Ark. Mat., **36** (1998), 131–162
© 1998 by Institut Mittag-Leffler. All rights reserved

Identités de Bézout pour certains systèmes de sommes d'exponentielles

Thierry Pellé

1. Introduction

Etant donné un corps quelconque $\mathbf{K}$, l'existence pour toute application polynomiale de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}^m$ définie par $(P_1, \dots, P_m) \in (\mathbf{K}[X])^m$, sans zéro dans une clôture intégrale de $\mathbf{K}$, d'une identité de Bézout

$$1 = P_1 Q_1 + \dots + P_m Q_m, \tag{1}$$

où les *quotients* $Q_1, \dots, Q_m$ sont des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ que l'on peut trouver au moyen de l'algorithme dit d'Euclide, est un résultat bien connu de la théorie des anneaux principaux. On notera qu'il n'y a pas unicité des quotients pour un système fixé. Il est ainsi possible d'expliciter directement les quotients comme sommes finies d'interpolateurs de Lagrange : en utilisant la théorie algébrique des résidus telle qu'elle est décrite dans [Ho] ou dans [K], on a

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} G_1(\cdot, X) \\ P_1 - P_1(X) \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} G_1(\cdot, X) \\ P_1 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Res}\left[\frac{\sum_{k=1}^m u_k P_k(X)}{\sum_{k=1}^m u_k P_k} G_1(\cdot, X) - \frac{(P_1(X) - P_1)\sum_{k=1}^m u_k G_k(\cdot, X)}{\sum_{k=1}^m u_k P_k}\right] \\ &\qquad\qquad P_1 \\ 1 &= \sum_{k=2}^m P_k(X) \operatorname{Res}\left[\frac{u_k G_1(\cdot, X)}{\sum_{k=1}^m u_k P_k}\right] + P_1(X) \operatorname{Res}\left[\frac{\sum_{k=2}^m u_k G_k(\cdot, X)}{\sum_{k=1}^m u_k P_k}\right], \\ &\qquad\qquad P_1 \end{aligned} \tag{2}$$

où l'on posé $G_k(\zeta, X) = g_k(\zeta, X)\, d\zeta$ qui est la forme associée à la *fonction de Hefer*

$$g_k(z, \zeta) = \frac{P_k(z) - P_k(\zeta)}{z - \zeta},$$

et où $u_1, \dots, u_m$ sont des éléments de $\mathbf{K}$ choisis de sorte que la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^m u_k P_k$ ne s'annule pas aux zéros de P_1. Dans le cas où le corps $\mathbf{K}$ est de

caractéristique nulle (i.e. $\mathbf{K}$ peut être vu comme sous-corps de $\mathbf{C}$), on peut trouver une variante de (2) en utilisant une version pondérée de la formule de Pompeïu (voir [BGVY, Chapitre 1]) :

$$1=\left\langle \bar\partial\frac{1}{P_1},\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{P_k}(\zeta)[P_k(X)g_1(X,\zeta)-P_1(X)g_k(X,\zeta)]}{\|P(\zeta)\|^2}d\zeta\right\rangle,$$

où $\langle\bar\partial(1/P_1),\omega(\zeta)\,d\zeta\rangle$ désigne la *somme complète des résidus*

$$\left\langle \bar\partial\frac{1}{P_1},\omega\,d\zeta\right\rangle=\sum_{\alpha\in V(P_1)}\operatorname*{Res}_{\zeta=\alpha}\left(\frac{\omega}{P_1}\right),$$

l'action du résidu étant ici étendue aux formes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. Dans le cas de systèmes polynomiaux $(P_1,\dots,P_m)\in\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]^m$ tels que $V(P):=\{\zeta\in\mathbf{C}^n\mid P_j(\zeta)=0,\ j=1,\dots,m\}$ est vide, le Nullstellensatz assure l'existence d'une identité de Bézout du type (1), à quotients dans $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$. A nouveau, il existe une méthode algorithmique, due à G. Hermann, utilisant la théorie de l'élimination ([He] et [W]) pour expliciter les quotients. Pourtant, en étudiant précisement cet algorithme, comme l'ont fait Masser et Wüstholtz ([MW]), on ne parvient pas à estimer les coefficients et les degrés des quotients avec des bornes satisfaisantes d'un point de vue numérique. En revanche, lorsque l'on travaille en caractéristique nulle, l'approche via les interpolateurs de Lagrange–Jacobi, telle que proposée par C. A. Berenstein et A. Yger ([BY3]) et poursuivie par M. Elkadi ([E]), bien qu'elle ne fournisse qu'une formule et non un algorithme, semble actuellement plus prometteuse. Ces méthodes reposent sur des formules analytiques de représentation de type Andreotti–Norguet attachées à des applications polynomiales propres de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$. Remarquons que pour $m=n+1$, lorsque l'application $(P_1,\dots,P_n)$ n'a pas de zéro à l'infini dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$, où $\mathbf{K}$ est un corps quelconque cette fois, l'approche via le résidu algébrique précédemment évoquée reste valide et conduit selon le même schéma de preuve, en utilisant la généralisation d'un résultat de Jacobi due à M. Kreuzer et E. Kunz ([KK]), à

$$\begin{aligned}1&=\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\Delta_{n+1}(X,\cdot)\\ P_1-P_1(X),\dots,P_n-P_n(X)\end{bmatrix}=\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\Delta_{n+1}(X,\cdot)\\ P_1,\dots,P_n\end{bmatrix}\\ &=\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\dfrac{P_{n+1}\Delta_{n+1}(X,\cdot)}{P_{n+1}}\\ P_1,\dots,P_n\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n+1}P_k(X)\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta_k(X,\cdot)}{P_{n+1}}\\ P_1,\dots,P_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

où l'on a posé $\Delta_k(X,\zeta)=\delta_k(X,\zeta)\,d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n$, forme associée au *bézoutien* de l'application $(P_1,\dots,\widehat{P}_k,\dots,P_{n+1})$

$$\delta[P_1,\dots,\widehat{P}_k,\dots,P_{n+1}](z,\zeta)=\delta_k(z,\zeta)=\begin{vmatrix}g_{1,1}&\cdots&\widehat{g}_{k,1}&\cdots&g_{n+1,1}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ g_{1,n}&\cdots&\widehat{g}_{k,n}&\cdots&g_{n+1,n}\end{vmatrix},$$

les $g_{k,j}$ étant les fonctions de Hefer associées aux P_k, soit

$$g_{k,j}(\zeta, z) = \frac{P_k(\zeta_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n) - P_k(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j},$$

pour $1 \leq k \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n$.

Soit maintenant $\mathbf{G}$ un sous-groupe de type fini de $\mathbf{R}^n$. On note par $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des *exponentielles polynômes à fréquences dans* $\mathbf{G}$ *et à coefficients dans* $\mathbf{C}$, c'est à dire

$$\mathcal{E}_{\mathbf{G}} = \left\{ \sum_{\gamma \in \mathbf{G}} a_\gamma e^{\langle \gamma, \cdot \rangle} \mid a_\gamma \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n] \right\},$$

toutes les sommes étant finies. En notant ϱ le *poids* défini par $\varrho(z) = \log(2 + \|z\|) + \|\operatorname{Re} z\|$, $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}$ est une sous-$\mathbf{C}$-algèbre de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{A}_\varrho$ des fonctions à croissance contrôlée par ϱ, en d'autres termes des fonctions f telles qu'il existe des constantes A et B telles que pour tout $z \in \mathbf{C}^n$,

$$|f(z)| \leq A e^{B\varrho(z)}.$$

Remarquons qu'un polynôme irréductible qui divise un élément de $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}$ est nécessairement de la forme $\langle \gamma, z \rangle + c$, avec $\gamma \in \mathbf{G}$, $c \in \mathbf{C}$ (voir [BY2, Lemme 3.1]).

Considérons alors un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de type fini de $\mathbf{K}^n$ inclus dans $\mathbf{R}^n$, tel que $\mathbf{RG} = \mathbf{R}^n$, on appelle *somme d'exponentielles à fréquences dans* $\mathbf{G}$ *et à coefficients dans* $\mathbf{K}$ toute fonction s'écrivant sous forme d'une somme finie

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{G}} a_\gamma e^{\langle \gamma, \cdot \rangle},$$

où $\{a_\gamma\}_{\gamma \in \mathbf{G}}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{K}$. Si l'on suppose, sans perte de généralité, que

$$\mathbf{G} = \mathbf{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}\alpha_r,$$

on appellera *rang des fréquences* des sommes d'exponentielles considérées l'entier r. L'ensemble des sommes d'exponentielles à fréquences dans $\mathbf{G}$ et à coefficients dans $\mathbf{K}$, noté $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$, forme une $\mathbf{K}$-algèbre stable par dérivation. Celle-ci peut-être vue comme une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{A}_\varrho$ pour le poids $\varrho(z) = \|\operatorname{Re} z\|$.

Si le rang des fréquences est n, on a facilement

$$\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}} \simeq \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}] \tag{3}$$

et l'existence d'identités de Bézout découle directement du Nullstellensatz algébrique. Remarquons que l'absence de zéros à l'infini équivaut à la condition dite de Bernstein ([B]) et plus généralement à celle de Kazarnovskii ([Ka]).

De plus, il est connu que si $P_0, \dots, P_n$ sont des polynômes de Laurent sans zéro commun dans $(\mathbf{C}^*)^n$ tels que l'origine soit point intérieur à toutes les enveloppes convexes des supports de $P_1, \dots, P_n$ et que $(P_1, \dots, P_n)$ satisfait à la condition de Bernstein, alors, si $\delta[P_1, \dots, P_n]$ désigne le bézoutien de $P_1, \dots, P_n$,

$$
\begin{aligned}
1 = \left\langle \bar\partial \frac{1}{P}, \frac{1}{P_0} \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{n,1} & g_{0,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{1,n} & \cdots & g_{n,n} & g_{0,n} \\ P_1(z) & \dots & P_n(z) & P_0(z) \end{vmatrix} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \right\rangle_{\mathbf{T}} \\
+ \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}} \left\langle \bar\partial \frac{1}{P^{\mathbf{k}}}, \delta[P_1, \dots, P_n](z, \cdot)\, d\zeta \right\rangle_{\mathbf{T}} P^{\mathbf{k}},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

où l'ensemble $\mathcal{L} \subset \mathbf{N}^n$ est fini et dépend des supports des polynômes $P_1, \dots, P_n$, l'indexation $\mathbf{T}$ signifiant qu'il s'agit d'un résidu torique ([Y, théorème 2.2]), et la notation $\langle \bar\partial(1/P^{\mathbf{k}}), \cdot \rangle$ désigne la prise de somme complète des résidus relativement à l'application $(P_1^{k_1+1}, \dots, P_n^{k_n+1})$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$. Au vu de la correspondance (3) entre l'algèbre des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbf{K}$ et l'algèbre $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{Z}^n}$ dans le cas où le rang de $\mathbf{G}$ est n, on peut se demander si une solution effective du Nullstellensatz dans l'algèbre $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ n'est pas envisageable sous des hypothèses de non annulation simultanée (dans $\mathbf{C}^n$ et dans une compactification torique adaptée aux enveloppes des supports des différents f_j) pour un système $(f_0, \dots, f_n)$ dont les polyèdres de Newton contiennent l'origine comme point intérieur. Si l'impossibilité de trouver deux polynômes P et Q de $\mathbf{K}[X, Y]$ satisfaisant à

$$1 = P(e^z, e^{\alpha z}) \cosh(z) + Q(e^z, e^{\alpha z}) \cosh(\alpha z),$$

si $\alpha \notin \mathbf{Q}$ (voir [A] pour s'en convaincre), réduit à néant tout espoir dans cette voie, on se propose en imitant les méthodes analytiques employées dans le cadre polynomial de trouver un substitut à la formule (4) dans une situation cette fois transcendante.

