϑ_μ en place de $\vartheta(0, 0)_\mu$. Enfin $\overline{\Delta}\vartheta(u)_\mu$ et $\overline{\Delta}\vartheta_\mu$ représentent les valeurs

$$\frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_2}g_{12} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_1}g_{11} + \frac{\partial\vartheta(u)_\mu}{\partial u_2}g_{12} \right\}_{u_1=u_2=0}.$$

Nous obtenons deux relations entre \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' , si nous observons que le premier membre est une fonction paire ou impaire suivant que $|x| + |x\lambda| \equiv 1$ ou $0 \pmod{2}$, et une troisième relation en posant $u_a = \omega_a^{13\lambda}$, et une quatrième en posant $u_a = \omega_a^{13xx_1}$. Nous obtenons enfin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} \vartheta(u - u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x} (-1)^{\Sigma n^x m^{13\lambda x + |x\lambda|}} \vartheta(u + u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \\ & + \frac{1}{2} (-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x + |x|}} \vartheta(u + u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x} (-1)^{\Sigma n^x m^{13\lambda x}} \vartheta(u - u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \\ & + \frac{1}{2} (-1)^{|x|} \vartheta_{13x_1} \overline{\Delta} \vartheta_{13x_1\lambda} \{ (-1)^{\Sigma n^\lambda m^{x_1}} \vartheta(u - u')_{13x_1} \vartheta(u + u')_{13x_1\lambda} \\ & \quad + (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^\lambda} \vartheta(u + u')_{13x_1} \vartheta(u - u')_{13x_1\lambda} \}. \end{aligned}$$

Nous obtenons de même en remplaçant d'abord u par $-u$, puis en posant $u_a = \omega_a^{13\lambda}$ et ensuite $u_a = \omega_a^{13x_1 x_2 \lambda}$

$$\begin{aligned} & (-1)^{\Sigma n^\lambda m^{x_1}} \vartheta(u')_{x_1\lambda} \vartheta(u')_{x_2} \{ \vartheta(u)_{x_2} \overline{\Delta} \vartheta(u)_{x_1\lambda} - \vartheta(u)_{x_1\lambda} \overline{\Delta} \vartheta(u)_{x_2} \} \\ & (-1)^{\Sigma n^\lambda m^{x_2}} \vartheta(u')_{x_2\lambda} \vartheta(u')_{x_1} \{ \vartheta(u)_{x_1} \overline{\Delta} \vartheta(u)_{x_2\lambda} - \vartheta(u)_{x_2\lambda} \overline{\Delta} \vartheta(u)_{x_1} \} = \\ & \frac{1}{2} (-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} \{ (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_2}} \vartheta(u - u')_{13x_1} \overline{\Delta} \vartheta_{13x_1} (-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13\lambda x_2 + |x_2\lambda|}} \vartheta(u + u')_{13x_2\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda} \\ & \quad + (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_1 + |x_1|}} \vartheta(u + u')_{13x_1} \overline{\Delta} \vartheta_{13x_1} (-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13\lambda x_2}} \vartheta(u - u')_{13x_2\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda} \\ & \quad + (-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13x_2}} \vartheta(u - u')_{13x_2} \overline{\Delta} \vartheta_{13x_2} (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13\lambda x_1 + |x_1\lambda|}} \vartheta(u + u')_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \\ & \quad + (-1)^{\Sigma n^{x_2} m^{13x_2 + |x_2|}} \vartheta(u + u')_{13x_2} \overline{\Delta} \vartheta_{13x_2} (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13\lambda x_1}} \vartheta(u - u')_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \} \end{aligned}$$

Nous multiplions la première équation par C_x^2 et ensuite nous sommes en donnant à l'indice x les trois valeurs x_1, x_2, x_3 . Nous multiplions la seconde par $C_{x_1} C_{x_2}$ et formons la somme des termes qui peuvent se dériver par permutation circulaire des nombres 1, 2, 3. Comme $\Sigma (-1)^x C_x^2 = 0$, les termes d'indice x_4 disparaissent dans la première somme et nous obtenons par addition des deux sommes

