SUR LES ESPACES HOMOGÈNES KÄHLÉRIENS D'UN GROUPE DE LIE RÉDUCTIF

YOZÔ MATSUSHIMA

La recherche de la structure des espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie semi-simple fait l'objet de plusieurs travaux récents.¹⁾ L'étude détaillée a été faite au cas compact. Il a été montré en particulier que ces espaces homogènes compacts sont des variétés algébriques (même rationnelles) et simplement connexes.

Le but essentiel de ce travail est de montrer que tout espace homogène kählérien compact est produit direct d'un tore complexe et d'un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie compact semi-simple (Théorème 3). Pour ce but nous étudierons au paragraphe 1 la structure des espaces homogènes symplectiques d'un groupe de Lie réductif. La structure et la situation du groupe d'isotropie seront clarifiées dans le théorème 1. Au paragraphe 2 on en déduit un théorème sur la structure des espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif (Théorème 2). Le théorème 3 est une conséquence immédiate du théorème 2.

1. Une variété différentiable de dimension paire sera dite symplectique s'il existe une forme extérieure K de degré deux partout de rang maximal telle que $dK=0$. Une variété kählérienne est symplectique.

Un espace homogène G/B d'un groupe de Lie connexe G sera dit homogène symplectique s'il est symplectique et si la forme K définissant cette structure est invariante par G . G/B est homogène kählérien s'il est kählérien et si la structure complexe et la métrique kählérienne sous-jacentes sont invariantes par G . Un espace homogène kählérien est homogène symplectique.

Un groupe de Lie connexe sera appelé réductif si son algèbre de Lie est réductive.²⁾ Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réductif et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + \mathfrak{s}$,

---

Received April 6, 1956; Revised April 25, 1956.

¹⁾ Voir [1], [3], [5], [6]. Nos résultats se rattachent étroitement à ceux de Borel [1].

²⁾ Voir [4].