Introduisons $\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ le monoïde multiplicatif défini par

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}} = \left\{ \frac{f}{P} \in \mathcal{H}(\mathbf{C}^n) \mid f \in \mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}},\ P(X) = \prod_{i \in I} L_i(X)^{N_i} \right\},$$

où les L_i sont des $\mathbf{K}$-formes linéaires à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $N_i \in \mathbf{Z}$. Si $\delta[v_1, \dots, v_n]$ désigne le bézoutien des fonctions entières $v_1, \dots, v_n$, on appelle *interpolateur de Lagrange de* $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$, toute fonction entière de la forme

$$z \longmapsto \left\langle \bar\partial \frac{1}{v_1^{m_1}} \wedge \dots \wedge \bar\partial \frac{1}{v_n^{m_n}}, \frac{\varphi}{v_0} \delta[v_{i_1}, \dots, v_{i_n}](\zeta, z)\, d\zeta \right\rangle_{\xi},$$

où les m_j sont dans $\mathbf{N}^*$ et $(v_0, v_1, \dots, v_n, \varphi) \in \mathcal{Q}^{n+2}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ est tel que

$$\begin{cases} \dim V(v_1, \dots, v_n) = 0, \\ \xi \in V(v_1, \dots, v_n), \\ V(v_0, \dots, v_n) = \emptyset, \\ I = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{0, \dots, n\}, \quad \#I = n. \end{cases}$$

En explicitant un tel interpolateur, on remarque que celui-ci s'écrit comme quotient d'un élément de $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}$ par un produit de puissances entières de formes linéaires. On appelle alors $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ la $\mathbf{K}$-algèbre engendrée par les éléments de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ et les interpolateurs de Lagrange de $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$. Remarquons que ce processus d'extension de l'algèbre reste naturel, car si l'on effectue les mêmes constructions en remplaçant $\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ par $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$, la $\mathbf{K}$-algèbre ainsi construite reste $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$; chercher à résoudre le Nullstellensatz avec entrées dans $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ en explicitant les quotients dans $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]^{\sim}$ est alors conforme à la résolution du Nullstellensatz algébrique. Le résultat principal de ce papier concerne le cas où $\mathbf{K} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ et $\mathbf{G}$ est un groupe de rang $n+1$. Dans ce cas, si $f_0, \dots, f_n$ sont des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$, sans zéro commun dans $\mathbf{C}^n$, sans zéro à l'infini au sens de Kazarnovskii (comme cela sera précisé dans la section suivante), et dont les polyèdres de Newton contiennent tous l'origine, on peut écrire un identité de Bézout sous la forme

$$1 = q_0 f_0 + \dots + q_n f_n, \tag{5}$$

où chaque quotient q_j se présente comme série normalement convergente sur tout compact d'éléments de la $\mathbf{K}$-algèbre $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$.

2. Résultats dus à Kazarnovskii

Soient $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ un sous-groupe de type fini de $\mathbf{K}^n \cap \mathbf{R}^n$, et φ une somme d'exponentielles de $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ s'écrivant sous la forme

$$\varphi(z) = \sum_{\gamma \in \mathbf{G}} a_\gamma e^{\langle \gamma, z \rangle}.$$

Si Λ désigne le *support* de φ,

$$\Lambda = \{\gamma \in \mathbf{G} \mid a_\gamma \neq 0\},$$

on appelle *polyèdre de Newton* de φ l'enveloppe convexe de Λ. Si Δ désigne une face de celui-ci, on posera

$$\varphi^\Delta(z) = \sum_{\gamma \in \Lambda \cap \Delta} a_\gamma e^{\langle \gamma, z \rangle}.$$

Definition 2.1. Soient $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathcal{S}^n_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ un système de sommes d'exponentielles de $\mathbf{C}^n$, $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ leurs supports et $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ les polyèdres de Newton associés. Si Δ désigne une face de $\Gamma=\Gamma_1+\dots+\Gamma_n$ s'écrivant $\Delta=\Delta_1+\dots+\Delta_n$, avec Δ_j face de Γ_j, on note par φ^Δ le système $(\varphi_1^{\Delta_1},\dots,\varphi_n^{\Delta_n})$, qui sera dit *réduit*.

Definition 2.2. Avec les notations de la définition 2.1, nous dirons que φ satisfait à *l'hypothèse de Kazarnovskii* s'il existe une constante $\varepsilon>0$ telle que pour toute face Δ de Γ et tout $z\in\mathbf{C}^n$,

$$\frac{|\varphi_1^{\Delta_1}(z)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_1}(\mathrm{Re}\,z)}}+\dots+\frac{|\varphi_n^{\Delta_n}(z)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_n}(\mathrm{Re}\,z)}}\geq\varepsilon, \tag{6}$$

où H_K désigne la fonction support du compact K.

L'hypothèse se traduit par l'absence de zéro pour les systèmes réduits dans des compactifications adaptées de $\mathbf{C}^n$. Dans ces conditions, Kazarnovskii obtient ([Ka]) le résultat suivant.

Théorème 2.1. *L'ensemble analytique $V(\varphi)$ est soit vide, soit constitué de points isolés situés dans une bande $\mathbf{B}=\{\|\mathrm{Re}\,\zeta\|\leq T\}$. De plus, quand R tend vers $+\infty$,*

$$\mathrm{card}(V(\varphi)\cap B(0,R))=CR^n+O(R^{n-1}),$$

où la constante C dépend de la géométrie des polyèdres de Newton $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$.

On a de plus le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Si l'on suppose que tous les polyèdres de Newton contiennent l'origine de $\mathbf{R}^n$ comme point intérieur, il existe des constantes réelles positives $T'\geq T$, m, M et des compacts Γ^+ et Γ^- tels que pour tout $\zeta\in\mathbf{C}^n$ tel que $\|\mathrm{Re}\,\zeta\|\geq T'$, on ait*

$$me^{\mathrm{H}_{\Gamma^-}(\mathrm{Re}\,\zeta)}\leq\|\varphi(\zeta)\|\leq Me^{\mathrm{H}_{\Gamma^+}(\mathrm{Re}\,\zeta)}.$$

Preuve. La majoration résulte immédiatement de l'inégalité triangulaire. En effet, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi(\zeta)\|&\leq C_n\sum_{i=1}^n|\varphi_i(\zeta)|\leq C_n\sum_{i=1}^n\sum_{\gamma\in\Lambda_i}|a_{i,\gamma}|e^{\langle\gamma,\mathrm{Re}\,\zeta\rangle}\\&\leq C_n\sum_{i=1}^n\sum_{\gamma\in\Lambda_i}|a_{i,\gamma}|e^{\mathrm{H}_\Gamma(\mathrm{Re}\,\zeta)}\leq Me^{\mathrm{H}_\Gamma(\mathrm{Re}\,\zeta)},\end{aligned}$$

où $M>0$, on posera donc $\Gamma^+=\Gamma$. Passons maintenant à la minoration. Soit δ une direction fixée de $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$. Celle-ci définit une face Δ de Γ, que l'on peut décomposer sous la forme

$$\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n,$$

où Δ_i est une face de Γ_i. Par l'hypothèse de Kazarnovskii, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i^{\Delta_i}(\zeta)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\geq\varepsilon,$$

expression que l'on peut transformer au moyen de l'inégalité triangulaire en

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i(\zeta)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i^{\Delta_i}(\zeta)-\varphi_i(\zeta)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\geq\varepsilon.$$

Plaçons nous alors dans un cône C_δ autour de l'axe δ pour lequel $\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)=\mathrm{H}_{\Gamma_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)$, et majorons de la sorte

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i^{\Delta_i}(\zeta)-\varphi_i(\zeta)|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\sum_{\gamma\notin\Lambda_i\cap\Delta_i}a_{\gamma,i}e^{\langle\gamma,\zeta\rangle}|}{e^{\mathrm{H}_{\Delta_i\cap\Lambda_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{\gamma\notin\Lambda_i\cap\Delta_i}|a_{\gamma,i}|\frac{e^{\langle\gamma,\mathrm{Re}\,\zeta\rangle}}{e^{\mathrm{H}_{\Gamma_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}.$$

L' indice i étant fixé, en se plaçant éventuellement dans un cône plus fin, toujours autour de δ, on peut imposer que pour $\|\mathrm{Re}\,\zeta\|\geq T_i$ (T_i étant choisi suffisement grand), on ait

$$\frac{|a_{\gamma,i}e^{\langle\gamma,\zeta\rangle}|}{e^{\mathrm{H}_{\Gamma_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\leq\frac{\varepsilon}{2n}.$$

Ainsi, posant $T_\delta=\max_i T_i$, on a, pour $\|\mathrm{Re}\,\zeta\|\geq T_\delta$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i^{\Delta_i}(\zeta)-\varphi_i(\zeta)|}{e^{\mathrm{H}_{\Gamma_i}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\leq\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Comme les traces des C_δ sur la sphère unité de $\mathbf{C}^n$ forment un recouvrement (ouvert si l'on considère des cônes ouverts) de celle-ci, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, disons C_{δ_k}, $k\in\{1,\ldots,K\}$. En posant $T'=\max_{k\in\{1,\ldots,K\}}T_{\delta_k}$, $m=\frac{1}{2}\varepsilon$, $\Gamma^-=\bigcap_k\Gamma_k$, en remarquant que tout point de $\mathbf{R}^n$ est dans au moins un cône du sous-recouvrement et que $T'\geq T$ à cause de la majoration (7), on obtient le résultat attendu. $\square$

Lemme 2.2. *Soient $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ un système de sommes d'exponentielles de $\mathbf{C}^n$ satisfaisant à l'hypothèse de Kazarnovskii et $T>0$ telle que les zéros de φ se trouvent dans la bande $\mathbf{B}=\{\|\operatorname{Re}\zeta\|\leq T\}$. Alors il existe un ensemble fini $\mathcal{R}\subset\mathbf{R}^{+*}$, un ensemble $\mathcal{Z}\subset\mathbf{B}$, constitué des translatés par $\mathbf{N}^n$ d'un nombre fini de points et une constante $\tau>0$ tels que pour tout $\xi\in\mathbf{B}$, il existe $\eta\in\mathcal{Z}$ et $r\in\mathcal{R}$ tels que $\xi\in B(\eta,r)$ et*

$$\|\varphi(\zeta)\|\geq\tau \quad \textit{pour tout } \zeta\in\partial B(\eta,r).$$

Preuve. Posons $U=\{\|\operatorname{Re}\zeta\|<T,\|\operatorname{Im}\zeta\|\leq 1\}$, et définissons un sous-ensemble de $\mathcal{H}(U)^n$ par

$$\mathcal{F}=\{\widetilde{\varphi}_t(z)=(\varphi_1(z+it),\dots,\varphi_n(z+it))\mid t\in\mathbf{N}^n\}.$$

