SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE DÉTERMINÉES DANS UNE RÉGION ILLIMITÉE

MIROSLAW KRZYŻAŃSKI

L'un des problèmes rélatifs à l'équation de la chaleur consiste en la recherche d'une solution de cette équation, se réduisant à une fonction donnée sur la caractéristique. Cette solution est donnée par l'intégrale classique de Weierstrass.[1] Cependant la question de l'unicité de cette solution n'a été complètement résolue que dans les travaux récentes de M. M. Picone et M. A. Tychonoff.[2]

Or il y a intérêt à éteindre ces résultats à l'équation linéaire du type parabolique:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{j=1}^{m} a_j(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&\quad + b(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)u,
\end{aligned}
$$

la forme $\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\lambda_i\lambda_k$ étant positive définie, en cherchant la solution u de cette équation déterminée dans une région illimitée R: $0 \leqq y \leqq h$; $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1, 2, \cdots, m)$, telle que

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

Nous commençons par introduire une classification des fonctions caractérisant la façon dont elles se comportent à l'infini. Conviendrons d'appeler dans la suite la classe E_α $(\alpha > 0)$ une classe de fonctions $F(x)$ qui ont la propriété suivante: il existe deux nombres constants positifs M et K tels que

$$|F(x)| < Me^{K|x|^\alpha}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Nous allons voir que dans la classe E_2 par rapport aux x_i il existe une solution et une seule du problème posé.

Le résultat analogue pour l'équation de la chaleur a été obtenu par

[1] Voir par exemple E. Goursat, *Cours d'Analyse*, Tome 3, Paris, 1927, chap. 29, p. 294.

[2] P. Picone, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera*, Mathematische Annalen, Tome 101 (1929), pp. 701–712. A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de chaleur*, Recueil Mathématique de Moscou, Tome 42 (1935), pp. 199–214. Cf. aussi le travail récent de M. F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Mathematical Journal, Tome 7 (1940), pp. 186–203.