Commun. math. Phys. 55, 47—51 (1977)

Communications in
Mathematical
Physics

Applications conservant une mesure absolument continue par rapport à dx sur $[0, 1]$

D. Ruelle

Institut des Hautes Etudes Scientifique, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Abstract. Sufficient conditions are given such that a differentiable, non invertible, map $g:[0,1]\mapsto[0,1]$ leaves invariant a measure absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. In particular, this is shown to be the case for $g(x)=Rx(1-x)$ when $R=3{,}6785735\ldots$.

Nous nous intéressons dans cette note à des applications différentiables non invertibles de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même pour lesquelles il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à dx. De telles mesures invariantes n'existent pas «en général»: cela résulte d'un théorème de Iakobson [2] qui affirme que les applications Ω-stables de S^1 dans lui-même forment un ensemble dense pour la topologie C^1. Nous obtiendrons cependant des conditions suffisantes assez générales pour l'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'intérêt que présente l'existence d'une telle mesure est qu'elle est ici liée à une «dépendance sensitive par rapport à la condition initiale» pour l'évolution à temps discret définie par $g:[0,1]\mapsto[0,1]$. La sensitivité par rapport à la condition initiale joue un rôle important dans divers problèmes de physique et d'écologie (voir Lorenz [4], Ruelle-Takens [7], May [5]).

Nous discuterons surtout des applications du type indiqué sur la Figure 1: croissant de 0 à 1 sur un intervalle $[0,c]$, puis décroissant de 1 à 0 sur $[c,1]$. Nous commençons par rappeler un cas classique (voir Ulam-von Neumann [8]), celui de l'application $x\mapsto 4x(1-x)$.

Soient f,φ les applications continues de $[0,1]$ sur lui-même définies par

$$f(x)=4x(1-x)$$

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,.$$

Alors φ est un homéomorphisme et

$$\varphi^{-1}(x)=\sin^2\frac{\pi x}{2}=\frac{1-\cos\pi x}{2}.$$