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_x C_x \vartheta(u')_x \vartheta(u)_x \right\} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \sum_x C_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda m^x}} \vartheta(u')_{x\lambda} \vartheta(u)_{x\lambda} \\
& - \left\{ \sum_x C_x (-1)^{\Sigma n^{\lambda m^x}} \vartheta(u')_{x\lambda} \vartheta(u)_{x\lambda} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} \right) \sum_x C_x \vartheta(u')_x \vartheta(u)_x \\
& = \frac{1}{2} (-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}} \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u - u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} \\
& \quad \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda} + |\lambda|} C_x \vartheta(u + u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \right\} \\
& + \frac{1}{2} (-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}} \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x} + |\lambda|} C_x \vartheta(u + u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} \\
& \quad \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u - u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \right\}.
\end{aligned}$$

Si nous ajoutons au premier membre le facteur $i^{|\lambda|}$ et le dénominateur

$$N^2 = \left\{ \Sigma C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x \right\}^2,$$

nous obtenons l'expression $\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12}$, où γ' désigne celui des cosinus directeurs $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ qui correspond à l'indice λ . De là nous déduisons $\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12}$ en permutant u en u' . Mais si dans l'équation établi précédemment nous changeons u en u' , la valeur du premier terme du second membre change de signe, tandis que la seconde partie reste invariable. Car l'indice $13x$ est impair, tandis que $13x\lambda$ est pair. Par suite nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12} \pm i \left(i \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{12} \right) \right) \right\} \\
& = \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12} \right) \mp \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial \gamma'}{\partial u_2} g_{12} \right) \\
& = (-1)^{\Sigma n^{13} m^{\lambda}} i^{|\lambda|} N^{-2} \left\{ \sum_x (\pm 1)^{|\lambda|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \mp u')_{13x} \overline{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} \\
& \quad \left\{ \sum_x (\mp 1)^{|\lambda|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \right\}.
\end{aligned}$$

Par suite nous pouvons poser

$$\alpha' \pm i\beta' = i^{|\lambda|} (-1)^{\Sigma n^{13} m^\lambda} K e^{\pm i u_3} \frac{\sum_x (\mp 1)^{|\lambda|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}}{\sum_x C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x},$$

où α' et β' sont celles des quantités $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ et $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ qui correspondent à γ' . Pour déterminer K , nous avons à former

$$\sum_{\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} (-1)^{|\lambda|} \left\{ \sum_{x=x_1, x_2, x_3} (-1)^{|\lambda|} (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u + u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \right\} \\ \times \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u - u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \right\}.$$

Cette expression se sépare en quatre parties à savoir

$$\sum_{x=x_1, x_2, x_3} C_x^2 \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|+|\lambda\lambda|} \vartheta(u + u')_{13x\lambda} \vartheta(u - u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}^2, \\ \sum_{\lambda} C_{x_1} C_{x_2} (-1)^{\Sigma n^{x_1} m^{13x_1\lambda} + \Sigma n^{x_2} m^{13x_2\lambda}} \left\{ (-1)^{|\lambda|+|\lambda_1\lambda|} \vartheta(u + u')_{13x_1\lambda} \vartheta(u - u')_{13x_2\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda} \right. \\ \left. + (-1)^{|\lambda|+|\lambda_2\lambda|} \vartheta(u + u')_{13x_2\lambda} \vartheta(u - u')_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_1\lambda} \vartheta_{13x_2\lambda} \right\}$$

et deux autres parties qui se déduisent de la deuxième par permutation circulaire des indices x_1, x_2, x_3 .

