Commun. math. Phys. 22, 44—50 (1971)

Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann

J. Dixmier et O. Maréchal
Université de Paris VI

Reçu le 16 février 1971

Abstract. We prove that the set of cyclic vectors for a von Neumann algebra in a Hilbert space H is a G_δ set, which is empty or dense. We obtain some corollaries, for instance: if $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots)$ is a sequence of von Neumann algebras in H, and if each $\mathscr{A}_n$ has a cyclic vector and a separating vector, then there exists a vector in H which is cyclic and separating for each $\mathscr{A}_n$. For algebras of local observables, we improve the known results connecting the infinite type of the algebras and the existence of cyclic and separating vectors.

Notations et définitions. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre de von Neumann sur l'espace hilbertien H, on note $Tot(\mathscr{A})$ (resp. $Sep(\mathscr{A})$) l'ensemble des vecteurs totalisateurs (resp. séparateurs) de $\mathscr{A}$. On note $Inv(\mathscr{A})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ est finie ainsi que son commutant, on note $C_{\mathscr{A}}$ la fonction de liaison de $\mathscr{A}$ ([4], Chap. III, § 6). Si $M \subset H$ et $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(H)$, on note $[\mathscr{A}M]$ le projecteur sur le sous-espace vectoriel fermé engendré par les Ax $(A \in \mathscr{A}, x \in M)$. Si U et V sont des isométries partielles, on dit que U domine V lorsque: 1) Ker $U \subset$ Ker V; 2) U coincide avec V sur le sous-espace initial de V.

Soit Ω l'ensemble des ouverts bornés dans l'espace de Minkowski $M = \boldsymbol{R}^4$. Soient $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \in \Omega$. On écrira $\mathscr{O}_1 < \mathscr{O}_2$ si $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ et s'il existe $\mathscr{O} \in \Omega$ tel que: 1) $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}_2$; 2) $\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}_1$ sont causalement disjoints.

1. Densité des vecteurs totalisateurs

Lemme 1. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann et $U \in \mathscr{A}$ une isométrie partielle. Il existe un projecteur G du centre de $\mathscr{A}$ tel que U_G soit dominée par une isométrie de $\mathscr{A}_G$ et U_{1-G} par une coisométrie de $\mathscr{A}_{1-G}$.*

Soit E (resp. F) le projecteur initial (resp. final) de U. Il existe ([4], Chap. III, § 1, Th. 1) un projecteur G du centre de $\mathscr{A}$ tel que $(1-E)G \prec (1-F)G$ et $(1-E)(1-G) \succ (1-F)(1-G)$. Soit V une isométrie partielle de $\mathscr{A}$ de projecteur initial $(1-E)G$ et dont le projecteur final est majoré par $(1-F)G$. Alors $(U+V)_G$ est une isométrie de $\mathscr{A}_G$ qui domine U_G. De même, si V_1 est une isométrie partielle de $\mathscr{A}$