

SUR LES CONVEXES UBIQUITAIRES

G. COQUET ET J. C. DUPIN

In this paper we develop and generalize some previously announced results concerning ubiquitous convex sets. We show two conditions which are sufficient to assert that a convex set which is ubiquitous-elementary or ubiquitous-basic is also linearly bounded. In showing the essential part played by the ubiquitous convex sets of countable infinite dimension we establish that in an infinite-dimensional real vector space every ubiquitous convex set contains a linearly bounded ubiquitous convex set of a specific type.

I. Introduction. Les convexes ubiquitaires ont été introduits et étudiés par Klee dans [5] et [6] et leur intérêt a été mis en évidence dans de nombreux articles du même auteur; l'existence dans tout espace vectoriel réel de dimension infinie, d'un convexe ubiquitaire linéairement borné a été remarquée et utilisée par Klee dans [6].

Dans [1] et [3], nous avons caractérisé les convexes ubiquitaires en tant que sur-ensembles de convexes ubiquitaires particuliers: les "*convexes ubiquitaires-élémentaires*" et les "*convexes ubiquitaires-basiques*".

Dans [4], nous avons énoncé deux critères permettant d'affirmer qu'un convexe ubiquitaire-élémentaire ou un convexe ubiquitaire-basique est linéairement borné et avons énoncé le résultat suivant: tout convexe ubiquitaire est sur-ensemble d'un convexe ubiquitaire linéairement borné.

Dans cet article, nous démontrons les critères précédents (Théorèmes 3.1 et 3.2) et généralisons le résultat dont il est question précédemment à partir du théorème suivant (Théorème 5.1): Dans un espace vectoriel réel de dimension infinie, tout convexe ubiquitaire contenant l'origine est sur-ensemble de l'enveloppe convexe d'une réunion de convexes qui sont tous de dimension infinie dénombrable et ubiquitaires dans les sous-espaces vectoriels qu'ils engendrent, la somme de ces sous-espaces vectoriels étant directe et égale à l'espace tout entier. De ce théorème, nous déduisons, en outre, un nouveau théorème de caractérisation des convexes ubiquitaires (Théorème 5.2) plus général que celui énoncé dans [4] et qui établit le lien étroit existant entre les convexes ubiquitaires et les convexes ubiquitaires linéairement bornés de dimension infinie dénombrable.

II. Rappels. Dans toute la suite les espaces vectoriels sont réels et les relations d'ordre sont notées $\leq$.