Murakami, Shingo
Osaka Math. J.
11 (1959), 43-62.

Sur Certains Espaces Fibrés Principaux Holomorphes admettant des Connexions Holomorphes

Par Shingo MURAKAMI

Ce mémoire est consacré à l'étude des espaces fibrés principaux holomorphes dont le groupe est abelien connexe et dont la base est un tore complexe. Dans la première partie, on montre que pour ces espaces fibrés l'existence d'une connexion holomorphe est équivalente à l'existence d'un groupe transitif connexe d'automorphismes. On montre de plus que la forme de courbure d'une connexion holomorphe est alors déterminée par l'espace fibré. Dans la seconde partie, on étudie le groupe $\mathcal{P}$ des classes d'éspaces fibrés dont le groupe est un groupe de Lie abelien connexe $\boldsymbol{A}$ dont la base est un tore complexe $\boldsymbol{T}$ et qui possèdent une connexion holomorphe. On démontre que ce groupe $\mathcal{P}$ est canoniquement isomorphe à la somme directe du sous-groupe $\mathcal{P}^0$ des classes d'espaces fibrés possédant une connexion holomorphe intégrable et d'un groupe abelien $\mathcal{P}^*$ qui s'interprète comme groupe des formes de courbure. On indique enfin la structure de ces deux groupe facteurs ; alors que $\mathcal{P}^0$ est le quotient d'un groupe de Lie abelien complexe connexe par un sous-groupe de Lie complexe connexe, $\mathcal{P}^*$ est un groupe abelien libre de rang fini.

On sait que pour les espaces fibrés principaux holomorphes dont la base est une variété compacte kaehlérienne et dont le groupe est semi-simple ou est un $\mathbf{GL}(n, \boldsymbol{C})$ l'existence d'une connexion holomorphe implique que toutes les classes caractéristiques (à coefficients complexes) de l'espace fibré sont nulles [1]. La catégorie des espaces fibrés étudiés ici donne des exemples d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes, mais dont les classes caractéristiques ne sont pas nulles et qui n'admettent donc pas de connexion intégrable.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. J.-L. Koszul pour ses précieux conseils ; je lui suis redevable de plusieures suggestions ainsi que d'importantes améliorations de rédaction.

I. Connexions holomorphes et automorphismes.

§ 1. Algèbres de Lie associées à un espace fibré.

On désigne par $\boldsymbol{A}$ un groupe de Lie complexe abelien connexe de dimension r et par $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie complexe des champs de vecteurs