Du fait que $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ soient des sommes d'exponentielles à fréquences dans $\mathbf{R}^n$, il résulte que $\mathcal{F}$ est relativement compact et d'autre part que si $g\in\overline{\mathcal{F}}$, alors g satisfait aux hypothèses de Kazarnovskii. Soit $g\in\overline{\mathcal{F}}$; $V(g)$ est alors discrète de sorte que $V(g)\cap U$ est fini. On pose

$$d_g=\min_{\substack{\zeta,\xi\in V(g)\cap U\\ \zeta\neq\xi}}\|\zeta-\xi\|,$$

la distance minimale entre deux zéros de g dans U. Si $z\in U$ et $r(g,z)<d_g$, alors si ζ appartient au bord de $B(z,r(g,z))$, on a $\|g(\zeta)\|\geq 2\tau_z^{(g)}>0$. Recouvrons ainsi $\overline{U}$, de sorte que, par compacité, il existe un nombre fini de boules $B(z_1^{(g)},r(g,z_1^{(g)}))\,,\dots,$ $B(z_N^{(g)},r(g,z_N^{(g)}))$ telles que

$$\overline{U}\subset\bigcup_{k=1}^{N}B(z_k^{(g)},r(g,z_k^{(g)})).$$

Posons alors

$$\tau_g:=\min\{\tau_{z_1}^{(g)},\dots,\tau_{z_N}^{(g)}\},$$
$$Z_g=\{z_1^{(g)},\dots,z_N^{(g)}\}$$

et

$$R_g=\{r(g,z_1^{(g)}),\dots,r(g,z_N^{(g)})\}$$

de sorte que pour tout z dans U, il existe $(\eta,r)\in Z_g\times R_g$ tel que $z\in B(\eta,r)$ et pour tout $\zeta\in\partial B(\eta,r)$, $\|g(\zeta)\|\geq 2\tau_g>0$. On peut faire cette construction pour tout $g\in\overline{\mathcal{F}}$,

afin d'obtenir $(\tau_g)_g$, $(Z_g)_g$, $(R_g)_g$, avec la propriété ci-dessus. Considérons alors $(B(g,\tau_g))_{g\in\overline{\mathcal{F}}}$ qui constitue un recouvrement de $\mathcal{F}$. Par compacité, on extrait du recouvrement précédent un recouvrement fini $(B(g_k,\tau_{g_k}))_{k=1}^M$. On pose

$$\tau=\min\{\tau_{g_1},\dots,\tau_{g_M}\}>0,$$
$$\mathcal{Z}=\bigcup_{k=1}^M Z_{g_k}$$

et

$$\mathcal{R}=\bigcup_{k=1}^M R_{g_k}.$$

Soit alors $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{F}$; il existe $k\in\{1,\dots,M\}$ tel que $\|\widetilde{\varphi}-g_k\|<\tau_{g_k}$. De plus, pour $z\in U$, nous savons qu'il existe $\eta\in U$ tel que $z\in B(\eta,r(\eta))$ et que pour tout ζ du bord de la boule $B(\eta,r(\eta))$,

$$\|g_k(\zeta)\|\geq 2\tau_g\geq\tau>0.$$

D'où pour tout ζ de $\partial B(\eta,r(\eta))$,

$$\|\widetilde{\varphi}(\zeta)\|=\|\widetilde{\varphi}(\zeta)-g_k(\zeta)+g_k(\zeta)\|\geq\|g_k(\zeta)\|-\|\widetilde{\varphi}(\zeta)-g_k(\zeta)\|\geq\tau_{g_k}>\tau.$$

Nous venons de montrer que pour tout $z\in U$, il existe une boule à centre dans $\mathcal{Z}$ et à rayon dans $\mathcal{R}$, contenant z et telle que sur son bord $\|\widetilde{\varphi}(\zeta)\|\geq\tau>0$. On conclut ainsi : soit $k\in\mathbf{N}^n$ tel que $\tilde{\xi}=\xi-ki\in U$ et $\widetilde{\varphi}_\tau(\zeta)=\varphi(\zeta+ki)$. Alors $\widetilde{\varphi}_k\in\mathcal{F}$, de sorte qu'il existe $(\tilde{\eta},r)\in\mathcal{Z}\times\mathcal{R}$ tel que $\tilde{\xi}\in B(\tilde{\eta},r)$ et pour tout $\zeta\in\partial B(\tilde{\eta},r)$, $\|\widetilde{\varphi}_\tau(\zeta)\|\geq\tau>0$. Si l'on pose alors $\eta=\tilde{\eta}+ki$, on a $\xi\in B(\eta,r)$ et pour tout $\zeta\in\partial B(\eta,r)$, $\|\varphi_k(\zeta)\|\geq\tau>0$. $\square$

Definition 2.3. Un système de sommes d'exponentielles $(f_0,\dots,f_n)\in\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ satisfait à l'hypothèse $\mathcal{K}$ si le système $f=(f_1,\dots,f_n)$ satisfait à l'hypothèse de Kazarnovskii (6) et si les polyèdres de Newton de $f_1,\dots,f_n$ contiennent tous l'origine comme point intérieur.

3. Inégalités de Łojasiewicz globales pour les systèmes d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$

Nous supposerons à partir de maintenant que $\mathbf{K}\subset\overline{\mathbf{Q}}$ et que le rang de $\mathbf{G}$ est $n+1$.

3.1. Remarque préliminaire

Nous utiliserons ici une variante des résultats de l'article [BY5] dont la démarche se généralise facilement au cas des sommes d'exponentielles en prenant comme poids $\varrho(z)=\log(2+\|z\|)+\|\operatorname{Re} z\|$. Si Ω désigne un ouvert de $\mathbf{C}^n$, on notera dans la suite $\mathcal{A}_\varrho(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω à croissance contrôlée par ϱ. Nous avons la proposition suivante, dont la preuve est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.3 dans [BY5], et dont nous nous servirons par la suite.

Proposition 3.1. *Soient $f_1, \dots, f_m$ des sommes d'exponentielles, polynômes de Laurent à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ en $e^{z_1}, e^{\langle\alpha,z\rangle}, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}$, où α est un vecteur de $(\overline{\mathbf{Q}})^n$ à composantes non nulles $\mathbf{Z}$-linéairement indépendantes à 1 dans leur ensemble. Il existe une constante $\nu\in\mathbf{N}$ et des constantes positives $C>0$, $D>0$ et $N\in\mathbf{N}$ telles que, si les $a_k\in\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$ représentent les coefficients du développement de Laurent au voisinage de 0 du prolongement méromorphe (comme application de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$) de*

$$\lambda\longmapsto\frac{|f_1\cdots f_m|^{2\lambda}}{\|f\|^{2n}}=\sum_{j=-2n}^{\infty}a_k\lambda^k,$$

alors, pour $-2n\le k\le 0$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, on ait l'estimation

$$|\langle z_1^\nu a_k,\varphi\rangle|\le C\|\varphi\|_N\max_{\zeta\in\operatorname{supp}(\varphi)}e^{D\varrho(\zeta)},$$

$\|\varphi\|_N$ désignant la norme de Sobolev d'indice N.

Nous souhaitons écrire une inégalité de Łojasiewicz pour m sommes d'exponentielles à coefficients et fréquences algébriques et dont le rang du groupe engendré par les fréquences est $n+1$. Celle-ci est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit $f=(f_1,\dots,f_m)$ un système de sommes d'exponentielles à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ et fréquences dans $(\overline{\mathbf{Q}})^n\cap\mathbf{R}^n$, le rang du groupe des fréquences étant $n+1$. Soit V_f la variété des zéros communs (dans $\mathbf{C}^n$) du système. Alors pour tout $\xi\in\mathbf{C}^n$,*

$$\|f(\xi)\|\ge\frac{\tilde{d}(\xi,V_f)^\mu}{(1+\|\xi\|)^M}e^{-K\|\operatorname{Re}\xi\|},$$

où les constantes μ, M, et K ne dépendent que du système f.

Preuve. Donnons tout d'abord la preuve du résultat pour un groupe de fréquences de la forme

$$\mathbf{G}=\mathbf{Z}e_1\oplus\mathbf{Z}\alpha e_1\oplus\mathbf{Z}e_2\oplus\dots\oplus\mathbf{Z}e_n.$$

Dans ce cas, les sommes d'exponentielles sont des polynômes à coefficients algébriques en les $n+1$ variables $e^{z_1}, e^{\alpha z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}$,

$$f_k(z) = P_k(e^{z_1}, e^{\alpha z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}),$$

où $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$. Nous procéderons en deux temps. Tout d'abord, nous obtiendrons dans une boule Ω_ξ autour d'un point ξ de $\mathbf{C}^n$, une identité de la forme

$$1 = \sum_{j=1}^{m} G_j f_j + z_1^\nu G_{m+1}, \tag{8}$$

où les G_j sont des fonctions holomorphes et convenablement bornées dans cette boule, puis, grâce à la proposition 3.1, nous parviendrons à décrire $z_1^\nu G_{m+1}$ comme élément de l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_m$ dans $\mathcal{H}(\Omega_\xi)$ avec des estimations des quotients qui permettront de conclure à l'existence d'une identité de Bézout dans Ω_ξ

$$1 = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j f_j,$$

avec un contrôle adéquat des φ_j dont nous déduirons l'inégalité de Łojasiewicz recherchée. Commençons par établir (8). Pour cela, partons des fonctions $f_1, \dots, f_m$, décomposées sous la forme

$$f_k(z) = P_k(e^{z_1}, e^{\alpha z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}) = p_k(z_1, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}) + z_1^\nu q_k(z_1, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}), \tag{9}$$

avec p_k polynôme de $\overline{\mathbf{Q}}[X_1, X_2, X_2^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ de degré en X_1 strictement plus petit que ν. Si l'on définit la variété algébrique $W = V(p_1(X), \dots, p_m(X), X_1^\nu)$, l'inégalité de Łojasiewicz usuelle ([H]) donne l'existence de constantes positives A, N et B telles que pour tout $x \in \mathbf{C}^n$,

$$\|(p(x), x_1^\nu)\| \geq A \frac{\tilde{d}(x, W)^N}{(1 + \|x\|)^B},$$

où $\tilde{d}(x, W) = \min(1, d(x, W))$. Afin de faire apparaitre les exponentielles polynômes p_k introduites dans (9), on se restreint à l'hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie comme image de $\mathbf{C}^n$ par l'application $T(z) = (z_1, e^{z_2}, \dots, e^{z_n})$. Nous avons alors

$$\|(p \circ T(z), z_1^\nu)\| \geq A \frac{\tilde{d}(T(z), W)^N}{(1 + \|T(z)\|)^B},$$

que nous transformons à l'aide de l'inégalité

$$1+\|T(z)\| \leq \sqrt{2(n+1)}\,(1+\|z\|)e^{\|\operatorname{Re} z\|},$$

en

$$\|(p\circ T(z), z_1^\nu)\| \geq A' \frac{\tilde{d}(T(z),W)^N}{(1+\|z\|)^B} e^{-B\|\operatorname{Re} z\|}.$$

Reste à trouver une minoration convenable de $\tilde{d}(T(z),W)$ faisant intervenir la variété $V_p := V(p_1\circ T, \dots, p_m\circ T, z_1^\nu)$. Pour cela, remarquons que $W=\overline{T(V_p)}$, de sorte que

$$d(T(z),W) = d(T(z),T(V_p)) = \inf_{\xi\in V_p} \|T(z)-T(\xi)\|.$$

Utilisant l'inégalité

$$|\sinh(z)| \geq \gamma e^{|\operatorname{Re} z|}\tilde{d}(z, i\pi\mathbf{Z})$$

où $0<\gamma<1$, on obtient

$$|e^a - e^b| \geq \gamma e^{\max\{\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b\}} \tilde{d}\big(\tfrac{1}{2}(a-b), i\pi\mathbf{Z}\big),$$

ce qui permet d'écrire

$$d(T(z),W) \geq c\tilde{d}(z,V_p) \min_{k=1,\dots,n} e^{\operatorname{Re}(z_k)},$$

où la constante c ne dépend que des fonctions $f_1, \dots, f_m$. Ainsi donc, on arrive à une inégalité de type Łojasiewicz

$$\|(p\circ T(z), z_1^\nu)\| \geq A_0 \frac{\tilde{d}(z,V_p)^N}{(1+\|z\|)^B} e^{-B\|\operatorname{Re} z\|} \min_{k=1,\dots,n} e^{N\operatorname{Re}(z_k)}. \tag{10}$$

