PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 21, No. 1, 1967

DER HUREWICZ-SATZ

FRIEDRICH-WILHELM BAUER

In [1] F. W. Bauer, Homotopie und Homologie, Mathem. Ann. Bd. 149 S. 105–130 (1963), wurde zu jeder Homologietheorie eine Homotopietheorie gefunden, für die ein Hurewicz-Satz gilt und die mit dieser Eigenschaft universell ist. In dieser Arbeit wird dieser Gedankengang wesentlich verallgemeinert und zu einem beliebigen Funktor Φ: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{K}$ ist eine beliebige Kategorie mit hinreichend vielen Nullabbildungen, bezgl. $\mathfrak{A}$ s. 1. Abschnitt) ein eindeutig bestimmter universeller Funktor Φ_π: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{A}$ gefunden, der einem Hurewicz-Satz (d. h. Bedingung H) im 2. Abschnitt) genügt. Die einzige Forderung an Φ ist eine Art Dimensionsaxiom Φ 1) im ersten Abschnitt.

Die Konstruktion von Φ_π verläuft nach den gleichen Prinzipien wie in [1]. Man hat nur hier bei Φ_π (X) i. A. auch dann keine Gruppenstruktur mehr, wenn $\Phi(X)$ noch eine Gruppenstruktur trug. Als unmittelbare Anwendung bekommt man wieder die Hurewiczschen Homotopiegruppen heraus, wenn man von der singulären Homologie ausgeht. Nimmt man einen dualisierten Homotopiefunktor π als Φ, so bekommt man für Φ_π den Cechschen Kohomologiefunktor[1] heraus. Eine weitere Anwendung ist die Konstruktion eines universellen Homotopiefunktors (d. h. eines solchen, der H) erfüllt) Φ_w zu gegebenem Φ, der die folgende Eigenschaft hat:

W) Ist für ein $f \in \mathfrak{K}$, $\Phi(f)$ ein Isomorphismus, so auch $\Phi_W(f)$.

Ist $\Phi = H_n$, der singuläre Homologiefunktor in irgend einer Dimension, so hat bekanntlich auf einer Kategorie von einfach zusammenhämgenden Räumen der Funktor π_n diese Eigenschaft. Das ist der Inhalt eines bekannten Satzes von J. H. C. Whitehead. In Satz 4 wird festgestellt, dass es zu beliebigem Φ immer genau einen universellen Homotopiefunktor gibt, der die Eigenschaft W) hat.

1. Die Kategorie $\mathfrak{A}$. In einer Gruppe G führen wir für zwei Elemente $a, b \in G$ die folgende "$\leqq$"-Relation ein: Es ist $a \leqq b$, wenn für jeden Homomorphismns f: $G' \to G$, in dessen Bildbereich b liegt, auch a im Bild von f liegt. Man prüft sofort nach: Es ist $a \leqq b$ genau dann, wenn für die von a bezw. von b erzeugten zyklischen Untergruppen gilt:

$$\{a\} \leqq \{b\} .$$

Diese Relation ist eine schwache teilweise Ordnung, d. h. es gilt:

[1] Mit Koeffizienten in R_1 (= reelle Zahlen mod 1).