Commun. math. Phys. 19, 189—203 (1970)
© by Springer-Verlag 1970

Problèmes mathématiques de l'équation de Boltzmann relativiste

G. Pichon

Faculté des Sciences d'Orléans

Réçu le 20 juin, 1970

Abstract. This work deals with relativistic Boltzmann equation and more particulary with integral operator of complete equation and integral operator of linearized equation. These operators depend on the differential cross section $h(\langle p, q\rangle, \cos\theta)$ which is a fonction of energy $\langle p, q\rangle$ and of the deviation angle θ. The only hypothesis is that h is a symetric function of $\cos\theta$. The second part deals essentially with linearized equation in Special Relativity. We take for the distribution function:

$$F(x, p) = a\, e^{-\frac{\lambda p}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda p}{2}} + \varepsilon\, f(x, p)\right)$$

where a is a constant, λ a constant vector and ε a small constant so that ε^2 can be neglected. We obtains the equation:

$$\frac{p^\alpha}{p^0}\,\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -K(p)\cdot f + G(f)$$

where $K(p)$ is a positive function and G an Hilbert-Schmidt operator. Then we resolve the Cauchy's problem by taking the Fourier's transformation of f, and in the last part by investigating properties of the resolvent of $-K+G$ we establish that as $x^0 \to +\infty$ the solution of this problem has for limit the equilibrium distribution $a\,e^{-\lambda p}$.

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'équation de Boltzmann relativiste et plus particulièrement à l'opérateur intégral de l'équation complète, à celui de l'équation linéarisée et au problème de Cauchy.

L'opérateur intégral de l'équation complète dépend essentiellement de la section efficace de choc $h(\langle p, q\rangle, \cos\theta)$ laquelle est une fonction de l'énergie $\langle p, q\rangle$ et de l'angle θ de déviation. Sous la seule hypothèse que h est une fonction symétrique de $\cos\theta$ nous obtenons des propriétés générales de cet opérateur qui ont en particulier comme conséquence le théorème des moments (cf. [1]).

La seconde partie est consacrée à la linéarisation de l'équation. Des études ont déjà été faites pour étudier l'équation de Boltzmann au voisinage de la solution d'équilibre a $e^{-\lambda p}$ et ceci par des développements à l'aide de diverses familles de polynômes (cf. par exemple [3, 12, 13]). Ici nous nous plaçons en Relativité restreinte et cherchons une solution sous la forme $F = ae^{-\frac{\lambda p}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda p}{2}} + \varepsilon f\right)$ en négligeant les termes en ε^2 et