Commun. Math. Phys. 106, 383–394 (1986)

Communications in
Mathematical
Physics

Existence d'orbites quasi-periodiques dans les attracteurs de Birkhoff

Patrice Le Calvez

Mathematiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, Centre d'Orsay,
F-91405 Orsay Cedex, France

Abstract. For each number ϱ between the lower and the upper rotation number of the Birkhoff attractor of a dissipative monotone twist map, there is a periodic or quasi-periodic orbit with rotation number ϱ.

On va prouver ici un théorème d'existence d'orbites quasi-périodiques pour un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale et dissipatif. On utilise pour cela une méthode géométrique simple conduisant d'autre part au théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff dans le cas de l'itérée d'une application déviant la verticale.

I. Rappels sur les Attracteurs de Birkhoff

Les résultats qui suivent se trouvent pour la plupart, mais sous une terminologie différente, dans les articles [B1] et [Cha].

On note $\mathbb{T}^1$ le tore de dimension 1, et on considère $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue et de ses projections canoniques p_1 et p_2. On définit de même sur son revêtement $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les projections $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$, la translation $\tilde{T}$ ($\tilde{T}(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta}+1, r)$) et la projection canonique $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$.

On notera $x = (\theta, r)$ un point de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On écrira respectivement $\bar{A}$, $Fr(A)$, $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \backslash A$ pour l'adhérence, la frontière et le complémentaire d'une partie A de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et $\tilde{A}$ l'ensemble $\pi^{-1}(A)$.

On dit qu'un compact connexe Λ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ sépare $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ si, et seulement si $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \backslash \Lambda$ possède deux composantes connexes non bornées (éventuellement d'autres composantes connexes bornées); on note alors respectivement $U(\Lambda)$ et $V(\Lambda)$ les composantes connexes contenant $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, -M]$ et $\mathbb{T}^1 \times [M, +\infty[$ où M est grand. Si $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \backslash \Lambda = U(\Lambda) \cup V(\Lambda)$, on dira que Λ est un compact annulaire.

On considère un difféomorphisme f de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, de classe C^1, homotope à l'identité, tel que:

i) Il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, $0 < \mathrm{Det}\, Df(x) < \alpha$.