Si nous considérons d'abord la partie de la première expression qui est multipliée par C_x^2 , nous reconnaissons qu'elle est aussi bien par rapport à u qu'à u' une fonction théta paire de caractéristique nulle. On peut donc la poser égale à

$$\sum A_{\bar{x}, \bar{x}'; x} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}'},$$

où \bar{x} et \bar{x}' prennent les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 . Si nous déterminons les coefficients de la manière connue, nous obtenons

$$\sum_{\bar{x}=x_1, x_2, x_3, x_4} (-1)^{|\lambda|+|\lambda\bar{x}|+|\lambda\bar{x}'|} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}'}$$

Nous multiplions par C_x^2 et faisons la somme suivant x , qui parcourt les valeurs x_1, x_2, x_3 ; alors il vient

$$\sum_{\bar{x}=x_1, x_2, x_3, x_4} \vartheta^2(u)_{\bar{x}} \vartheta^2(u')_{\bar{x}'} \sum_{x=x_1, x_2, x_3} C_x^2 (-1)^{|\lambda|+|\lambda\bar{x}|+|\lambda\bar{x}'|}$$

Si $\bar{x} = x_4$, alors $|x\bar{x}| \equiv |\bar{x}| + |x|$, $|13| + |13\bar{x}| \equiv 1$ et par suite le coefficient de ce terme devient

$$-(-1)^{|\bar{x}|} \sum_x C_x^2 (-1)^{|x|} = 0.$$

Si au contraire \bar{x} est un indice simple, on a

$$|13| + |13\bar{x}| \equiv 0, \quad |x\bar{x}| \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv |x| + |\bar{x}| + 1$$

suivant que x est identique à \bar{x} ou non. Si nous désignons maintenant les deux indices x différents de \bar{x} par \bar{x}' et \bar{x}'' nous obtenons

$$C_{\bar{x}}^2 - \{C_{\bar{x}'}^2 (-1)^{|\bar{x}'|} + C_{\bar{x}''}^2 (-1)^{|\bar{x}''|}\} (-1)^{|\bar{x}|} = 2C_{\bar{x}}^2.$$

Par suite la première partie se réduit à

$$2 \sum_{x_1, x_2, x_3} C_x^2 \vartheta^2(u)_{x_1} \vartheta^2(u')_{x_2}.$$

La partie multipliée par $C_{x_1} C_{x_2}$ est une fonction théta relativement à u de caractéristique $x_1 x_2$, qui est paire ou impaire suivant que $|x_1| + |x_2|$ est pair ou impair. Si donc $\bar{\lambda}$ désigne l'un quelconque des indices $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on peut la poser égale à

$$A\vartheta(u)_{x_1} \vartheta(u)_{x_2} + B\vartheta(u)_{x_1 \bar{\lambda}} \vartheta(u)_{x_2 \bar{\lambda}}.$$

Si nous posons maintenant $u = \omega_{13\bar{\lambda}}$, la partie multipliée par B disparaît, et nous obtenons

$$A\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_1} \vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_2}.$$

Au contraire l'expression à transformer devient égale à

$$4\vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_1} \vartheta(\omega^{13\bar{\lambda}})_{x_2} \vartheta(u')_{x_1} \vartheta(u')_{x_2}.$$

Il vient donc $A = 4\vartheta(u')_{x_1} \vartheta(u')_{x_2}$; maintenant il est facile de voir qu'aussi pour une autre période $\omega^{13\bar{\lambda}'}$ l'expression à transformer devient égale à la valeur de $A\vartheta(u)_{x_1} \vartheta(u)_{x_2}$, et que par suite pour cette valeur $B\vartheta(u)_{x_1 \bar{\lambda}'} \vartheta(u)_{x_2 \bar{\lambda}'}$ s'annule. Mais ce n'est possible que si B est nul. Par suite la seconde partie devient simplement

$$4C_{x_1} C_{x_2} \vartheta(u)_{x_1} \vartheta(u)_{x_2} \vartheta(u')_{x_1} \vartheta(u')_{x_2}.$$