Remarquons, avant de poursuivre, que nous avons pour tout ζ dans $\mathbf{C}^n$ les estimations

$$|p_k\circ T(\zeta)| \leq D(1+|\zeta_1|)^M e^{C\|\operatorname{Re}\zeta\|},$$

et

$$|q_k\circ T(\zeta)| \leq D(1+|\zeta_1|)^{M'} e^{C\|\operatorname{Re}\zeta\|},$$

où les constantes A, M et C ne dépendent que des fonctions $f_1, \dots, f_m$. Soient maintenant $\xi\in\mathbf{C}^n\setminus V_p$, et $\delta=\tilde{d}(\xi,V)>0$ (notons que $\delta\leq\tilde{d}(\xi,V_p)$ car $V_p\subset V$). Nous allons nous servir de (10) pour obtenir, à l'aide d'une formule de représentation intégrale, l'égalité (8) dans la boule Ω_ξ de rayon $\delta\leq 1$ centrée en ξ. On considère pour cela une fonction Θ définie de la façon suivante : soit θ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$ identiquement égale à 1 dans la boule de $\mathbf{R}^{2n}$ de rayon $\frac{2}{3}$ et de support inclus dans

la boule unité ouverte. On note alors $\Theta(\zeta)=\theta((\zeta-\xi)/\delta)$. Nous poserons dans la suite de la preuve $F_k(\zeta)=p_k\circ T(\zeta)$ pour $1\le k\le m$ et $F_{m+1}(\zeta)=\zeta_1^\nu$. Après avoir introduit les fonctions de Hefer $g_{k,j}$ associées aux F_k, on pose

$$Q(\zeta,\xi)=\frac{1}{\|F(\zeta)\|^2}\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}\overline{F_k(\zeta)}g_{k,j}(\zeta,\xi)\,d\zeta_k,$$

$$A(\zeta,\xi)=\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}\bar\partial\overline{F}_k(\zeta)\wedge g_{k,j}(\zeta,\xi)\,d\zeta_k,$$

$$S(\zeta,\xi)=\sum_{j=1}^{n}(\bar\zeta_j-\bar\xi_j)\,d\zeta_j.$$

A l'aide de ces formes, on définit les noyaux des formules de représentation d'Andreotti–Norguet,

$$\mathcal{P}(\zeta,\xi)=(n+1)\left(\frac{1}{\|F(\zeta)\|^2}\sum_{k=1}^{m+1}\overline{F_j(\zeta)}F_k(\xi)\right)(\bar\partial Q)^n,$$

et

$$\mathcal{K}(\zeta,\xi)=\sum_{\varkappa_0+\varkappa_1=n-1}\binom{q}{\varkappa_1}\left(\frac{1}{\|F(\zeta)\|^2}\sum_{k=1}^{m+1}\overline{F_j(\zeta)}F_k(\xi)\right)^{n-\varkappa_0}\frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|\zeta-\xi\|^{2(\varkappa_0+1)}},$$

afin de pouvoir écrire, pour $z\in\Omega_\xi$, et en particulier pour $z=\xi$,

$$1=\Theta(z)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\left(\int\Theta(\zeta)\mathcal{P}(\zeta,z)+\int\bar\partial\Theta(\zeta)\wedge\mathcal{K}(\zeta,z)\right).$$

Ainsi, en développant les noyaux $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$, on obtient, en notant pour $I\subset\mathbf{N}$ fini, $F^I:=\prod_{i\in I}F_i$, une identité de la forme

$$1=\sum U_I(z)F^I(z),\quad z\in\Omega_\xi, \tag{11}$$

où chaque fonction U_I est estimée dans Ω_ξ par

$$|U_I(z)|\le C_1\frac{e^{D_1\varrho(\xi)}}{\delta^{N_1}},$$

les constantes C_1, D_1, N_1 étant uniformes et ne dépendant que des fonctions $f_1,\dots,f_m$. En réorganisant les termes de (11), on parvient à écrire

$$1=\sum_{j=1}^{m}r_j(z)f_j(z)+r_{m+1}z_1^\nu,$$

avec un contrôle des fonctions r_j dans Ω_ξ analogue à celui des U_I. Suivant alors la preuve de la proposition 3 dans [BY4], on utilise une formule de Bochner–Martinelli à poids pour représenter dans Ω_ξ la fonction $r_{m+1}z_1^\nu$ comme élément de l'idéal engendré par les fonctions $f_1, \dots, f_m$, sous la forme

$$r_{m+1}z_1^\nu = \sum_{j=1}^{m} s_j(z)f_j(z), \quad z \in \Omega_\xi,$$

où les s_j sont définies en tant que fonctions de z par des sommes d'expressions de la forme

$$\left\langle a_0, \zeta_1^\nu r_{m+1}\left[\Theta B_{0,0}(z,\cdot) + \frac{\partial\Theta}{\partial\bar\zeta_q} B_{0,1,q}(z,\cdot)\right]\right\rangle + \left\langle a_{-1}, \zeta_1^\nu r_{m+1}\left[\Theta B_{1,0}(z,\cdot) + \frac{\partial\Theta}{\partial\bar\zeta_q} B_{1,1,q}(z,\cdot)\right]\right\rangle,$$

$B_{0,0,q}$, $B_{0,1,q}$ désignant des fonctions holomorphes de $2n$ variables liées aux f_j et à leurs diviseurs de Hefer et dont on contrôle donc la croissance dans $\mathbf{C}^{2n}$, a_0 et a_{-1} étant les deux distributions issues du développement en série de Laurent au voisinage de l'origine de $\lambda \mapsto |f_1 \dots f_m|^\lambda \|f\|^{-n}$ (voir l'énoncé de la proposition 3.1). Or comme la même proposition nous donne précisément un contrôle, pour $k \le 0$, de $\langle \zeta_1^\nu a_k, \cdot \rangle$, on obtient, les normes de Sobolev d'ordre total l de Θ étant contrôlées en $O(1/\delta^l)$,

$$\left|\left\langle \zeta_1^\nu a_k, r_{m+1}\left[\Theta B_{j,0}(z,\cdot) + \frac{\partial\Theta}{\partial\bar\zeta_q} B_{j,1,q}(z,\cdot)\right]\right\rangle\right| \le C_2 \frac{e^{D_2\varrho(\xi)}}{\delta^{N_2}}, \quad z \in \Omega_\xi.$$

Ainsi, parvient-on à écrire dans Ω_ξ

$$1 = \sum_{j=1}^{m} (r_j + s_j) f_j, \tag{12}$$

avec une estimation des normes uniformes dans Ω_ξ des fonctions u_j et v_j, $1 \le j \le m$, qui assure en particulier, si on évalue (12) au point ξ

$$1 \le C_3 \frac{e^{D_3\varrho(\xi)}}{\delta^{N_3}} \|f(\xi)\|,$$

et donc

$$\|f(\xi)\| \ge C_3^{-1} \frac{e^{-D_3\|\operatorname{Re}\xi\|}\tilde d(\xi, V)^{N_3}}{(1+\|\xi\|)^{D_3}},$$

qui est l'inégalité de Łojasiewicz recherchée.

Dans le cas où

$$\mathbf{G}=\mathbf{Z}e_1\oplus\mathbf{Z}e_2\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}e_n\oplus\mathbf{Z}\alpha,$$

avec $\alpha\in(\overline{\mathbf{Q}})^n$, dont les composantes non nulles sont $\mathbf{Z}$-linéairement à 1 dans leur ensemble, on remplace la relation (8) par

$$1=\sum_{j=1}^{m}G_jf_j+\sum_{\alpha_k\neq 0}z_k^{\nu_k}G_{m+1},$$

et on suit la même démarche. □

4. Identité de Bézout

4.1. Le cas du rang n

Proposition 4.1. *Soient $f=(f_0,\ldots,f_m)\in\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}^{m+1}$, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{G}$ un sous-groupe de $\mathbf{K}^n$ de rang n tel que $\mathbf{RG}=\mathbf{R}^n$. Si $V(f)=\emptyset$, il existe un système de sommes d'exponentielles $(q_0,\ldots,q_m)\in\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}^{m+1}$ tel que*

$$1=f_0q_0+\ldots+f_mq_m.$$

Preuve. L'hypothèse faite sur le rang implique que, quitte à faire un changement linéaire de variables, on puisse trouver des polynômes $P_j\in\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]$ tels que

$$f_j(z)=\frac{1}{M(z)}P_j(e^{z_1},\ldots,e^{z_n}),$$

où M est un monôme en $e^{z_1},\ldots,e^{z_n}$.

Le système $(f_0,\ldots,f_m)$ étant sans zéro, on a $V(P)\subset\{X_1\ldots X_n=0\}$. Grâce au Nullstellensatz algébrique, on a alors l'existence de $k\in\mathbf{N}$ tel que

$$(X_1\ldots X_n)^k=\sum_{k=0}^{m}Q_jP_j.$$

Ainsi, après avoir effectué la substitution $X=e^z$, on obtient

$$1=\sum_{k=0}^{m}R_j(e^{z_1},\ldots,e^{z_n})P_j(e^{z_1},\ldots,e^{z_n}),$$

avec $R_j = Q_j/(X_1 \dots X_n)^k$, d'où l'identité de Bézout

$$1 = \sum_{k=0}^{m} q_j(z) f_j(z),$$

en posant $q_j(z) = M(z) R_j(e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$. $\square$

Remarquons que des Q_j peuvent être explicités comme nous l'avons mentionné dans l'introduction sous forme de polynômes d'interpolation en utilisant les résultats de l'article [BY3].

