H. Umemura
Nagoya Math. J.
Vol. 47 (1972), 155–160

LA DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES SURFACES ALGEBRIQUES

HIROSHI UMEMURA

En Géométrie Algébrique on a un critère pour qu'une surface moins une courbe soit affiine (Hartshorne (5)). Dans (5), on demande s'il existe un analogue analytique. Le but de cet article est de donner une condition numérique nécessaire pour les surfaces complexes compactes (Théorème 1) et une condition suffisante pour les surfaces réglées (Théorème 2).

Nous appelons une variété algébrique un schéma de type fini défini sur un corps algébriquement clos.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Hartshorne dont les conseils et les encouragements me furent une aide précieuse.

1. Condition Necessaries.

1.1. Dans ce paragraphe on donne une condition nécessaire pour qu'une surface moins une courbe soit une variété de Stein.

THÉORÈME 1. *Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension 2, et soit C une courbe irréductible non-singulière sur X. Si $X - C$ est une variété de Stein, alors $(C^2) \geq 0$ et $(C \cdot Y) > 0$ pour toute courbe Y sur X différente de C.*

Puisqu'un sous-ensemble analytique d'une variété de Stein est un espace de Stein, $X - D$ ne contient pas de courbe compacte, autrement dit $(C \cdot Y)$ est positif pour toute courbe Y sur X différente de C. Nous allons vérifier $(C^2) \geq 0$. Raisonnons par l'absurde. Si (C^2) était négatif, d'après Grauert (4) il existerait une surface analytique complexe normale compacte X' et un morphisme f de X dans X' tels que l'image $f(C)$ de C dans X' soit un point P et la restriction de f à $X - C$ donne un isomorphisme de $X - C$ sur $X' - P$, autrement dit C se contracte en un

Received November 8, 1971.