Si nous permutons entre elles circulairement les grandeurs x_1, x_2, x_3 , nous obtenons la troisième et la quatrième partie. En réunissant les quatre parties nous obtenons enfin

$$2 \left\{ \sum_{x_1, x_2, x_3} C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x \right\}^2 = 2N^2.$$

Par suite la grandeur K a ici exactement la valeur 1, de sorte qu'il vient

$$\alpha' \pm i\beta' = i^{|\lambda|} (-1)^{\sum n^{13} m^\lambda} \frac{\sum_x (\mp 1)^{|\lambda|} (-1)^{\sum n^2 m^{13x\lambda}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}}{\sum_x C_x \vartheta(u)_x \vartheta(u')_x} e^{\pm iu_3}.$$

Nous déduisons la fonction iu_3 de la composante de la vitesse de rotation suivant l'axe verticale

$$\begin{aligned} \bar{p}' &= p'\gamma'_1 + q'\gamma'_2 + r'\gamma'_3 = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1,2,3} (\alpha'_\nu + i\beta'_\nu) \frac{d(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)}{dt} \\ &= \frac{i}{2} \sum (\alpha'_\nu + i\beta'_\nu) \left\{ \frac{\partial(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)}{\partial u_2} g_{12} - i \frac{du_3}{dt} (\alpha'_\nu - i\beta'_\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Or $N(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)e^{+iu_3}$ est seulement fonction de $u_1 - u'_1, u_2 - u'_2$; par suite il vient

$$\frac{\partial N(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu)}{\partial u_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu) N}{\partial u_a} - \frac{\partial(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu) N}{\partial u'_a} \right),$$

tandis que $N(\alpha'_\nu + i\beta'_\nu)e^{-iu_3}$ ne dépend que de $u_1 + u'_1, u_2 + u'_2$, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial e^{-iu_3}(\alpha'_\nu + i\beta'_\nu) N}{\partial u_a} - \frac{\partial e^{-iu_3}(\alpha'_\nu + i\beta'_\nu) N}{\partial u'_a} = 0$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{du_3}{dt} + \frac{i}{4N^2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u'_1} \right) g_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u'_2} \right) g_{12} \right) \left\{ \sum (\alpha'_\nu + i\beta'_\nu)(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu) N^2 \right\} \\ &\quad - \frac{i}{2N} \frac{dN}{dt} \sum (\alpha'_\nu + i\beta'_\nu)(\alpha'_\nu - i\beta'_\nu). \end{aligned}$$

Mais comme la somme qui se rencontre plusieurs fois a la valeur 2, il s'en déduit

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{du_3}{dt} - i \left(\frac{\partial \ln N}{\partial u'_1} g_{11} + \frac{\partial \ln N}{\partial u'_2} g_{12} \right) \\ &= \frac{du_3}{dt} - im. \end{aligned}$$

L'expression de gauche avait la valeur constante l , par suite il vient

$$u_3 = (l + im)(t - t_0)$$

où t_0 désigne une constante.

Les six cosinus directeurs des deux axes horizontaux par rapport au système de coordonnées tournant dans le corps autour de l'axe du moment d'inertie distingué étant ainsi déterminés, on peut de la manière développée plus haut trouver les cosinus directeurs relatifs au système de coordonnées fixe dans le corps.

