EIN ANALOGON ZUM HIGH INDICES THEOREM FÜR POTENZREIHEN MIT WENIGEN VORZEICHENWECHSELN

BY JOACHIM KÜHN

Communicated by Maurice Heins, August 21, 1967

1. Problem und Ergebnis. Es sei

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

eine in $\{z \mid |z| < 1\}$ konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten. Man sagt, daß der Koeffizient a_m einen Vorzeichenwechsel bestimmt, wenn erstens $a_m \neq 0$ ist und zweitens das Vorzeichen von a_m dem des letzten a_m vorangehenden nichtverschwindenden Koeffizienten entgegengesetzt ist. Mit

$$\{\nu_k\} \tag{2}$$

wollen wir die Folge der Indizes derjenigen Koeffizienten von (1) bezeichnen, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen. Wir setzen voraus, daß die Folge (2) eine q-Hadamardfolge ist, d.h. es gibt ein $q > 1$, so daß

$$\nu_{k+1}/\nu_k \geqq q \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

Für solche Potenzreihen gilt der folgende, zum High Indices Theorem von Hardy-Littlewood (etwa [4], S.173) Analoge

SATZ. (i) *Die Folge $\{\nu_k\}$ sei eine q-Hadamardfolge, und es sei $|f(x)| \leqq A$ $(0 \leqq x < 1)$. Dann gilt $|a_n| \leqq KAn$, wobei die Konstante K nur von q abhängt.*

(ii) *Unter den genannten Voraussetzungen ist die Größenordnung $a_n = O(n)$ bestmöglich.*

Wir benutzen zum Beweis ähnliche Methoden wie Edrei [1], Gaier [2] und Halász [3]. Genauere Ausführungen zu diesem Satz sowie verwandte Sätze werden in der Arbeit [5] des Verfassers behandelt.

2. Hilfsmittel. Im folgenden sei D die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene. Von der Wurzelfunktion wollen wir stets denjenigen Zweig nehmen, der in D regulär ist und durch $\sqrt{1} = 1$ bestimmt ist.

Für die Folge (2) bilden wir mit $\omega_k = \nu_k - \frac{1}{2}$ das Blaschkeprodukt