4.2. Un cas particulier lorsque le rang de G est $n+1$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soient* $\mathbf{K}$ *un sous-corps de* $\overline{\mathbf{Q}}$ *et* $\mathbf{G}$ *un sous-groupe de rang* $n+1$ *inclus dans* $\mathbf{K}^n \cap \mathbf{R}^n$ *tel que* $\mathbf{RG} = \mathbf{R}^n$; *soit* $f = (f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}^{n+1}$ *un système d'éléments de* $\mathcal{S}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$ *sans zéro commun satisfaisant à l'hypothèse* $\mathcal{K}$. *Il existe alors des fonctions* $q_0, \dots, q_n$ *qui sont des séries normalement convergentes sur tout compact de* $\mathbf{C}^n$ *d'éléments de la* $\mathbf{K}$*-algèbre* $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$, *telles que*

$$1 = q_0 f_0 + \dots + q_n f_n. \tag{13}$$

Quitte à effectuer un changement de variables linéaire et à coefficients rationnels n'affectant pas l'hypothèse $\mathcal{K}$, on peut, puisque le rang du sous groupe $\mathbf{G}$ est $n+1$, supposer que $\mathbf{G} = \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$, où $\alpha_j \in \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ étant $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants avec 1 dans leur ensemble (si $\sum_{j=1}^{k} q_j \alpha_j \in \mathbf{Q}$ avec des $q_j \in \mathbf{Q}$, alors les q_j sont tous nuls). Plutôt que d'écrire directement une identité de Bézout du type (13), nous écrirons des identités auxiliaires du type

$$\Psi = \tilde{q}_0 f_0 + \dots + \tilde{q}_n f_n \tag{14}$$

où Ψ est un certain élément de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$. Puis on écrira diverses telles identités avec plusieurs fonctions Ψ_σ dans une certaine famille finie, les Ψ_σ réalisant une identité

$$1 = \sum_{\sigma} \Psi_\sigma \widetilde{\Phi}_\sigma$$

lorsqu'ils sont couplés avec des $\widetilde{\Phi}_\sigma$ convenables. On demande entre autres choses à tous ces éléments d'être des fonctions entières, sommes de séries normalement convergentes sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ d'éléments du $\mathbf{K}$-module $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{K},\mathbf{G}}$. La construction de telles fonctions auxiliaires passe par le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soient α un vecteur dont les composantes non nulles sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendantes à 1 dans leur ensemble et $\mathbf{G}_\alpha$ le groupe $\mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}\alpha$. Soient les éléments de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K},\mathbf{G}_\alpha}$*

$$u_k(z) = \frac{\sinh(z_k)}{z_k},$$

et

$$u_0(z) = \frac{\sinh(\langle \alpha, z\rangle)}{\langle \alpha, z\rangle}.$$

Alors, non seulement la variété $V(u_0, \dots, u_n)$ est vide, mais il existe des fonctions entières $v_0, \dots, v_n$ obtenues commes séries d'éléments de $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact et telles que

$$1 = u_0 v_0 + \dots + u_n v_n.$$

Preuve. Il est clair que $V(u_0, \dots, u_n) = \emptyset$ grâce à l'hypothèse faite sur α.

Partons de la formule de Cauchy : pour $z \in \mathbf{C}^n$ fixé, étant donnée une polysphère $S_1 \times \dots \times S_n$ contenant z dans sa composante intérieure, on a

$$1 = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_1 \times \dots \times S_n} \frac{d\zeta}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}.$$

Posons $\omega_k(\zeta) := \omega_k(\zeta_k) = \zeta_k^q u_k(\zeta)$, avec $q \in \mathbf{N}$. En utilisant la transformation

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\frac{1}{a-b},$$

dans la relation

$$1 = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_1 \times \dots \times S_n} h_1(\zeta, z) \dots h_n(\zeta, z) \frac{d\zeta}{(\omega_1(\zeta) - \omega_1(z)) \dots (\omega_n(\zeta) - \omega_n(z))},$$

où

$$h_k(\zeta, z) = h_k(\zeta_k, z_k) := \frac{\omega_k(\zeta) - \omega_k(z)}{\zeta_k - z_k},$$

on obtient, avec les notations déjà utilisées (à savoir $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$ (n fois), $h^* := h_1 \dots h_n$, $h^*_{[k]} := \prod_{j \neq k} h_j$, $h^J := \prod_{k=1}^n \omega_k^{j_k}$ pour tout n-uplet de fonctions ou de nombres $(h_1, \dots, h_n)$, pour tout élément $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{N}^n$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$),

$$1 = \sum_{I \subset \{0,1\}^n} \frac{\omega^{\mathbf{1}-I}(z)}{(2i\pi)^n} \int_{S_1 \times \dots \times S_n} \frac{h^*(\zeta, z)\, d\zeta}{\omega^*(\zeta)(\omega(\zeta) - \omega(z))^{\mathbf{1}-I}}. \tag{15}$$

Toutes les variables étant séparées, on peut écrire

$$\int_{S_1\times\ldots\times S_n}\frac{h^*(\zeta,z)\,d\zeta}{\omega^*(\zeta)(\omega(\zeta)-\omega(z))^{\mathbf{1}-I}}=\int_{S_1}\frac{h_1(\zeta_1,z_1)\,d\zeta_1}{\omega_1(\zeta_1)(\omega_1(\zeta_1)-\omega_1(z_1))^{1-i_1}}$$
$$\times\ldots\times\int_{S_n}\frac{h_n(\zeta_n,z_n)\,d\zeta_n}{\omega_n(\zeta_n)(\omega_n(\zeta_n)-\omega_n(z_n))^{1-i_n}}.$$

Les termes de la somme (15) sont donc des produits de termes de la forme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S_k}\frac{h_k(\zeta,z_k)}{\omega(\zeta)}d\zeta\quad\text{et}\quad\frac{1}{2i\pi}\int_{S_k}\frac{d\zeta}{\omega(\zeta)(\zeta-z_k)},$$

où S_k est un disque contenant z_k dans son intérieur. Or, si $S_k=S(0,R)=S$, avec R assez grand, pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S\frac{h(\zeta,z_k)}{\omega(\zeta)}d\zeta=\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\left(\frac{h(\zeta,z_k)}{\omega(\zeta)}\right)+\sum_{\substack{|\xi|\le R\\ \xi\neq 0\\ \alpha\in V(\omega)}}\operatorname*{Res}_{\zeta=\xi}\left(\frac{h(\zeta,z_k)}{\omega(\zeta)}\right)$$
$$=(\text{polynôme de degré } q-1)+\sum_{\substack{l=-[R]\\ l\neq 0}}^{l=[R]}\frac{\omega(z_k)(-1)^l}{(z_k-il\pi)(il\pi)^{q-1}},$$

la série correspondante au second terme convergeant pour $q\ge 2$. On choisira par la suite $R=R_\lambda=\pi\frac{1}{2}(2\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbf{N}$; on a alors, pour tout ζ dans $S(0,R_\lambda)$,

$$|\sinh(\zeta)|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc, toujours pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$,

$$\left|\int_{|\zeta|=R_\lambda}\frac{d\zeta}{\omega_k(\zeta)(\zeta-z_k)}\right|=\left|\int_{|\zeta|=R_\lambda}\frac{d\zeta}{\zeta^{q-1}\sinh(\zeta)(\zeta-z_k)}\right|$$
$$\le\int_{|\zeta|=R_\lambda}|d\zeta|\,|\zeta^{q-1}|\,|\zeta-z_k|\le\frac{2\pi}{R_\lambda^{q-1}},$$

dès que $|R_\lambda|\ge|z_k|+1$. Ainsi donc, pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{|\zeta|=R_\lambda}\frac{d\zeta}{\zeta^{q-1}\sinh(\zeta)(\zeta-z_k)}=0,$$

d'où la possibilité de passer à la limite dans (15). On écrira, avec $S_\lambda = S(0, R_\lambda)$,

$$1 = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{h^*(\zeta, z_k)}{\omega^*(\zeta)} d\zeta + I_{R_\lambda},$$

avec

$$\lim_{\lambda \to \infty} I_{R_\lambda} = 0.$$

Afin d'introduire $u_0(z)$, on note par $h_{0,j}$, $j = 1, \dots, n$, les fonctions de Hefer associées à u_0, et on fait la transformation usuelle

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{h^*(\zeta, z_k)}{\omega^*(\zeta)} d\zeta + I_{R_\lambda} \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{\begin{vmatrix} h_1(\zeta,z) & 0 & \dots & 0 & h_{0,1}(\zeta,z) \\ 0 & h_2(\zeta,z) & \dots & 0 & h_{0,2}(\zeta,z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n(\zeta,z) & h_{0,n}(\zeta,z) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_0(\zeta) \end{vmatrix}}{\omega^*(\zeta) u_0(\zeta)} d\zeta + I_{R_\lambda} \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{\begin{vmatrix} h_1(\zeta,z) & 0 & \dots & 0 & h_{0,1}(\zeta,z) \\ 0 & h_2(\zeta,z) & \dots & 0 & h_{0,2}(\zeta,z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n(\zeta,z) & h_{0,n}(\zeta,z) \\ \omega_1(z)-\omega_1(\zeta) & \omega_2(z)-\omega_2(\zeta) & \dots & \omega_n(z)-\omega_n(\zeta) & u_0(z) \end{vmatrix}}{\omega^*(\zeta) u_0(\zeta)} d\zeta \\
&\quad + I_{R_\lambda},
\end{aligned}$$

qui donne en développant le déterminant et en utilisant le théorème de dualité

$$1 = \frac{u_0(z)}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{h^*(\zeta, z)}{\omega^*(\zeta) u_0(\zeta)} d\zeta + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k(z)}{(2i\pi)^n} \int_{S_\lambda^n} \frac{h^*_{[k]}(\zeta, z) h_{0,k}(\zeta, z)}{\omega^*(\zeta) u_0(\zeta)} d\zeta + I_{R_\lambda}$$

et par conséquent

$$1 = \left\langle \bar\partial \frac{1}{\omega}, \frac{h^*(\zeta, z)}{u_0(\zeta)} d\zeta \right\rangle_{[R_\lambda]} u_0(z) + \sum_{k=1}^n \left\langle \bar\partial \frac{1}{\omega}, \frac{h^*_{[k]}(\zeta, z) h_{0,k}(\zeta, z)}{u_0(\zeta)} d\zeta \right\rangle_{[R_\lambda]} u_k(z) z_k^q + I_{R_\lambda}.$$

En exprimant les résidus locaux à l'aide de polysphères centrées aux zéros, on a, si θ est une fonction entière de $2n$ variables et si ξ est le point où l'on calcule le résidu local

$$\left\langle \bar\partial\frac{1}{\omega}, \frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)}d\zeta \right\rangle_\xi = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\substack{|\zeta_1-\xi_1|=\varepsilon_1\\ \vdots \\ |\zeta_n-\xi_n|=\varepsilon_n}} \frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)\omega^*(\zeta)}d\zeta,$$

ce qui s'exprime comme résidu itéré par

$$\left\langle \bar\partial\frac{1}{\omega}, \frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)}d\zeta \right\rangle_\xi = \operatorname*{Res}_{\zeta_1=\xi_1}\left(\operatorname*{Res}_{\zeta_2=\xi_2}\left(\dots\left(\operatorname*{Res}_{\zeta_n=\xi_n}\left(\frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)\omega_n(\zeta)}\right)\frac{1}{\omega_{n-1}(\zeta)}\right)\dots\right)\frac{1}{\omega_1(\zeta)}\right).$$

• Supposons d'abord que ξ n'ait aucune composante nulle. Alors

$$\operatorname*{Res}_{\zeta_n=\xi_n}\left(\frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)\omega_n(\zeta)}\right) = \frac{\theta((\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},\xi_n),z)}{\xi_n^{q-1}u_0(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},\xi_n)}.$$

En itérant, on obtient

$$\varrho_\xi = \left\langle \bar\partial\frac{1}{\omega}, \frac{\theta(\zeta,z)}{u_0(\zeta)}d\zeta \right\rangle_\xi = \frac{\theta(\xi,z)}{\xi^{*(q-1)}u_0(\xi)}.$$

Pour $\theta(\zeta,z)=\prod_{k=1}^n h_k(\zeta,z)$, on a

$$\varrho_\xi = \frac{z^{*q}\sinh(z)^*}{(\xi-z)^*}\frac{1}{\xi^{*(q-1)}}\frac{1}{u_0(\xi)},$$

et pour

$$\theta(\zeta,z) = h_{0,k_0}(\zeta,z)\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^n h_k(\zeta,z),$$

$$\varrho_\xi = \frac{z^{*(q-1)}\sinh(z)^*_{[k_0]}}{(\xi-z)^*_{[k_0]}\xi^{*(q-1)}} \times \frac{u_0(\xi_1,\dots,\xi_{k_0},z_{k_0+1},\dots,z_n)-u_0(\xi_1,\dots,\xi_{k_0-1},z_{k_0},\dots,z_n)}{\xi_{k_0}-z_{k_0}}\frac{1}{u_0(\xi)}.$$

Dans les deux cas, par le théorème de Baker (voir [B, théorème 2.4]), pour tout $\varepsilon>0$

$$|u_0(\xi)| \geq \frac{\tau}{\|\xi\|^{n+\varepsilon}},$$

avec $\tau>0$ (indépendant de ξ). On a donc la convergence normale des sommes complètes de résidus dès que $q>n+\varepsilon$.