Maintenant il ne nous manque plus que les composantes de la vitesse de rotation suivant l'axe horizontal. Elles sont déterminées par les équations

$$\bar{p}' \pm i\bar{q}' = \sum p'_\nu (\alpha'_\nu \pm i\beta'_\nu) = \mp i \sum (\alpha'_\nu \pm i\beta'_\nu) \frac{d\gamma'_\nu}{dt}.$$

Mais on avait

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma'_\nu}{dt} = & \frac{1}{2} (\alpha'_\nu + i\beta'_\nu) \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u - u')_{13x} \bar{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} e^{-iu_3} N^{-1} \\ & + \frac{1}{2} (\alpha'_\nu - i\beta'_\nu) \left\{ \sum_x (-1)^{\Sigma n^x m^{13x} + |x|} C_x \vartheta(u + u')_{13x} \bar{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} e^{+iu_3} N^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \bar{p}' \pm i\bar{q}' = & \mp i \left\{ \sum_x (\mp 1)^{|x| + \Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x} \bar{\Delta} \vartheta_{13x} \right\} e^{\pm iu_3} N^{-1} \\ = & \pm \left\{ \sum_x (\mp 1)^{|x| + \Sigma n^x m^{13x}} C_x \vartheta(u \pm u')_{13x} \Delta \vartheta_{13x} \right\} N^{-1} e^{\pm iu_3}. \end{aligned}$$

Le mouvement du corps se compose du mouvement du système des axes de coordonnées introduit et d'une rotation autour de l'axe des z de ce système dont la vitesse est r' .

Par suite les composantes de la vitesse du corps par rapport aux axes fixes dans l'espace sont

$$\bar{p} = \bar{p}' + r' \alpha'_3, \quad \bar{q} = \bar{q}' + r' \beta'_3, \quad \bar{r} = \bar{r}' + r' \gamma'_3.$$

§ 7. *Résumé des résultats obtenus.*

Nous avons vu que le mouvement du corps peut s'exprimer d'une manière relativement simple, si on introduit outre le système d'axes fixe dans l'espace, et le système fixe dans le corps, un troisième système dont le troisième axe coïncide avec l'axe du moment principal d'inertie distingué. Le mouvement relatif du corps par rapport à ce système est donc une rotation autour de l'axe des z , et le système est choisi de manière que la vitesse de rotation soit la moitié de la composante de la vitesse de rotation du corps prise par rapport à l'axe du plus petit moment principal d'inertie.

Si maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ sont les cosinus directeurs et les composantes de la vitesse de rotation pour le système fixe dans le corps, et si $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, p', q', r', \bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ ont la même signification pour le nouveau système d'axes introduit, enfin si u et v sont les cosinus directeurs de l'axe passant par le centre de gravité du corps, par rapport au premier et au deuxième axe du nouveau système, on a les égalités suivantes

$$\alpha_3 = \alpha'_3, \quad \beta_3 = \beta'_3, \quad \gamma_3 = \gamma'_3, \quad r = 2r',$$

$$\alpha_1 \pm i\alpha_2 = \frac{\alpha'_1 \pm i\alpha'_2}{u \pm iv}, \quad \beta_1 \pm i\beta_2 = \frac{\beta'_1 \pm i\beta'_2}{u \pm iv}, \quad \gamma_1 \pm i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 \pm i\gamma'_2}{u \pm iv},$$

$$p \pm iq = \frac{p' \pm iq'}{u \pm iv},$$

$$\bar{p} = \bar{p}' + r'\alpha'_3, \quad \bar{q} = \bar{q}' + r'\beta'_3, \quad \bar{r} = \bar{r}' + r'\gamma'_3.$$

u_1, u_2 , désignent des fonctions linéaires de t $g_{11}t + h_1, g_{12}t + h_2$ qui sont réelles, abstraction faite de demi-périodes additives, au contraire u'_1, u'_2 désignent un couple de constantes qui sont imaginaires si on fait abstraction de demi-périodes additives.

De plus l, m, n, t_0 sont des constantes, dont nous avons déterminé les valeurs plus haut. m est une grandeur imaginaire, tandis que les autres sont réelles. Par suite, la fonction u_3 que nous avons définie par l'équation $u_3 = (l + im)(t - t_0)$ a, elle aussi, des valeurs réelles. Les indices $x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu$ désignent les nombres 0, 1, 2, 3, 4 dans un ordre convenablement choisi.

