Commun. Math. Phys. 73, 247–264 (1980)

Communications in Mathematical Physics

Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger à Coefficients Analytiques

Halim Doss*

Laboratoire de Probabilités, F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. Under some hypotheses of analyticity and integrability we show the existence and uniqueness of a strong regular solution of the Schrödinger equation using a natural generalisation to the complex case of the Feynman-Kac formula. This explicit representation allows us to study in certain cases the asymptotic behavior of the solution when the Planck constant h tends to zero. The same method can be used for the solution of more general Schrödinger equations.

Considérons l'équation de Schrödinger:

$$\left.\begin{aligned} &ih\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x)\,;\,t\in[0,T],x\in 0 \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ &\qquad\Psi(0,x)=f(x)\,;\,h>0,m>0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Soit λ, une constante réelle strictement positive. Considérons aussi l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)=\frac{\lambda^2}{2m}\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x) \\ &\quad\Psi(0,x)=f(x)\,;\,(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\,. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Il est bien connu que, si les fonctions f et V sont suffisamment régulières, l'équation (1′) possède une solution forte et une seule donnée par la formule de Feynman-Kac:

$$\Psi(t,x)=E\left\{f\left(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_t\right)\exp\left(\int_0^t\frac{V}{\lambda}\left(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_s\right)ds\right)\right\}$$

où (B_t) est le mouvement Brownien issu de zéro (cf. [12]).

Si, formellement, on remplace dans l'équation (1′) la constante λ par $i\cdot h$, on retrouve l'équation (1).

---

* Membre du Laboratoire Associé au C.N.R.S., n° 224 «Processus Stochastiques et Applications»

0010-3616/80/0073/0247/$03.60