• Dans le cas où ξ possède des composantes nulles, on regroupe les prises de résidus en 0 au début des calculs de résidus itérés, puis, après avoir remarqué par les mêmes calculs que précédement que les sommes complètes convergeaient absolument, on retrouve le même résultat que dans le cas déjà traîté.

Les v_k ainsi construits sont, de part l'expression des ϱ_ξ, des séries d'éléments de $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact de $\mathbf{C}^n$. □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.1. *Partons d'un n-uplet $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k,0,\dots,0)$ comme dans l'énoncé du lemme 4.1. Soient $\varphi(z)=\sinh(z)/z$, et $a_0,\dots,a_n$ des éléments de $\mathbf{Q}^*$ distincts deux à deux. Soient $L_1,\dots,L_n$ les applications linéaires associées aux lignes de la matrice Vandermonde par blocs*

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & & \\ 1 & a_k & \dots & a_k^{k-1} & & & & \\ & & & & 1 & a_{k+1} & \dots & a_{k+1}^{n-k-1} \\ & & 0 & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-k-1} \end{pmatrix}.$$

Si de plus $L_0(z)=\langle\alpha,z\rangle+\langle(1,a_0,a_0^2,\dots,a_0^k,0,\dots,0),z\rangle$, alors il existe des fonctions entières $\tilde{v}_0,\dots,\tilde{v}_n$ obtenues comme séries d'éléments de $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ telles que

$$1=\tilde{v}_0(z)\varphi[L_0(z)]+\dots+\tilde{v}_n(z)\varphi[L_n(z)],\quad z\in\mathbf{C}^N.$$

Preuve. On fait le changement de variables linéaire à coefficients rationnels défini par la matrice de Vandermonde par blocs écrite ci-dessus, de sorte que $L_i(\zeta)=\zeta_i$, et $L_0(\zeta)=\langle\beta,\zeta\rangle$, avec β à composantes non nulles $\mathbf{Z}$-indépendantes à 1 dans leur ensemble. On applique alors le lemme précédent. □

Considérons maintenant $n(n+1)$ éléments $a_{0,1},\dots,a_{n,n}$ de $\mathbf{Q}^*$ deux à deux distincts et les n systèmes d'applications linéaires $(L_{1,j},\dots,L_{n,j},L_{0,j})$, $j=1,\dots,n$, tous sur le modèle des systèmes envisagés dans le corollaire 4.1, c'est à dire, pour $1\le j\le n$,

$$\begin{cases} L_{i,j}(z)=\langle(1,a_{i,j},a_{i,j}^2,\dots,a_{i,j}^{k-1},0,\dots,0),z\rangle, & i=1,\dots,k,\\ L_{i,j}(z)=\langle(0,\dots,0,1,a_{i,j},a_{i,j}^2,\dots,a_{i,j}^{n-k-1}),z\rangle, & i=k+1,\dots,n,\\ L_{0,j}(z)=\langle(\alpha_1+1,\alpha_2+a_{0,j},\dots,\alpha_k+a_{0,j}^k,0,\dots,0),z\rangle. \end{cases}$$

On peut de plus choisir les $(a_{i,j})_{i,j}$ hors d'une hypersurface de $\mathbf{Q}^n$ de telle sorte que tous les paquets de n applications linéaires $(L_{i,j})_{i,j}$ soient linéairement indépendants. Suivant le corollaire, pour tout $j\in\{0,\dots,n\}$ on peut écrire

$$1=\tilde{v}_{0,j}\varphi[L_{0,j}]+\dots+\tilde{v}_{n,j}\varphi[L_{n,j}],$$

où les $\tilde{v}_{i,j}$, $i=0,\dots,n$ sont des séries d'éléments de $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact de $\mathbf{C}^n$. En multipliant les n identités de Bézout obtenues ainsi, on en obtient une nouvelle, toujours du même type

$$1=\prod_{j=1}^{n}(\tilde{v}_{0,j}\varphi[L_{0,j}]+\dots+\tilde{v}_{n,j}\varphi[L_{n,j}]),$$

que l'on réecrit sous la forme

$$1=\sum_J \Phi_J\Psi_J, \tag{16}$$

où les fonctions Ψ_J sont de la forme

$$\Psi_J=\varphi[L_{i_1,1}]\times\dots\times\varphi[L_{i_n,n}],$$

où $i_k\in\{0,\dots,n\}$, $1\le k\le n$, et sont donc bien des séries d'éléments de la $\mathbf{Q}[\alpha]$-algèbre $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact. On remarque que par construction les applications linéaires $L_{i_1,1},\dots,L_{i_n,n}$ sont linéairement indépendantes. En utilisant les deux inégalités

$$\left|\frac{\sinh(z)}{z}\right|\le Ce^{|\operatorname{Re} z|}\quad\text{et}\quad|\sinh(z)|\le e^{|\operatorname{Re} z|},$$

et le fait qu'il existe, lorsque $L_I=(L_{i_1,1},\dots,L_{i_n,n})$ est un isomorphisme, une constante strictement positive $\varkappa$ telle que, pour $\zeta\in\mathbf{C}^n$

$$\|L_I(\zeta)\|:=\sum_{k=1}^{n}|L_{i_k,k}(\zeta)|\ge\varkappa\|\zeta\|,$$

on voit que pour $\zeta\neq0$

$$\|\Psi_I(\zeta)\|\le e^{\|L_I(\operatorname{Re}\zeta)\|}\frac{n}{\varkappa}\frac{1}{\|\zeta\|}.$$

En élevant l'expression (16) à la puissance $M\in\mathbf{N}$ (le choix de M sera précisé ultérieurement), on trouve une décomposition de la forme

$$1=\sum_\sigma \Psi_\sigma\Phi_\sigma, \tag{17}$$

avec

$$\|\Psi_\sigma(\zeta)\| \leq e^{M \max_J \|L_J(\operatorname{Re}\zeta)\|} \left(\frac{n}{\varkappa}\right)^M \frac{1}{\|\zeta\|^M}, \quad \zeta \neq 0, \tag{18}$$

où les Ψ_σ sont dans le monoïde multiplicatif $\mathcal{Q}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ et les Φ_σ se présentent comme des sommes de séries d'éléments de la $\mathbf{Q}[\alpha]$-algèbre $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{Q}[\alpha],\mathbf{G}_\alpha}$ normalement convergentes sur tout compact de $\mathbf{C}^n$. La relation précédente constitue la première étape du mécanisme de division qui conduira au théorème 4.1. La seconde étape, que nous entamons maintenant, va consister à décomposer une fonction du type Ψ_σ dans l'idéal $(f_0, \dots, f_n)$ avec des quotients de la forme voulue. Une telle décomposition repose sur une formule de Bochner–Martinelli dont on va détailler la preuve ci-dessous.

Compte tenu du résultat précédent, pour obtenir une égalité du type (5), il nous suffit de pouvoir exprimer les fonctions Ψ_σ à l'aide de $f_0, \dots, f_n$ et d'interpolateurs de Lagrange exprimables à partir des Ψ_σ et des f_k.

Introduisons tout d'abord des notations qui seront utilisées tout au long de la preuve : les fonctions de Hefer associées aux $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ sont les fonctions entières $g_{k,j}$ des $2n$ variables (ζ, z) définies par

$$g_{k,j}(\zeta, z) = \frac{f_k(\zeta_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n) - f_k(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pour tout sous-ensemble ordonné de $\{0, \dots, n\}$, on notera $\delta[f_{i_1}, \dots, f_{i_n}]$ le *bézoutien* de $(f_{i_1}, \dots, f_{i_n})$, c'est à dire le déterminant de la matrice des $[g_{i_l,j}]_{l,j=1}^n$. En particulier, on notera toujours $\delta[f] := \delta[f_1, \dots, f_n]$. Pour une forme $\omega = \sum u_{I,J}\, d\zeta_I \wedge d\bar{\zeta}_J$, nous noterons

$$|||\omega||| = \sup |u_{I,J}|,$$

de sorte que

$$\left|\int \omega\right| \leq \sum_{I,J} \int |||\omega|||\, |d\zeta_I \wedge d\bar{\zeta}_J|.$$

Par le symbole $f^{\star K}$, où $K = (k_1, \dots, k_n)$ est un multi-indice de $\mathbf{N}^n$, on désignera le produit $f_1^{k_1} \dots f_n^{k_n}$. On notera aussi $|K| = k_1 + \dots + k_n$ la longueur du multi-indice. Enfin $\langle \bar{\partial}(1/f), h\, d\zeta \rangle_{[R]}$ désignera la valeur du résidu semi-local par rapport à f de la forme $h\, d\zeta$ qui ne prend en compte que les zéros de $V(f)$ contenus dans la boule de rayon R centrée en 0, c'est-à-dire

$$\left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f}, h\, d\zeta \right\rangle_{[R]} := \left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f}, h\Theta_R\, d\zeta \right\rangle,$$

où Θ_R désigne une fonction test telle que $\Theta_R \equiv 1$ au voisinage des points de $V(f) \cap B(0,R)$ et $\Theta_R \equiv 0$ à l'extérieur de la boule $B(0,R)$. A l'aide des fonctions de Hefer, on peut définir les formes différentielles

$$\begin{aligned}
S(\zeta,z) &:= \sum_{j=1}^{n} (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)\, d\zeta_j, \\
g_k(\zeta,z) &:= \sum_{j=1}^{n} g_{k,j}(\zeta,z)\, d\zeta_j, \qquad k = 1, \dots, n, \\
A(\zeta,z) &:= \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{f_k(\zeta)} g_k(\zeta,z)}{\|f(\zeta)\|^2}, \\
B(\zeta,z) &:= \frac{\langle \overline{f(\zeta)}, f(z) \rangle}{\|f(\zeta)\|^2},
\end{aligned}$$

qui interviennent dans les formules de représentation de type Bochner–Martinelli. Ces formules, utilisées constamment dans les travaux de C. A. Berenstein, R. Gay et A. Yger, permettent d'obtenir entre autres la représentation suivante (voir [BGVY, Proposition 4.4]) :

Lemme 4.2. *Avec les notations précédentes, on a, pour $N \geq n$,*

$$\Psi_\sigma(z) = \sum_{\substack{K \in \mathbf{N}^n \\ |K| \leq N-n}} \left\langle \bar{\partial} \frac{1}{f^{K+\mathbf{1}}}, \Psi_\sigma \delta[f](\cdot, z)\, d\zeta \right\rangle_{[R]} f^{*K}(z) + \int_{\|\zeta\|=R} \Psi_\sigma(\zeta) \mathcal{K}_N(\zeta,z), \tag{19}$$

où le noyau $\mathcal{K}_N$ est défini par

$$\mathcal{K}_N(\zeta,z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{\substack{\varkappa_0, \varkappa_1 \geq 0 \\ \varkappa_0 + \varkappa_1 = n-1}} \binom{N}{\varkappa_1} [B(\zeta,z)]^{N-\varkappa_1} \frac{S \wedge (\bar{\partial} S)^{\varkappa_0} \wedge (\bar{\partial} A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}}.$$