Si nous désignons par Δ et ∇ les symboles opératoires,

$$\Delta F(x_1, x_2) = (l + im)F(x_1, x_2) - i \left(\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} g_{12} \right),$$

$$\nabla F(x_1, x_2) = \Delta \Delta F(x_1, x_2) - l \Delta F(x_1, x_2) + \left(n - m^2 - l^2 + \frac{e_4 + e_5}{2} \right) F(x_1, x_2),$$

et si nous désignons par $|\lambda|$ un nombre qui en même temps que l'indice λ soit pair ou impair, on obtient pour les cosinus directeurs les formules suivantes, dans lesquelles la sommation se rapporte à l'indice x qui parcourt les valeurs x_1, x_2, x_3

$$\gamma'_1 = i^{|\lambda|} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (-1)^{\sum_n \lambda m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$\gamma'_2 = i^{|\mu|} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (-1)^{\sum_n \lambda m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$\gamma'_3 = i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (-1)^{\sum_n \lambda \mu m^x} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$\alpha'_1 \pm i\beta'_1 = i^{|\lambda|} (-1)^{\sum_n 13m^\lambda} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (\mp 1)^{x\lambda} (-1)^{\sum_n x 13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{13x\lambda} \vartheta_{13x\lambda}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x} e^{\pm iu_3},$$

$$\alpha'_2 \pm i\beta'_2 = i^{|\mu|} (-1)^{\sum_n 13m^\mu} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (\mp 1)^{|\lambda\mu|} (-1)^{\sum_n x 13x\mu} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{13x\mu} \vartheta_{13x\mu}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x} e^{\pm iu_3},$$

$$\alpha'_3 \pm i\beta'_3 = i^{|\lambda\mu|} (-1)^{\sum_n 13m^{\lambda\mu}} \frac{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x (\mp 1)^{x\lambda\mu} (-1)^{\sum_n x 13x\lambda\mu} \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{13x\lambda\mu} \vartheta_{13x\lambda\mu}}{\sum_i \sum_n \sum_m \sum_x \vartheta_{13x\lambda} \vartheta_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x} e^{\pm iu_3};$$

pour les composantes de la vitesse de rotation suivant les axes propres du système:

$$p' = i^{|\lambda|} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$q' = i^{|\mu|} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\mu}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$r' = i^{|\lambda\mu|} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (-1)^{\Sigma n^{\lambda\mu} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{x\lambda\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{x\lambda\mu}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x};$$

et pour les composantes de la vitesse de rotation suivant les axes fixes dans l'espace:

$$\bar{r}' = \text{const.} = l,$$

$$\bar{p}' \pm i\bar{q}' = \pm e^{\pm iu_2} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (\mp 1)^{|\lambda| + \Sigma n^x m^{13x}} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{13x} \Delta \vartheta_{13x}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_x \vartheta(u'_1, u'_2)_x}.$$

Enfin les cosinus directeurs du premier axe fixe dans le corps par rapport aux trois nouveaux axes introduits

$$u = - 2i^{|\lambda|} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (-1)^{\Sigma n^{\lambda} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{13x\lambda} \vartheta(u_1, u_2)_{13x\lambda}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$v = - 2i^{|\lambda|} \frac{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x (-1)^{\Sigma n^{\mu} m^x} \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \nabla \vartheta(u'_1, u'_2)_{13x\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{13x\mu}}{\sum_i \Sigma n^{\lambda\mu} m^x \partial_{13x\lambda} \partial_{13x\mu} \vartheta(u'_1, u'_2)_x \vartheta(u_1, u_2)_x},$$

$$w = 0.$$

Il est remarquable que les deux mouvements dans lesquels nous avons décomposé la rotation du corps appartiennent tous les deux à un type général, dont des autres cas spéciaux représentent les mouvements à la POINSON et le mouvement d'un corps solide dans un liquide que j'ai traité dans un travail publié dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 109.

Berlin, janvier 1891.