PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol 118, No 2, 1985

ÜBER EINE DIFFERENTIALUNGLEICHUNG m-TER ORDNUNG IM KOMPLEXEN

ERWIN MUES UND RAY REDHEFFER[1]

Herrn Professor Ernst Straus zum Gedächtnis gewidmet

Let L defined by $(Lf)(z) = p_m z^m f^{(m)}(z) + \cdots + p_1 z f'(z) + p_0 f(z)$ be an Euler-type differential operator with positive coefficients p_j and let A_0 denote the class of functions analytic in $|z| < 1$ which satisfy $f(0) = 0$. For example, the function $g(z) = cz$ belongs to A_0, if c is a constant. Clearly $(Lg)(z) = cz(p_1 + p_0)$ and hence, if $|(Lg)(z)| \le 1$ for $|z| < 1$, we must have $|g(z)| \le 1/\lambda$ for $|z| < 1$, where $\lambda = p_0 + p_1$. Here it is shown that the same result holds for all $f \in A_0$, provided $p_0 \le 2p_2$, and that the latter condition is sharp. Our result solves, in sharpened and generalized form, a problem that has been open since 1978. An important aid in the proof is a recent theorem of Brown and Hewitt, which improves a well-known criterion of Vietoris for positivity of certain trigonometric sums.

1. Einleitung. Es sei A der Raum der in $|z| < 1$ holomorphen Funktionen und A_0 die Unterklasse von Funktionen $f \in A$ derart, dass $f(0) = 0$ ist. Ausgangspunkt für diese Arbeit ist das folgende von S. Miller in [**1**] formulierte

Problem. Es sei $f \in A_0$, $m \in \mathbf{N}$, und für $|z| < 1$

$$\left|z^m f^{(m)}(z) + z^{m-1} f^{(m-1)}(z) + \cdots + z f'(z) + f(z)\right| < 1.$$

Folgt daraus $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$?

Der Fall $m = 1$ ist trivial, und der Fall $m = 2$ ist in einer Arbeit von Miller und Mocanu [**3**] enthalten. Hier verallgemeinern wir das Problem auf Ungleichungen der Form

$$\left|p_m z^m f^{(m)}(z) + p_{m-1} z^{m-1} f^{(m-1)}(z) + \cdots + p_1 z f'(z) + p_0 f(z)\right| < 1$$

mit positiven Parametern p_j, $j = 0, \ldots, m$, und geben auf verschiedenen Wegen hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung $|f(z)| < 1/\lambda_1$ mit $\lambda_1 = p_0 + p_1$ an. Offenbar ist dieses Ergebnis optimal,

[1]z.Zt. als Gastprofessor an der Universität Karlsruhe mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.