Afin d'alléger les écritures, nous supprimerons dorénavant l'indice σ de Ψ_σ. Pour éliminer l'intégrale parasite figurant dans le terme à droite de (17), nous allons faire tendre R vers $+\infty$ après avoir ajusté convenablement les constantes N et M (M est implicite dans la définition de Ψ), comme nous l'autorise le

Lemme 4.3. *Pour tout choix de l'entier $M \geq n$ conditionnant la construction des fonctions Ψ, il existe N_M tel que pour tout $N \geq N_M$,*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\|\zeta\|=R} \Psi(\zeta) \mathcal{K}_N(\zeta,z) = 0.$$

Preuve. Il suffit de montrer que pour $M \geq n$ et N assez grand,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\|\zeta\|=R} \Psi(\zeta) B(\zeta,z)^{N-\varkappa_1} \frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}} = 0,$$

pour tout couple $(\varkappa_0, \varkappa_1)$ d'entiers positifs ou nuls tels que $\varkappa_0+\varkappa_1=n-1$. Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned} \|S\| &\leq \|\zeta - z\| \\ \|\bar\partial S\| &= 1 \\ \|\bar\partial A\| &\leq K_z \left(\frac{e^{H_\Gamma(\operatorname{Re}\zeta)}}{\|f(\zeta)\|}\right)^2, \end{aligned}$$

avec A ne dépendant que de f. Ainsi

$$\left\| \frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}} \right\| \leq K \frac{1}{\|z-\zeta\|^{2\varkappa_0+1}} \left(\frac{e^{H_\Gamma(\operatorname{Re}\zeta)}}{\|f(\zeta)\|}\right)^{2\varkappa_1},$$

et puisque $|B(\zeta,z)| = O(1/\|f(\zeta)\|)$, on arrive à

$$\left\| B(\zeta,z)^{N-\alpha_1} \frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}} \right\| = O_z\left(\frac{1}{\|z-\zeta\|^{2\varkappa_0+1}} \frac{e^{2\varkappa_1 H_\Gamma(\operatorname{Re}\zeta)}}{\|f(\zeta)\|^{\varkappa_1+N}} \right).$$

A l'aide de (18), nous obtenons alors

$$\left\| \Psi(\zeta) B(\zeta,z)^{N-\varkappa_1} \frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}} \right\| = O_z\left(\frac{e^{2\varkappa_1 \mathrm{H}_\Gamma(\operatorname{Re}\zeta)} e^{MC\|\operatorname{Re}\zeta\|}}{\|z-\zeta\|^{2\varkappa_0+1}\|f(\zeta)\|^{\varkappa_1+N}\|\zeta\|^M} \right),$$

où C est une constante liée aux coefficients des formes linéaires impliquées dans la construction des Ψ. Fixons $M \geq n$. En utilisant alors les minorations obtenues dans les lemmes 2.1 et 2.2, et après avoir choisi N_M tel que pour $N \geq N_M$ implique

$$e^{2\varkappa_1 \mathrm{H}_\Gamma(\operatorname{Re}\zeta)+MC\|\operatorname{Re}\zeta\|-(\varkappa_1+N)\mathrm{H}_{\Gamma^-}(\operatorname{Re}\zeta)} \leq 1, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n, \tag{20}$$

on arrive à

$$\left| \int_{\|\zeta\|=R} B(\zeta,z)^{N-\varkappa_1} \Psi(\zeta) \frac{S\wedge(\bar\partial S)^{\varkappa_0}\wedge(\bar\partial A)^{\varkappa_1}}{\|z-\zeta\|^{2(\varkappa_0+1)}} \right| = O(R^{n-(M+2\varkappa_0+1)}). \tag{21}$$

Réaliser la condition (20) revient à choisir un homothétique du polyèdre Γ^- de telle sorte que celui-ci contienne les polyèdres $\varkappa_1\Gamma + MC\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est la boule unité de $\mathbf{R}^n$ (ce qui est possible puisque les polyèdres Γ et Γ^- contiennent tous les deux l'origine

comme point intérieur). Le fait que $M \geq n$ implique grâce à (21) que l'intégrale de l'enoncé tend vers 0 quand R tend vers l'infini. $\square$

Afin de faire apparaitre $f_0(z)$, on effectue la transformation suivante, analogue à celle déjà présente dans le cas polynomial, sur le terme associé à $K=\mathbf{0}=(0,\dots,0)$,

$$\begin{aligned}
\delta[f](\zeta,z) &= \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1,n} & \cdots & g_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{f_0(\zeta)} \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{n,1} & g_{0,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{1,n} & \cdots & g_{n,n} & g_{0,n} \\ 0 & \dots & 0 & f_0(\zeta) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{f_0(\zeta)} \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{n,1} & g_{0,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{1,n} & \cdots & g_{n,n} & g_{0,n} \\ f_1(z)-f_1(\zeta) & \dots & f_n(z)-f_n(\zeta) & f_0(z) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

d'où

$$\delta[f](\zeta,z) = \frac{f_0(z)}{f_0(\zeta)}\delta[f](\zeta,z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(z)-f_k(\zeta)}{f_0(\zeta)}\delta_k[f](\zeta,z),$$

où $\delta_k[f](\zeta,z) := \delta[f_1,\dots,\hat{f}_k,\dots,f_n]$, $1 \leq k \leq n$. Le théorème de dualité permet alors de simplifier l'expression et d'écrire

$$\left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f}, \Psi\delta[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta \right\rangle_{[R]} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f}, \frac{\Psi}{f_0}\delta_k[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta \right\rangle_{[R]} f_k(z),$$

où, pour unifier les choses, nous avons posé $\delta_0[f](\zeta,z) = \delta[f](\zeta,z)$. Le résidu semi-local $\langle \bar{\partial}(1/f), \cdot \rangle_{[R]}$ signifiant que l'on ne considère que les résidus aux points de $V(f_1,\dots,f_n)$ situés dans la boule de rayon R. Nous montrons maintenant que toutes les séries, c'est-à-dire les sommes complètes de résidus, qui apparaissent dans (19) convergent par paquets quand R tend vers l'infini.

Proposition 4.2. *Si la fonction Ψ est conditionnée au choix d'un entier M assez grand, les sommes complètes de la forme*

$$\left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f^{K+\mathbf{1}}}, \Psi\delta[f](\cdot\,,z)\,d\zeta \right\rangle = \lim_{R\to\infty} \left\langle \bar{\partial}\frac{1}{f^{K+\mathbf{1}}}, \Psi\delta[f](\cdot\,,z)\,d\zeta \right\rangle_{[R]},$$

organisées en paquets, convergent normalement sur tout compact de $\mathbf{C}^n$.

Preuve. Nous détaillons la preuve dans le cas $K=\mathbf{0}$, les autres séries se traitant de la même façon. Soit à majorer la quantité

$$\left|\left\langle \bar\partial\frac{1}{f}, \Psi\delta[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_\eta\right|,$$

où $\eta\in V(f)$. Il résulte du lemme 2.2 qu'il existe $\xi_\eta\in\mathbf{B}$ et $r>0$ tels que $\eta\in B(\xi_\eta,r)$ et pour tout $\zeta\in\partial B(\xi_\eta,r)$, on ait $\|f(\zeta)\|\geq\tau$, où les constantes r et τ sont indépendantes de η. Etant donné un point $\eta\in V(f)$, on le regroupe avec tous les autres points de $V(f)$ situés dans la boule $B(\xi_\eta,r)$. En répétant cet argument une fois les points de $V(f)$ rangés dans l'ordre des modules croissants, on voit (en prenant ces points dans l'ordre à partir de η_0 et en n'y touchant plus une fois qu'ils ont été incorporés dans un paquet) que l'on peut organiser l'ensemble $V(f)$ en paquets. On notera chaque paquet P et ξ_P le centre de la boule contenant ce paquet. Il est clair, comme conséquence du théorème 2.1, que la série

$$\sum_P \frac{1}{(\|\xi_P\|+1)^{n+2}}$$

converge.

Exprimons alors le résidu semi-local correspondant à un paquet P grâce à la formule de Bochner–Martinelli :

$$\begin{aligned}\left\langle \bar\partial\frac{1}{f}, \Psi\delta[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_P &\\ &= \frac{(-1)^{n(n-1)}}{(2i\pi)^n}\int_{\|\xi_P-\zeta\|=r}\Psi(\zeta)\delta[f](\zeta,z)\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\bar f_k\,d\bar f_{[k]}\wedge d\zeta}{\|f(\zeta)\|^{2n}}.\end{aligned}$$

On a les estimations

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \bar\partial\frac{1}{f}, \Psi\Delta(\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_P\right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\|\xi_P-\zeta\|=r}|\Psi(\zeta)|\,|\delta[f](\zeta,z)|\frac{\sum_{k=1}^n|\bar f_k|\,|d\bar f_{[k]}\wedge d\zeta|}{\|f(\zeta)\|^{2n}}\\ &\leq \sum_{k,I}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\|\xi_P-\zeta\|=r}|\Psi(\zeta)|\,|\delta[f](\zeta,z)|\frac{|\bar f_k|\,|J_I|\,|d\bar\zeta_I\wedge d\zeta|}{\|f(\zeta)\|^{2n}},\end{aligned}$$

où les fonctions J_I proviennent du développement de la forme différentielle $df_{[k]}$

$$df_{[k]} := \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n df_j = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}^{n-1}} J_I(\zeta)\,d\zeta_I.$$

Si on ne considère que les paquets interceptant la boule de rayon R, on a, pour z fixé et $\zeta\in\{\|\xi-\xi_P\|=r\}$, et puisque tous les points ξ_P sont dans une même bande $\|\operatorname{Re}\xi_P\|\leq T$, $|\delta[f](\zeta,z)|=O_z(e^{\|\operatorname{Re}\xi_P\|})=O_z(1)$, et $|J_I(\zeta)|=O_z(1)$ pour tout $I\subset\{1,\dots,n\}^{n-1}$, tous les O_z étant uniformes par rapport à z si z est dans un compact fixé de $\mathbf{C}^n$. De plus, pour $\zeta\in\{\|\zeta-\xi_P\|=r\}$, on a $\|f(\zeta)\|\geq\tau$ et aussi, en utilisant (18),

$$|\Psi(\zeta)|\leq\frac{K}{(1+\|\xi_P\|)^M}$$

avec $K=K(T)$ constante absolue. En combinant toutes ces inégalités, on trouve pour un tel P

$$\left|\left\langle\frac{1}{f},\Psi\delta[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_P\right|=O_z\left(\frac{1}{(1+\|\xi_P\|)^M}\right).$$

Il suffit de choisir $M\geq n+2$ pour que la conclusion de la proposition 4.2 soit satisfaite. □

Afin de faire converger les dernières séries, on utilise des techniques issues de l'article [BY5].

Proposition 4.3. *Si la fonction Ψ est conditionnée au choix d'un entier M assez grand, les sommes complètes de la forme*

$$\left\langle\bar\partial\frac{1}{f},\frac{\Psi}{f_0}\delta_k[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle=\lim_{R\to\infty}\left\langle\bar\partial\frac{1}{f},\frac{\Psi}{f_0}\delta_k[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_{[R]}$$

organisées par paquets, convergent normalement sur tout compact de $\mathbf{C}^n$.

Preuve. Nous détaillerons la preuve dans le cas $k=0$, mais celle-ci est identique dans tous les autres cas.

