Y. Furuta
Nagoya Math. J.
Vol. 37 (1970), 197–200

ÜBER DAS GESCHLECHT UND DIE KLASSENZAHL EINES RELATIV-GALOISCHEN ZAHLKÖRPERS VOM PRIMZAHLPOTENZGRADE

YOSHIOMI FURUTA

Herrn Professor Katuzi Ono zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Für einen relativ-galoischen Zahlkörper K über k bezeichnen wir mit $G(K/k)$ die zugehörige galoische Gruppe und mit $(K: k)$ dem Erweiterungsgrade. Ferner seien $\bar{K}$, $\hat{K}$, bzw. K^* die größten, unverzweigten Erweiterungskörper von K, die beziehungsweise die folgenden Eigenschaften besitzen: die galoische Gruppe $G(\bar{K}/K)$ ist abelsch; die galoische Gruppe $G(\hat{K}/K)$ ist im Zentrum von $G(\hat{K}/k)$ enthalten; K^* ist das Kompositum von K und einem über k abelschen Erweiterungskörper. Dann ist $(\bar{K}: K)$ gleich der Klassenzahl von K, die wir mit h_K bezeichnen werden. Der Körper $\hat{K}$ heiße der *unverzweigte, maximalzentrale Erweiterungskörper von K in bezug auf k*, und der Grad $(\hat{K}: K)$, den wir mit $z_{K/k}$ bezeichnen werden, heiße die *zentrale Klassenzahl von K in bezug auf k*. Der Körper K^* heiße der *Geschlechterkörper von K in bezug auf k*, und der Grad $(K^*: K)$, den wir mit $g_{K/k}$ bezeichnen werden, heiße das *Geschlecht von K in bezug auf k*. Man kann dann leicht sehen, daß $\bar{K} \supset \hat{K} \supset K^*$, somit $g_{K/k}$ ein Teiler von $z_{K/k}$ und $z_{K/k}$ ein Teiler von h_K ist. Eine explizite Formel des Geschlechtes $g_{K/k}$ ist im allgemeinen von Furuta [4] gegeben, und im Falle, daß der Grundkörper k der rationale Zahlkörper ist, und K über k abelsch ist, findet man in Fröhlich [1] die explizite Struktur der galoischen Gruppe $G(\hat{K}/k)$. In der vorliegenden Note zeigen wir: wenn K über k zyklisch ist, so stimmt $\hat{K}$ mit K^* überein, daher $z_{K/k} = g_{K/k}$; wenn K galoisch über k mit Primzahlpotenzgrade l^n ist, so gilt $h_K \equiv z_{K/k} \bmod. l$. Der letztere Satz wird im gruppentheoretischen Sinne als Dual eines Ergebnisses von Yokoi [8] ansehen, daß h_k und die ambige Klassenzahl $a_{K/k}$ von K in bezug auf k kongruent mod. l sind.

Received March 31, 1969