ÜBER DEN INDEX GESCHLOSSENER GEODÄTISCHER AUF FLÄCHEN

WILHELM KLINGENBERG*

1. Wir betrachten geschlossene Geodätische $c = (c(t), 0 \leq t \leq 1)$ auf Flächen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Fläche kompakt ist, obwohl diese Annahme nur für einen Teil unserer Untersuchungen, insbesondere die Existenzsätze, notwendig ist. Die Geodätische c besitzt einen Index; es ist dies die maximale Anzahl von Parametern, mit der man Variationen von c bilden kann, die sämtlich aus kürzeren Kurven bestehen. Dabei sei hier vorausgesetzt, daß die geschlossene Geodätische c nicht-entartet ist.

Die geschlossene Geodätische c bestimmt eine periodische Bahn für den geodätischen Fluß auf dem Tangentialbündel der Fläche. Bezeichne mit P_c oder einfach P die (lineare) Poincaré-Abbildung dieser Bahn. P wird durch eine $(2, 2)$ -Matrix mit der Determinante 1 repräsentiert. Daß c nicht-entartet ist, ist gleichwertig damit, daß 1 nicht Eigenwert von P_c ist. Eine nicht-entartete Geodätische c heißt elliptisch oder hyperbolisch, jenachdem die Eigenwerte von P_c den Betrag 1 oder $\neq 1$ besitzen.

Sei k die Anzahl der konjugierten Punkte auf c . k ist also die Anzahl der Nullstellen eines Jacobifeldes $Y(t)$ längs $c(t)$ mit $Y(0) = 0$, $\nabla Y(0) \neq 0$ im Intervall $]0, 1[$. Wie wir unten sehen werden, ist für elliptische Geodätische k unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes auf c , während bei hyperbolischen Geodätischen dies nicht zu gelten braucht.

Schließlich unterscheiden wir bei einer geschlossenen Geodätischen c noch, ob sie orientierbar ist oder nicht. Im ersten Falle ist der durch c bestimmte Flächenstreifen ein Zylinderband, im zweiten ein Möbiusband. Es ist klar, daß es auf einer orientierbaren Fläche nur orientierbare geschlossene Geodätische gibt. Dagegen existieren auf einer nicht-orientierbaren Fläche auch nicht-orientierbare geschlossene Geodätische.

Received December 8, 1976.

* Die Arbeit entstand während eines Gastaufenthaltes an der für ihre geometrische Tradition bekannten Universität Graz.