• Etudions tout d'abord le cas où les zéros de la variété $V(f)$ sont simples. On a

$$\begin{aligned}\left\langle\bar\partial\frac{1}{f},\frac{\Psi}{f_0}\delta_k[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_{[R]}&=\sum_{\substack{\eta\in V(f)\\ \|\eta\|<R}}\left\langle\bar\partial\frac{1}{f},\frac{\Psi}{f_0}\delta_k[f](\,\cdot\,,z)\,d\zeta\right\rangle_\eta\\&=\sum_{\substack{\eta\in V(f)\\ \|\eta\|<R}}\frac{\Psi(\eta)}{f_0(\eta)}\frac{\delta_k[f](\eta,z)}{J_f(\eta)},\end{aligned}$$

où J_f désigne le Jacobien de l'application $f=(f_1,\dots,f_n)$. Or il est aisé de montrer, comme dans [BY5, Proposition 4.3], que le fait que $V(f,J_f)=\emptyset$ implique

$$|J_f(\eta)|\geq e^{-C\varrho(\eta)},\quad \eta\in V(f),$$

de même que le fait que $V(f_0, f)=\emptyset$ implique (via le même argument basé sur des considérations arithmétiques)

$$|f_0(\eta)| \geq e^{-C\varrho(\eta)}, \quad \eta \in V(f).$$

De sorte que, dans ce cas particulier

$$\left|\frac{\Psi(\eta)}{f_0(\eta)} \frac{\delta_0[f](\eta, z)}{J_f(\eta)}\right| \leq K \frac{e^{C\|\operatorname{Re}\eta\|}}{(1+\|\eta\|)^{M-C}}, \quad \eta \in V(f).$$

Comme la variété $V(f)$ est contenue dans la bande $\mathbf{B}$, définie dans le théorème 2.1, il suit

$$\left|\frac{\Psi(\eta)}{f_0(\eta)} \frac{\delta_k[f](\eta, z)}{J_f(\eta)}\right| = O_z\left(\frac{1}{(1+\|\eta\|)^{M-C}}\right), \quad \eta \in V(f),$$

le O_z étant uniforme si z appartient à un compact de $\mathbf{C}^n$.

En choisissant cette fois $M \geq n+2+C$, on parvient à faire converger la série.

• Passons maintenant au cas général. Comme dans la propositions 4.3 de [BY5], on peut encore obtenir, modulo des considérations de nature arithmétique et l'inégalité des accroissements finis, que pour tout point $\eta \in V(f)$,

$$\|f_0(\zeta)\| \geq e^{-C_0\varrho(\eta)} \quad \text{si } \|\zeta-\eta\| \leq r(\eta) = \gamma e^{-C_0\varrho(\eta)}. \tag{22}$$

Considérons un tel point $\eta \in V(f)$. D'après le théorème 2.1, le nombre N_η de zéros de f dans la boule $B_\eta := \{\|\zeta-\eta\| \leq r(\eta)\}$ est en $O(R^n)$. On découpe cette boule en $N_\eta+1$ couronnes concentriques. Par le principe des tiroirs, une de ces couronnes ne contient pas de zéros. Soit alors r_η le rayon de la sphère "médiane" de cette couronne ; si ζ est un point de cette sphère, on a $d(\zeta, V(f)) \geq r(\eta)/2(N_\eta+1)$. L'inégalité de Łojasiewicz de la proposition 3.2, applicable ici du fait des hypothèses arithmétiques faites sur les f_j, nous donne donc, pour tout point ζ de la frontière de $B(\eta, r_\eta)$,

$$\|f(\zeta)\| \geq \gamma_1 \frac{1}{(1+\|\eta\|)^{C_1}} e^{-C_2\|\operatorname{Re}\eta\|}.$$

Ici encore, nous allons grouper un tel point $\eta \in V(f)$ avec tous les autres points de $V(f)$ appartenant à la boule $B(\eta, r_\eta)$. Si P_η désigne ce paquet, on a l'estimation suivante pour le résidu semi local

$$\left|\left\langle \bar\partial \frac{1}{f}, \frac{\Psi}{f_0} \delta_0[f](\cdot, z)\, d\zeta \right\rangle_{P_\eta}\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\zeta-\eta\|=r_\eta} \frac{|\Psi(\zeta)|}{|f_0(\zeta)|} \frac{\sum_{k=1}^n |\bar f_k|\, |d\bar f_{[k]} \wedge d\zeta|}{\|f(\zeta)\|^{2n}}.$$

Le fait que tous les points η ainsi considérés soient dans une bande $\{\|\operatorname{Re} z\| \leq T\}$, combiné avec les minorations de $\|f\|$ et de $|f_0|$ sur la frontière de $B(\eta, r_\eta)$, les majorations

$$\|f(\zeta)| + \|\!|df_{[k]}\|\!| \leq Ae^{(n-1)B\|\operatorname{Re}\zeta\|}$$

valables sur $\partial B(\xi, \varrho_\xi)$ et l'estimation (18) pour Ψ, nous donne l'estimation

$$\left|\left\langle \bar\partial \frac{1}{f}, \frac{\Psi}{f_0}\delta_0[f](\,\cdot\,, z)\, d\zeta \right\rangle_{P_\eta}\right| \leq K \frac{1}{(1+\|\eta\|)^{C_0+2nC_1-M}}. \tag{23}$$

Si l'on choisit $M \geq C_0 + 2nC_1 + n + 1$, l'assertion de la proposition 4.3 est valide. En effet, on classe tous les zéros de $Z = V(f)$ dans l'ordre des modules croissants. On considère le premier point $\eta = \eta_0$, on introduit la boule $B(\eta_0, r_{\eta_0})$ comme précédemment et l'on groupe ce premier point η_0 avec tous les autres points de $V(f)$ situés dans ce paquet ; tous ces autres points ne seront plus considérés par la suite et le premier paquet est ainsi formé. On recommence avec le premier point η (dans la liste) non intégré à ce premier paquet, et ainsi de suite. Les estimations (23) et le choix de M assurent la convergence normale sur tout compact de la série de fonctions correspondant aux sommes de résidus prises aux points des paquets ainsi formés. □

Preuve du théorème 4.1. Partant de l'identité de Bézout sur les fonctions auxiliaires donnée par le corollaire 4.1,

$$1 = \sum_\sigma \Psi_\sigma(z)\Phi_\sigma(z),$$

les Ψ_σ correspondant à un choix de M convenable (voir les propositions 4.2 et 4.3), on représente ensuite chaque fonction Ψ_σ grâce au lemme 4.2,

$$\Psi_\sigma(z) = \sum_{|K| \leq N-n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f^{K+\mathbf{1}}}, \Psi_\sigma \delta[f](\,\cdot\,, z)\, d\zeta \right\rangle_{[R]} f^{*K}(z) + \int_{\|\zeta\|=R} \Psi_\sigma(\zeta)\mathcal{K}_N(\zeta, z),$$

avec N assez grand pour que la conclusion du lemme 4.3 soit valide. On effectue le changement dans le terme $K = \mathbf{0}$, pour obtenir dans la boule de rayon R :

$$\begin{aligned}\Psi_\sigma(z) = &\sum_{k=0}^{n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f}, \frac{\Psi_\sigma(\zeta)}{f_0(\zeta)}\delta_k[f](\zeta, z) \right\rangle_{[R]} f_k(z) \\ &+ \sum_{0<|K|\leq N-n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f^{K+\mathbf{1}}}, \Psi_\sigma \delta[f](\,\cdot\,, z)\, d\zeta \right\rangle_{[R]} f^{*K}(z) + \int_{\|\zeta\|=R} \Psi_\sigma(\zeta)\mathcal{K}_N(\zeta, z).\end{aligned}$$

En faisant tendre R vers l'infini, on trouve

$$\Psi_\sigma(z) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f}, \Psi_\sigma \delta_k[f](\,\cdot\,, z)\, d\zeta \right\rangle f_k(z)$$
$$+ \sum_{0<|K|\le N-n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f^{K+1}}, \Psi_\sigma \delta[f](\,\cdot\,, z)\, d\zeta \right\rangle f^{*K}(z),$$

la série étant normalement convergente par paquets sur tout compact de $\mathbf{C}^n$. On combine ces identités (obtenues pour les diverses Ψ_σ) avec l'identité

$$1 = \sum_\sigma \widetilde{\Phi}_\sigma \Psi_\sigma$$

pour conclure à la preuve du théorème. □

Bibliographie

[A] Ax, J., On Schanuel's conjectures, *Ann. of Math.* **93** (1971), 252–268.

[Ba] Baker, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[B] Bernstein, D. N., The number of roots of a system of equations, *Funktsional Anal. i Prilozhen* **9**:3 (1975), 1–4 (en russe). Traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975), 183–185.

[BGVY] Berenstein, C. A., Gay, R., Vidras, A. et Yger, A., *Residue Currents and Bézout Identities,* Progr. Math. **114**, Birkhäuser, Basel, 1993.

[BY1] Berenstein, C. A. et Yger, A., Le problème de la déconvolution, *J. Funct. Anal.* **54** (1983), 113–160.

[BY2] Berenstein, C. A. et Yger, A., Ideals generated by exponential polynomial, *Adv. in Math.* **60** (1986), 1–80.

[BY3] Berenstein, C. A. et Yger, A., Effective Bézout identities in $\mathbf{Q}[z_1, \dots, z_n]$, *Acta Math.* **66** (1991), 69–120.

[BY4] Berenstein, C. A. et Yger, A., Formules de représentation intégrale et problèmes de division, dans *Approximation diophantiennes et nombres transcendants* (Philippon, P., éd.), p. 15–37, de Gruyter, Berlin, 1992.

[BY5] Berenstein, C. A. et Yger, A., Exponential polynomials and $\mathcal{D}$-modules, *Compositio Math.* **95** (1995), 131–181.

[E] Elkadi, M., Bornes pour les degrés et les hauteurs dans le problèmes de division, *Michigan Math. J.* **40** (1993), 609–618.

[He] Hermann, G., Die Frage der endliche vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, *Math. Ann.* **95** (1926), 737–788.

[Ho] Hopkins, G., An algebraic approach to Grothendieck's residue symbol, *Trans. Amer. Math. Soc.* **275** (1983), 511–537.

[H] HÖRMANDER, L., On the division of distributions by polynomials, *Ark. Mat.* **3** (1958), 555–568.

[Ka] KAZARNOVSKII, B. YA., On the zeros of exponential sums, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **257**:4 (1981), 804–808 (en russe). Traduction anglaise: *Soviet Math. Dokl.* **23** (1981), 347–351.

[KK] KREUZER, M. et KUNZ, E., Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersection, *J. Reine Angew. Math.* **381** (1987), 181–204.

[K] KUNZ, E., *Kähler Differentials,* Adv. Lectures Math., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.

[MW] MASSER, D. W. et WÜSTHOLZ, G., Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions, *Invent. Math.* **72** (1983), 407–464.

[PM] PETERSEN, E. K. et MEISTERS, G. H., Non-Liouville numbers and a theorem of Hörmander, *J. Funct. Anal.* **29** (1978), 142–150.

[W] VAN DER WAERDEN, B. L., *Modern Algebra*, F. Ungar Publishing Co., New York, 1950.

[Y] YGER, A., Résidus, courants résiduels et courants de Green, dans *Géométrie complexe* (Norguet, F., Ofman, S. et Szczecniarz, J. J., éds.), p. 123–147, Hermann, Paris, 1996.

Reçu le 2 août 1996

Thierry Pellé
Laboratoire de Mathématiques Pures
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France
email: pelle@math.u-bordeaux.fr