# IS CONTINUITY OF SPACE NECESSARY TO EUCLID'S GEOMETRY?

BY WENDELL M. STRONG, M.A.

(Read before the American Mathematical Society at the Meeting of April 30, 1898.)

DEDEKIND has said that continuity of space is not essential to the constructions of Euclid and has defined a discontinuous space in which, "so far as he sees," the constructions can be made.* To prove this it is only necessary to show that the constructions will never lead *out* of the given discontinuous space if we start in it—in other words, if we start with a figure of the discontinuous space, the construction will lead always to other figures of that space. If the constructions can be made in a given space the theorems will be true in it.

It is not safe to assume in the demonstration that discontinuity may not render invalid principles which are postulated for continuous space; the question of the truth of the postulates in a given discontinuous space can be decided only by a knowledge of the properties of the space. For instance, in a space consisting of the points whose rectangular coördinates with a given system of axes are rational in a given unit of distance, not all figures can be moved about; parts of a figure may disappear entirely as the result of an allowable change in the position of other parts; thus a square of unit side may be constructed in this space, but if its diagonal is brought into coincidence with one of the axes, one

---

* "Was sind und was sollen die Zahlen," Vorwort, p. XII.

"für einen grossen Theil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine nothwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, dass sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beilaüfig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise Folgendes. Wählt man drei nicht in einer Gerade liegende Puncte $A$, $B$, $C$ nach Belieben, nur mit der Beschränkung, dass die Verhältnisse ihrer Entfernungen $AB$, $AC$, $BC$ algebraische Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Puncte $M$ als vorhanden an, fur welche die Verhältnisse von $AM$, $BM$, $CM$ zu $AB$ ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Puncten $M$ bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle Constructionen welche in Euklid's Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar, wie in dem vollkommen stetigen Raume: die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklid's Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden."