ÜBER DIE LAGE DER NULLSTELLEN EINES ABSTANDS-POLYNOMS UND SEINER DERIVIERTEN

GYULA V. SZ. NAGY

1. **Der Begriff eines Abstandspolynoms.** *Ein Abstandspolynom $F(x, y, z)$ n-ten Grades* in dem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z ist ein reelles Polynom der drei Veränderlichen von der Form

$$(1)\qquad \begin{gathered} F(x, y, z) = C\prod_{k=1}^{n} d_k(x, y, z), \\ d_k(x, y, z) = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2, \qquad C > 0. \end{gathered}$$

Das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ ist also eine nichtnegative reelle Funktion von der Form

$$(2)\qquad F(x, y, z) = C(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}) + \Phi(x, y, z),$$

wo Φ ein reelles Polynom ist, das für die drei Veränderlichen bzw. für die einzelnen Veränderlichen höchstens den Grad $2n-1$ bzw. $2n-2$ besitzt.

Das Abstandspolynom $F(z, y, z)$ besitzt n Nullstellen, und zwar die Punkte

$$(3)\qquad Q_k = (x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Ausser den Nullstellen nimmt das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ in jedem (reellen) Punkte des Raumes einen positiven Wert an.

Das Polynom $d_k(x, y, z) = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2$ ist ein Abstandspolynom ersten Grades und ist ein *Wurzelfaktor* des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades. F ist also ein Produkt von n Wurzelfaktoren. Kommt der Wurzelfaktor d_k unter den n Wurzelfaktoren p-mal vor ($p \geqq 1$), so ist Q_k eine p-fache Nullstelle von F. Dann ist

$$(4)\qquad F(x, y, z) = d_k^p(x, y, z) \cdot G(x, y, z),$$

wo $G(x, y, z)$ ein Abstandspolynom $(n-p)$-ten Grades ist, für welches die Ungleichung $G(x_k, y_k, z_k) \neq 0$ besteht.

Jedes Abstandspolynom $f(x, y, z) = d_k(x, y, z)$ ersten Grades genügt offenbar der Identät

$$(5)\qquad f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 4 \cdot f.$$

Hat eine ganze rationale Funktion $2n$-ten Grades von der Form (2)

Received by the editors March 1, 1948.